FÍSICA Y QUÍMICA
1º BACHILLERATO

FANFEST

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO
Unidad 6. Cinemática

SOLUCIONES PÁG. 148

1. Aplicando los conceptos adecuados, describe el movimiento que realizará una moto suponiendo que fueras un observador que está parado en la acera de la vía por la que circula la moto.

Respuesta libre. Es importante que se sitúe el sistema de referencia en primer lugar; puede hacerlo en sí mismo o en algún elemento de la vía, por ejemplo, en un semáforo. Debe indicar si el movimiento será rectilíneo o curvilíneo, aportando datos que hagan referencia a los conceptos de física. Algunos ejemplos pueden ser: la huella que deja la moto al frenar, la distancia fija que mantiene la moto respecto de la acera de la calle, o el giro que realiza la moto para adelantar a otro vehículo. Por último, debe indicar si el movimiento es uniforme o acelerado. En este ámbito sería oportuno pedir al alumnado que describan el procedimiento o las medidas que podrían realizar para verificar una velocidad constante o no: medir el tiempo que tarda en recorrer varias distancias iguales utilizando elementos de la vía como distancias entre farolas o semáforos…

2. ¿Cómo se describiría el movimiento de un coche desde otro vehículo que también se mueve?

Respuesta libre. Como en la actividad anterior, se deben describir observaciones y procedimientos para poder extraer conclusiones.

3. Establece razonadamente las diferencias entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

Respuesta libre. Es importante evitar responder con las definiciones de los dos tipos de magnitudes sino ser capaces de establecer las diferencias entre ellas.

4. Un tren de juguete da vueltas por una vía circular de 20 cm de radio. ¿Cómo es su trayectoria? ¿Cuál será su desplazamiento al acabar la primera vuelta? ¿Qué espacio habrá recorrido? Argumenta tu respuesta.

La trayectoria es circular porque recorre una vía de forma circular.

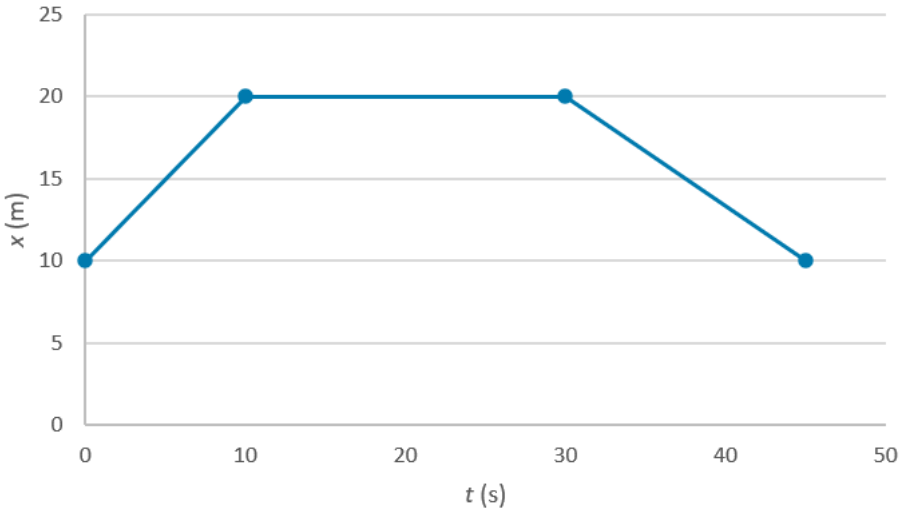
El desplazamiento al acabar la primera vuelta es nulo. Basta aplicar la definición del concepto: la diferencia entre las posiciones inicial y final es 0, ya que ambas coinciden.

El espacio recorrido, aplicando la definición del concepto, no será cero, y se calcula como la longitud de la circunferencia recorrida:

$$s = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 0,2\ m = 1,26\ m$$

5. Un móvil se encuentra a 10 m de distancia del sistema de referencia, inicia el movimiento y en 10 s recorre otros 10 m. Hace una parada de 20 s e inicia de nuevo la marcha para regresar al punto de partida, en lo que tarda 15 s. Indica qué tipo de gráfica se obtendrá y represéntala.

Se trata de una gráfica posición-tiempo puesto que se describen las posiciones en instantes concretos del movimiento.



6. Considera el siguiente vector de posición:

$$\vec{r} = \left(t^2 + 2t\right)\vec{i} + (5t - 0,5)\vec{j}\ m$$

Calcula el vector de velocidad media y su módulo entre los instantes *t* = 2 s y *t* = 4 s.

Se sustituyen los valores del tiempo para calcular los vectores de posición en los instantes 2 s y 4 s:

$$\vec{r}_2 = \left(2^2 + 2{\cdot}2\right)\vec{i} + (5{\cdot}2 - 0,5)\vec{j}\ m = 8\vec{i} + 9,5\vec{j}\ m$$

$$\vec{r}_4 = \left(4^2 + 2{\cdot}4\right)\vec{i} + (5{\cdot}4 - 0,5)\vec{j}\ m = 24\vec{i} + 19,5\vec{j}\ m$$

Se aplica la definición del concepto velocidad media y se sustituyen los valores numéricos:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_4 - \vec{r}_2}{4\ s - 2\ s} = \frac{(24\vec{i} + 19,5\vec{j})\ m - (8\vec{i} + 9,5\vec{j})\ m}{2\ s} = (8\vec{i} + 5\vec{j})\ m/s$$

$$\left|\vec{v}_m\right| = \sqrt{(8\ m/s)^2 + (5\ m/s)^2} = \sqrt{89}\ m/s = 9,43\ m/s$$

7. La ecuación de posición de un móvil es:

$$\vec{r} = \left(5t^2 + 3t + 1\right)\vec{i} + (2t + 3)\vec{j}\ m$$

Obtén los vectores velocidad y aceleración en el instante *t* = 3 s, además de sus módulos, aplicando el procedimiento adecuado.

El vector velocidad instantánea se calcula realizando la derivada del vector de posición con respecto al tiempo. Su módulo se calcula sustituyendo los valores numéricos.

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} = (10t + 3)\vec{i} + 2\vec{j}\ m/s$$

$$\vec{v}(t = 3\ s) = (10 \cdot 3 + 3)\vec{i} + 2\vec{j}\ m/s = 33\vec{i} + 2\vec{j}\ m/s$$

$$\left|\vec{v}_i\right| = \sqrt{(33\ m/s)^2 + (2\ m/s)^2} = 33,06\ m/s$$

El vector aceleración instantánea se obtiene haciendo la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo.

$$\vec{a}_i = \vec{a}(t = 3\ s) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 10\vec{i}\ m/s^2$$

$$\left|\vec{a}_i\right| = \sqrt{(10\ m/s^2)^2} = 10\ m/s^2$$

8. Considera la siguiente tabla:

t (s)	*v* (km/h)
0	0
10	80
190	80
200	100
800	100
820	50
840	25
850	0

a. Expresa en unidades del SI los valores de la velocidad.

b. Realiza la gráfica *v*-*t*.

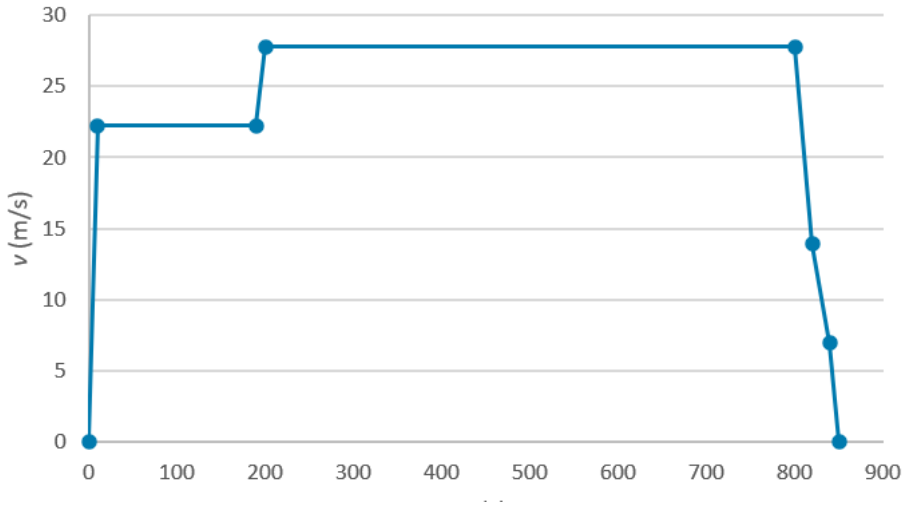
c. Analiza la gráfica y describe el movimiento que realiza el móvil en cada tramo.

a.

t **(s)**	***v*** **(km/h)**	***v*** **(m/s)**
0	0	0
10	80	22,22
190	80	22,22
200	100	27,78
800	100	27,78
820	50	13,89
840	25	6,94

85 0	0	0

b. La gráfica *v-t* correspondiente es la siguiente:

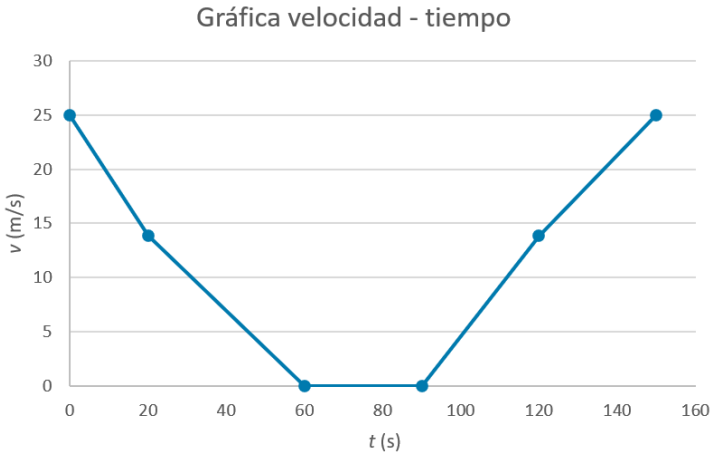


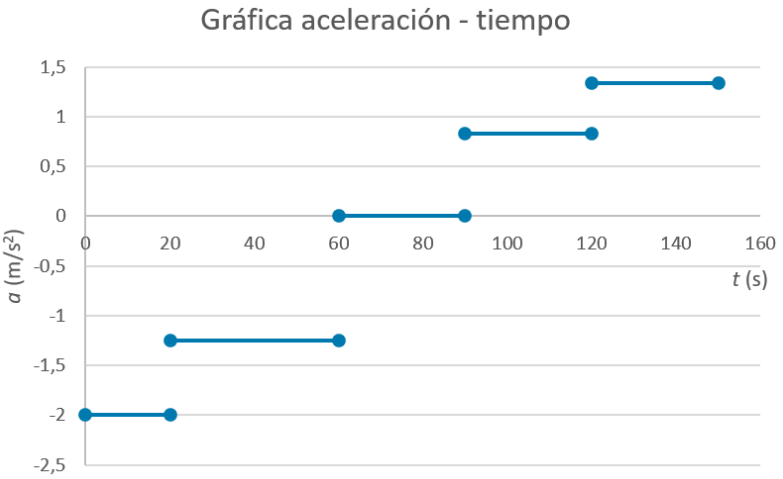
c. El móvil inicia su movimiento cambiando de velocidad de 0 a 22,22 m/s en 10 s. Después, durante 180 s mantuvo su velocidad constante; al cabo de ese tiempo aumenta de nuevo la velocidad hasta 27,78 m/s para lo que emplea 10 s. Durante 600 s, se mueve a una velocidad constante de 27,78 m/s. Luego, reduce su velocidad en intervalos de 20 s hasta alcanzar primeramente, los 13,89 m/s y, después, 6,94 m/s. Termina parándose, para lo que emplea 10 s más.

9. Un coche circula por una carretera convencional hasta un pueblo. A la entrada, reduce la velocidad hasta alcanzar la permitida. En el centro del pueblo se detiene ante un semáforo; luego, continúa circulando hasta rebasar la población y acelera nuevamente para proseguir su viaje por la carretera. Realiza las gráficas *v-t* y *a-t*.

Datos: busca en fuentes de información fiables los valores reales de velocidad permitida en las vías y utilízalos. Pon intervalos de tiempo próximos a situaciones reales.

La actividad tiene como objetivo que el alumnado realice la búsqueda de las velocidades permitidas para que las conozcan y se conciencien de las mismas. Sugerimos algunas web como:
https://itv.com.es/limites-de-velocidad-por-carretera o
https://revista.dgt.es/es/multimedia/infografia/2018/0301limites-genericos-de-velocidad.shtml

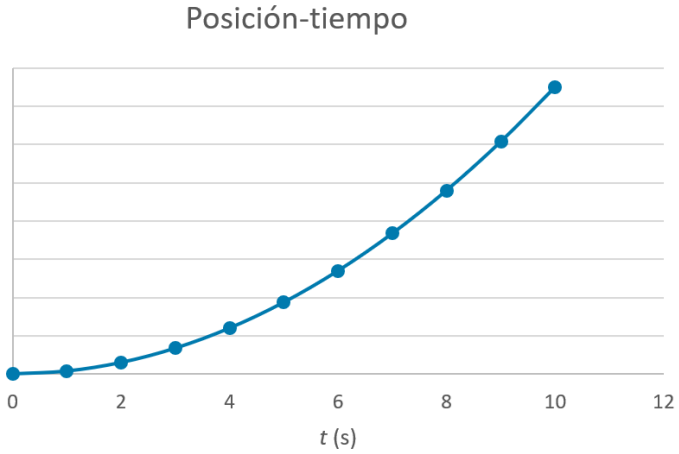


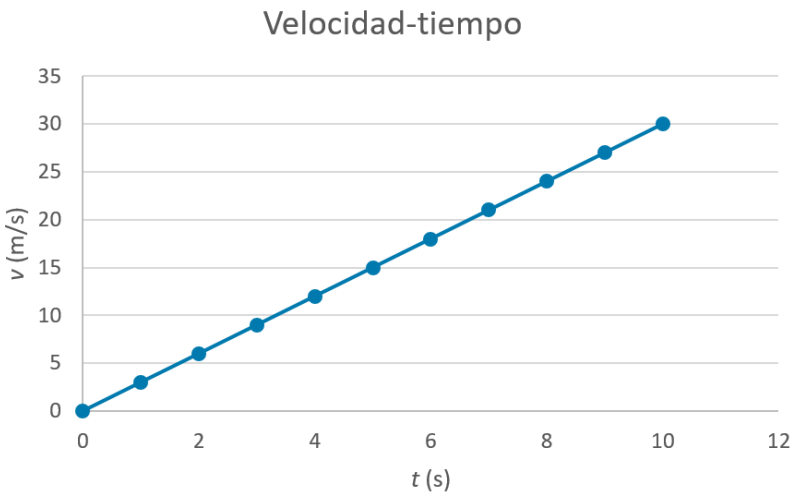


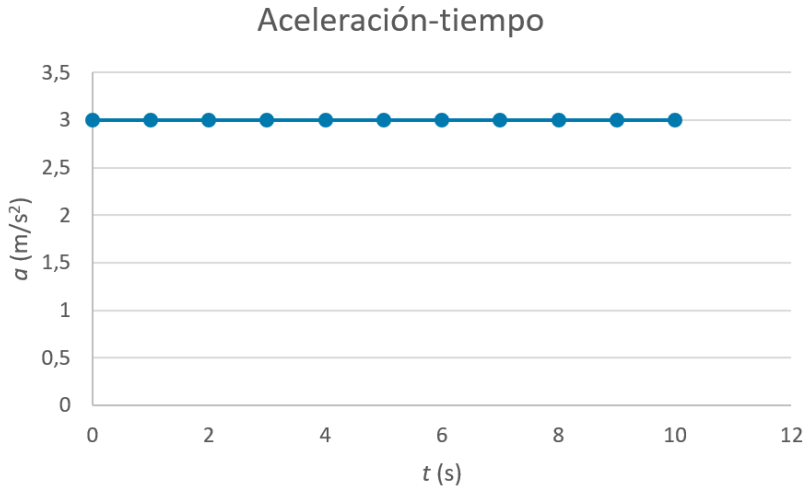
SOLUCIONES PÁG. 149

10. Un coche arranca acelerando durante 10 s. Si lo hace con una aceleración constante de 3 m/s^2, realiza los cálculos que te permitan representar las gráficas *a-t* y *v-t.*

Se realizan las gráficas: *s-t, v-t* y *a-t*:







11. Dos móviles se dirigen uno al encuentro del otro con velocidades constantes de 3 m/s y 6 m/s, respectivamente. Cuando se encuentran, el primer móvil ha recorrido 30 m.

a. ¿Cuánto tiempo han estado circulando?

b. ¿Cuál era la distancia que los separaba inicialmente?

Teniendo en cuenta los datos que aporta el enunciado, ambos móviles realizan MRU y se mueven durante el mismo tiempo. Se sitúa el sistema de referencia en la posición inicial del primero de los móviles (A), de manera que x_{0A} = 0 m y v_A = 3 m/s considerando que se mueve hacia posiciones positivas. El segundo móvil (B) ocupa una posición inicial x_{0B}, que es la respuesta al apartado b), y se mueve con v_B = –6 m/s, porque se dirige al encuentro del móvil A, es decir, se mueve hacia la parte negativa del eje *X*.

Se utilizan las ecuaciones de MRU aplicándolas a los dos móviles sucesivamente.

a. $x_{fA} = x_{0A} + v_A \cdot t \Rightarrow 30\ m = 3\ m/s \cdot t \Rightarrow t = 10\ s$

b. $x_{fB} = x_{0B} + v_{AB} \cdot t \Rightarrow 30 = x_{0B} - 6m/s \cdot 10s \Rightarrow x_{0B} = 90\ m$

12. Dos trenes parten al mismo tiempo de dos estaciones A y B que distan 100 km. El tren que inicia la marcha en A lo hace con una velocidad constante de 80 km/h. El tren que de la estación B lo hace con velocidad también constante e igual a 50 km/h. Explica los conceptos necesarios para resolver el problema y calcula:

a. ¿En qué momento se cruzan los trenes?

b. ¿A qué distancia de la estación B se produce el cruce?

Como en la actividad anterior y teniendo en cuenta los datos que aporta el enunciado, ambos trenes realizan MRU y se mueven durante el mismo tiempo. Se sitúa el sistema de referencia en la posición inicial del primero de los trenes (A), de manera que x_{0A} = 0 m y v_A = 80 km/h = 22,22 m/s considerando que se mueve hacia posiciones positivas. El segundo tren (B) ocupa una posición inicial x_{0B} = 100 km = 10^5 m y se mueve con v_B = –50 km/h = –13,89 m/s, porque se mueve hacia la parte negativa del eje *X* para poder cruzarse con el tren A.

a. Se utilizan las ecuaciones de MRU aplicándolas a los dos trenes. En el momento de cruzarse, la posición final de ambos trenes es la misma. Se resuelve el sistema para obtener el valor del tiempo:

$$x_{fA} = x_{0A} + v_A \cdot t \Rightarrow x_{fA} = 22,22\ m/s \cdot t$$

$$x_{fB} = x_{0B} + v_{AB} \cdot t \Rightarrow x_{fB} = 10^5 m - 13,89\ m/s \cdot t$$

$$22,22 \frac{m}{s} \cdot t = 10^5 m - 13,89 \frac{m}{s} \cdot t \Rightarrow K = 2\,769,31\ s = 46,16\ min$$

b. Se calcula el espacio que ha recorrido el tren B:

$$s = 13,89 \frac{m}{s} \cdot 2\,769,31\ s = 38\,465,72\ m$$

13. Un coche está parado en un semáforo. Cuando el semáforo cambia a verde, arranca y alcanza la velocidad de 50 km/h en 6 s. En ese instante le adelanta una furgoneta que circula a 45 km/h. Calcula gráficamente el tiempo que el automóvil tarda en alcanzar a la furgoneta.

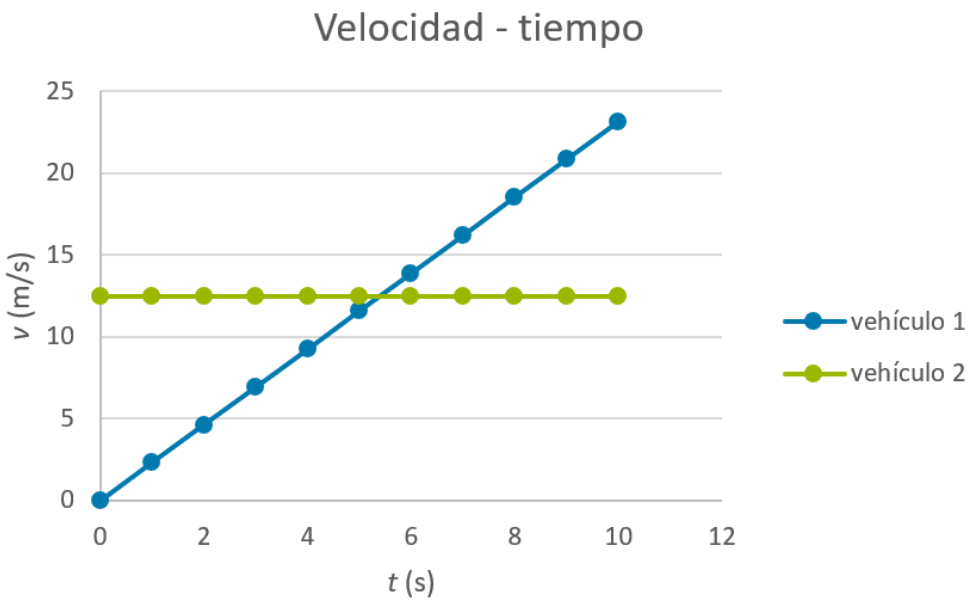
El coche realiza MRUA y la furgoneta MRU. Se sitúa el sistema de referencia en el semáforo, de forma que las posiciones iniciales de ambos móviles son 0. Las velocidades expresadas en unidades del SI son:

v_A = 50 km/h = 13,89 m/s y v_B = 45 km/h = 12,5 m/s

Se calcula la aceleración del coche:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{13,89 \frac{m}{s} - 0\ m/s}{6\ s} = 2,32\ m/s^2$$

La solución gráfica se obtiene realizando las gráficas velocidad-tiempo de ambos móviles:



La representación gráfica de velocidad de la furgoneta es una recta paralela al eje *X* y la velocidad del coche se obtendría en la gráfica cuya función:

$$v_f = v_0 + a \cdot t = 2,32 \frac{m}{s^2} \cdot t$$

14. Un guepardo observa a un antílope que está a 800 m y se dispone a cazarlo. Inicia su carrera a 115 km/h pero solo puede mantener esa velocidad durante 1 min, momento a partir del cual reduce su velocidad a 105 km/h. El antílope tarda 5 s en darse cuenta de la amenaza y emprender la huida, pero su velocidad máxima es de 80 km/h.

¿Consigue el guepardo cazar al antílope antes de reducir su velocidad? Realiza los cálculos necesarios, aplicando los conceptos adecuados para argumentar tu respuesta.

Se hace coincidir el sistema de referencia con la posición del guepardo. Se considera que el movimiento de ambos animales es MRU. El tiempo en el que se mueven no es el mismo, el antílope se mueve 5 s menos. Para resolver el problema se aplican las ecuaciones del MRU a ambos animales y se calcula la posición final del guepardo tras su carrera durante 1 min y la del antílope durante 55 s teniendo en cuenta que su posición inicial es 800 m.

Las velocidades expresadas en unidad del SI son:

v_A = 115 km/h = 31,94 m/ y v_B = 80 km/h = 22,22 m/s

$$x_{fA} = x_{0A} + v_A \cdot t \Rightarrow x_{fA} = 31,94 \frac{m}{s} \cdot 60\ s = 1\,916,4\ m$$

$$x_{fB} = x_{0B} + v_{AB} \cdot t \Rightarrow x_{fB} = 800\ m + 22,22 \frac{m}{s} \cdot 55\ s = 2\,022,1\ m$$

Por tanto, el guepardo no alcanza al antílope antes de reducir su velocidad.

15. Desde la terraza de un cuarto piso se cae una pelota a la calle. Describe el procedimiento que debes utilizar para responder a las siguientes preguntas y realiza los cálculos oportunos.

a. ¿Qué velocidad tiene la pelota a los 0,6 s de caída?

b. ¿A qué altura se encuentra la pelota en ese instante?

Dato: la altura media de cada piso en un edificio es de 3 m.

Se trata de un movimiento de caída libre. Se sitúa el sistema de referencia en el suelo, por lo que la posición inicial y_0 será la altura desde la que se lanza el objeto. La velocidad inicial es nula porque se deja caer el objeto. Siguiendo el criterio de signos, el movimiento se produce hacia posiciones negativas por lo que la velocidad tendrá signo negativo. También $g < 0$ porque tiene el mismo sentido que v.

a. Se aplica la ecuación de la velocidad:

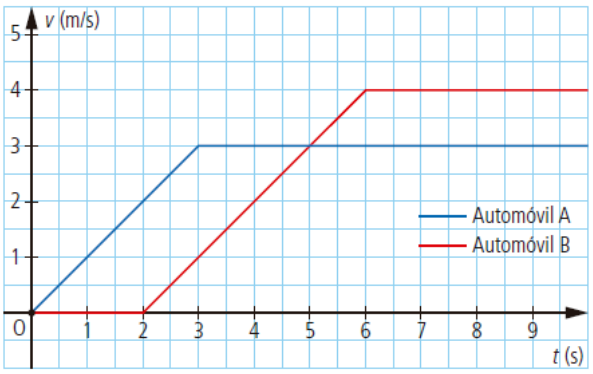
$$v_f = -\, g \cdot t = \; -\, 9,8\, \frac{m}{s^2} \cdot 0,6\, s = \; -\, 5,88\, m/s$$

b. Como la altura de cada piso es de 3 m y la pelota cae desde el cuarto piso, la altura inicial desde la que cae es de 12 m.

Se aplica la ecuación de la posición:

$$y_f = y_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 12 - \frac{1}{2} \cdot 9,8\, \frac{m}{s^2} \cdot (0,6\, s)^2 = 10,24\, m$$

16. Considera la siguiente gráfica



a. Aplica los conceptos adecuados e interpreta el movimiento que realiza cada móvil.

b. En el instante en el que tienen la misma velocidad, ¿qué posición ocupa cada móvil?

a. Se trata de una gráfica velocidad-tiempo. El automóvil A parte del reposo y acelera hasta alcanzar la velocidad de 3 m/s en 3 s por lo que describe MRUA. Después, mantiene la velocidad constante, describe un MRU. El automóvil B inicia su movimiento 2 s más tarde que el automóvil A y también realiza un MRUA inicialmente hasta los 6 s y un MRU posteriormente.

b. En $t = 5$ s ambos móviles tienen la misma velocidad, pero no tienen la misma posición. Esta hay que calcularla para cada móvil. Suponemos que ambos móviles parten de la misma posición inicial que se hace coincidir con el origen del sistema de referencia. En el caso del móvil A hay que aplicar sucesivamente las ecuaciones de MRUA y MRU. Para el móvil B, solo hay que utilizar la ecuación de MRUA. Si se observa la gráfica, se concluye que la aceleración de ambos móviles es la misma porque la pendiente de ambas gráficas también lo es. Se calcula dicha aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{3\,\frac{m}{s} - 0\,m/s}{3\,s} = 1\,m/s^2$$

Para el móvil A al terminar de acelerar, su posición final es:

$$x_{fA} = x_{0A} + v_{0A}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\,\frac{m}{s^2}\cdot(3\,s)^2 = 4,5\,m$$

Esta posición es la inicial de la segunda parte del movimiento, por lo que la posición final es:

$$x_{fA} = x_{0A} + v_A\cdot t \Rightarrow x_{fA} = 4,5\,m + 3\frac{m}{s}\cdot 2\,s = 10,5\,m$$

Como solo se ha movido durante 3 s, la posición final del móvil B es:

$$x_{fB} = x_{0B} + v_{0B}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\,\frac{m}{s^2}\cdot(3\,s)^2 = 4,5\,m$$

17. Una persona se desplaza en bicicleta a una velocidad de 25 km/h por una calle recta. Cuando lleva recorrido 1 km adelanta a un coche, que incrementa la velocidad con una aceleración constante de 2,7 m/s^2.Calcula:

a. ¿En qué instante pasó la bici por delante del coche?

b. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar la bicicleta?

Dado que el enunciado del problema no indica una velocidad inicial del coche, debemos suponer que esta es 0, está parado, y arranca cuando la bicicleta lo adelanta.

a. Se calcula el tiempo porque se conoce el espacio recorrido y la velocidad constante: v_A = 25 km/h = 6,94 m/s

$$s = v\cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{1\,000\,m}{6,94\,m/s} = 144,09\,s = 2,4\,min$$

b. Se hace coincidir el sistema de referencia con la posición en la que coinciden el automóvil y la bicicleta; de manera que sus posiciones iniciales son 0 y a partir de ese instante ambos se mueven al mismo tiempo. Se utilizan las ecuaciones de la posición de MRUA para el coche y MRU para la bicicleta, sabiendo que la posición final es igual para ambos móviles:

$$x_{fA} = x_{0A} + v_A\cdot t \Rightarrow x_{fA} = 6,94\,m/s\cdot t$$

$$x_{fB} = x_{0B} + v_{0B}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \Rightarrow x_{fB} = \frac{1}{2}\cdot 2,7\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$x_{fA} = x_{fB} \Rightarrow 6,94\,\frac{m}{s}\cdot t = \frac{1}{2}\cdot 2,7\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$t = 5,14\,s$$

18. Una persona especialista en pirotecnia ha lanzado un cohete de fuegos artificiales que ha explotado a 350 m de altura.

a. ¿Cuál fue la velocidad con la que se lanzó?

b. ¿Cuánto tiempo tardó subir?

c. ¿Cuánto tiempo tardó la gente que asistía al espectáculo en ver los colores? ¿Y en escuchar la explosión?

Datos: $v_c = 3\cdot 10^8$ m/s; v_{sonido} = 340 m/s

a. Se trata de un movimiento de lanzamiento vertical hacia arriba. Se utiliza la ecuación de MRUA que relaciona las velocidades final e inicial

con las posiciones final e inicial. Se sitúa el sistema de referencia en el punto de lanzamiento y_0 = 0 m, y_f = 350 m; v_f (en y_f) = 0 m/s y se aplica el criterio de signos $g < 0$ porque tiene sentido opuesto a v:

$$v_f^2 - v_0^2 = -2g\cdot\left(y_f - y_0\right) \Rightarrow v_0 = \sqrt{2g\cdot y_f} = \sqrt{2\cdot 9,8\ \frac{m}{s^2}\cdot 350\ m} = 82,83\ m/s$$

b. Se utiliza la ecuación de la velocidad de MRUA:

$$v_f = v_0 - g\cdot t \Rightarrow t = \frac{v_f - v_0}{-g} = \frac{0\ \frac{m}{s} - 82,83\ \frac{m}{s}}{-9,8\ \frac{m}{s^2}} = 8,45\ s$$

c. La luz y el sonido realizan MRU. Se calcula fácilmente el tiempo porque se conoce el espacio recorrido y la velocidad de cada movimiento.

$$s = v_c\cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v_c} = \frac{350\ m}{3\cdot 10^8\ m/s} = 1,67\cdot 10^{-6}\ s$$

$$s = v_{sonido}\cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v_{sonido}} = \frac{350\ m}{340\ m/s} = 1,03\ s$$

19. Dos amigas visitan la torre de Pisa. Una de ellas hace la visita al interior de la torre y desde lo alto deja caer un pequeño llavero. Su amiga, que estaba preparada, lanza simultáneamente hacia arriba otro llavero igual. ¿A qué velocidad debe hacerlo para que los dos objetos se crucen a la mitad de la altura de la torre?

Dato: $h_{\text{Torre de Pisa}}$ = 56,4 m

Se sitúa el sistema de referencia en el suelo. El primer llavero realiza un movimiento de caída libre y el segundo, uno de lanzamiento vertical hacia arriba. Aplicando la ecuación de la posición al primer movimiento se calcula el tiempo de caída hasta llegar a la mitad de la altura.

$$y_{fA} = y_{0A} - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \Rightarrow \frac{56,4}{2}m = 56,4\ m - 4,9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \Rightarrow t = 2,4\ s$$

En la situación de cruce la posición de los dos objetos es la misma, por lo que se igualan las ecuaciones de la posición de los dos móviles:

$$y_{fA} = y_{0A} - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = 56,4\ m - 4,9\ \frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$y_{fB} = v_{0B}\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = v_{0B}\cdot t - 4,9\ \frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$56,4\ m - 4,9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = v_{0B}\cdot t - 4,9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \Rightarrow v_{0B} = \frac{56,4\ m}{2,4\ s} = 23,5\ m/s$$

20. Un niño juega en un parque a hacer malabares con dos pelotas. Lanza la primera con una velocidad de 5 km/h y la segunda 0,2 s después con velocidad de 6 km/h.

a. Calcula el instante en el que las dos pelotas ocupan la misma posición y explica de forma razonada la solución del problema.

b. Determina la velocidad de cada pelota en ese instante e interpreta el resultado.

a. Las velocidades, expresadas en unidades del SI son:

v_A = 5 km/h = 1,39 m/s; v_B = 6 km/h = 1,67 m/s

Existe un desfase de tiempo de forma que $t_A = t$ s y $t_B = (t - 0,2)$ s. Se sitúa el sistema de referencia en el punto de lanzamiento por lo que la

posición inicial de las dos pelotas es nula. Se aplica la ecuación de la posición del MRUA a los dos objetos, puesto que se trata de un lanzamiento vertical hacia arriba para ambos, y se iguala para obtener el tiempo.

$$y_{fA} = v_{0A}\cdot t_A - \frac{1}{2}g\cdot t_A^{\,2} = 1,39\,\frac{m}{s}\cdot t - 4,9\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$y_{fB} = v_{0B}\cdot t_B - \frac{1}{2}g\cdot t_B^{\,2} = 1,67\,\frac{m}{s}\cdot(t-0,2)s - 4,9\,\frac{m}{s^2}\cdot(t-0,2)^2$$

$$1,39\,\frac{m}{s}\cdot t - 4,9\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 1,67\,\frac{m}{s}\cdot(t-0,2)s - 4,9\,\frac{m}{s^2}\cdot(t-0,2)^2$$

$$t = 0,24\,s$$

b. Se utiliza la ecuación de la velocidad de MRUA aplicándola ambos movimientos.

$$v_{fA} = v_{0A} - g\cdot t_A \Rightarrow v_{fA} = 1,39\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot 0,24\,s = -0,96\,m/s$$

$$v_{fB} = v_{0B} - g\cdot t_B \Rightarrow v_{fB} = 1,67\,\frac{m}{s} - 9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot(0,24-0,2)\,s = 1,278\,m/s$$

El signo negativo de la velocidad de la primera pelota indica que ya está descendiendo después de haber alcanzado su altura máxima. Se puede comprobar que tardó 0,14 s en alcanzar dicha altura.

21 Una bicicleta tiene unas ruedas de 1 m de diámetro. Si se mueve a una velocidad de 18 km/h, establece:

a. La velocidad angular de las ruedas.

b. El periodo y la frecuencia del movimiento.

Para resolver el problema se aplican los conceptos del movimiento circular uniforme (MCU)

a. La relación entre magnitudes angulares y lineales se establece a través del radio. La velocidad lineal se expresa en unidades del SI *v* = 18 km/h = 5 m/s y *r* = d/2 = 0,5 m.

$$v = \omega\cdot r \Rightarrow \omega = \frac{5\,m/s}{0,5\,m/rad} = 10\,rad/s$$

b. Se utilizan las expresiones que relacionan velocidad angular con la frecuencia y la frecuencia con el periodo.

$$\omega = 2\pi\cdot\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{10\,rad/s}{2\pi\,rad} = 1,59\,s^{-1}\,o\,Hz$$

$$\upsilon = \frac{1}{T} \Rightarrow T = 0,63\,s$$

SOLUCIONES PÁG. 150

22. Teniendo en cuenta que el radio de la Tierra en el ecuador mide 6 378,1 km responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a. ¿Tienen todos los puntos de la superficie terrestre la misma velocidad angular? ¿Y lineal?

b. Calcula la velocidad lineal de un punto situado en el ecuador.

a. Se considera el movimiento de rotación de la Tierra, que es un movimiento circular con velocidad angular constante, puesto que cada 24 h aproximadamente, la Tierra da una vuelta completa. Por tanto, todos los puntos de la superficie terrestre tienen la misma velocidad angular. No ocurre lo mismo con la velocidad lineal que se calcula multiplicando la velocidad angular por el radio. Por eso, la velocidad lineal será máxima en el ecuador donde también lo es el radio y llegará a ser nula en los polos.

b. Se aplica la ecuación que relaciona la velocidad lineal con la angular. El periodo de la Tierra es T = 24 h = 86 400 s

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow v = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \frac{2\pi\ rad}{86\,400\ s} \cdot 6,3781 \cdot 10^6\ m = 463,83\ m/s$$

23. Un ventilador que se pone en marcha y alcanza la velocidad de 100 rpm en 30 s.

a. Calcula la aceleración angular con la que arranca.

b. Si las aspas miden 40 cm, ¿a qué aceleración normal está sometido un punto del extremo del aspa cuando se mueve con la velocidad máxima?

a. Se realiza el cambio de unidades de rpm a rad/s y se aplica el concepto de aceleración angular.

$$\omega_f = 100\ rpm = 100\ rpm \cdot \frac{2\pi\ rad}{revolución} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = 10,47\ rad/s$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t_f - t_0} = \frac{10,47\ rad/s}{30\ s} = 0,35\ rad/s^2$$

b. Se utiliza el concepto de aceleración normal y se calcula el valor de su módulo:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{10,47 rad}{s}\right)^2 \cdot 0,4\ m = 43,85\ m/s^2$$

24. La turbina de un aerogenerador gira con una velocidad angular media de 23 rad/s.

a. Calcula el periodo y la frecuencia.

b. Si la pala del aerogenerador mide 20 m, ¿cuál es la diferencia de aceleración normal entre dos puntos situados a 20 cm y 20 m del eje de giro?

Se aplican las ecuaciones asociadas al movimiento circular:

a.

$$\omega = 2\pi \cdot \upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{23\ rad/s}{2\pi\ rad} = 3,66\ s^{-1}\ o\ Hz$$

$$\upsilon = \frac{1}{T} \Rightarrow T = 0,27\ s$$

b. Se utiliza el concepto de aceleración normal y se calcula el valor de su módulo:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

$$a_n(r = 20\ m) = \left(\frac{23\ rad}{s}\right)^2 \cdot 20\ m = 10\,580,0\ m/s^2$$

$$a_n(r = 20\ cm) = \left(\frac{23\ rad}{s}\right)^2 \cdot 0,2\ m = 105,80\ m/s^2$$

La diferencia será:

$$a_n = 10\,580,0\frac{m}{s^2} - 105,80\frac{m}{s^2} = 10\,474,2\ m/s^2$$

25. Una canica que rueda sobre una mesa de 80 cm de altura y, al llegar al extremo, cae al suelo con una velocidad de 0,1 m/s. Antes de contestar a las siguientes preguntas, explica el movimiento de la canica mediante las ecuaciones correspondientes:

a. ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo? Expresa el vector y calcula el módulo.

b. ¿Qué posición tiene a los 0,15 s de empezar a caer?

El ejercicio se resuelve aplicando los conceptos asociados al lanzamiento horizontal puesto que la canica viene moviéndose sobre la mesa. El estudiante deberá explicar el movimiento de forma equivalente a lo descrito en la pág. 144 del su libro.

a. Se sitúa el sistema de referencia en el suelo. Para poder calcular la velocidad con la que llega al suelo se calcula previamente el tiempo que tarda en caer aplicando la ecuación de la posición del MRUA como en un movimiento de caída libre. La posición inicial en el eje y coincide con la altura desde la que cae: y_0 = 0,8 m, y la posición final es 0.

$$y_f = y_0 - \frac{1}{2}g\cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0,8\ m\cdot 2}{9,8\frac{m}{s^2}}} = 0,4\ s$$

$$v_y = -g\cdot t = -9,8\frac{m}{s^2}\cdot 0,4\ s = -3,92\ m/s$$

El vector velocidad final se escribe en forma de sus componentes cartesianas:

$$\vec{v}_f = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 0,1\vec{i} - 3,92\vec{j}\ m/s$$

El módulo es:

$$\left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{0,1^2 + (-3,92)^2} = 3,92\ m/s$$

b. Para calcular la posición final en el instante solicitado se utilizan las ecuaciones de la posición de MRU en el eje X y de MRUA en el eje Y.

$$x = v_x\cdot t = 0,1\frac{m}{s}\cdot 0,15\ s = 0,015\ m$$

$$y_f = y_0 - \frac{1}{2}g\cdot t^2 = 0,8\ m - 4,9\ \frac{m}{s^2}\cdot(0,15\ s)^2 = 0,69\ m$$

El vector posición se escribe en forma de sus componentes cartesianas:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 0,015\vec{i} + 0,69\vec{j}\ m$$

26. Un avión de pasajeros vuela a 900 km/h en dirección este. La velocidad del viento es de 20 km/h. Determina razonadamente expresando los conceptos que aplicas:

a. Las velocidades de avión si lleva viento de cola o de cara.

b. La velocidad del avión si el viento es cruzado o perpendicular al vuelo.

El movimiento del avión de puede describir como la composición de dos MRU. Se aplica el principio de superposición para calcular la velocidad en cada caso.

a. Las velocidades expresadas en unidades de SI son: v_A = 900 km/h = 250 m/s; v_V = 20 km/h = 5,56 m/s

Si el viento es de cola, las dos velocidades tienen el mismo sentido y se suman para obtener la velocidad final:

$$v_f = v_A + v_V = 250\frac{m}{s} + 5,56\frac{m}{s} = 255,56\ m/s$$

Si el viento es de c ara su velocidad tiene sentido opuesto a la del avión y se le asigna signo negativo:

$$v_f = v_A + v_V = 250\frac{m}{s} - 5,56\frac{m}{s} = 244,44\ m/s$$

b. Si el viento es perpendicular al vuelo, el vector velocidad final se expresa:

$$\vec{v_f} = v_A\vec{i} + v_V\vec{j} = 250\vec{i} + 5,56\vec{j}\ m/s$$

El módulo es:

$$\left|\vec{v_f}\right| = \sqrt{250^2 + 5,56^2} = 250,06\ m/s$$

27. Una lancha que cruza pasajeros de una orilla a otra de un río a 30 km/h, comienza a navegar con un ángulo de 150º para contrarrestar la velocidad de la corriente, que es 1,3 m/s. ¿Es adecuada la dirección de navegación inicial si el pasaje tiene que desembarcar en la otra orilla justo en el punto opuesto al de salida? En caso negativo, realiza los cálculos necesarios para elegir la dirección con la que se habría logrado el objetivo.

La dirección con la que se inicia el movimiento es oblicua, por lo que la velocidad tiene dos componentes v_x y v_y. Si la componente x de la velocidad de la barca se contrarresta con la velocidad del río, la barca realizará su movimiento en el eje Y y los pasajeros llegará a su destino correctamente. Por tanto, se ha de calcular v_x y aplicar el principio de superposición.

v = 30 km/h = 8,33 m/s

$$v_x(barca) = v \cdot \cos cos\ 150° = -7,21\ m/s$$

$$v_{xf} = v_x(barca) + v\,(río) = -7,21\frac{m}{s} + 1,3\frac{m}{s} = -5,91\ m/s$$

Se puede concluir que la dirección no fue adecuada.

Para que lo sea v_x debe tener el mismo valor que la velocidad del río pero con signo opuesto. Esto permite calcular la nueva dirección.

$$v_x(barca) = v\,(río) \Rightarrow -1,3\frac{m}{s} = 8,33 \cos cos\ \alpha\ \frac{m}{s}$$

$$\cos cos\ \alpha = \frac{-1,3}{8,33} = -0,16 \Rightarrow \alpha = (-0,16) = 99,21°$$

28. Un helicóptero que vuela a 230 km/h deja caer un paquete de ayuda humanitaria desde 500 m de altura. Calcula:

a. El tiempo que el paquete tarda en llegar al suelo.

b. La posición en la que cae.

c. La velocidad con la que impacta en el suelo.

El paquete describe un movimiento identificado como lanzamiento horizontal.

a. El tiempo se puede calcular aplicando la ecuación de la posición del MRUA. Se sitúa el sistema de referencia en el suelo.

$$y_f = y_0 - 4,9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0-500\ m}{-4,9\frac{m}{s^2}}} = 10,10\ s$$

b. La posición final en el suelo coincide con el alcance máximo. Se aplica la ecuación de MRU en el eje X, puesto que en esta dirección *v* = cte.

V_x = 230 km/h = 63,89 m/s

$$x_f = x_{máx.} = v_x\cdot t = 63,89\frac{m}{s}\cdot 10,10\ s = 645,29\ m$$

Es adecuado expresar la posición como vector posición con respecto al origen del sistema de referencia. Así, la respuesta es:

$$\vec{r} = 645,29\vec{i}\ m$$

c. La velocidad con la que impacta es un vector oblicuo, que tiene sus componentes v_x y v_y. La primera es constante y la segunda se calcula utilizando la ecuación de la velocidad del MRUA.

$$v_{yf} = v_{y0} - g\cdot t = -9,8\frac{m}{s^2}\cdot 10,10\ s = -98,98\ m/s$$

El vector velocidad es:

$$\vec{v}_f = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 63,89\vec{i} - 98,98\vec{j}\ m/s$$

El módulo es:

$$\left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{63,89^2 + (-98,98)^2} = 117,81\ m/s$$

29. Una esquiadora realiza un salto desde 120 m de altura. Se lanza por una rampa horizontal que abandona con una velocidad de 27 m/s. Si la ladera de la montaña forma un ángulo de 30º con la horizontal, calcula:

a. Las coordenadas del punto en el cae la deportista.

b. La velocidad con la que llega a este punto.

a. La ladera de la montaña es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma con la vertical del punto de lanzamiento, que será el cateto opuesto al ángulo de 30º. El cateto contiguo a ese ángulo coincide con el alcance máximo. Si se ha situado el sistema de referencia en el suelo, bajo el punto de lanzamiento, la coordenada y del punto en el que cae será 0. La coordenada x se calcula por trigonometría.

$$c_{contiguo} = x_{máx.} = \frac{y_0}{30°} = \frac{120\ m}{30°} = 207,85\ m$$

El vector posición del punto en el que cae es:

$$\vec{r} = 207,85\vec{i}\ m$$

b. v_x es constante y utilizando la ecuación de la posición de MRU se calcula el tiempo que tarda en caer porque se conoce el alcance máximo.

$$x_f = x_{máx.} = v_x\cdot t \Rightarrow t = \frac{207,85\ m}{27\ m/s} = 7,7\ s$$

V_y se obtiene utilizando la ecuación de la velocidad de MRUA.

$$v_{yf} = v_{y0} - g \cdot t = -9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 7,7\ s = -75,46\ m/s$$

El vector velocidad es:

$$\vec{v}_f = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 27\vec{i} - 75,46\vec{j}\ m/s$$

Y el módulo es:

$$\left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{27^2 + (-75,46)^2} = 80,14\ m/s$$

30. El agua que sale del caño horizontal de una fuente tarda 0,5 s en caer al sumidero, que está situado a 70 cm de la base de la fuente. Indica realizando los cálculos oportunos:

a. La velocidad con la que el agua sale del caño.

b. La altura a la que está situado el mismo.

c. La velocidad con la que llega al sumidero.

a. Se trata de un movimiento de lanzamiento horizontal. El enunciado aporta los datos del tiempo en el que se produce el movimiento y del alcance máximo, que es la distancia a la que está situado el sumidero de la base de la fuente. Estos datos permiten resolver el apartado:

$$x_f = x_{máx.} = v_x \cdot t \Rightarrow v_x = \frac{0,7\ m}{0,5\ s} = 1,4\ m/s$$

b. Se utiliza la ecuación de la posición del MRUA en el eje Y, sabiendo que, por situar el sistema de referencia en el suelo, en la vertical del punto de salida del agua y_f = 0 m.

$$y_f = y_0 - 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot t^2 \Rightarrow y_0 = 4,9 \frac{m}{s^2} \cdot (0,5\ s)^2 = 1,23\ m$$

c. Se procede como en los ejercicios anteriores.

$$v_{yf} = v_{y0} - g \cdot t = -9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 0,5\ s = -4,9\ m/s$$

$$\vec{v}_f = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = 1,4\vec{i} - 4,9\vec{j}\ m/s$$

$$\left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{1,4^2 + (-4,9)^2} = 5,1\ m/s$$

31. Una alumna que está jugando al futbol en el patio de un centro escolar durante el recreo, chuta un balón con un ángulo de 35º. Desafortunadamente, a 50 m está la valla de protección, de 2,80 m de altura, y el balón pasa por encima. ¿Qué velocidad inicial mínima imprimió la alumna a la pelota?

El problema se resuelve aplicando los conceptos de lanzamiento oblicuo o parabólico. Los datos del enunciado indican unas coordenadas de una posición que debe superar el balón: x = 50 m e y = 2,80 m. Utilizando esos valores en las ecuaciones de posición de MRU en el movimiento del eje X y MRUA en el movimiento del eje Y, generamos un sistema de ecuaciones. Al resolverlo obtendremos la respuesta adecuada.

Situamos el sistema de referencia en el punto de lanzamiento, por lo que la posición inicial del balón es 0.

$$\{x = v_0 \cdot cos\ 35° \cdot t\ y = v_0 \cdot sen\ 35° \cdot t - 4,9 \frac{m}{s^2} t^2$$

$$\{50\,m\,=\,0,82\,v_0{\cdot}t\;2,80\,m\,=\,0,57\,v_0{\cdot}t\;-\;4,9\frac{m}{s^2}\,t^2$$

La solución del sistema es:

$$\frac{t=2{,}55\,s}{v_0=23{,}91\,m/s}$$

La velocidad obtenida es la mínima con la que debe impulsar el balón para que sobrepase la valla.

32. Desde la terraza de dos edificios que distan 7 m el uno del otro, dos amigos se lanzan al mismo tiempo sendas bolas de nieve. Ambos las lanzan con una velocidad de 6 m/s, uno con un ángulo de 30º y el otro con un ángulo de 20º con respecto a la horizontal. Si las bolas están en el aire 1,2 s.

a. ¿Alcanzará cada una la terraza a la que ha sido lanzada?

b. ¿Con qué ángulo máximo deberían haber sido lanzadas para no errar el tiro?

a. El movimiento de las dos bolas es un lanzamiento oblicuo. Bastará calcular el alcance máximo de ambas para saber si alcanzan la terraza de destino.

$$x_{máx}=v_0{\cdot}cos\,30°{\cdot}t\,=\,6\,m/s{\cdot}cos\,30°{\cdot}1,2\,s\,=\,6,24\,m$$
$$x_{máx}=v_0{\cdot}cos\,20°{\cdot}t\,=\,6\,m/s{\cdot}cos\,20°{\cdot}1,2\,s\,=\,6,77\,m$$

Por tanto, ninguna de las bolas llega a su destino.

b. Se conoce el alcance máximo *x* = 7 m y se utiliza la ecuación anterior para obtener el ángulo.

$$cos\,\alpha\;=\;\frac{x_{máx}}{v_0{\cdot}t}=\frac{7\,m}{6\,m/s{\cdot}1{,}2\,s}=0,97\Rightarrow\alpha=0,97\;\;=14,1°$$

33. En 1992, la ciudad de Barcelona acogió los Juegos Olímpicos. Antonio Rebollo fue el arquero encargado de encender el pebetero que dio inicio a las olimpiadas. El deportista estaba situado a 86 m del pebetero cuya altura era de 67 m. Si la flecha tardó 1,5 s en encender la llama y se lanzó desde 1,2 m de altura, ¿cuál fue la velocidad y la dirección con la que se lanzó la flecha?

Se trata de un lanzamiento oblicuo en el que se conocen el tiempo del movimiento *t* = 1,5 s y las coordenadas finales *x* = 86 m e *y* = 67 m. Se sitúa el sistema de referencia en el suelo bajo el punto de lanzamiento, por lo que x_0 = 0 m e y_0 = 1,2 m. A partir de estos datos se establece un sistema de ecuaciones utilizando las ecuaciones de la posición de MRU en eje X y MRUA en eje Y. En él, las incógnitas son v_0 y α.

$$\{x=v_0{\cdot}cos\,\alpha{\cdot}t\;y\;=\;y_0\;+v_0{\cdot}sen\,\alpha{\cdot}t\;-\;4,9\frac{m}{s^2}\,t^2$$

Sustituyendo en ambas ecuaciones:

$$\{86\,m=v_0{\cdot}cos\,\alpha{\cdot}1,5\,s\;67\,m\;=\;1,2\,m\;+v_0{\cdot}sen\,\alpha{\cdot}t\;-\;4,9\frac{m}{s^2}\,(1,5\,s)^2$$

Las soluciones son:

$$\frac{\alpha = 41{,}67°}{v_0 = 76{,}86\ m/s}$$

SOLUCIONES PÁG. 151

34. Un jugador de baloncesto lanza el balón en un tiro libre con una velocidad de 8,2 m/s, un ángulo de 52º y desde una altura de 2,13 m. Si el jugador se encuentra a 4,60 m del tablero y la canasta está situada a 3,05 m del suelo, ¿anotará el punto del tiro libre?

Se aplican los conceptos asociados al movimiento de lanzamiento oblicuo. Con los datos aportados por el enunciado se puede calcular el tiempo que el balón tarda en recorrer la distancia en el eje X (x = 4,60 m) y en el eje Y (y = 3,05 m). Deberá coincidir para anotar el tanto.

$$x = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t \Rightarrow t_x = \frac{x}{v_0 \cdot cos\ \alpha} = \frac{4{,}60\ m}{8{,}2\ m/s \cdot cos\ 52°} = 0{,}91\ s$$

A continuación se estudia la componente Y, para calcular el tiempo que tardaría en alcanzar la canasta en dicho eje:

$$y = y_0 + v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - 4{,}9 \frac{m}{s^2} t^2$$

$$3{,}05\ m = 2{,}13\ m + 8{,}2\ m/s \cdot sen\ 52° \cdot t - 4{,}9 \frac{m}{s^2} t^2$$

La solución anterior tiene dos soluciones que son:

$$t_{y1} = 0{,}16\ s;\ t_{y1} = 1{,}16\ s$$

Ninguno de los valores coincide con el obtenido en el eje X, por lo que el jugador no encesta.

35. En el año 2021, Odei Jainaga alcanzó el récord de España en lanzamiento de jabalina con una marca de 84,80 m. Considerando que el atleta lanzó la jabalina con un ángulo de 35 º y desde una altura de 1,80 m, calcula:

a. La velocidad de lanzamiento.

b. La altura máxima que alcanzó la jabalina.

a. Ejercicio asociado al lanzamiento oblicuo. Se sitúa el sistema de referencia en el suelo, bajo el punto de lanzamiento. Se conoce el alcance máximo, por lo que se utilizará esta ecuación para obtener el valor del tiempo total que la jabalina estuvo en el aire. Sustituyéndolo en la ecuación de MRUA del eje Y, en la que y_f = 0 m para que el movimiento se haya completado, se obtendrá el valor de v_0.

$$x = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t \Rightarrow t_{total} = \frac{84{,}80\ m}{v_0 \cdot cos\ 35°}$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - 4{,}9 \frac{m}{s^2} t^2 \Rightarrow$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$0\ m = 1{,}80\ m + v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot \frac{84{,}80\ m}{v_0 \cdot cos\ 35°} - 4{,}9 \frac{m}{s^2} \left(\frac{84{,}80\ m}{v_0 \cdot cos\ 35°}\right)^2$$

$$v_0 = 29{,}33\ m/s$$

b. En $y_{máx.}$ se cumple $v_y = 0$. Se utiliza la ecuación de MRUA que relaciona la velocidad con la posición

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2\,g\cdot(y_{máx.} - y_0)$$

$$0\,m - [29,33\cdot sen(35°)]^2 = -2\cdot 9,8\frac{m}{s^2}\cdot(y_{máx.} - 1,80\,m)$$

$$y_{máx.} = 16,24\,m$$

36. Dos amigos juegan a tirar piedras al mar desde un acantilado. Uno de ellos lanza horizontalmente con velocidad de 10 m/s, mientras que el otro las tira a 12 m/s formando un ángulo de 20º con la horizontal. si el acantilado tiene una altura de 25 m sobre el nivel del mar, ¿cuál de las piedras cae al agua más lejos?

Para ambos movimientos se sitúa el sistema de referencia en el mar, debajo del punto de lanzamiento. Se debe calcular el alcance máximo de cada uno, utilizando la ecuación de MRU en el eje X. Previamente ha de calcular el tiempo total que cada piedra tarda en caer utilizando la ecuación del MRUA en el eje Y. Al caer al mar, la posición final será $y_f = 0$.

Uno de los movimientos es de lanzamiento horizontal. Las ecuaciones y resultados son:

$$y_f = y_0 - 4,9\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{y_0 - y_f}{4,9\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{25\,m}{4,9\frac{m}{s^2}}} = 2,26\,s$$

$$x_f = x_{máx.} = v_x\cdot t = 10\,m/s\cdot 2,26\,s = 22,6\,m$$

El otro movimiento es lanzamiento oblicuo. Las ecuaciones son:

$$y = y_0 + v_0\cdot sen\,\alpha\cdot t - 4,9\frac{m}{s^2}\,t^2$$

$$0 = 25\,m + 12\cdot sen\,20°\,m/s\cdot t - 4,9\frac{m}{s^2}\,t^2 \Rightarrow t = 2,72\,s$$

$$x_f = x_{máx.} = v_0\cdot cos\,\alpha\cdot t = 11,28\,m/s\cdot 2,72\,s = 30,68\,m$$

Llega más lejos la persona que lanza oblicuamente.

37. Una catapulta de juguete lanza bolas de madera que alcanzan una altura máxima de 20 cm y caen al suelo a 40 cm:

a. ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento?

b. ¿Con qué velocidad son catapultadas las bolas?

c. ¿Qué velocidad llevan las bolas 0,15 s después de lanzarlas?

a. Consideramos que la catapulta lanza las bolas desde el suelo, dado que no se indica otro dato en el enunciado. Por tanto, el movimiento de lanzamiento parabólico es simétrico y se cumple $t_{total} = 2t_{subida}$. Para obtener el ángulo de lanzamiento procedemos como sigue:

En $y_{máx.}$ la velocidad es nula: $v_y = 0$, cuestión que aplicamos en las siguientes ecuaciones:

$$v_f^2 - v_{0y}^2 = -2\,g\,(y_{máx.} - y_0) \Rightarrow y_{máx.} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0\cdot sen\,\alpha)^2}{2g} \Rightarrow 0,4\,m = \frac{(v_0\cdot sen\,\alpha)^2}{g}$$

$$v_f = v_{oy} - g\cdot t_{subida} \Rightarrow t_{subida} = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_0\cdot sen\,\alpha}{g}$$

En el eje X, el alcance máximo se obtiene cuando $t_{total} = 2t_{subida}$, porque el movimiento de lanzamiento parabólico es simétrico en este caso. Por tanto

$$x_{máx.} = v_{0x} \cdot t_{total} = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot 2\,\frac{v_0 \cdot sen\,\alpha}{g} \Rightarrow 0,4\,m = \frac{2\,v_0^2 \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{g}$$

Al igualar y las ecuaciones primera y tercera se obtiene el ángulo.

$$\frac{(v_0 \cdot sen\,\alpha)^2}{g} = \frac{2\,v_0^2 \cdot sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha}{g} \Rightarrow \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \alpha = 2$$

$$\alpha = 2 = 63,43°$$

b. Despejando de una de las ecuaciones anteriores se obtiene la velocidad inicial

$$v_0 = \sqrt{\frac{0,4\,m \cdot 9,8\,m/s^2}{sen^2(63,43°)}} = 2,21\,m/s$$

c. Se calculan las componentes cartesianas de la velocidad, v_x = cte y v_y aplicando la ecuación correspondiente.

$$v_x = v_0 \cdot cos\,\alpha = 2,21 \cdot cos\,63,43\,m/s = 0,99\,m/s$$

$$v_y = v_0 \cdot sen\,\alpha - g \cdot t = 2,21 \cdot sen\,63,43\,m/s - 9,8\,m/s^2 \cdot 0,15\,s = 0,51\,m/s$$

La velocidad se expresa como:

$$\vec{v_f} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = 0,99\vec{i} + 0,51\vec{j}\,m/s$$

El módulo es:

$$\left|\vec{v_f}\right| = \sqrt{0,99^2 + 0,51^2} = 1,11\,m/s$$

38. Un aspersor de riego expulsa agua a una velocidad de 3 m/s. Si la inclinación con la que lanza el agua puede oscilar entre 3º y 37,5º, calcula la superficie de riego teniendo en cuenta que el aspersor gira dando vueltas completas.

Se aplican los conceptos del lanzamiento parabólico porque es el movimiento que realiza el agua al salir del aspersor con un cierto ángulo. Situamos el sistema de referencia en el lugar del suelo en el que está situado el aspersor. Obtendremos para ambos ángulos, el tiempo que el agua tarda caer al suelo y lo utilizaremos para obtener el alcance máximo.

Para el ángulo de 3º:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{v_o \cdot sen\,\alpha}{4,9} = \frac{3\,sen\,3°\,m/s}{4,9\,m/s^2} = 0,03\,s$$

$$x_{máx.} = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t = 3 \cdot cos\,3°\,m/s \cdot 0,03\,s = 0,09\,m$$

Para el ángulo de 37,5º:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{v_o \cdot sen\,\alpha}{4,9} = \frac{3\,sen\,37,5°\,m/s}{4,9\,m/s^2} = 0,37\,s$$

$$x_{máx.} = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t = 3 \cdot cos\,37,5°\,m/s \cdot 0,37\,s = 0,88\,m$$

La superficie de riego será la diferencia entre las dos superficies circulares cuyos radios son los alcances máximos anteriores.

$$S_{riego} = \pi\left[(0,88\,m)^2 - (0,09\,m)^2\right] = 2,41\,m^2$$

39. En el acto de graduación, una estudiante de física lanza al aire su birrete con intención de que lo recoja su amiga, que se encuentra a 5 m de distancia. Si desde que lo lanza hasta que la amiga lo recoge pasan 2,7 s, ¿a qué velocidad y con qué ángulo arrojó su birrete? Supón que el lanzamiento y la recogida se producen a la misma altura.

Se sitúa el sistema de referencia de este lanzamiento oblicuo en el punto de lanzamiento por lo que la posición inicial es $x_0 = y_0 = 0$. Se conocen el alcance máximo y el tiempo total del movimiento del birrete. Se plantean las ecuaciones de los movimientos MRU y MRUA de ejes X e Y, respectivamente, y se resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\{x = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot t \; y = v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot t - 4,9 \frac{m}{s^2} t^2$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$\{5\,m = v_0 \cdot cos\,\alpha \cdot 2,7\,s \; 0 = v_0 \cdot sen\,\alpha \cdot 2,7\,s - 4,9 \frac{m}{s^2} (2,7s)^2$$

Las soluciones son:

$$\frac{\alpha = 82,04°}{v_0 = 13,36\,m/s}$$

40. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones relativas al lanzamiento oblicuo:

a. El ángulo de lanzamiento no influye en la altura máxima que alcanza el objeto.

b. La altura máxima que alcanza el objeto es la misma que si se hubiera lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad igual al valor de la componente *Vy*.

c. El alcance máximo se calcula aplicando las ecuaciones de MRUA.

d. En todos los lanzamientos oblicuos el tiempo que el objeto permanece en el aire es siempre el doble del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima.

a. Falso: El ángulo influye en el valor de v_{0y} a través de la razón trigonométrica seno. Cuando mayor es el ángulo, mayor es el valor de v_{0y} y, en consecuencia, mayor es la altura alcanzada.

b. Verdadero, porque el lanzamiento parabólico es un movimiento que resulta de la composición de otros dos: uno en el eje Y, que responde a un lanzamiento vertical hacia arriba.

c. Falso: El movimiento realizado en el eje X tiene velocidad constante, por lo que las ecuaciones serían MRU.

d. Falso: Sólo será así cuando el punto de lanzamiento y la posición de caída estén a la misma altura, porque el movimiento será simétrico. En caso contrario no se cumplirá la afirmación.

41. Una jugadora de futbol lanza un penalti imprimiendo al balón una velocidad de 80 km/h con un ángulo de 10º con respecto a la horizontal. El punto de penalti está a 11 m de la línea de la portería, cuya altura reglamentaria es de 2,44 m. Suponiendo que la portera del equipo yerra al saltar para atrapar el balón, ¿subirá el tanto al

marcador? Demuéstralo aplicando el procedimiento adecuado y los cálculos oportunos.

Se trata de un lanzamiento oblicuo del que se conoce v_0 = 80 km/h = 22,22 m/s, el ángulo de lanzamiento y el alcance máximo $x_{máx.}$ = 11 m. Se utiliza la ecuación de la posición del MRU para obtener el tiempo que el balón tarda en alcanzar la distancia máxima. El dato obtenido se utiliza en la ecuación de la posición del MRUA para obtener la altura a la que se encuentra en ese instante. Si la altura es inferior a la de la portería habrá gol.

$$x_{máx.} = v_0 \cdot cos\ \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x_{máx.}}{v_0 \cdot cos\ \alpha} = \frac{11\ m}{22{,}22 \cdot cos\ 10°\ m/s} = 0{,}5\ s$$

$$y = v_0 \cdot sen\ \alpha \cdot t - 4{,}9 \frac{m}{s^2} t^2 \Rightarrow$$

$$y = 22{,}22 \cdot sen\ 10°\ m/s \cdot 0{,}5\ s - 4{,}9 \frac{m}{s^2} \cdot (0{,}5 s)^2 = 0{,}7\ m$$

La posición del balón en línea de portería es:

$$\vec{r}_f = x\vec{i} + y\vec{j} = 11\vec{i} + 0{,}7\vec{j}\ m$$

Como la portera ha errado el salto, la jugadora habrá marcado gol.