

YAADANNOO GABAABAA
KAALKULASII (MATH 261)

BOQONNAA 1

LIMIITII FI ITTIFUFIINSA

Kaayyoolee:

Xumura boqonnaa kanaatti kaadhimamtoonni barsiisotaa:

- Hiikoo waaltawaa limiitii ni kennu.
- Jiraachu limiitii ϵ, δ itti fayyadamuun ni mirkaneessuu.
- Limiitii ni shallagu.
- Ittifufaa ta'uu fi dhiisuu fankishinii kennamee ni ibsu.

1.1 Hiikoo Waaltawaa Limiitii:

Mee fankishiniin f intarvaalii a qabate a osoo hin dabalatiin irratti hiika qabeessa haa ta'u.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ jechuun

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ kan yoo $0 < |x - a| < \delta$ ta'e, $|f(x) - L| < \epsilon$ taasisu jechuudha.

Kana jechuun : $-\delta < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$

Yoo kun dhugaa ta'e, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ta'a.

kana keessatti:

$|x - a|$ - fageenya x hanga a tiiti fi $|f(x) - L|$ - fageenya $f(x)$ hanga L tti jiru kan agarsiisani dha.

1.2 Fakkeenya Limiitotaa

Fakkeenya 1. Kanneen armaan gadii hiikoo waaltawaa limiitiitti fayyadamuun mirkaneessi.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 2 = 1$

Furmaata: a) $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$ ta'uu isaa mirkaneessuuf:

Lakkofsa $\epsilon > 0$ kamiifuu lakkoofsa $\delta > 0$ kan $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \epsilon$ dhugoomsu argachuu qabna.

Amma mee $\epsilon > 0$ haa fudhannu.

$$|4x - 5 - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < \epsilon \text{ akka ta'uuf, } \delta = \frac{\epsilon}{4} \text{ yoo filanne gahaadha.}$$

Kanuma irraa:

$$\text{Yoo } 0 < |x - 3| < \delta \text{ ta'e, } |4x - 5 - 7| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon \text{ ta'a.}$$

$$\therefore 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |4x - 5 - 7| < \epsilon$$

Kanaafuu, $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5 = 7$ ta'a.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 2 = 1$ ta'uu isaa mirkaneessuuf:

Lakkofsa $\epsilon > 0$ kamiifuu lakkoofsa $\delta > 0$ kan $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \epsilon$ dhugoomsu argachuu qabna.

Ammaa mee $\epsilon > 0$ haa fudhannu.

$|3x - 2 - 1| = |3x - 3| = 3|x - 1|$ akka ta'uuf, $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ filachuun gahaadha.

Kanuma irraa:

Yoo $0 < |x - 1| < \delta$ ta'e, $|3x - 2 - 1| = 3|x - 1| < 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon$ ta'a.

$\therefore 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |3x - 2 - 1| < \epsilon$

Kanaafuu, $\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 2 = 1$ ta'a.

1.3. Tiiramoota Bu'uura Limiitii

Tiiramii 1.1 Faankishiniin f tuqaa a irrattii limiitii yoo qabaate, tokko qofa qabaata; kana jechuun : yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ ta'e, $L = M$ ta'a.

Mirkana: Mee $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ haa ta'u. Mee $\epsilon > 0$ kamiyyuu haa fudhaannu.

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ fi $\exists \delta_2 > 0$ kan :

$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ fi $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon$ taasisan hiikoo limiitii tiin ni arganna.

Amma $|L - M| = |L - M - f(x) + f(x)| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M|$
 $< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

$\therefore |L - M| = 0$

$\Rightarrow L - M = 0$

$\Rightarrow L = M$

Kanaafuu, tiiramichi dhugaadha.

Tiiramii 1.2 (Tiiramii Ida'amaa)

Fankishinoota f fi g tiif , yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ta'an

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$ ta'a.

Mirkana:

Mee lakkoofsa $\epsilon > 0$ kamiyyuu haa fudhannu.

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ fi $\exists \delta_2 > 0$ kan :

$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ fi $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ taasisan hikoo

limiitii tiin ni arganna. Amma mee $\delta = \text{xiqqaa}\{\delta_1, \delta_2\}$ haa ta'u.

Kanumarraa $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)|$
 $= |f(x) - L + g(x) - M|$
 $\leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$
 $< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\therefore \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Tiiramii 1.3 (Limiitii Baayi'ataa Lakkoofsa Dhaabbataa)

Yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $c \in \mathbb{R}$ ta'an, $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$ ta'a

Mirkana:

I. Yoo $c = 0$ ta'e, gamni lachuu 0 waan ta'eef ifaadha.

II. Yoo $c \neq 0$ fi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ta'e, mee lakkoofsa $\epsilon > 0$ haa fudhannu.

$\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ waan ta'eef, lakkoofsi $\delta > 0$ kan $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$ taasisu ni arganna.

Kanuma irraa $|cf(x) - cL| = |c||f(x) - L| < |c|\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$ ni ta'a.

Kanaafuu, $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$ ta'a.

Tiiramii 1.4 (Tiiramii Baayi'ataa Limiitiif)

Fankishinoota f fi g tiif, yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ta'an, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM$ ta'a.

Mirkana:

Tiiramii kana salphaatti mirkaneessuuf akka nu gargaaru dura leemaa ("lemma") itti aanu mirkana isaa malee ibsuun barbaachisaadha.

Leemaa 1.1 Fankishinoota f fi g tiif, yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ fi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ta'an, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$ ta'a.

Amma mee lakkoofsa $\epsilon > 0$ haa fudhannu. Waan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ fi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ta'aniif, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ fi $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - M) = 0$ ta'u. Maaliif?

$f(x)g(x) = (f(x) - L)(g(x) - M) + Mf(x) + Lg(x) - LM$, maalif?
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0 + ML + LM - LM = LM$.

Tiiramii 1.5 (Tiiramii Iskiwiiziingii)

I'n intarvaalii fi $a \in I$ ta'e, gatii $x \in I$, a osoo hin dabalatiin fankishinootni f, g fi h hariiroo $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ haa qabaatanu.

Yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ ta'e, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ta'a

Mirkana:

Mee lakkoofsa $\epsilon > 0$ kamiyyuu haa fudhannu.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ kan $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ fi $|h(x) - L| < \epsilon$ taasisu hiikoo limiitii tiin ni arganna. Kanuma irraa hariiroo

$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$ ni arganna.

$\Rightarrow L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$

Kanaafuu $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ta'a.

Tiiramii 1.6 (Tiiramii Hiruu Limiitiif)

Fankishinoota f fi g tiif, yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ fi $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $M \neq 0$ ta'an,

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ta'a.

Mirkana:

Mirkana tiiramii kanaatiif leemaawwan lamaan armaan gadii waan nu barbaachisanuuf mirkana isaanii malee itti aanutti ibsamaniiru.

Leemaa1.2 Fankishinii g tiif yoo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $M > 0$ ta'e, lakkoofsi $\delta > 0$ kan $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) > \frac{M}{2}$ taasisu ni jiraata.

Leemaa1.3 Fankishinii g tiif yoo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, $M < 0$ ta'e, lakkoofsi $\delta > 0$ kan $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow g(x) < \frac{M}{2}$ taasisu ni jiraata.

Amma gara mirkana tiiramichaatti yoo deebinu; **Leemaa1.2** fi **Leemaa1.3** irraa lakkoofsa $\delta > 0$ kan $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > \left| \frac{M}{2} \right|$ taasisu ni arganna.

$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} \Rightarrow \frac{1}{|Mg(x)|} < \frac{2}{M^2}$

Amma,

$0 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| = \left| \frac{Mf(x) - Lg(x)}{Mg(x)} \right| \leq \frac{|Mf(x) - Lg(x)|}{|Mg(x)|} \left(\frac{1}{|Mg(x)|} \right) \leq |Mf(x) - Lg(x)| \left(\frac{1}{M^2} \right)$ ta'a.

$\therefore \lim_{x \rightarrow a} 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a} |Mf(x) - Lg(x)| \left(\frac{2}{M^2} \right)$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| \leq 0. \text{ Maaliif?}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right) = 0. \text{ Maaliif?}$$

$$\text{Kanaafuu, } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ ta'a.}$$

Tiiramii 1.7 (Tiiramii bakka buusuu Limiitiif)

Mee I 'n intarvaalii banaa a hammate haa ta'u. Fankishiniin f intarvaalicha irraatti a osoo hin dabalatiin $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ fi $f(x) \neq c$ haa ta'u. Dabalataanis fankishiniin g ; $\lim_{y \rightarrow c} g(y) = L$ yoo ta'e, $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L = \lim_{y \rightarrow c} g(y)$ ta'a.

Mirkana:

Mee $\epsilon > 0$ fi $\lim_{y \rightarrow c} g(y) = L$ haa ta'an.

$\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ kan $0 < |y - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - L| < \epsilon$ taasisu ni arganna. Waan

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ fi $\delta_1 > 0$ ta'eef, lakkoofsa $\delta > 0$ kan

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \delta_1$ taasisu ni arganna.

$\Rightarrow |g(f(x)) - L| < \epsilon$ ta'a. Kanaafuu, $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$ dhugaa ta'a

1.4. Ittifufiinsa Fankishinii

Hiikoo: i) Yoo fankishinii f $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = f(a)$, $L \in \mathcal{R}$ ta'e, f' 'n gama mirgaa a tiin ittifufaa jedhama.

ii) Yoo $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = f(a)$, $L \in \mathcal{R}$ ta'e, f' 'n gama bitaa a tiin ittifufaa jedhama.

iii) Yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ta'e, f' 'n a irratti ittifufaadha jedhama.

Tiiramii 1.8 (Tiiramii Gatii Gidduu)

Fankishiniin f $[a, b]$ irratti itti fufaa fi $f(a) \leq P \leq f(b)$ yoo ta'e, $\exists c \in [a, b]$ kan $f(c) = P$ taasisu ni jira.

Mirkana:

i) Yoo $f(a) = P$ ykn $f(b) = P$ ta'e dhume (waan $a = c$ ykn $b = c$ ta'uuf).

ii) Mee $f(a) < P < f(b)$ haa ta'u

Mee $S = \{x | x \in [a, b], f(x) < P\}$ haa ta'u. Waan $a \in S$ ta'eef $S \neq \emptyset$ ta'a. Kanuma irraa b' 'n daangaa irraa S ti (waan $f(b) > P$ fi $a < b$ ta'eef).

$\Rightarrow S'$ 'n DIX ni qabaata. Maaliif? Innis mee c ha ta'u. Kan Agarsiisuu Barbaannu $f(c) = P$ ta'uu isaa ti.

a) Mee $f(c) < P$ haa ta'u. Waan f' 'n c irratti ittifufaa ta'eef, $\exists \delta > 0$ kan $\forall x \in (c, c + \delta)$ tiif $f(x) < P$ taasisu.

$$\Rightarrow f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < P$$

$$\Rightarrow c + \frac{\delta}{2} \in S$$

$\therefore c'$ 'n DIX S hin ta'u.

$$\therefore f(c) \not< P \dots (1)$$

b) Mee $f(c) > P$ haa ta'u. Waan f' 'n c irratti itti fufaa ta'eef, $\exists \delta > 0$ kan $\forall x \in (c - \delta, c)$ $f(x) > P$ taasisu ni jiraata.

Amma, waan c' 'n DIX S ta'eef, $\exists t \in S$ kan $c - \delta < t < c$ ta'ee fi

- $f(t) > P$ taasisu (waan $t \in (c - \delta, c)$ ta'eef)

- $f(t) < P$ taasisu (waan $t \in S$ ta'eef)

Kun immoo **soba** ta'a.

$$\therefore f(c) \not> P \text{ ta'a} \dots (2)$$

(1) fi (2) irraa $f(c) = P$ ta'a.

Fakkeenya 3. Lakkoofsi poozatiivii kamiyyuu iskuweer ruutii qabachuu isaa agarsiisi.

Furmaata: Mee $P \geq 0$ kamiyyuu haa fudhaanu.

Amma mee $f(x) = x^2$ haa ta'u.

$$\Rightarrow f(0) = 0 \leq P \leq P^2 + 2P + 1 = (P + 1)^2 = f(P + 1)$$

$$\Rightarrow f(0) \leq P \leq f(P + 1)$$

Tiiramii Gatii Gidduutiinn $\exists c \in [0, P + 1]$ kan $f(c) = c^2 = P$ taasisu.

$\Rightarrow P$ 'n iskuweer ruutii ni qaba.

Fakkeenya 4. Lakkoofsi waliigalaa kamiyyuu kiyuub ruutii qabaachuu isa agarsiisi.

Furmaata: a) Mee $P \geq 0$ fi $f(x) = x^3$ haa ta'an.

$$\Rightarrow f(0) = 0^3 = 0 \leq P \leq P^3 + 3P^2 + 3P + 1 = f(P + 1) \text{ ta'a.}$$

$$\Rightarrow f(0) \leq P \leq f(P + 1)$$

Tiiramii Gatii Gidduutiinn $\exists c \in [0, P + 1]$ kan $f(c) = c^3 = P$ taasisu.

b) Mee $P \leq 0$ fi $f(x) = x^3$ haa ta'an

$$\Rightarrow f(x) = 0^3 \geq P \geq f(P - 1)$$

Tiiramii Gatii Gidduutiinn $\exists c \in [P - 1, 0]$ kan $f(c) = c^3 = P$ taasisu.

(1) fi (2) irraa himichi dhugaa ta'a.

Mirkana Hubannoo Boqonnichaa

Gaaffilee armaan gadii tiif yoo deebiin kee "eeyyen" ta'e mallattoo '✓' yoo "Lakki" ta'e "×" iddoo kenname irratti kaa'i.

1. Hiikoo waaltawaa limiitii ni kennitaa? . . . ☐
2. Dhugaa ta'uu limiitii kennamee $\in, \delta$ tti fayyadamuun ni mirkaneessitaa? . . . ☐
3. Limiitii shallaguu ni dandeessaa? . . . ☐

Gilgaala Boqonnaa

1. Himamootni armaan gadii yoo sirrii ta'an 'Dhugaa' yoo sirrii ta'uu baatan "soba" jechuun deebisi.

a) Yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ta'e, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = L$ ta'a.

b) Yoo $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = L$ ta'e, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ta'a.

c) Yoo $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ta'e, yoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ta'a.

d) Fankishiniin $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 2$ irratti ittifufaadha.

2. Limiitotni armaan gadii yoo jiraatan barbaadi

a. $\lim_{x \rightarrow 3} 4x - 5$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{5 - x} - 2}$

$$\begin{aligned} \text{g. } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x}-3}{x} \\ \text{h. } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

3. Yoo $a, L \in \mathbb{R}$ fi f fankishinii ta'e, hiikoo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ kenni.

4. Sirrii ta'uu limiitota armaan gadii ε, δ tti fayyadamuun mirkaneessi.

- a. $\lim_{x \rightarrow a} c = c, \quad a, c \in \mathbb{R},$
- b. $\lim_{x \rightarrow a} x = a,$
- c. $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1,$
- d. $\lim_{x \rightarrow a} cx = ca$
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
- f. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- g. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$
- h. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

BOQONNAA 2

DARIVEETIVOOTA

Kaayyoolee:

Xumura boqonnaa kanaatti kaadhimamtoonni barsiisotaa:

- Hiikoo dariveetiivii fankishinii ni kennu.
- Fankishinii kenname ni dariveetiveessuu.

2.1 Hiikoo Dariveetiivii

Hiikoo: Yoo a miseensa mandhee f ta'e, ibsamni bifa:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

tiin kenname dariveetiivii f tuqaa a irratti jedhama.

Fakkeenya 1. Yoo $f(x) = x^3$ ta'e, $f'(1)$ barbaadi.

Furmaata: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3$ ta'a.

Tiiramii 2.1

Fankishinoonni f fi g tuqaa a irratti dariveetivawoo fi $k \in \mathbb{R}$ yoo ta'an:

- I. $(kf)'(a) = kf'(a)$
- II. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- III. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
- IV. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}, g(a) \neq 0$

Tiiramii 2.2(Seera Walqabataa)

Fankishiniin f tuqaa a irratti dariveetivawaa, fankishiniin g tuqaa $f(a)$ irratti dariveetivawaa yoo ta'e, $g \circ f$ tuqaa a irratti dariveetivawaa fi $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ ta'a.

Fakkeenya 2. yoo $f(x) = x^n$, ta'e, $f'(x)$ barbaadi.

Furmaata: $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$
 $= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x}$
 $= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t - x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{t - x}$
 $= \lim_{t \rightarrow x} (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})$
 $= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}$
 $= nx^{n-1}$

Fakkeenya 3. Yoo $f(x) = |x - 2|$ ta'e, $f'(2)$ ni jiraataa? Ibsa kenni

Furmaata: Waan $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$ ta'eef, $f'(2)$ hin jiratu

2.2 Dariveetivoota Olaano

Hiikoo: Yoo f 'n fankishinii tuqaa a irratti dariveetivoota olaano qaba ta'e:

$$f^1(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \text{ -dariveetiivii } 1^{\text{faa}}$$

$$f^2(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f^1(x) - f^1(a)}{x - a} \right) \text{ -dariveetiivii } 2^{\text{faa}}$$

$$f^3(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f^2(x) - f^2(a)}{x - a} \right) \text{ -dariveetiivii } 3^{\text{ffaa}}$$

$$f^n(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(a)}{x - a} \right), n \in \mathbb{N} \text{ -dariveetiivii } n^{\text{ffaa}} \text{ tuqaa } a \text{ irratti jedhamuun beekamu.}$$

Fakkeenya 4. Dariveetivoota olaanoo shanan duraa fankishinoota armaan gadii barbaadi.

a. $f(x) = \sin x$

b. $f(x) = x^4 + 10x$

Furmaata:

a. $f(x) = \sin x :$

$$f^1(x) = \cos x, f^2(x) = -\sin x, f^3(x) = -\cos x, f^4(x) = \sin x, f^5(x) = \cos x \text{ ta'u.}$$

b. $f(x) = x^4 + 10x:$

$$f^1(x) = 4x^3 + 10, f^2(x) = 12x^2 + 0, f^3(x) = 24x, f^4(x) = 24, f^5(x) = 0 \text{ ta'u.}$$

2.3 Dariveetiveessuu Walqabataa

Himni walqixaa tokko jijjiiramtoota tokko ol ta'an irratti kan hundaa'e ta'uu ni mala.

Fakkeenyaaf, himni walqixaa $3xy = x^2 + y^2$ kan jijjiiramtoota lama x fi y irratti hundaa'edha.

Hima kana keessatti jijjiiramaa tokko isaa biraa tiin ibsuun rakkisaadha. Dariveetiiviin fankishinii bifa kanaan ibsamee *dariveetivii walqabataa* yoo jedhamu adeemsii dariveetiveessuu isaa *dariveetiveessuu walqabataa* jedhama.

Fakkeenya 5. $3xy = x^2 + y^2$ tiif $\frac{dy}{dx}$ barbaadi.

Furmaata: $3y + 3x \frac{dy}{dx} = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$. Maalif?

$$3x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3y}{3x-2y}$$

2.4 Reetiiwwan Walqabatan

Jijjiiramni wantootaa kan jijjiirama yerootiin walqabate *reetii* jedhama

Fakkeenya 6. Yoo $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ ta'e, $\frac{dv}{dt}$ barbaadi.

Furmaata: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt}$, maalif?

$$= 3 \times \frac{4}{3}\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Fakkeenya 7. Raadiyeesiin afuuffee bifa dhuqunqulaa qabuu tokko daqiiqaa tokko keessatti $0.25m$ hir'achaa deema. Qabeen afuuffee kanaa wayita raadiyeesiin isaa $4m$ ta'u reetii hammamiin hir'achaa deema?

Furmaata:

Kennama: $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$r = 4m$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.25m/daq$$

Kan barbaadamu: $\frac{dv}{dt} = ?$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi(4m)^2 (0.25m/daq)$$

$$= 16\pi m^3/daq$$

Mirkana Hubannoo Boqonnichaa

Gaaffilee armaan gadii tiif yoo deebiin kee "eeyyen" ta'e mallattoo '✓' yoo "Lakki" ta'e "×" iddoo kenname irratti kaa'i.

1. Hiikoo dariveetiivii fankishinii ni kennitaa? . . . ☐
2. Dariveetiivii fankishinii tuqaa kenname irratti shallaguu ni dandeessaa? . . . ☐
3. Reetiiwwan adda addaa shallaguu ni dandeessaa? . . . ☐

Gilgaala Boqonnaa

1. Kanneen armaan gadii dariveetiveessi.
 - a. $g(x) = x\sqrt{x^3 - 5}$
 - b. $h(x) = \sin x \cos x + 3x$
2. Dariveetivoota sadan duraa $h(x) = 2x + 6$ barbaadi.
 $h^2(x) = h^3(x) = 0$
3. Kann armaan gadii tiif $\frac{dy}{dx}$ barbaadi.
 - a. $2x^3 + 5xy + y^2 = 5x - 7$

BOQONNAA 3

FAAYIDAALAA DARIVEETIIVII

Kaayyoolee:

Xumura boqonnaa kanaatti kaadhiamtoonni barsiisotaa:

- Gatiilee fiixee ni shallaguu.
- pirobileemoota jechaa gatiilee fiixee irratti hundaa'an ni furu.

3.1 Gatiilee Fiixee

Tiiramii 3.1 (Tiiramii Gatiilee Fiixee)

Yoo fankishiniin f intarvaalii cufaa $[a, b]$ irraatti ittifufaa ta'e, f 'n $[a, b]$ irratti gatii guddaa fi gatii xiqqaa ni qabaata. Tiiramii kana mirkaneessuun sadarkaa koorsii kanaa ol waan ta'eef, osoo hin mirkaneessin ittifayyadamna.

Tiiramii 3.2 Mee fankishiniin f intarvaalii cufaa $[a, b]$ irratti ittifufaa fi intarvaalii banaa (a, b) irratti dariveetivawaa haa ta'u. Yoo f 'n $c \in (a, b)$ irratti gatii fiixee qabaate, $f'(c) = 0$ ta'a.

Mirkana:

Mee f 'n c irratti gatii guddaa ni qaba haa jennu.

$$\Rightarrow f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in (a, b)$$

Waan $f'(c)$ 'n jiraateef; yoo $x \in (a, b)$ fi $x < c$ ta'e,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{fi yoo } x > c \text{ ta'e, } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \text{ ta'a.}$$

Kannafuu, $0 \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ ta'a.

$$\therefore f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = 0$$

Tiiramii 3.3 (Tiiramii 'Rolle')

Mee fankishiniin f intarvaalii cufaa $[a, b]$ irratti ittifufaa fi intarvaalii banaa (a, b) irratti dariveetivawaa haa ta'u. Yoo $f(a) = f(b)$ ta'e, lakkoofsi $c \in (a, b)$ kan $f'(c) = 0$ taasisu ni jiraata.

Mirkana: 1. Mee f 'n $[a, b]$ irratti dhaabbataa haa ta'u.

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

2. Yoo f 'n dhaabbataa ta'uu baate, $[a, b]$ irratti ittifufaa waan ta'ee **Tiiramii 3.1** 'n gatiilee fiixee ni qabaata.

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ kan } f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in [a, b] \text{ taasisu.}$$

$$\Rightarrow f'(c) = 0 \quad (\text{Tiiramii 3.2' n})$$

Tiiramii 3.4 (Tiiramii Gatii Qixxoomaa)

Mee fankishiniin f intarvaalii cufaa $[a, b]$ irratti ittifufaa fi intarvaalii banaa (a, b) irratti dariveetivawaa haa ta'u. Lakkoofsi $c \in (a, b)$ kan $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dhugoomsu yoo xinnate tokko ni jiraata.

Mirkana : Tiiramii 3.3tti fayyadamuun mirkaneessi.

Tiiramii 3.5 (Yaalii dariveetivii I)

Mee f 'n intarvaalii I irratti ittifufaa fi $c \in I$ haa ta'an.

- I. Yoo f' 'n c irratti poozatiivii irraa gara negaatiiviitti jijjiirama ta'e, $f(c)$ 'n I irratti gatii guddaa naannoo f ta'a
- II. Yoo f' 'n c irratti negaatiivii irraa gara poozatiiviitti jijjiirama ta'e, $f(c)$ 'n I irratti xiqqaa naannoo f ta'a

Fakkeenya 1. Yoo $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ ta'e, intarvaalota f 'n irratti gatiilee fiixee horatu adda baasuun ibsi,

Furmaata: $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$$

$$\frac{3x^4 - 3}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^4 - 3 = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

kanuma irraa

$f'(x) \geq 0 \forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ fi $f'(x) \leq 0 \forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ yoo ta'u, f' 'n -1 irratti poozatiivii irraa gara negaatiiviitti fi 1 irratti negaatiivii irraa gara poozatiiviitti jijjirame. Kanaafuu $f(-1) = -4$ gatii guddaa naannoo fi $f(1) = 4$ gatii xiqqaa naannoo f ta'u.

Tiiramii 3.6 (Yaalii Dariveetiivii II)

Mee fankishiniin f $c \in I$ irratti dariveetivawaa fi $f(c) = 0$ haa ta'u.

I. Yoo $f^2(c) < 0$ ta'e, $f(c)$ 'n gatii guddaa naannoo f ta'a.

II. Yoo $f^2(c) > 0$ ta'e, $f(c)$ 'n gatii xiqqaa naannoo f ta'a

Fakkeenya 2. Akkuma armaan oliitti ibsame yoo $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ ta'e, $f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$ ta'a.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1 \text{ fi } f^2(x) = \frac{6x^4 + 6}{x^3} \text{ ta'u.}$$

Kanuma irraa:

$f^2(-1) = -12 < 0$ waan ta'eef $f(-1) = -4$ gatii guddaa naannoo fi $f^2(1) = 12 > 0$ waan ta'eef $f(1) = 4$ gatii xiqqaa naannoo ta'a.

Fakkeenya 3. Reektaangiliin naaannawaan isaa $24cm$ ta'e roga isaa tokko irra naannessuun siliindarii sirriin uumame. Reektaangiloota kanneen keessaa kan siliindarii qabee guddaa qabu uumu barbaadi.

Furmaata: Mee dheerinnii fi oleen reektaangilichaa x fi y haa ta'an.

$$\Rightarrow x \in (0, 12) \text{ fi } 2x + 2y = 24cm \text{ ta'u.}$$

$$\Rightarrow y = 12 - x$$

Yoo oleen siliindarichaa y ta'e, naannawaan hundee isaa x ta'a.

$$\Rightarrow 2\pi r = x, r' \text{ n raadiyeessii hundee isaa yoo ta'e.}$$

$$\Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \text{ fi } v = \pi r^2 y = \pi \left(\frac{x^2}{4\pi^2} \right) (12 - x) \text{ ta'u. Yoo qabee siliindarichaa akka fankishiniitti}$$

$$\text{fudhanne, } f(x) = \pi \left(\frac{x^2}{4\pi^2} \right) (12 - x) \text{ arganna.}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{24x - 3x^2}{4\pi}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 8$$

$$\Rightarrow x = 8, \text{ maaliif?}$$

$$\Rightarrow y = 4, \text{ maaliif?}$$

Kanaafuu, reektaangilichi kan oleen isaa $4cm$ fi dheerinni isaa $8cm$ ta'e ta'uu qaba.

Mirkana Hubannoo Boqonnichaa

Gaaffilee armaan gadii tiif yoo deebiin kee "eeyyen" ta'e mallattoo '✓' yoo "Lakki" ta'e "×" iddoo kenname irratti kaa'i.

1. Gatiilee fiixee fankishinii shallaguu ni dandeessaa? . . . $\square$
2. Dariveetiiviitti fayyadamuun pirobileenota jechaa gatiilee fiixee irratti hundaa'an furuu ni dandeessaa? . . . $\square$

Gilgaala Boqonnaa

1. Fankishinoota armaan gadii tiif gatiilee guddaa fi xiqqaa barbaadi.
 - a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 10$
 - b. $f(x) = x + \frac{4}{x}$
 - c. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$
 - d. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$

BOQONNAA 4

INTEEGIRAALII FI FAYYADAMA

Kaayyoolee:

Xumura Boqonnaa Kanaatti Kaadhimamtoonni Barsiisotaa:

- Hiikoo inteegiraalii murtaa'oo ni kennu
- Gatii inteegraalii kennamee ni barbaadu.
- Inteegiraalii murtaa'ootti fayyadamuu bal'inaa fi qabee ni shallagu.

4.1 Ida'ama Xiqqaa fi Iada'ama Guddaa

Hiikoo: Mee f 'n intarvaalii cufaa $[a, b]$ irratti fankishinii ittifufaa fi kan gatiin isaa negaatiivii hin taane haa ta'u. Mee S'_n bal'insa giraafii f , sararoota olee $x = a, x = b$ fi siiqqee x tiin daangeeffame yoo ta'e, bal'inni isaa, $B(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$ ta'a. kana keessatti:

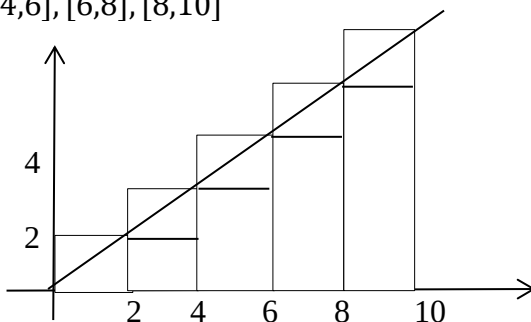
$z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ fi $\Delta x = \frac{b-a}{n}, n \in \mathbb{N}$ ta'u.

Fakkeenya 1. Bal'ina bal'iinsa siiqqee X fi giraafii $f(x) = x$ gidduutti $[0, 10]$ irratti daangefamee intarvaalota xixiqqaa walqixaa:

- i) 5 tti hiruun tilmaami.
- ii) 10 tti hiruunu tilmaami.

i) $\Delta x = \frac{10-0}{5} = 2$ fi $[0, 2], [2, 4], [4, 6], [6, 8], [8, 10]$

Oleewwan: $f(2) = 2$
 $f(4) = 4$
 $f(6) = 6$
 $f(8) = 8$
 $f(10) = 10$



$$\begin{aligned} \therefore B(S)_{\text{guddaa}} &\simeq f(z_1)\Delta x + f(z_2)\Delta x + \dots + f(z_5)\Delta x \\ &= 2(2) + 4(2) + 6(2) + 8(2) + 10(2) \\ &= 4 + 8 + 12 + 16 + 20 \\ &= 60 \\ &= \sum_{i=1}^5 f(z_i)\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(S)_{\text{xixiqqaa}} &\cong 0(2) + 2(2) + 4(2) + 6(2) + 8(2) \\ &= 4 + 8 + 12 + 16 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Kanarraa $40 \leq \int_0^{10} x dx \leq 60$ yookiin

$40 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x \leq 60$ ta'uu isaa nutti agarsiisa.

ii) $\Delta x = \frac{10-0}{10} = 1,$

$$\begin{aligned}
& [0,1], [1,2], [2,3], [3,4], [4,5], \dots, [9,10] \\
B(S)_{guddaa} & \simeq 1f(z_1) + 1f(z_2) + \dots + 1f(z_{10}) \\
& = 1(1) + 1(2) + \dots + 1(10) \\
& = \frac{10(11)}{2} = 55
\end{aligned}$$

fi

$$B(S)_{xiqqaa} = 45$$

Kunis akka $45 \leq \int_0^{10} x dx \leq 55$ ta'e nutti agarsiisa.

$$\int_0^{10} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i) \Delta x = B(S)$$

Amma, yoo iddoowwan n walqixatti qoodne; $\Delta x = \frac{10}{n}$, Intarvaalli $I_k = \left[\frac{10(k-1)}{n}, \frac{10k}{n} \right]$

Yoo $z_k = \frac{10k}{n}$ filanne (tuqaa mirgaa)

$$f(z_k) = f\left(\frac{10k}{n}\right) = \frac{10k}{n} \text{ ta'a.}$$

$\therefore$ oleen isaanii $\frac{10k}{n}$ fi dalgeen $\frac{10}{n}$ ta'u.

$$\therefore B(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{10k}{n}\right) \left(\frac{10}{n}\right)$$

$$\text{Garuu } \sum_{k=1}^n \left(\frac{10k}{n}\right) \left(\frac{10}{n}\right) = \frac{100}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{100}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{50}{n^2} (n^2 + n)$$

$$= 50 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \text{ waan ta'eef,}$$

$$\therefore B(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} 50 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 50 = \int_0^{10} x dx$$

yoo bitaa filanne

$$B(S) \simeq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{10(k-1)}{n}\right) \frac{10}{n}$$

$$= \frac{100}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1)$$

$$= \frac{100}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} - n \right]$$

$$= 50 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \text{ fi haaluma armaan oliitiin limiitii isaa yoo fudhanne } B(S) \text{ ni arganna.}$$

Tiiramii 4.1 (Tiiramii Bu'uuraa Kaalkulasii)

Mee f intervaalii $[a,b]$ irratti itti fufaadha haa jennu.

- f intervaalii $[a,b]$ irratti antiidariveetiivii ni qaba.
- f antiidariveetiivii f kaniyyuu $[a,b]$ irratti yoo ta'e

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ ta'a.}$$

Hub: 1) $\int_b^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

4.2 Maloota Intiigireessuu

1. Mala bakka buusuu

Yoo $\int f(g(x))g'(x)dx$ kenname: Mee $u = g(x)$ haa ta'u

$$\Rightarrow du = g'(x)dx$$

$$\therefore \int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \text{ ta'a.}$$

Fakkeenya 2. $\int e^{-3x}dx$ barbaadi.

Furmaata:

Mee $u = -3x$ haa ta'u. $\Rightarrow \frac{-du}{3} = dx$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^{-3x}dx &= \int e^u - \frac{du}{3} = \frac{-e^u + c}{3} \\ &= \frac{e^{-3x}}{3} + c \text{ Maaliif?} \end{aligned}$$

Fakkeenya 3. $\int e^x(e^{e^x})dx$ barbaadi.

Furmaata:

Mee $e^x = u$ haa ta'u.

$$\Rightarrow du = e^x dx$$

$$\therefore \int e^x(e^{e^x})dx = \int e^u du = e^u + c$$

$$= e^{e^x} + c \text{ Maaliif?}$$

Fakkeenya 4. $\int (\cos x)e^{\sin x}dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\int (\cos x)e^{\sin x}dx = \int \cos x e^{\sin x + c}dx = e^c \int \cos x e^{\sin x}dx$$

Mee $\sin x = u$ haata'u.

$$\Rightarrow \cos x dx = du$$

$$e^c \int \cos x e^{\sin x}dx$$

$$= e^c \int e^u du$$

$$= e^c e^u + C'$$

$$= e^{u+c} + C'$$

$$= e^{\sin x + c} + C'$$

2. Maala Gartokkeessuun intiigireessuu.

Mee u fi v fankishinoota haa ta'an

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ \Rightarrow uv &= \int u'v + \int uv' \\ &= \int vdu + \int u dv \\ \therefore \int vdu &= uv - \int u dv \text{ ta'a.}\end{aligned}$$

Fakkeenya 5. $\int x \cos x dx$ barbaadi

Furmaata:

Mee $v = x$ fi $\cos x dx = du$ haa ta'an.
 $dv = dx$ fi $u = \sin x$ ta'u.

Kanuma irraa: $\int x \cos x = x \sin x - \int \sin x dx$

$$\begin{aligned}&= x \sin x - (-\cos x) + c \\ &= x \sin x + \cos x + c\end{aligned}$$

Fakkeenya 6. $\int \ln x dx$ barbaadi.

Furmaata:

Mee $v = \ln x$ fi $du = dx$ haa ta'an.
 $dv = \frac{dx}{x}$ fi $u = x$ ta'u.

$$\begin{aligned}\text{Kanaafuu, } \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{x dx}{x} \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

3. Tirigonomeetiroota inteegireessuu.

Fakkeenya 7. $\int \sin^2 x dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx. \text{ Maalif?}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx. \text{ Amma mee } u = 2x \text{ haa ta'u.}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos u du$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin u + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Fakkeenya 8. $\int \cos^2 x dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

Furmaata:

Mee $u = 2x$ haa ta'u.

$$\frac{\Rightarrow du}{2} = dx$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin u + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \text{ Maaliif?} \end{aligned}$$

Fakkeenya 9. $\int \cos^5 x dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x (\cos x) dx$$

Mee $v = \cos^4 x$ fi $\cos x dx = du$ haa ta'u.

$$\Rightarrow dv = -4 \cos^3 x \sin x dx$$

$$u = \sin x$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \cos^4 x \sin x + 4 \int \cos^3 x \sin x (\sin x) dx \\ &= \cos^4 x \sin x + 4 \int \cos^3 x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \cos^4 x \sin x + 4 \int \cos^3 x - 4 \int \cos^5 x dx \end{aligned}$$

$$\therefore 5 \int \cos^5 x dx = \cos^4 x \sin x + 4 \int \cos^3 x dx$$

$$\int \cos^5 x dx = \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx$$

$$= \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx = \frac{4}{5} \left[\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x dx \right]$$

$$= \frac{4}{5} \int \cos^3 x = \frac{4 \cos^2 x \sin x}{15} + \frac{8}{15} \sin x$$

$$\therefore \int \cos^5 x dx = \frac{\cos^4 x \sin x}{5} + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C$$

Hub: 1) $\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$

2) $\int \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$

Fakkeenya 10. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x (\cos x) dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx \end{aligned}$$

Mee $u = \sin x$ haa ta'u. $\Rightarrow du = \cos x dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int u^2(1 - u^2) \, du \\
&= \int u^2 \, du - \int u^4 \, du \\
&= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\
&= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \text{ Maaliif?}
\end{aligned}$$

Hub: Yoo $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ keessatti m fi n guutuu ta'an kanneen armaan gadii fayyadamii

- $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
- $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Fakkeenya 11. $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$ barbaadi.

Furmaataa:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \text{ Amma mee } u = \tan x \text{ haa ta'u. } \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx &= \int u^3(1 + u^2) \, du \\
&= \int (u^3 + u^5) \, du \\
&= \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + C \\
&= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C
\end{aligned}$$

Fakkeenya 12. $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$ barbaadi.

Furmaataa:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\sec x \tan x) \, dx \\
\text{Amma mee } u &= \sec x \text{ haa ta'u. } \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx \text{ fi} \\
\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx &= \int (\sec^4 x - \sec^2 x) (\sec x \tan x) \, dx \\
&= \int (u^4 - u^2) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C
\end{aligned}$$

Fakkeenya 13. $\int \sec^3 x \, dx$ barbaadi.

Furmaataa:

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \sec^2 x \, dx. \text{ Amma mee } v = \sec x \text{ fi } \sec^2 x \, dx = du \\
\Rightarrow \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan x \tan x \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sec x + \tan x) + C$$

Fakkeenya 14. $\int \cos^2 x \tan^5 x dx$ barbaadi.

Furmaata:

$$\cdot \int \cos^2 x \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} \sin x dx. \text{ Mee } u = \cos x \text{ haa ta'u.} \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$\begin{aligned} \cdot \int \cos^2 x \tan^5 x dx &= \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^3 x} \sin x dx \\ &= - \int \frac{(1-u^2)^2}{u^3} du \\ &= - \int \frac{(1-2u^2+u^4)}{u^3} du \\ &= - \int u^{-3} du + \int 2u^{-1} du - \int u du \\ &= \frac{u^2}{2} + 2 \ln|u| - \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{\cos^{-2} x}{2} + 2 \ln|\cos x| - \frac{\cos^{-2} x}{2} + C \end{aligned}$$

4. Tirigonomeetirii bakka buusuun inteegireessuu

Ibsama

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\sqrt{x^2 + a^2}$$

Kan bakka bu'u

$$x = a \sin u \quad x \in [\pi/2, \pi/2]$$

$$x = a \sec u \quad x \in [0, \pi]$$

$$x = a \tan u$$

Fakkeenya 15. $\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2} dx$ barbaadi,

Furmaata:

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2}$$

Mee $2x = \sin u$ haa ta'u. $\Rightarrow 2dx = \cos u du$

$$\Rightarrow dx = \frac{\cos u du}{2}$$

Kanuma irraa: $x = 0 \Rightarrow u = 0$

$$x = 1/2 \Rightarrow u = \pi/2$$

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u} \frac{\cos u du}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{0}{4} - \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{8} \right) = \pi/8$$

4.3 Fayyadama Integiraalii Murtaa'oo

1. Bal'ina

Hiikoo: Mee fankishinoonni f fi g $[a, b]$ irratti ittifufoo fi $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq b$ haa ta'an bal'inni bal'iinsa $[a, b]$ irratti giraafota f fi g gidduutti argamuu

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \text{ ta'a.}$$

Fakkeenya 16. Yoo $f(x) = x$ fi $g(x) = x^2$ ta'e, bal'ina bal'iinsa $[0,1]$ irratti giraafii f fi g gidduutti hammatamee barbaadi.

Furmaata:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx \\ &= \int_0^1 [x - x^2] dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \int_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. Qabee

Hiikoo: Mee fankishiniin f $[a, b]$ irratti ittifufaa haa ta'u. Qabeen jaboo bal'iinsa $[a, b]$ irratti siiqqee X fi giraafii f gidduutti argamu siiqqee X irratti naannessuun uumamuu

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \text{ ta'a.}$$

fakkeenya 17. Qabee jaboo bal'iinsa siiqqee X fi giraafii $f(x) = x$ $[0,4]$ irratti daanga'e siiqqee X irratti naannessuun uumamuu babaadi.

Furmaata:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi [f(x)]^2 dx = \int_0^4 \pi (x)^2 dx \\ &= \int_0^4 x^2 dx = \frac{\pi x^3}{3} \int_0^4 \\ &= \frac{64\pi}{3} \text{ ta'a.} \end{aligned}$$

Mirkana Hubannoo Boqonnichaa

Gaaffilee armaan gadii tiif yoo deebiin kee "eeyyen" ta'e mallattoo '✓' yoo "Lakki" ta'e "×" iddoo kenname irratti kaa'i.

1. Gatii inteeigiraalii murtaa'oo tokkoo barbaaduu ni dandeessaa? . . . ☐
2. Inteeigiraalii murtaa'oo tti fayyadamuun bal'ina fi qabee ni shallagdaa? ... ☐

Gilgaala Boqonnaa

1. Kanneen armaan gadii inteegireessi.
 - a. $\int x^n \ln x dx$
 - b. $\int 3 \sin(-2x) dx$
 - c. $\int \cos 6x dx$
2. Gatiilee inteeigiraalota murtaa'oo armaan gadii barbaadi.
 - a. $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{(x^6+)^3}$
 - b. $\int_{-1}^2 (10x + 2) dx$
 - c. $\int_{-\pi}^0 \sec x (\tan x + \sec x) dx$
 - d. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{2}} (7 \sin x + 3 \cos x) dx$