

UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADA À ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE CASCAS

Arthur Dias Mesquita¹ & Humberto Breves Coda²

Resumo

Um elemento finito para análise elastoplástica de placas (em flexão ou não) e cascas é descrito. Este elemento apresenta geometria triangular e é o resultado do acoplamento entre um elemento de flexão de placas (DKT) e um elemento de tensão plana, baseado na formulação livre (FF). O elemento DKT é um elemento finito bem conhecido, considerado por muitos autores como um dos melhores de sua classe. O elemento FF apresenta o grau de liberdade rotacional, que é essencial quando se trabalha com cascas aproximadamente planas. Além disso, sua convergência é garantida devido à imposição do ‘Teste do Elemento Individual’. O comportamento elastoplástico é aproximado por meio de técnicas de integração implícita. Plasticidade associativa é considerada com encruamento isotrópico e critério de von Mises. Afim de preservar a taxa assintótica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson, a matriz tangente elastoplástica consistente é aplicada. Resultados demonstram a precisão e eficiência da formulação proposta.

Palavras-chave: Elemento finito; formulação livre; casca; placa; membrana; elastoplástico; implícito.

1 INTRODUÇÃO

Devido à complexidade matemática dos modelos que representam a maioria dos problemas na engenharia, poucas são as soluções analíticas encontradas. As soluções exatas obtidas para casos específicos, são limitadas pela geometria do problema e por hipóteses bastante simplificadoras. Quando se trata de problemas não lineares de cascas a complexidade é ainda maior. Nestes casos, apela-se para os métodos numéricos, em particular para o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dessa forma, pode-se representar o comportamento do problema abordado de maneira mais precisa e eficiente. Entretanto, muitas das formulações de elementos finitos de cascas não são confiáveis. Algumas formulações apresentam problemas de travamento, implicando na incapacidade do elemento reproduzir a solução teórica, caracterizando uma sobrerigidez numérica, que toma maior importância a medida que se reduz a espessura. Além disso, a presença da curvatura torna mais difícil a representação dos modos de corpo rígido e a

¹ Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP

² Professor Associado do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, hbcoda@sc.usp.br

compatibilidade interelemental, qualidades que impedem a satisfação do patch test e consequentemente a garantia de convergência. Um outro problema, bastante comum nas formulações de elementos finitos de cascas, é a inexistência do grau de liberdade rotacional (“drilling”). A liberdade rotacional proporciona uma modelagem mais coerente da estrutura em casca, além do mais, evita que a matriz de rigidez global apresente singularidades nos casos onde os elementos da estrutura são coplanares ou aproximadamente coplanares. Neste contexto, apresenta-se o desenvolvimento de um elemento finito triangular para análise elastoplástica de cascas¹. O elemento é construído através do acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT^{2,3} e o elemento de membrana^{4,5} desenvolvido através da Formulação Livre. Este elemento finito de casca, proposto inicialmente por Mesquita e Coda⁶ para análise elástica-linear, possui o grau de liberdade rotacional e não apresenta problemas de travamento por cisalhamento (“shear locking”). Além disso, ambos os elementos (flexão e membrana) satisfazem o patch test e consequentemente possuem garantia de convergência.

2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE CASCA

Uma forma simples de tratar o problema de cascas através do MEF, consistiria da aplicação de elementos planos que incorporam o comportamento de flexão (elemento de flexão de placas) e membrana (elemento de tensão plana). Esta forma de abordar o problema, adotada neste trabalho, apesar de simples não deixa de ser eficiente, tendo em vista o objetivo de se tratar problemas não-lineares. Assim, supondo um elemento com um número de n nós, o campo de deslocamento pode ser escrito como:

$$\{U\} = [\varphi]\{\delta\} = \begin{bmatrix} [\varphi]_m & [0] \\ [0] & [\varphi]_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_m \\ \{\delta\}_f \end{Bmatrix} \quad (1)$$

sendo a submatriz $[\varphi]_m$ de ordem $2 \times 3n$, contém um conjunto de funções de forma referente ao estado de membrana. Semelhantemente, a submatriz $[\varphi]_f$ de ordem $1 \times 3n$, contém um conjunto de funções de forma referente ao estado de flexão. Os termos $\{\delta\}_m$ e $\{\delta\}_f$ são os vetores de deslocamentos nodais do elemento, no sistema local, relacionados com os estados de membrana e flexão respectivamente, expressos como:

$$\{\delta\}_m^T = [u_i \quad v_i \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad \dots \quad \theta_{zn}] \text{ e } \{\delta\}_f^T = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad w_j \quad \dots \quad \theta_{yn}] \quad (2)$$

Note que o vetor de deslocamentos $\{\delta\}_m$ contém o grau de liberdade rotacional θ_z . As deformações podem ser obtidas diferenciando-se apropriadamente o campo de deslocamento apresentado em (1). Desta forma, tem-se:

$$\{\epsilon\} = [\nabla]_m [\varphi]_m \{\delta\}_m + z[\nabla]_f [\varphi]_f \{\delta\}_f = \begin{bmatrix} [B]_m & z[B]_f \end{bmatrix} \{\delta\} = [B]\{\delta\} \quad (3)$$

onde $[B]_m$ e $[B]_f$ são as matrizes de deformação correspondentes aos estados de membrana e flexão respectivamente e as expressões $[\nabla]_m$ e $[\nabla]_f$ são definidas como:

$$[\nabla]_m^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \text{ e } [\nabla]_f^T = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

A expressão da matriz de rigidez pode ser obtida aplicando-se a equação (3) na definição da energia de deformação U , da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [\bar{D}] \{\epsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T [B]^T [\bar{D}] [B] \{\delta\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} \quad (5)$$

onde $[\bar{D}]$ é um operador constitutivo não-linear e $[K]$ é a matriz de rigidez definida como:

$$[K] = \int_V [B]^T [\bar{D}] [B] dV = \int_V \begin{bmatrix} [B]_m^T \\ z[B]_f^T \end{bmatrix} [\bar{D}] \begin{bmatrix} [B]_m & z[B]_f \end{bmatrix} dV \quad (6)$$

Para visualizar melhor a expressão da matriz de rigidez, pode-se expandir a equação (6), de maneira que:

$$[K] = \begin{bmatrix} \int_V [B]_m^T [\bar{D}] [B]_m dV & \int_V [B]_m^T z [\bar{D}] [B]_f dV \\ \int_V [B]_f^T z [\bar{D}] [B]_m dV & \int_V [B]_f^T z^2 [\bar{D}] [B]_f dV \end{bmatrix} \quad (7)$$

Assim, utilizando-se técnicas de integração numérica para obter os termos de flexão, membrana e acoplamento entre os dois primeiros, é possível obter a matriz de rigidez. Note que, no caso da elasticidade linear considerando material homogêneo os termos de acoplamento são nulos. Entretanto, em uma análise elastoplástica, os termos de acoplamento na expressão de $[K]$ devem ser considerados, preservando assim, a taxa de convergência quadrática do método Newton-Raphson. Ressalta-se ainda, a simplicidade da formulação, visto que, para construir o elemento só é necessário a existência das matrizes de deformação referentes aos estados de flexão (elemento de flexão de placas) e membrana (elemento de membrana), que podem ser obtidas separadamente.

Os esforços podem ser obtidos pela integração das tensões através da espessura, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ z\{\sigma\} \end{Bmatrix} dz \quad (8)$$

onde $\{N\}$ e $\{M\}$ são respectivamente os esforços de membrana e flexão. Neste trabalho, as tensões serão obtidas através de um procedimento implícito que será posteriormente apresentado.

3 ELEMENTO DE MEMBRANA

Para simular os efeitos de membrana na casca, utilizar-se-á o elemento triangular com graus de liberdade rotacionais desenvolvido através da Formulação Livre⁷.

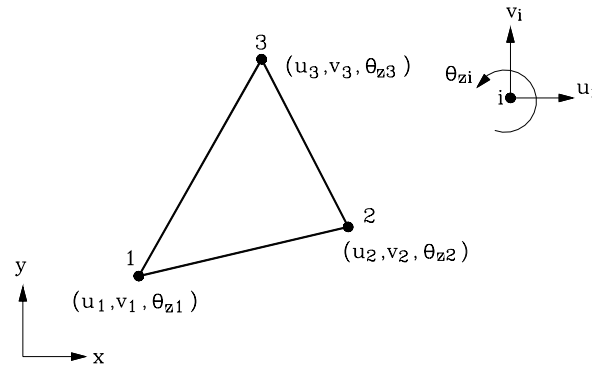


Figura 1 - Geometria e graus de liberdade do elemento de membrana.

A Formulação Livre apresenta uma definição para a matriz de deformação, de maneira que, aplicada na definição padrão da energia potencial, produza uma matriz de rigidez positiva definida, que satisfaça ao “teste do elemento individual” e consequentemente ao patch test. Assim, a matriz de deformação é expressa como:

$$[\mathbf{B}]_m = \frac{1}{V}[\mathbf{L}]^T + \sqrt{\bar{\beta}}([\mathbf{B}]_a - \frac{1}{V} \int_V [\mathbf{B}]_a dV) \quad (9)$$

onde V é o volume do elemento, $\bar{\beta}$ é um escalar aplicado de maneira a não destruir as propriedades de convergência (sendo $\bar{\beta} \geq 0$), $[\mathbf{B}]_a$ é a matriz de deformação definida pela diferenciação apropriada dos modos de alta ordem do elemento de membrana. A matriz $[\mathbf{L}]$ é denominada matriz “lumping” por transformar consistentemente as tensões $\{\sigma\}_{rc}$ (fig. 2a), provocadas por um estado de corpo rígido/deformação constante sobre o elemento, no vetor de forças nodais equivalente $\{\mathbf{F}\}_{rc}$, da seguinte maneira:

$$\{\mathbf{F}\}_{rc} = [\mathbf{L}]\{\sigma\}_{rc} \quad ; \quad [\mathbf{L}] = \int_{\Gamma} [\bar{\varphi}]_{\Gamma}^T d\Gamma \quad (10)$$

onde Γ representa o contorno do elemento. Note que, o vetor de tensões $\{\sigma\}_{rc}$ se relaciona com as tensões no lado do elemento $\{\bar{\sigma}\}_{rc}$ (fig. 2a), da seguinte forma:

$$\{\bar{\sigma}\}_{rc} = [\mathbf{n}]\{\sigma\}_{rc} \quad ; \quad [\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (11)$$

sendo $[\mathbf{n}]$ a matriz que contém as componentes do versor normal ao lado do elemento.

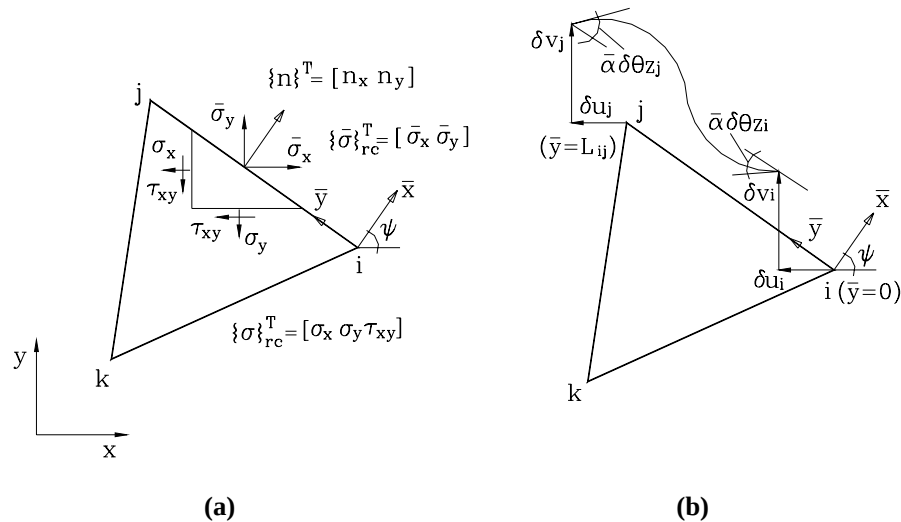


Figura 2 - (a) Tensões devido a um estado-rc. (b) Deformada de um lado do elemento.

A expressão da matriz $[\mathbf{L}]$ apresentada na equação (10), pode ser encontrada aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais $\delta \mathbf{W}_\Gamma$ em todo o contorno do elemento, como:

$$\delta \mathbf{W}_\Gamma = \{\mathbf{F}\}_{rc}^T \{\delta \mathbf{u}\} = \int_\Gamma \{\bar{\sigma}\}_{rc}^T [\bar{\boldsymbol{\varphi}}]_\Gamma \{\delta \mathbf{u}\} d\Gamma = \{\bar{\sigma}\}_{rc}^T \int_\Gamma [\bar{\boldsymbol{\varphi}}]_\Gamma d\Gamma \{\delta \mathbf{u}\} = \{\bar{\sigma}\}_{rc}^T [\mathbf{L}]^T \{\delta \mathbf{u}\} \quad (12)$$

onde $[\bar{\boldsymbol{\varphi}}]_\Gamma = [\mathbf{n}]^T [\boldsymbol{\varphi}]_\Gamma$, sabendo que $[\boldsymbol{\varphi}]_\Gamma$ é um conjunto de funções de forma dos deslocamentos do contorno e $\{\delta \mathbf{u}\}$ é o vetor de deslocamentos virtuais do elemento no sistema $\mathbf{xy}$. Segundo Bergan e Fellipa⁴, para compatibilizar a não existência de uma única relação entre as rotações do lado do elemento e a definição da mecânica do contínuo, $\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, é necessário introduzir o escalar $\bar{\alpha}$ (fig. 2b) de maneira a ligar esses dois conceitos. O parâmetro $\bar{\alpha}$ encontra-se implicitamente na expressão da matriz “lumping” $[\mathbf{L}]$ multiplicando os termos relativos aos giros.

4 ELEMENTO DE FLEXÃO (DKT)

O elemento DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) foi inicialmente publicado por Stricklin *et al.*⁸. Reexaminado por mais de uma década, atualmente encontra-se entre os melhores elementos para análise de flexão em placas de sua classe. As funções de deslocamento do elemento são conformes, dessa forma, a continuidade de todas as variáveis essenciais ao longo dos lados do elemento e a convergência na solução de placas delgadas é garantida³. O elemento de placa DKT possui geometria triangular (fig. 3), sendo constituído de 9 graus de liberdade (deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y nos vértices). Sua formulação tem como ponto de partida o elemento triangular com nós nos vértices e no meio dos lados (fig. 3a).

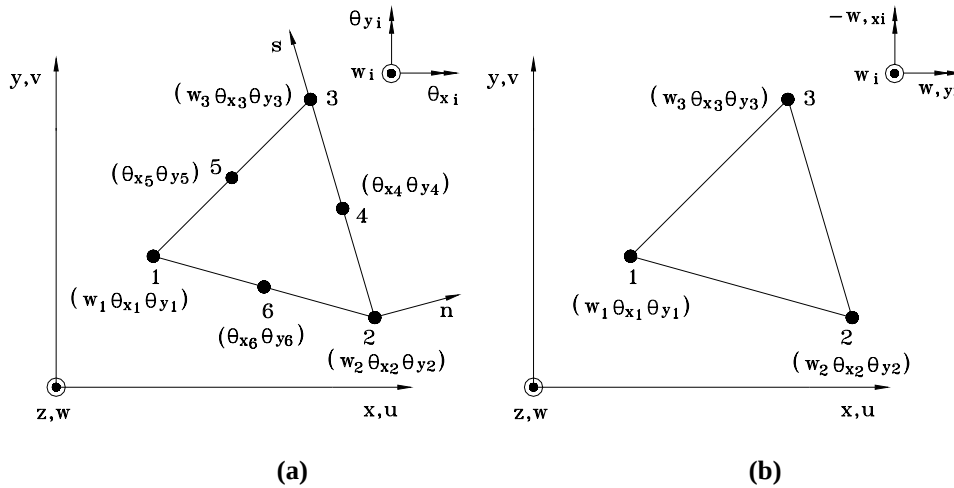


Figura 3 - Desenvolvimento do DKT. (a) Elemento inicial. (b) Elemento final.

Inicialmente a teoria de Reissner-Mindlin é adotada, daí a necessidade de se obter funções interpoladoras independentes para as rotações θ_x e θ_y , por estas não dependerem apenas das respectivas derivadas parciais w/x e w/y apresentada na teoria de Kirchhoff, mas também, das parcelas oriundas da consideração da deformação por esforço cortante. Posteriormente, as hipóteses da teoria de Kirchhoff juntamente com outras, são aplicadas discretamente ao longo dos lados do elemento, permitindo eliminar os graus de liberdade extras localizados no meio dos lados, degenerando no elemento da figura 3b com nove graus de liberdade. Assim, na formulação da matriz de rigidez do elemento DKT, adotam-se as seguintes hipóteses:

1) As rotações $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ variam quadraticamente sobre o elemento.

$$\theta_x(x, y) = \{\varphi\}^T \{\theta_x\} \rightarrow \theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \theta_{xi} \quad (13a)$$

$$\theta_y(x, y) = \{\varphi\}^T \{\theta_y\} \rightarrow \theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \theta_{yi} \quad (13b)$$

2) A variação do deslocamento transversal $w(s)$ é cúbica ao longo dos lados.

3) Impondo variação linear da rotação θ_s (rotação na direção s) ao longo dos lados.

4) As hipóteses de Kirchhoff são impostas discretamente nos nós intermediários e dos vértices.

Aplicando as hipóteses apresentadas, fazendo uso de relações geométricas (transformação de coordenadas), pode-se eliminar os graus de liberdade extras no meio dos lados do elemento das expressões de $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ em (13), de maneira que estas expressões sejam escritas em função apenas dos graus de liberdade dos vértices (w_i , θ_{xi} , e θ_{yi} , onde $i = 1, 2, 3$), da seguinte forma:

$$\theta_x(x, y) = \{\varphi\}^T \{\theta_x\} = \{\varphi\}^T [G] \{\delta\}_f \quad (14a)$$

$$\theta_y(x, y) = \{\varphi\}^T \{\theta_y\} = \{\varphi\}^T [H] \{\delta\}_f \quad (14b)$$

Definidas as rotações $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ em função dos deslocamentos nodais do vértice, pode-se encontrar o vetor de deformações, definido como:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{z}[\nabla]_{\mathbf{m}} \begin{Bmatrix} \theta_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ -\theta_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{Bmatrix} = \mathbf{z}[\mathbf{B}]_{\mathbf{f}} \{\boldsymbol{\delta}\}_{\mathbf{f}} \quad (15)$$

onde $[\nabla]_{\mathbf{m}}$ está definido na equação (4¹) e $[\mathbf{B}]_{\mathbf{f}}$ é a matriz de deformação de flexão. Note que $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}]$, de maneira que as componentes referentes aos efeitos do esforço cortante são desprezadas. Sendo assim, na formulação da matriz de rigidez do elemento a parcela da energia de deformação devido ao esforço cortante é desprezada, considerando apenas a parcela devido a flexão.

5 RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA

O comportamento elastoplástico tem sua modelagem fundamentada nas seguintes definições:

$$\text{*Relação constitutiva elástica} \quad \{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}^e \quad (16a)$$

$$\text{*Decomposição aditiva das deformações totais} \quad \{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}^e + \{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}^p \quad (16b)$$

$$\text{*Lei de evolução das deformações plásticas} \quad \{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}^p = \lambda \left\{ \partial \mathbf{F} / \partial \boldsymbol{\sigma} \right\} = \lambda \{\boldsymbol{\psi}\} \quad (16c)$$

$$\text{*Critério de plastificação} \quad \mathbf{F}(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{f}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\kappa}) \leq \mathbf{0} \quad (16d)$$

$$\text{*Lei de evolução do encruamento} \quad \boldsymbol{\kappa} = \int \mathbf{d}\boldsymbol{\kappa} = \int \mathbf{d}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (16e)$$

onde $\boldsymbol{\kappa}$ é o parâmetro de encruamento definido em função do incremento de deformação plástica equivalente $\mathbf{d}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ (encruamento por deformação).

A noção de carregamento/descarregamento pode ser definida através das condições de Kuhn-Tucker, expressas como:

$$\text{*Condições de Kuhn-Tucker} \quad \mathbf{F}(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\kappa}) \leq \mathbf{0}, \lambda \geq \mathbf{0}, \lambda \mathbf{F}(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

A relação (16c) é conhecida como *princípio da normalidade*, pode ser interpretada como a condição de que o vetor incremento de deformação plástica seja normal à superfície de plastificação no espaço das tensões, pois $\partial \mathbf{F} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no ponto referente ao estado de tensão considerado (fig. 4). Pode-se tornar menos rígida a restrição imposta à relação (16c) tomando-se um *potencial plástico* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\kappa})$ com unidade de tensão, de maneira que:

$$\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}^p = \lambda \left\{ \partial \mathbf{Q} / \partial \boldsymbol{\sigma} \right\} \quad (18)$$

O caso particular de $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, é conhecido com o nome de *plasticidade associada*. Se $\mathbf{Q} \neq \mathbf{F}$, a plasticidade é *não associada*. Neste trabalho, por simplicidade, será adotada a plasticidade associativa.

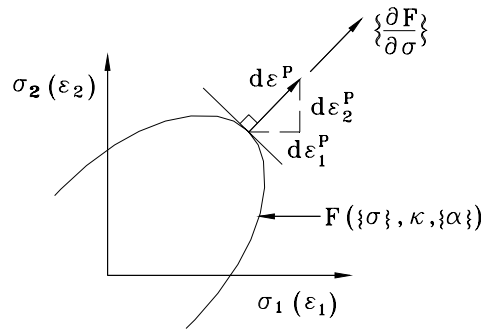


Figura 4 - Superfície de plastificação: princípio da normalidade.

Supondo-se que o estado de tensão atual verifique a função de plastificação, num processo de carregamento plástico, o ponto representativo do novo estado de tensão deve permanecer na superfície de plastificação. Este requerimento representa a *condição de consistência plástica* expressa por: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $d\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Dessa forma tem-se:

$$d\mathbf{F} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \{d\boldsymbol{\sigma}\} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \kappa} = \{\boldsymbol{\psi}\}^T \{d\boldsymbol{\sigma}\} - \lambda \Lambda = \mathbf{0} \quad (19)$$

onde

$$\Lambda = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \kappa} d\kappa \quad (20)$$

Aplicando-se as equações (16a-c) e (19), pode-se deduzir a expressão da matriz tangente elastoplástica, de forma que:

$$\{d\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]_{ep} \{d\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (21)$$

onde $[\mathbf{D}]_{ep}$ é a matriz tangente elastoplástica expressa como:

$$[\mathbf{D}]_{ep} = [\mathbf{D}] - \frac{[\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\psi}\}\{\boldsymbol{\psi}\}^T[\mathbf{D}]}{\{\boldsymbol{\psi}\}^T[\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\psi}\} + \Lambda} \quad (22)$$

6 MATRIZ TANGENTE ELASTOPLÁSTICA CONSISTENTE

A derivação da matriz tangente elastoplástica consistente (ou algorítmica) pode ser encontrada em muitos trabalhos^{9,10,13,14}. Esta matriz é consistente com o algoritmo de integração implícito (backward Euler) e a aplicação desta preserva a característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson⁹. Técnicas padrão podem utilizar a matriz tangente elastoplástica em (22), que é inconsistente com o procedimento de integração implícito (a não ser que o tamanho do incremento seja infinitesimal), provocando a perda da característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson¹³. A expressão da matriz tangente elastoplástica pode ser obtida através da linearização do algoritmo implícito e neste trabalho será deduzida, por simplicidade, para um material elastoplástico perfeito.

$$\{\sigma\}_{i+1} = [D](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon\}_{i+1}^p) = [D](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon\}_i^p) - \lambda[D]\{\psi\}_{i+1} \quad (23)$$

Desta forma tem-se:

$$\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} - \lambda[D]\{\psi\}_{i+1} \quad (24)$$

onde $\{\sigma\}_{i+1}$ é o estado de tensão procurado e o sobrescrito ‘ten’ indica um estado de tentativa (previsão elástica). Diferenciando a equação (24) obtém-se:

$$\{d\sigma\}_{i+1} = [D]\{d\varepsilon\}_{i+1} - d\lambda[D]\{\psi\}_{i+1} - \lambda[D]\left[\partial\psi/\partial\sigma\right]_{i+1}\{d\sigma\}_{i+1} \quad (25)$$

Note que o último termo em (25) é omitido na derivação da matriz tangente elastoplástica. Explicitando o valor de $\{d\sigma\}_{i+1}$ na equação (25), obtém-se:

$$\{d\sigma\}_{i+1} = [\Xi](\{d\varepsilon\}_{i+1} - d\lambda\{\psi\}_{i+1}) \quad (26)$$

onde $[\Xi]$ é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica) expressa como:

$$[\Xi] = \left[[D]^{-1} + \lambda \left[\partial\psi/\partial\sigma \right]_{i+1} \right]^{-1} \quad (27)$$

Semelhantemente a (19), pode-se aplicar a condição de consistência plástica, de maneira que:

$$dF_{i+1} = \{\psi\}_{i+1}^T \{d\sigma\}_{i+1} = \{\psi\}_{i+1}^T [\Xi] \{d\varepsilon\}_{i+1} - d\lambda \{\psi\}_{i+1}^T [\Xi] \{\psi\}_{i+1} = 0 \quad (28)$$

Manipulando as equações (26) e (28) encontra-se:

$$\{d\sigma\}_{i+1} = [D]_{\text{epc}} \{d\varepsilon\}_{i+1} \quad (29)$$

onde $[D]_{\text{epc}}$ é a matriz tangente elastoplástica consistente expressa como:

$$[D]_{\text{epc}} = [\Xi] - \frac{[\Xi]\{\psi\}_{i+1}\{\psi\}_{i+1}^T[\Xi]^T}{\{\psi\}_{i+1}^T[\Xi]\{\psi\}_{i+1}} \quad (30)$$

Note que, quando o incremento de carga tende a zero, o parâmetro λ também tende a zero, de maneira que a matriz algorítmica $[\Xi]$ apresentada em (27) se degenera na matriz constitutiva elástica $[D]$, dessa forma, a matriz tangente elastoplástica consistente $[D]_{\text{epc}}$ definida em (30) reduz-se à matriz tangente elastoplástica clássica $[D]_{\text{ep}}$ apresentada em (22), considerando encruamento nulo. Esta característica apresentada pela matriz $[D]_{\text{epc}}$ expressa o requerimento de consistência⁹.

7 ALGORITMO IMPLÍCITO (BACKWARD EULER)

O procedimento implícito de integração das tensões por si só fornece suficiente precisão, evitando a aplicação de técnicas para melhorar o seu desempenho, tais como sub-incrementação. Este é incondicionalmente estável e caracteriza-se, através de uma interpretação geométrica, por proporcionar um retorno à superfície de plastificação segundo a direção normal à própria superfície na posição atual, como pode ser observado na figura 5. Para o caso específico do critério de von Mises e lei de fluxo associativa a projeção proporcionada pelo procedimento implícito ocorre sempre na direção radial, sendo por isso denominado “Radial Return Mapping”. Segundo Simo e Hughes⁹ o procedimento permite a definição de uma matriz tangente elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno. Dessa forma, fazendo-se uso da matriz elastoplástica consistente, a convergência quadrática do método de Newton-Raphson é garantida. As relações do algoritmo implícito podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 \text{Deformações totais} \quad & \{\varepsilon\}_{i+1} = \{\varepsilon\}_i + \{\nabla^s \mathbf{U}\} \\
 \text{Tensões} \quad & \{\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon\}_{i+1}^p) \\
 \text{Deformações plásticas} \quad & \{\varepsilon\}_{i+1}^p = \{\varepsilon\}_i^p + \lambda \{\partial F / \partial \sigma\}_{i+1} = \{\varepsilon\}_i^p + \lambda \{\psi\}_{i+1} \\
 \text{Parâmetro de encruamento} \quad & \kappa_{i+1} = \kappa_i + d\kappa_{i+1} = \kappa_i + d\bar{\varepsilon}_{i+1}^p \\
 \text{Deformação plástica efetiva} \quad & d\bar{\varepsilon}_{i+1}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{d}\varepsilon\|_{i+1}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{d}\varepsilon_{i+1}^p : \mathbf{d}\varepsilon_{i+1}^p)^{1/2} \\
 \text{Lei de Encruamento} \quad & \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = \sigma_y + H\kappa_{i+1} \\
 \text{Critério de Plastificação} \quad & F(\{\sigma\}_{i+1}, \kappa_{i+1}) = f(\{\sigma\}_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

onde $\nabla^s(\cdot)$ é o operador de deformações que atua sobre o campo de deslocamentos $\{\mathbf{U}\}$ definido no passo de tempo $[\mathbf{t}, \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}]$, $[\mathbf{D}]$ é a matriz constitutiva elástica, σ_y é a tensão de escoamento inicial e H é o módulo plástico de encruamento isotrópico.

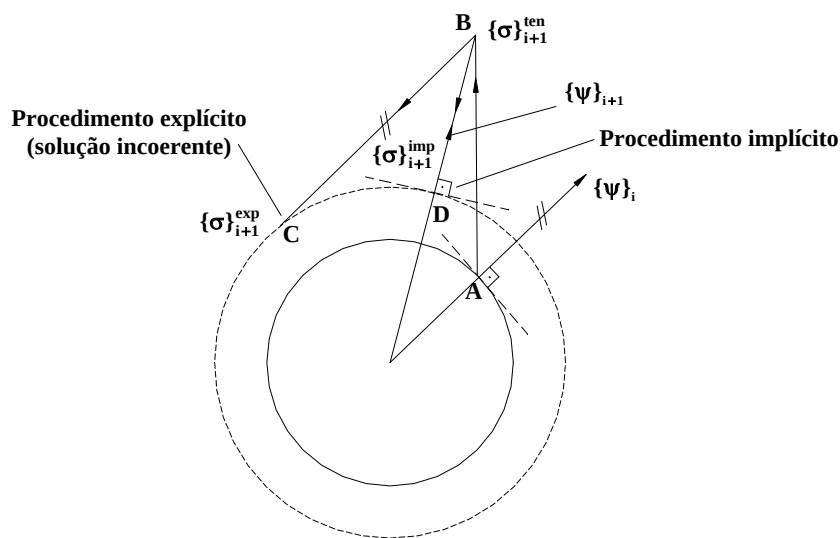


Figura 5 - Procedimento de integração implícito e explícito.

INTEGRAÇÃO DAS TENSÕES

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar um estado de tentativa (etapa de previsão), que é tomado como um passo puramente elástico, de maneira que são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\}_{i+1} &= \{\varepsilon\}_i + \{\nabla^s U\} \\ \{\sigma\}_{i+1}^{ten} &= [D](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon\}_i^p) \\ F(\{\sigma\}_{i+1}^{ten}, \kappa_i) &= f(\{\sigma\}_{i+1}^{ten}) - \bar{\sigma}(\kappa_i)\end{aligned}\quad (32)$$

Se as tensões obtidas na previsão elástica não violarem a condição de plastificação, significa que o estado de tensão obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se as tensões obtidas estiverem fora da superfície de escoamento, um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo adotado. Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned}\{\sigma\}_{i+1} &= [\Xi(\lambda)][D]^{-1}\{\sigma\}_{i+1}^{ten} \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + d\kappa_{i+1} = \kappa_i + d\bar{\varepsilon}(\lambda)_{i+1}^p \\ \{\varepsilon\}_{i+1}^p &= \{\varepsilon\}_i^p + \lambda\{\partial F/\partial \sigma\}_{i+1} = \{\varepsilon\}_i^p + \lambda\{\psi\}_{i+1}\end{aligned}\quad (33)$$

onde $[\Xi]$ é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica) definida como:

$$[\Xi] = [D]^{-1} + \lambda[P]^{-1} \quad (34)$$

Note que as expressões (33) dependem da determinação do parâmetro λ (multiplicador plástico). Conforme apresentado por Simo e Taylor¹⁰, o parâmetro λ pode ser obtido impondo-se a condição de consistência no instante $i+1$, ou seja:

$$F(\{\sigma\}_{i+1}, \kappa_{i+1})^2 = f(\{\sigma(\lambda)\}_{i+1})^2 - \bar{\sigma}(\kappa(\lambda)_{i+1})^2 = 0 \quad (35)$$

Para estado plano de tensão com material isotrópico, fazendo uso do critério de von Mises, a expressão (35) possui uma forma particularmente simples^{1,9,10}.

8 RESULTADOS NUMÉRICOS

São apresentados os resultados numéricos da implementação computacional do elemento de casca com comportamento elástico-linear e elastoplástico. Inicialmente apresentam-se estudos de convergência do elemento de casca, considerando-se apenas o comportamento elástico-linear. A rede é refinada progressivamente, verificando sempre se o valor do deslocamento obtido converge para a solução teórica. Posteriormente, analisa-se o comportamento e o desempenho do elemento de casca proposto, considerando os efeitos não-lineares físicos. Por conveniência, o elemento aqui apresentado é denominado FFDKT (Free Formulation Discret Kirchhoff Triangle).

8.1 Resultados numéricos elástico-lineares

Nos exemplos analisados, o elemento de casca é confrontado com elementos considerados de boa performance. Dois elementos triangulares planos de casca com graus de liberdade rotacional¹⁵ serão utilizados na comparação. Estes elementos foram construídos pelo acoplamento entre o elemento de flexão de placa DKT e os elementos de membrana (com drilling) desenvolvidos por Allman com integração reduzida (ALLMAN 1) e integração normal (ALLMAN 2). O elemento triangular plano de casca TLCL¹⁶, também será utilizado nas análises de convergência. Este elemento não possui o grau de liberdade rotacional, porém, o elemento de placa utilizado no acoplamento é formulado utilizando as hipóteses de Reissner-Mindlin onde a deformação por esforço cortante é considerada. Nas análises o elemento proposto utilizará os parâmetros $\bar{\alpha} = 1,2$ e $\bar{\beta} = 0,001$.

CILINDRO COM PAREDES RÍGIDAS

O cilindro com parede rígida nas suas extremidades é solicitado por cargas concentradas radiais (fig. 6a). Devido a sua simetria discretiza-se apenas $\frac{1}{8}$ do mesmo. O gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A é apresentado na figura 6b, onde está indicada também, a solução analítica para o problema.

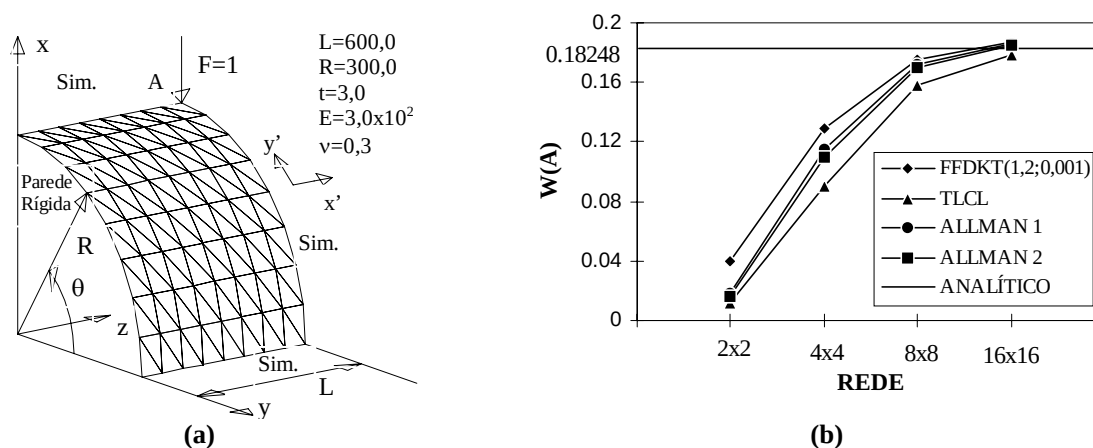


Figura 6 - (a)Cilindro com paredes rígidas. (b)Convergência do deslocamento do ponto A.

CÚPULA ESFÉRICA VAZADA

A estrutura é solicitada por cargas concentradas radiais e devido a sua simetria discretiza-se apenas $\frac{1}{4}$ da semi-esfera. Os resultados para o deslocamento radial apresentados pelos elementos são comparados com a solução analítica do problema no gráfico de convergência da figura 7b.

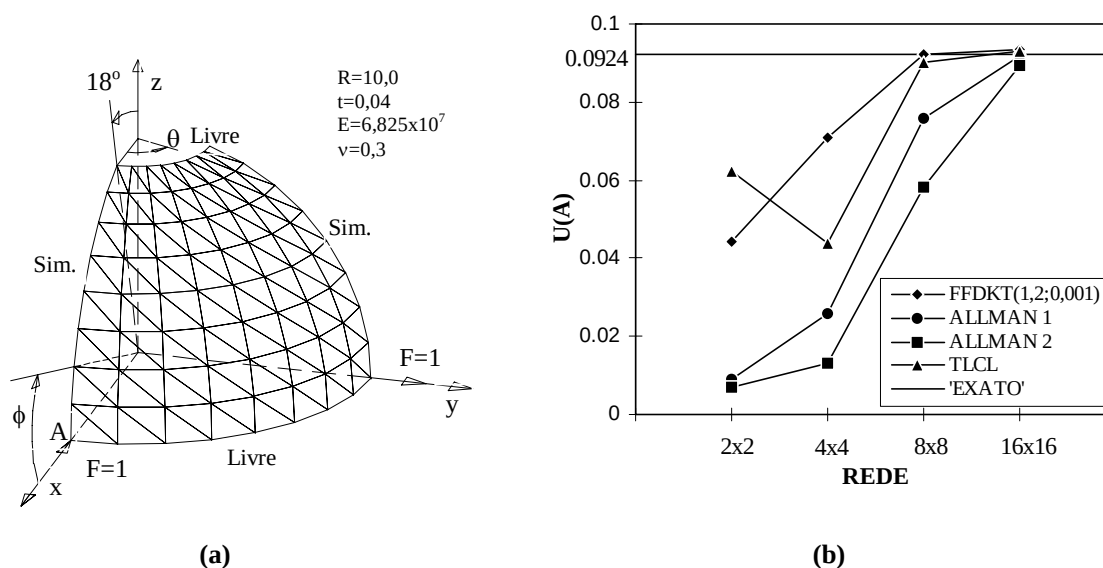


Figura 7 - (a)Cúpula esférica. (b) Convergência do deslocamento do ponto A.

8.2 Resultados numéricos elastoplásticos

O elemento aqui proposto é confrontado com outros elementos, com a finalidade de verificar o seu desempenho. Adotou-se um modelo estratificado baseado na quadratura de Gauss juntamente com o método de Newton-Raphson para solução de sistemas não-lineares. Na atualização da matriz de rigidez, utilizou-se a matriz elastoplástica tangente consistente, preservando assim, a taxa de convergência quadrática do método de Newton. Todas as análises foram realizadas utilizando-se um total de trinta incrementos iguais.

PAINEL DE COOK

Este problema proposto por Cook é bastante utilizado na avaliação de elementos de membrana em análises elásticas lineares. A estrutura analisada é uma viga engastada solicitada por um carregamento parabolicamente distribuído aplicado em sua extremidade livre. A geometria e as grandezas envolvidas no problema são apresentados na figura 8a. Na análise do problema elastoplástico foram admitidas tolerâncias em força e em deslocamento de 0,001%. Na figura 8b apresenta-se o diagrama %Carregamento x deslocamento transversal do ponto A (ponto no meio da extremidade livre). Os resultados do elemento de membrana da formulação livre foram obtidos com uma rede de $8 \times 8 \times 2$ elementos utilizando os valores de $\bar{\alpha} = 1,5$ e $\bar{\beta} = 0,5$ e são confrontados com os resultados obtidos com o elemento CST (Constant Strain Triangle) para uma rede de $16 \times 16 \times 2$ elementos.

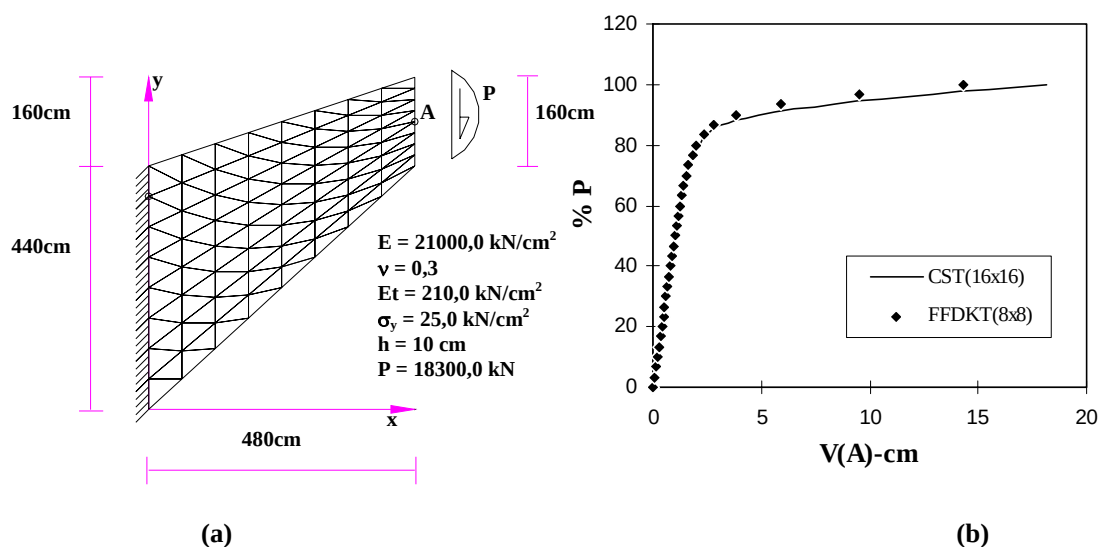


Figura 8 - (a)Propriedades físicas e geométricas da estrutura. (b)Deslocamento vertical do ponto A

PLACA QUADRADA

A placa apresentada na figura 9a é simplesmente apoiada e está solicitada por um carregamento distribuído ' q '. Devido a sua simetria analisa-se apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura. Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa são comparados com o resultado dos elementos heterosis apresentado em Owen e Hinton¹¹ utilizando os modelos estratificado e não estratificado.

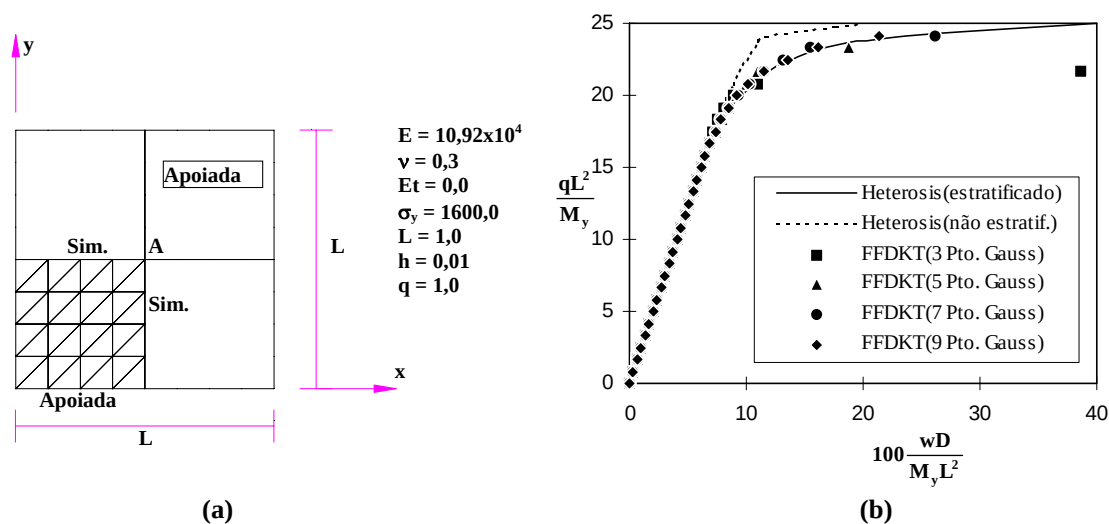


Figura 9 - (a)Propriedades físicas e geométricas da estrutura. (b)Deslocamento transversal do ponto A

Entretanto, como o objetivo neste exemplo é analisar o comportamento do elemento com relação a integração das tensões e das equações constitutivas para varias distribuições dos pontos de Gauss na espessura, optou-se por discretizar a estrutura com a mesma quantidade de graus de liberdade utilizados pelos elementos heterosis. Dessa forma, adotou-se uma rede de $4 \times 4 \times 2$ elementos FFDKT. Neste exemplo foram admitidas tolerâncias em força e deslocamento de 0,01%. Na figura 9b são apresentadas

as curvas carga x deslocamento transversal do ponto **A** (centro da placa). O elemento FFDKT é analisado com 3, 5, 7 e 9 pontos de Gauss distribuídos na espessura.

COBERTURA CILÍNDRICA

A estrutura analisada, uma casca cilíndrica é um “benchmark” bastante utilizado em análises com não linearidade física e geométrica. A casca apresentada na figura 10a é solicitada por um carregamento ‘ q ’ por unidade de área, referente ao peso próprio. As extremidades da casca são consideradas como paredes rígidas e os lados longitudinais totalmente livres. Devido a sua simetria, discretiza-se apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura. Na análise do problema elastoplástico foram admitidas tolerâncias em força e em deslocamento de 0,1%. As curvas carga x deslocamento transversal do ponto **A** são apresentadas na figura 10b. O elemento FFDKT é analisado utilizando 5, 7 e 9 pontos de Gauss na espessura com valores de $\bar{\alpha} = 1,5$ e $\bar{\beta} = 0,5$ e com 9 pontos de Gauss com os valores de $\bar{\alpha} = 1,2$ e $\bar{\beta} = 0,001$. O elemento é comparado com o elemento de casca triangular curvo de 6 nós TSL6 da biblioteca do sistema LUSAS. Na análise numérica, a estrutura é discretizada com uma rede de $8 \times 8 \times 2$ para ambos os elementos. Porém, o elemento TSL6 utiliza um total de 1283 graus de liberdades, enquanto o elemento aqui proposto utiliza 486 graus de liberdades.

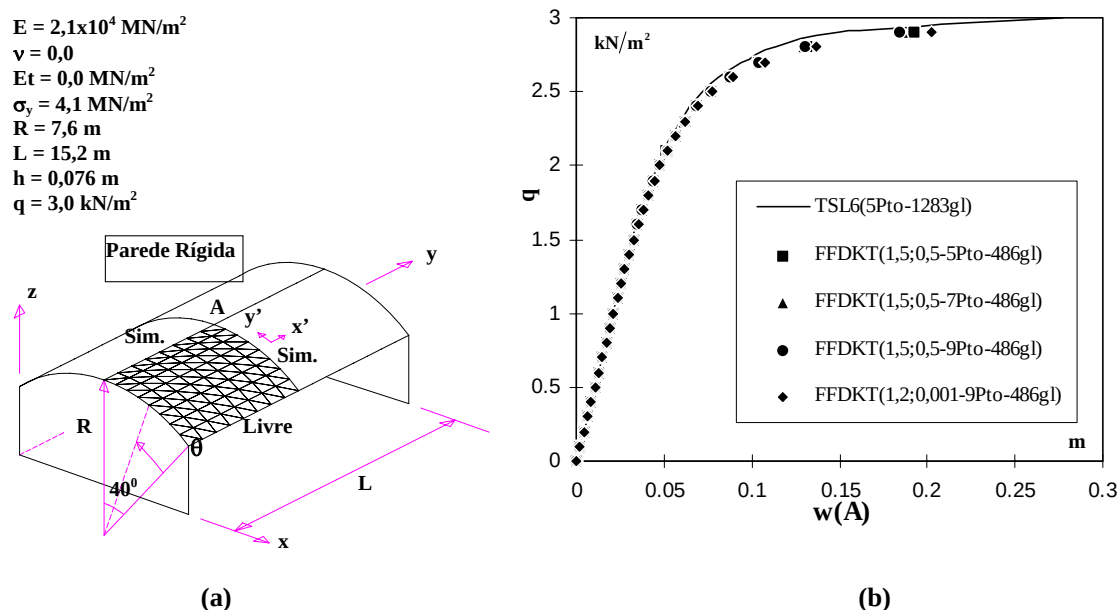


Figura 10 - (a)Propriedades físicas e geométricas da estrutura. (b)Deslocamento transversal do ponto A

9 CONCLUSÕES

Um elemento triangular plano para análise elastoplástica de cascas delgadas é apresentado. O elemento é construído pelo acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) e o elemento de membrana desenvolvido por Bergan & Felippa⁴. Além da vantagem de ser construído por elementos de alta performance¹² e não apresentar problemas de travamento por esforço cortante, o elemento de casca desenvolvido apresenta o grau de liberdade rotacional. Este grau de liberdade proporciona uma modelagem mais coerente da estrutura em casca, evitando

problemas de mal condicionamento da matriz de rigidez nas situações onde os elementos da estrutura são coplanares ou aproximadamente coplanares. Além do mais, ambos os elementos (placa e membrana) satisfazem o patch test, possuindo portanto, garantia de convergência. Os resultados elástico-lineares apresentados, demonstram a boa performance do elemento quando comparado com elementos similares considerados de bom desempenho. Ressalta-se que, para todos os parâmetros de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ analisados o elemento obteve convergência. Os resultados não-lineares também demonstram o bom comportamento do elemento, até mesmo, quando analisado com uma quantidade de graus de liberdade inferior. O procedimento implícito é incondicionalmente estável e a aplicação do operador tangente consistente preserva a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. O modelo estratificado é bastante adequado, ressaltando-se apenas a necessidade de se utilizar uma quantidade de pontos de Gauss superior a três.

10 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo apoio financeiro concedido para o desenvolvimento deste trabalho.

11 REFERÊNCIAS

- MESQUITA, A. D. (1998). **Uma formulação do método dos elementos finitos para análise elastoplástica de cascas**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. **Int. J. Numer. Meth. in Eng.**, v. 15, p.1771-1812.
- BATOZ, J. L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. **Int. J. Numer. Meth. in Eng.**, v. 18, p. 1077-1089.
- BERGAN, P. G.; FELIPPA, C. A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. **Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.**, v.50, p.25-69.
- PELETEIRO, S. C. (1996). **Utilização da formulação livre para desenvolvimento de um elemento de membrana com liberdades rotacionais**. São Carlos. 101p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. (1997). Elemento de casca com liberdade rotacional desenvolvido através do acoplamento entre o elemento da formulação livre e o DKT. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA-CILAMCE, 1997. **Anais**.
- BERGAN, P. G.; NYGARD, M. K. (1984). Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. **Int. J. Numer. Meth. in Eng.**, v.20, p.643-663.

STRICKLIN *et al* (1969). Rapidly converging triangular plate element. **AIAA Journal**, v. 7, n. 1, p.180-181.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Elastoplasticity and viscoplasticity**: computational aspects.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v.22, p.649-670.

OWEN, D. R. J.; HINTON, E. (1980). **Finite element in plasticity**: theory and practice. Swansea: Pineridge Press.

MILITELLO, C.; FELIPPA, C. A. (1991). The first ANDES elements: 9-dof plate bending triangles. **Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.**, v. 93, p. 217-246.

CRISFIELD, M. A. (1991). **Non-linear finite element analysis of solids and structures - v.1**. England: John Wiley & Sons.

RUNESSON, K.; SAMUELSSON, A. (1985). Aspects on numerical techniques in small deformation plasticity. In: MINDDLTON, J. et al. (Eds.). **Numerical methods in engineering: theory and applications** (NUMETA 85). Rotterdam: A. A. Balkema. v.1, p.337-348.

CHEN, H. C. (1992). Evaluation of Allman triangular membrane element used in general shell analysis. **Computer & Structures**, v.43, n.5, p.881-887.

NAVARRA, E. O. (1992). **Calculo de estruturas por el metodo de elementos finitos**: análisis elástico lineal. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.