ইঞ্জিনিয়ারিং এডমিশন প্রোগ্রাম ২০২০

পদার্থবিজ্ঞান ১ম পত্র

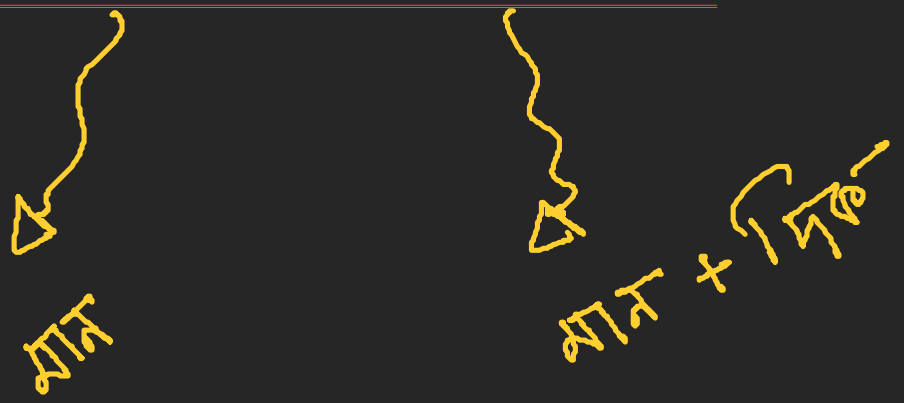
লেকচার : P-01

অধ্যায় ০২ : ভেক্টর

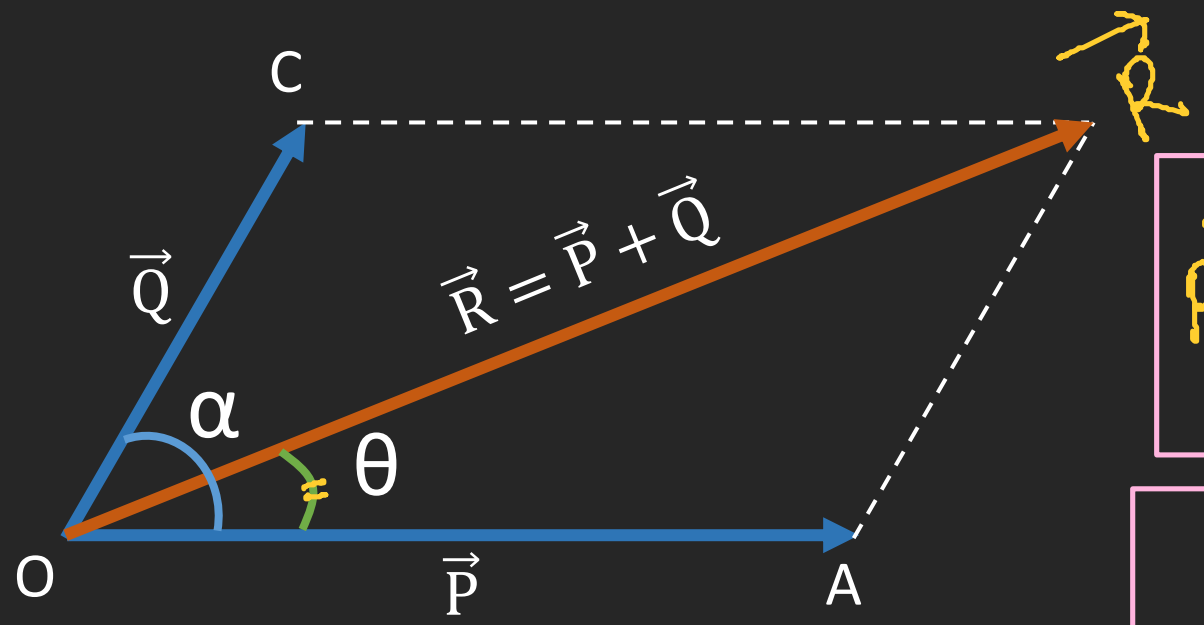
Wahed Imtiaz Sheetal
Buet EEE '14



স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি



দুইটি সমবিন্দু ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়



$$\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 + 2PQ\cos\alpha$$

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

এবার তুমি নিজে

দুইটি সমবিন্দু ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়

লব্ধির সর্বোচ্চ মান -



$$R = P + Q$$

লব্ধির সর্বনিম্ন মান -

$$R = P \sim Q$$



Case : $\alpha = 90^\circ$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Case : $P = Q$

$$R = 2P\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Problem

দুইটি সমান ভেক্টর কিভাবে স্থাপন করলে এদের লব্ধি যেকোনো একটির মানের $\sqrt{3}$ গুণ হবে?

$P = Q$ $\angle \alpha$

$R = \sqrt{3}P$

$$R = 2P\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}P = 2P\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

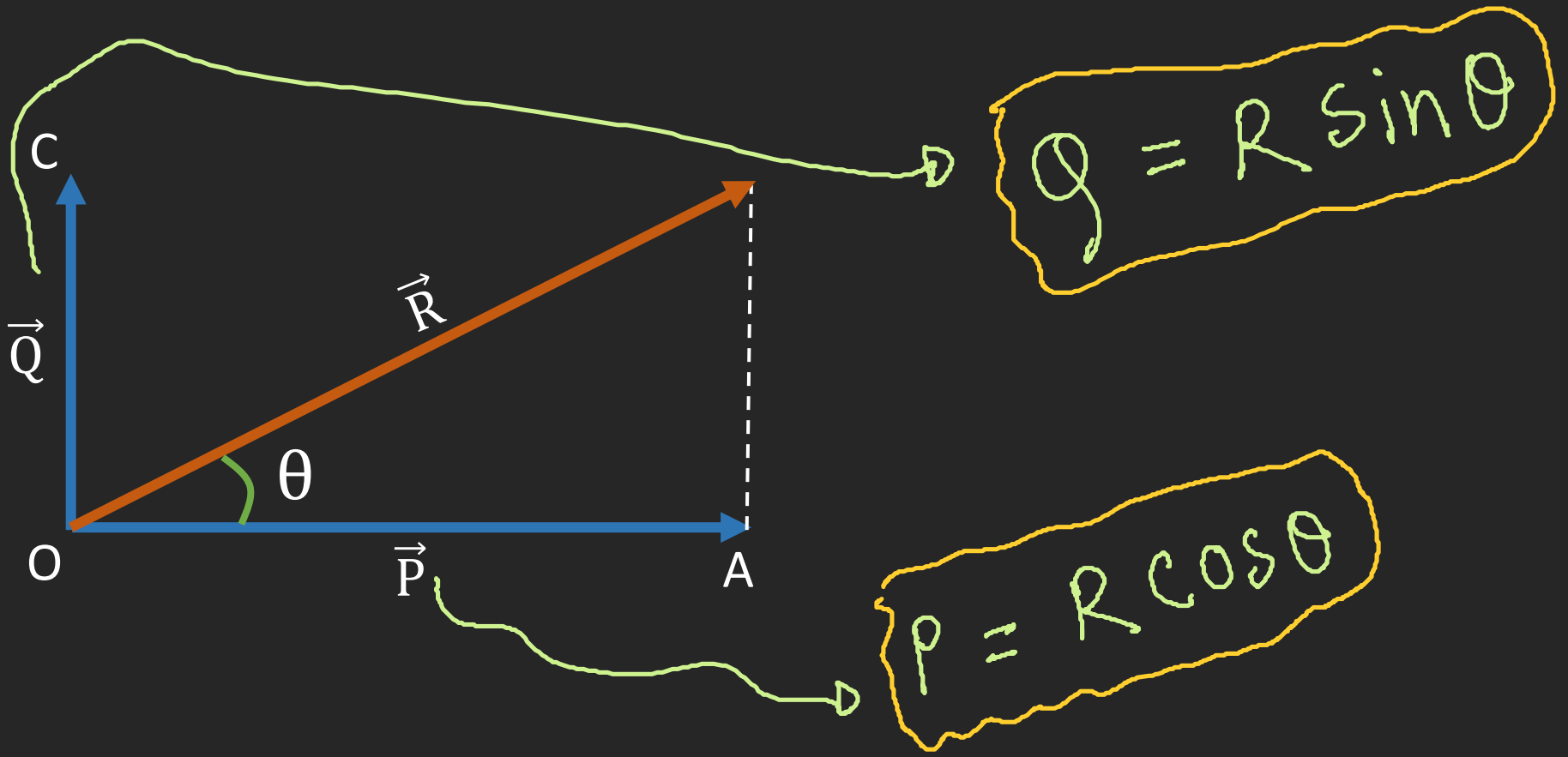
$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$$

$$\therefore \alpha = 60^\circ$$

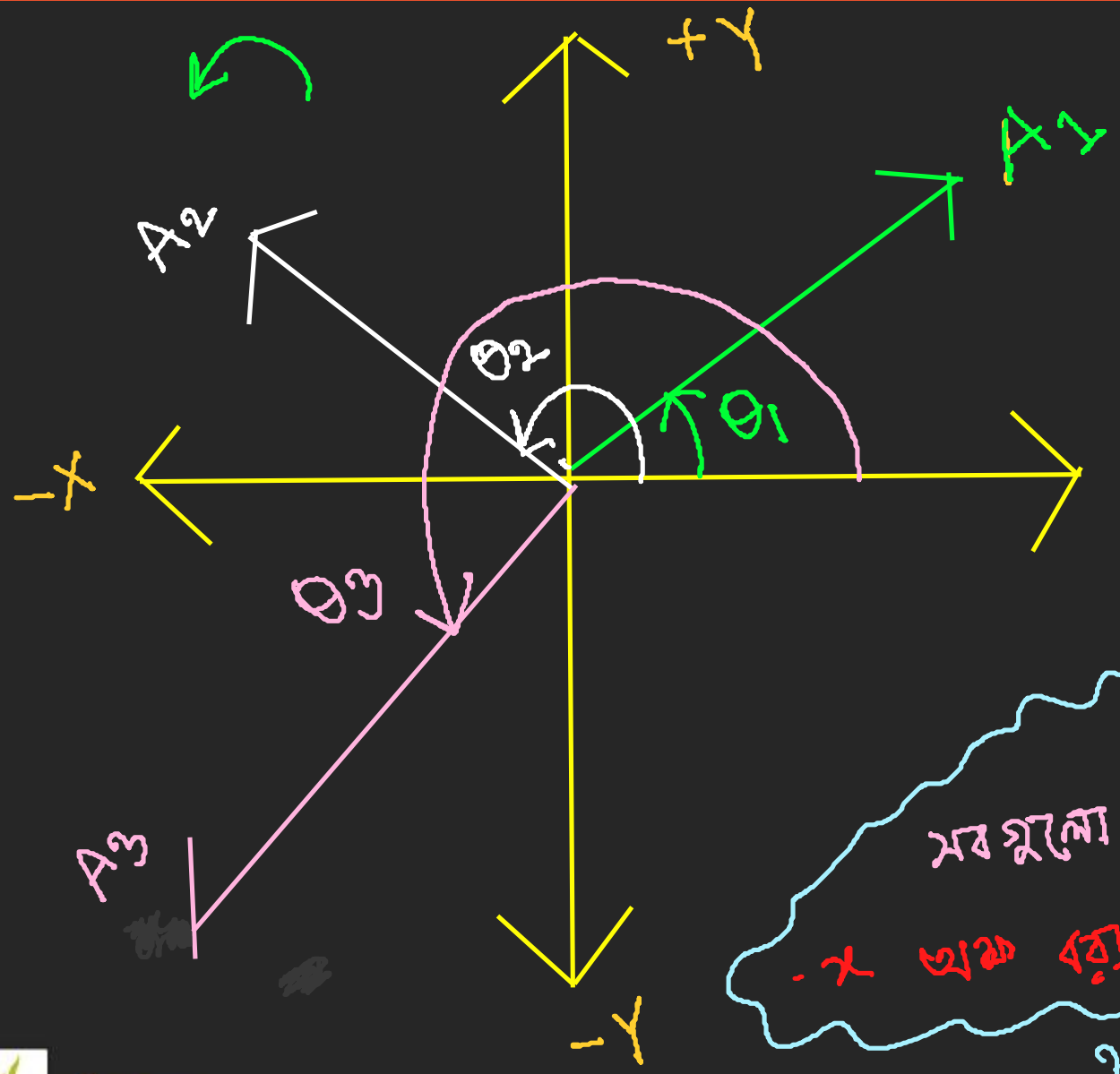
Problem

দুইটি সমান ভেক্টর কিভাবে স্থাপন করলে এদের লব্ধি যেকোনো একটির মানের $\sqrt{3}$ গুণ হবে?

লম্ব উপাংশ



দুইয়ের অধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় : লম্বাংশ উপপাদ্য



R = ?

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

↳ প্রমাণঃ

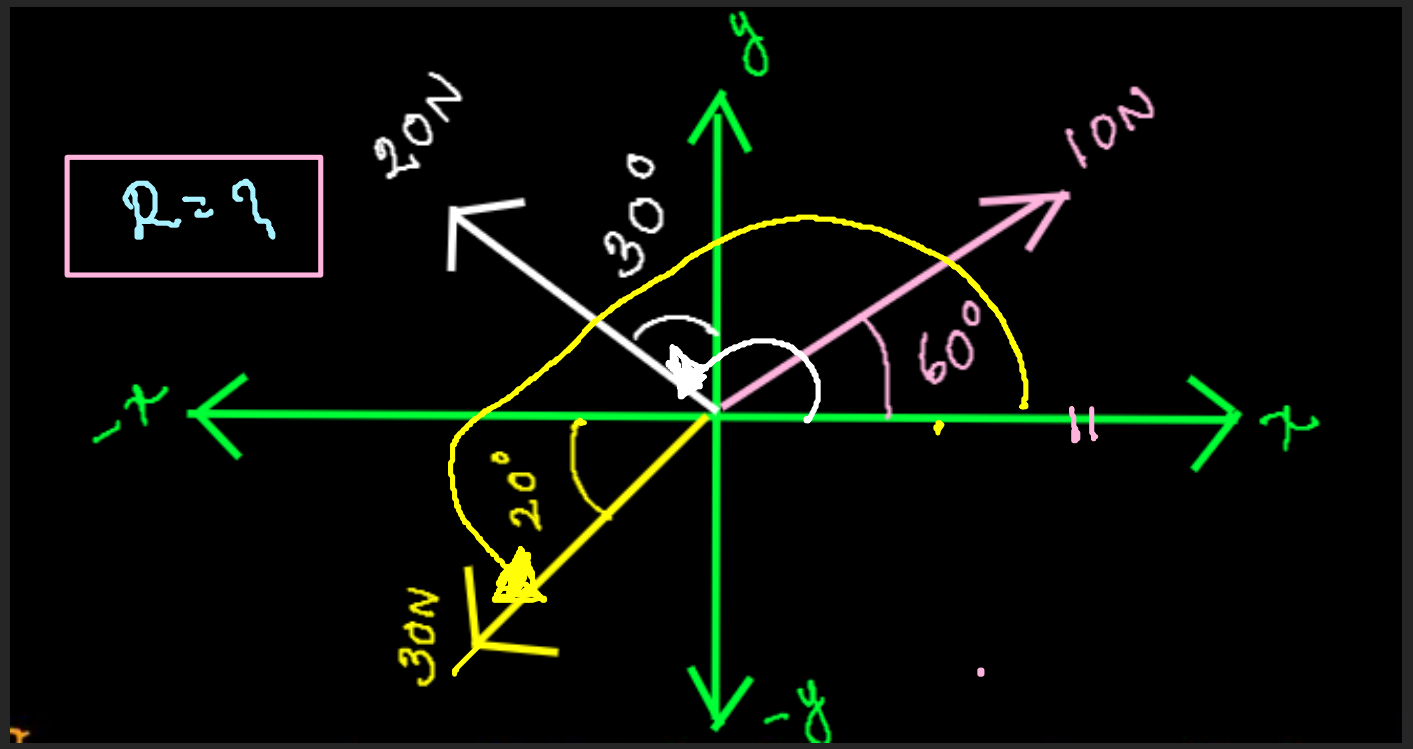
$Q = A_1\sin\theta_1 + A_2\sin\theta_2 + A_3\sin\theta_3$

সবগুলো vector এর $-x$ অক্ষ বরাবর উপাংশ, $P = A_1\cos\theta_1 + A_2\cos\theta_2 + A_3\cos\theta_3$

y অক্ষ বরাবর উপাংশ,

দুইয়ের অধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় : লম্বাংশ উপপাদ্য

Problem



$$P = -33.19\,N$$

$$Q = 15.72\,N$$

$$R^2 = P^2 + Q^2$$

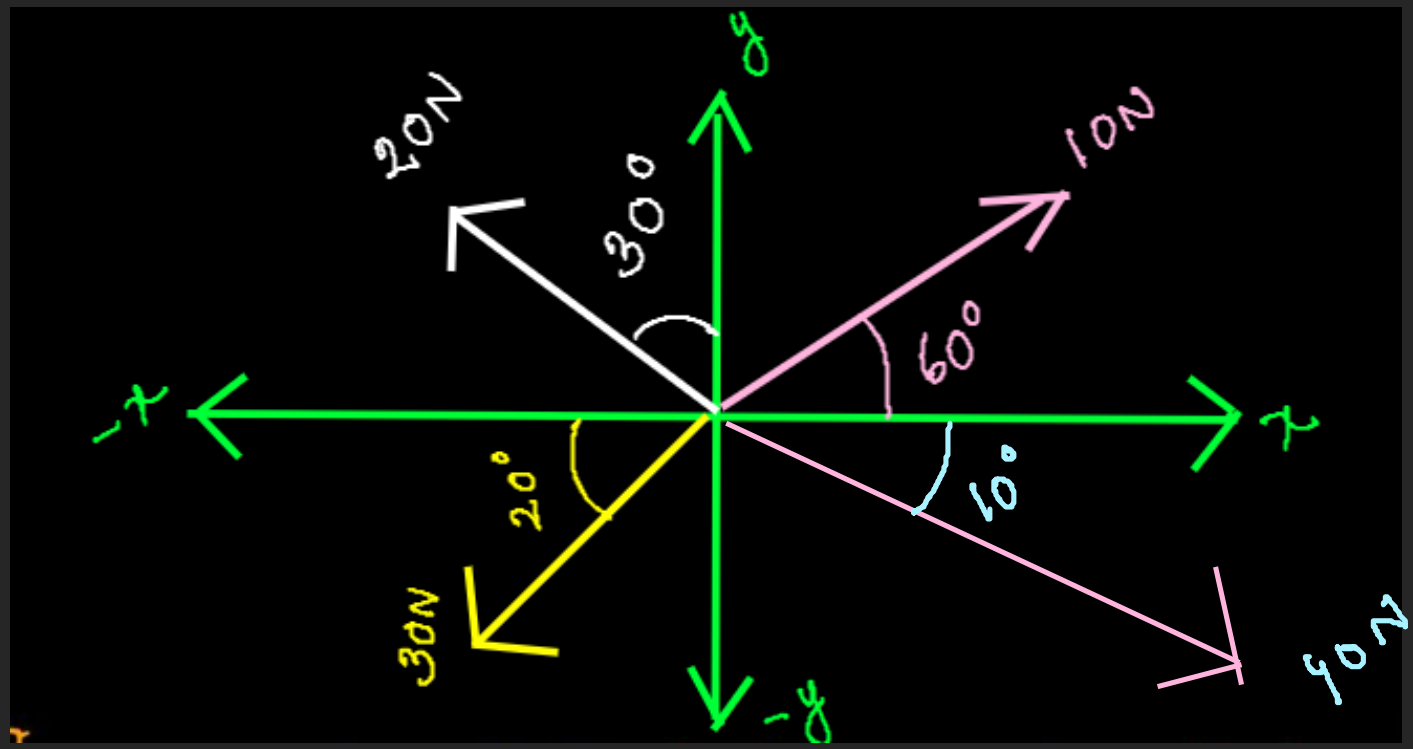
$$\Rightarrow \boxed{R = 36.72\,N}$$

$x \rightarrow$

$$P = 10\cos(60) + 20\cos(30+90) + 30\cos(20+180)$$

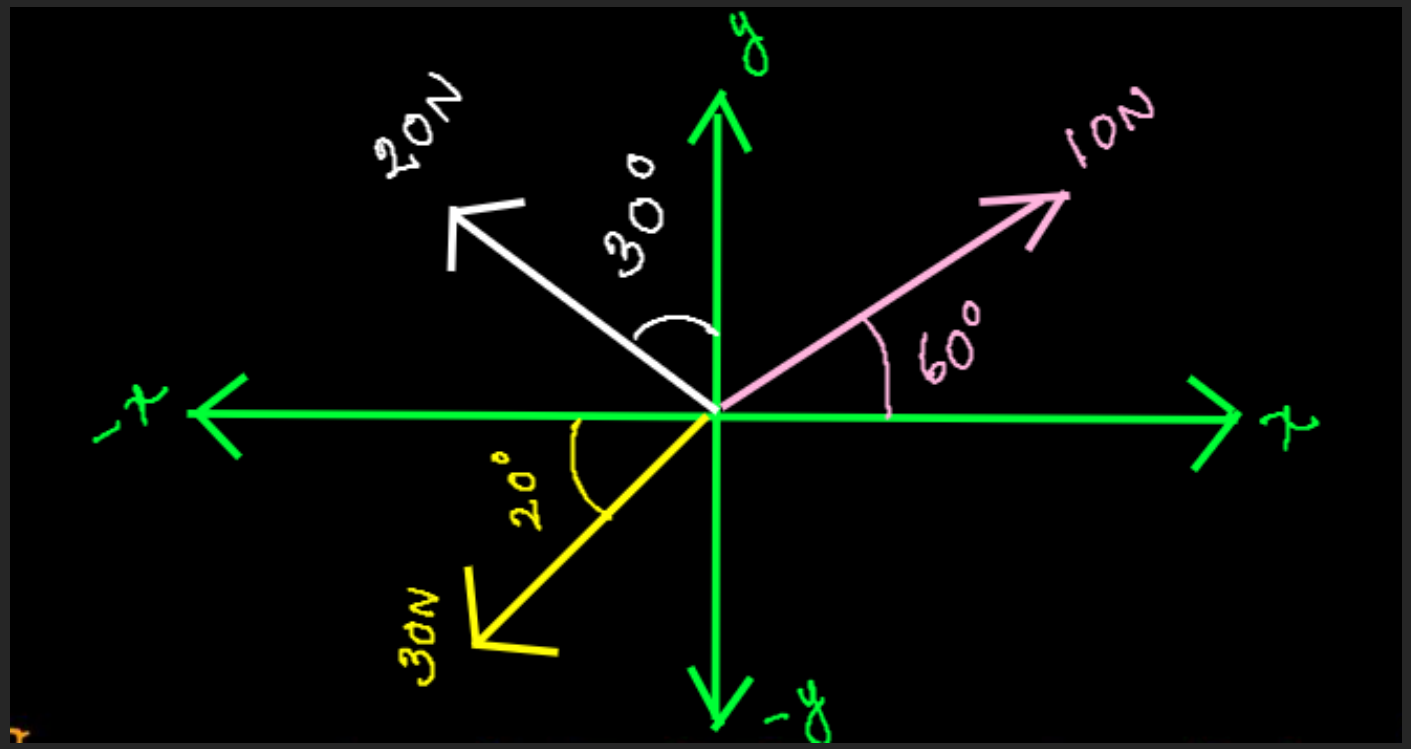
$$Q = 10\sin(60) + 20\sin(30+90) + 30\sin(20+180)$$

Problem

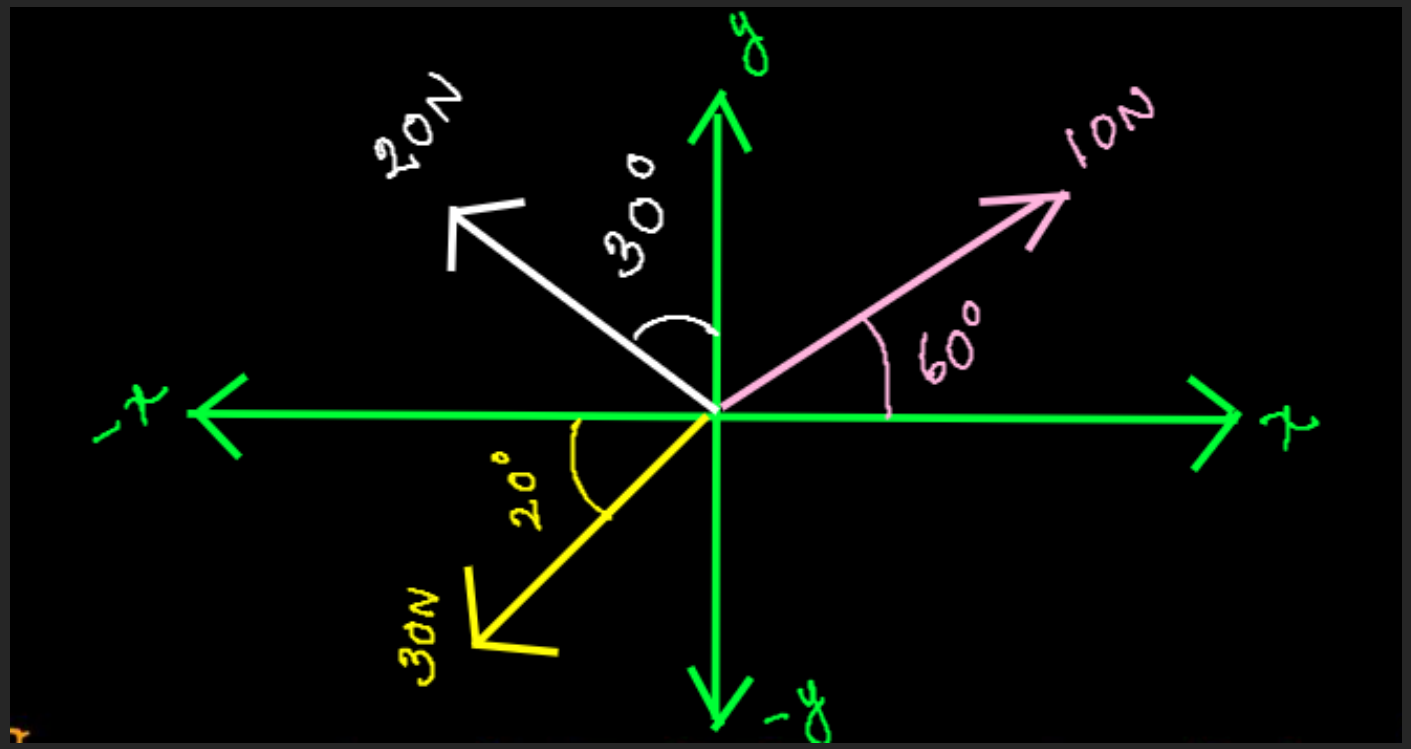




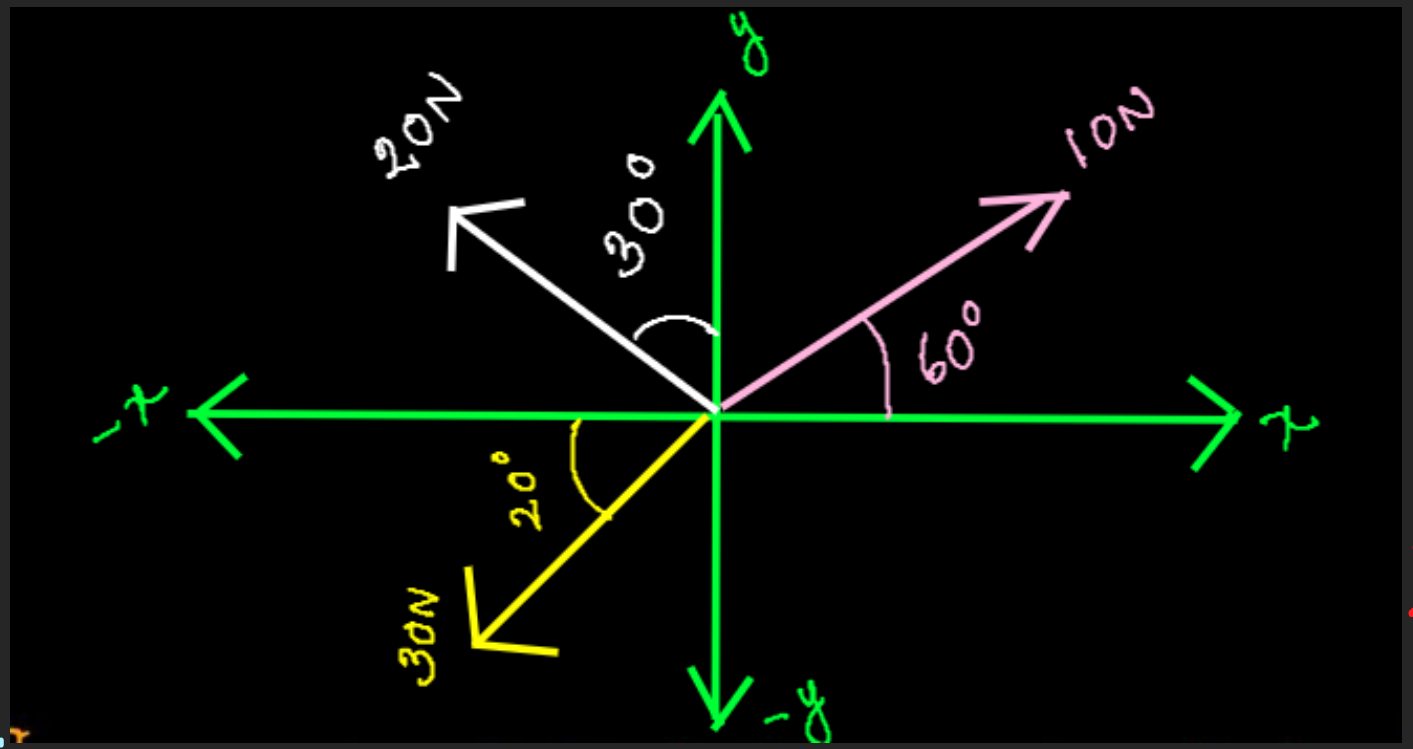
Problem

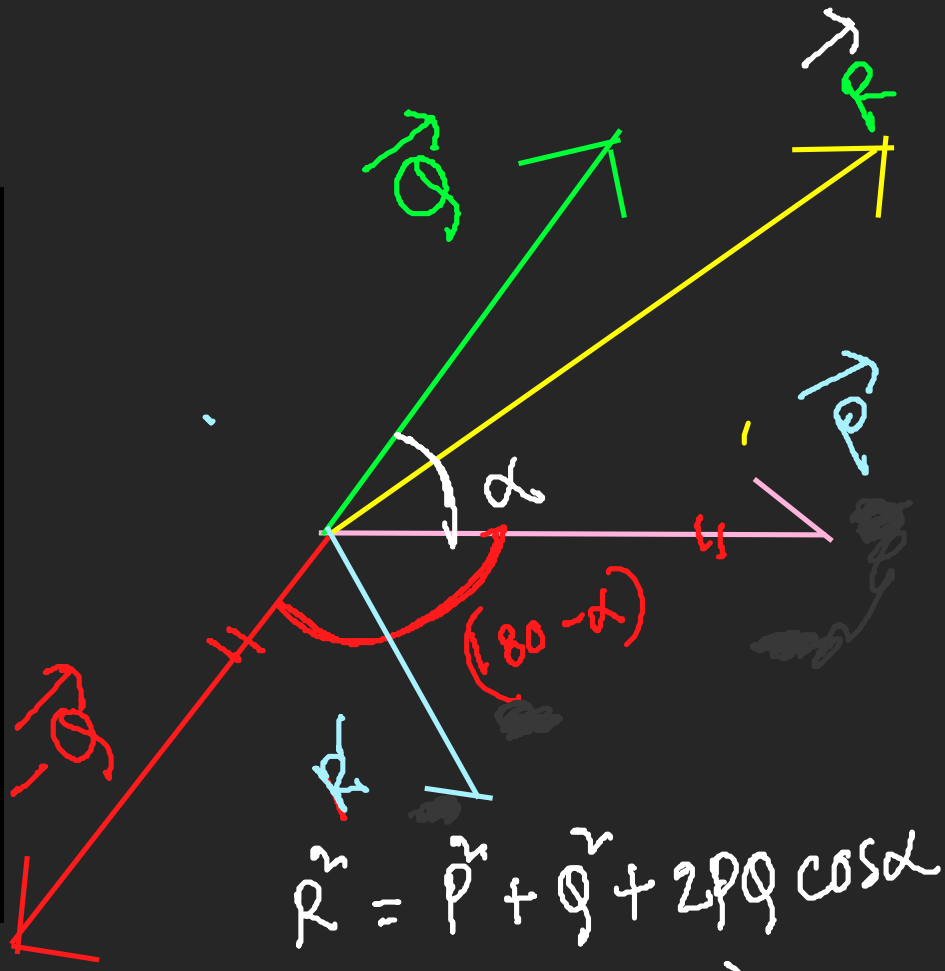


Problem



Problem





$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\vec{R'} = \vec{P} - \vec{Q}$

$R'^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(180-\alpha)$

$\Rightarrow R'^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha$

$\vec{P}$ এর মান $= P$

$\vec{Q}$ " " $= Q$

$-\vec{P}$ এর মান $= P$

$-\vec{Q}$ " " $= Q$

Problem

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর এমন যেন $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$. এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?



$$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha = A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 4AB\cos\alpha = 0$$

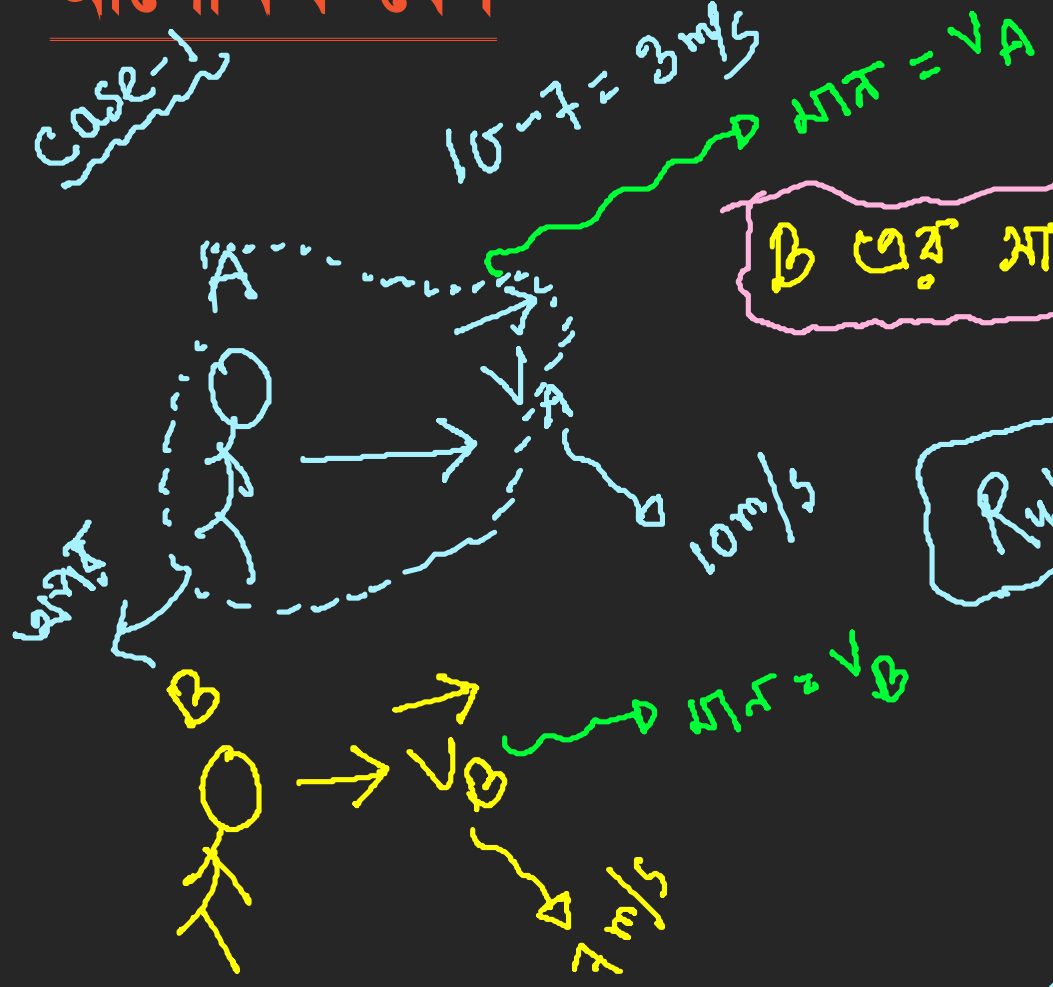
$$\Rightarrow \cos\alpha = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

Problem

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর এমন যেন $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$. এদের মধ্যবর্তী কোণ কত?

আপেক্ষিক বেগ



B এর সাপেক্ষে A এর আ. বেগ = ?

Rule-1

যার সাপেক্ষে আ. বেগ বের করব তার বিপরীত ভেক্টর নিব।



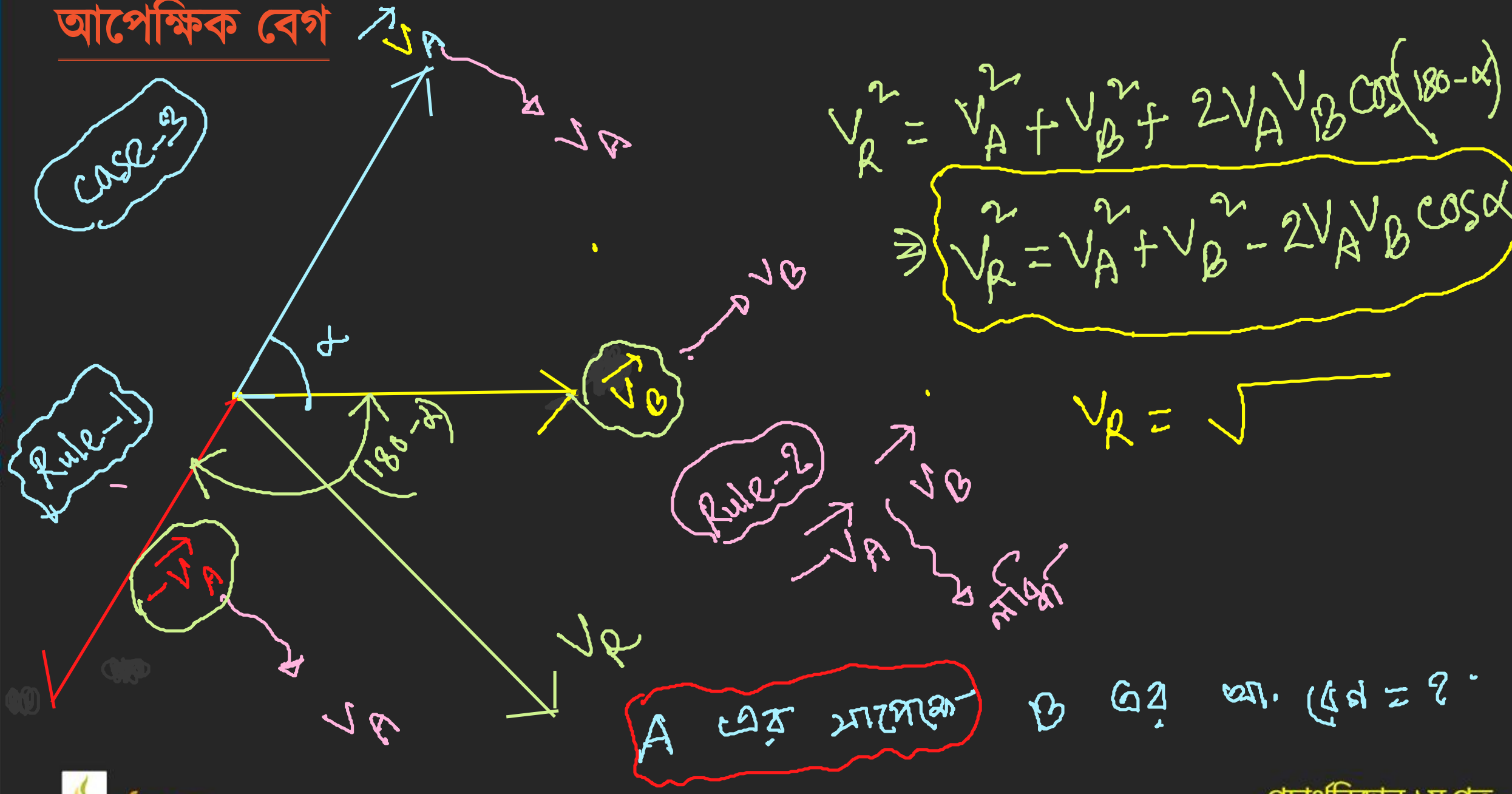
Rule-2

বিপরীত vector এবং অপর vector এর লব্ধি সামান্তরিক সূত্রে দিয়ে বের করব।

আপেক্ষিক বেগ


Case-2
A এর সাপেক্ষে B এর আ. বেগ = ?
A
B
$\vec{V}_A$
$\vec{V}_B$
Rule-1
$\vec{V}_B$
$-\vec{V}_B$
বিপরীত
V_B
$-\vec{V}_B$
$\vec{V}_A \to V_A$
$V_R = V_A - V_B$
Rule-2
$\vec{V}_A \to V_A$
$-\vec{V}_B \to V_B$
$V_R = V_A + V_B$

আপেক্ষিক বেগ



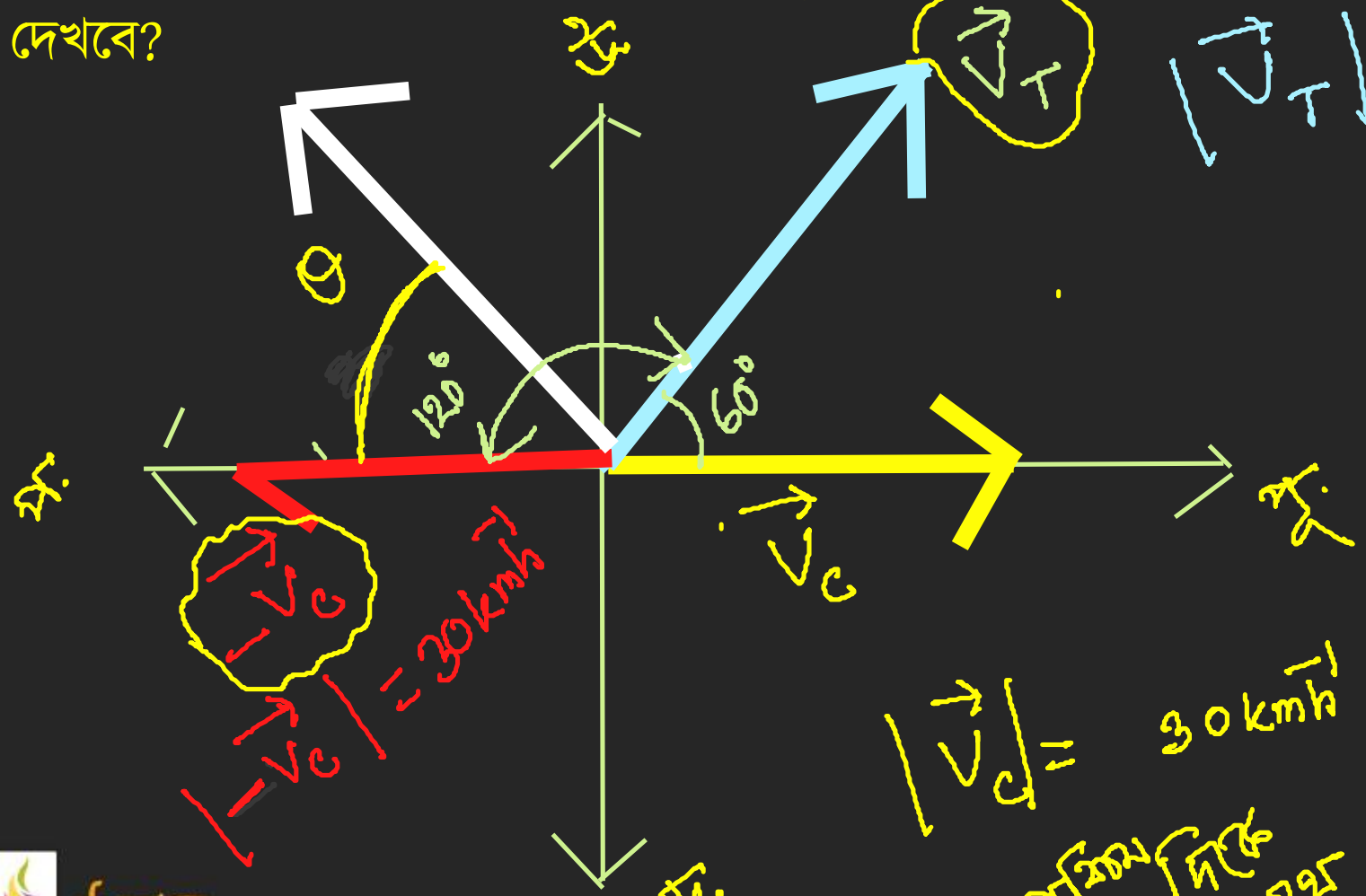
$$V_R^2 = V_A^2 + V_B^2 + 2V_AV_B\cos(180-\alpha)$$

$$\Rightarrow V_R^2 = V_A^2 + V_B^2 - 2V_AV_B\cos\alpha$$

$$V_R = \sqrt{\quad}$$

Problem

30 km/h বেগে পূর্বদিকে একটি গাড়ি চলমান। 36 km/h বেগে একটি ট্রাক পূর্বদিকের সাথে ৬০ ডিগ্রি কোণে উত্তর দিকে যায়। গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের আপাত বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর।/গাড়ির চালক ট্রাককে কত বেগে কোন দিকে চলতে দেখবে?



$|\vec{V}_T| = 36 kmh^{-1}$

$V_R^2 = V_C^2 + V_T^2 + 2V_C V_T \cos 120$

$V_R = 33.4 km/h$

$|\vec{V}_C| = 30 kmh^{-1}$

পশ্চিম দিকে

$\tan\theta = \frac{36 \sin 120}{30 + 36\cos 120}$

$\theta = 68.94^\circ$ ← আপাত

Problem

Case-1

V_a = বাতাসের বেগ

V_c = গাড়ির বেগ

V_r = বৃষ্টির বেগ

Theory

পূর্ব

পশ্চিম

পথচারীর

সমানের কাঁচ

$V_c = 0$

$V_a = 0$

বৃষ্টি কাঁচ ভিজবে

Case-2

সমানের

V_a

V_r

পথচারীর কাঁচ

$V_c = 0$

পথচারীর কাঁচ ভিজবে

Problem

$10 kmh^{-1}$ বেগে উলম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছে এবং $60 kmh^{-1}$ বেগে পশ্চিম হতে পূর্বে বাতাস বইছে। পশ্চিম হতে পূর্বে অভিমুখে চলন্ত গাড়ির গতিবেগ নির্ণয় করো যাতে –

(a) গাড়ির সামনের ও পেছনের কাঁচ ভেজে

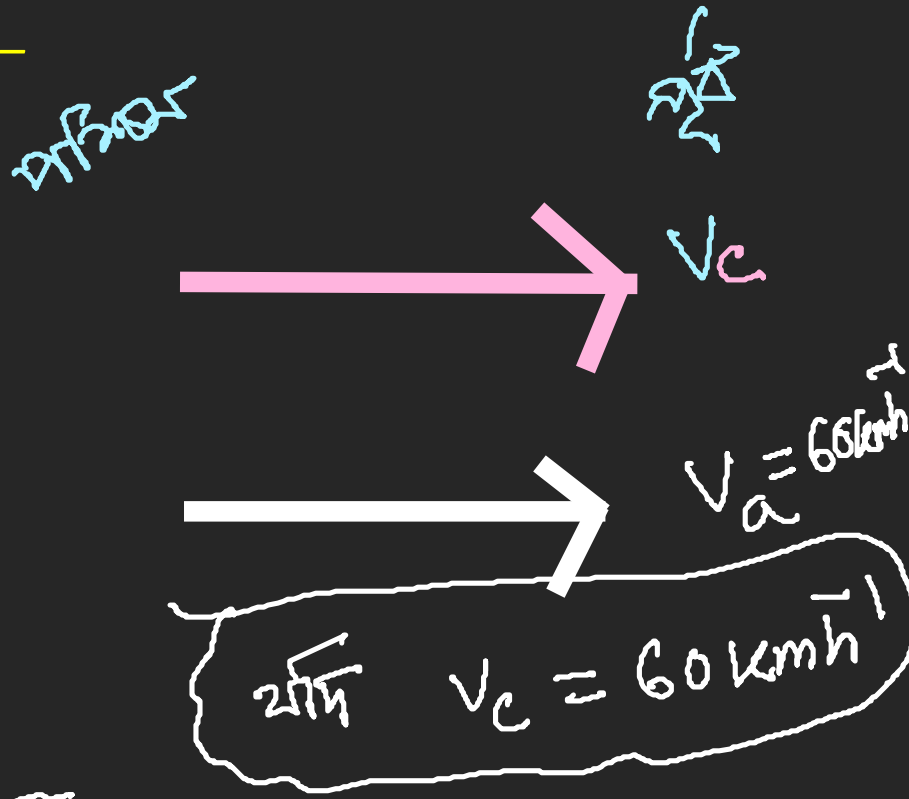
(b) শুধুমাত্র পেছনের কাঁচ ভেজে

(c) শুধুমাত্র সামনের কাঁচ ভেজে।



$V_c = 60 kmh^{-1}$





যদি $V_c = 60 kmh^{-1}$

গাড়ির সাপেক্ষে বাতাসের বেগ $= 60 - 60$
$= 0$

Problem

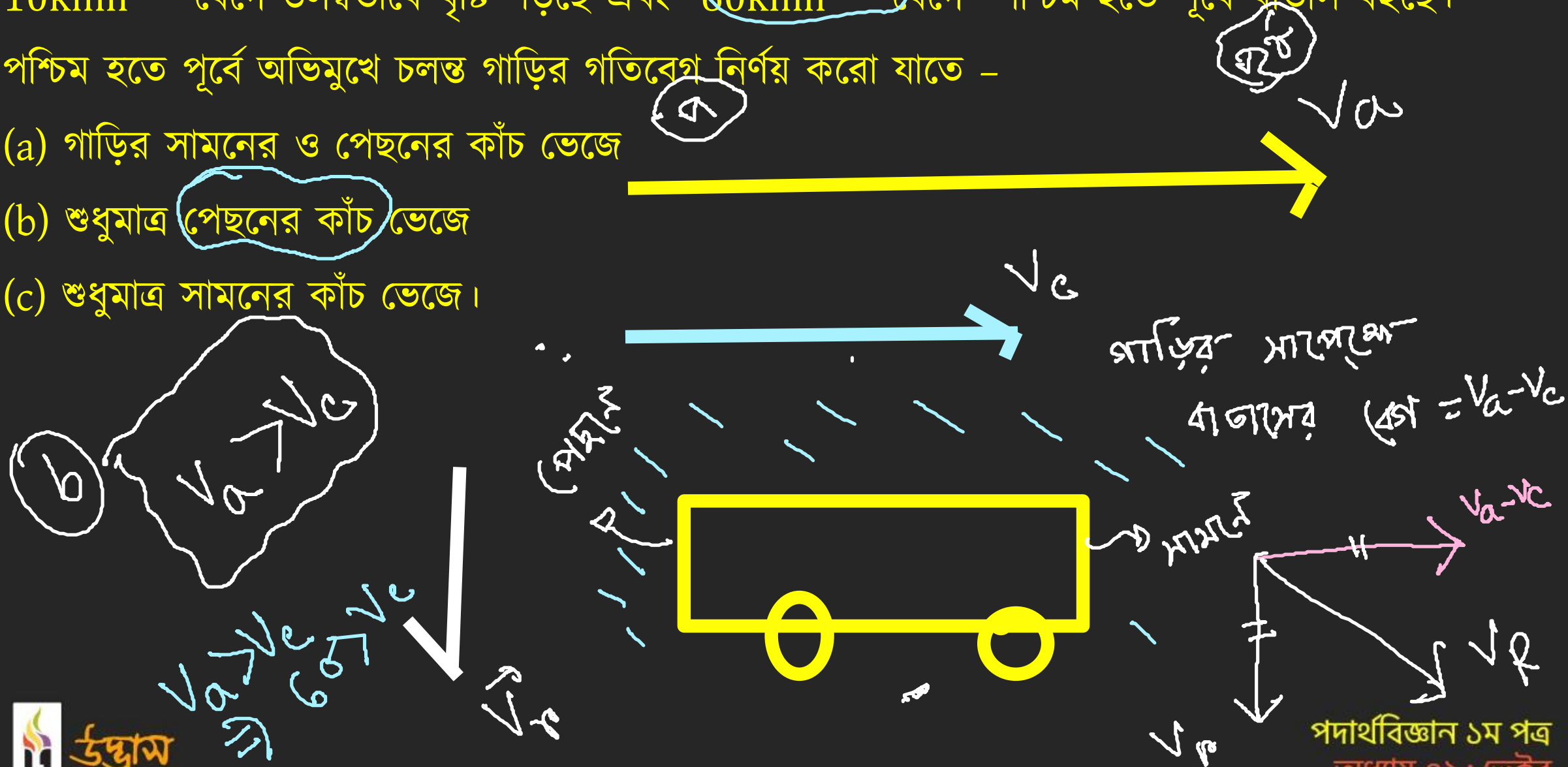
Ans- $V_c < 60\ km\ h^{-1}$

$10 kmh^{-1}$ বেগে উলম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছে এবং $60 kmh^{-1}$ বেগে পশ্চিম হতে পূর্বে বাতাস বইছে। পশ্চিম হতে পূর্বে অভিমুখে চলন্ত গাড়ির গতিবেগ নির্ণয় করো যাতে –

(a) গাড়ির সামনের ও পেছনের কাঁচ ভেজে

(b) শুধুমাত্র পেছনের কাঁচ ভেজে

(c) শুধুমাত্র সামনের কাঁচ ভেজে।



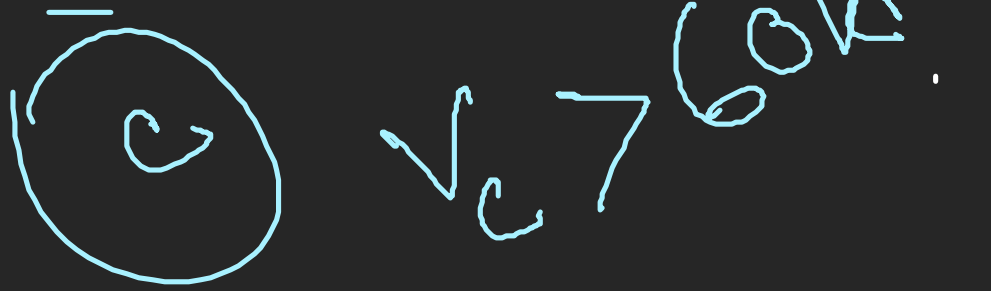
Problem

10kmh^{-1} বেগে উলম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছে এবং 60kmh^{-1} বেগে পশ্চিম হতে পূর্বে বাতাস বইছে। পশ্চিম হতে পূর্বে অভিমুখে চলন্ত গাড়ির গতিবেগ নির্ণয় করো যাতে –

(a) গাড়ির সামনের ও পেছনের কাঁচ ভেজে $\longrightarrow v_c = 60\text{kmh}^{-1}$

(b) শুধুমাত্র পেছনের কাঁচ ভেজে $\longrightarrow v_c < 60$

(c) শুধুমাত্র সামনের কাঁচ ভেজে। $\longrightarrow v_c > 60\text{kmh}^{-1}$

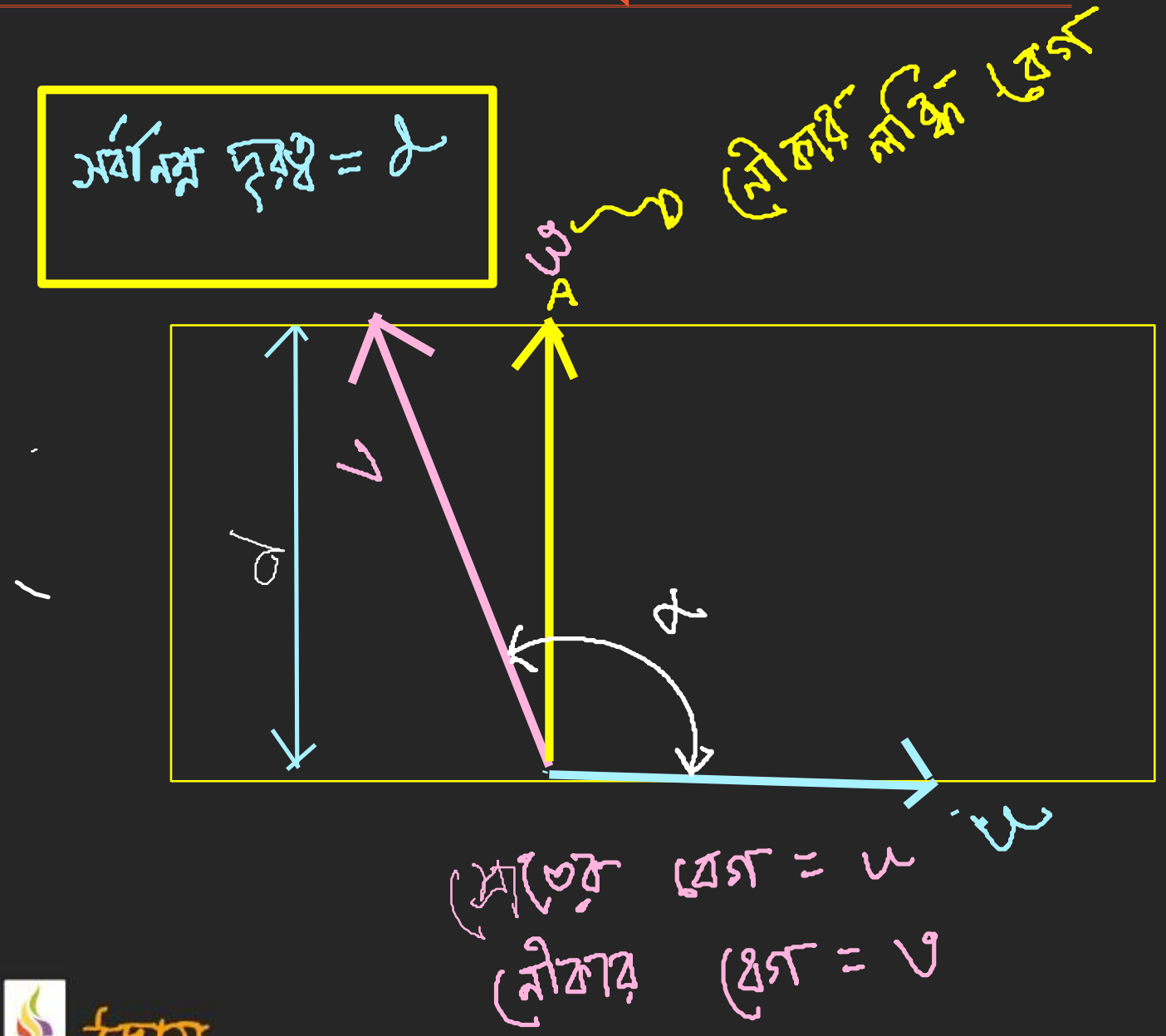


নদী ও নৌকা : সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পারাপার

নদী ও নৌকা : সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পারাপার

নদী ও নৌকা : সর্বনিম্ন দূরত্বে নদী পারাপার

সর্বনিম্ন দূরত্ব = d



$$u + v\cos\alpha = 0$$

$$w^2 = v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha$$

$$t = \frac{d}{v\sin\alpha}$$

Problem

নদীতে নৌকা ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে 8 km/h ও 3 km/h. সরাসরি/সর্বনিম্ন পথে নদী পারাপারের জন্য কোনদিকে রওনা দিতে হবে? কত সময় লাগবে? নৌকার লব্ধি বেগ কত হবে?

নদীর প্রস্থ = 5km

$u = 8\ kmh^{-1}$

$v = 3\ kmh^{-1}$

$d = 5\ km$

$u + v\cos\alpha = 0$

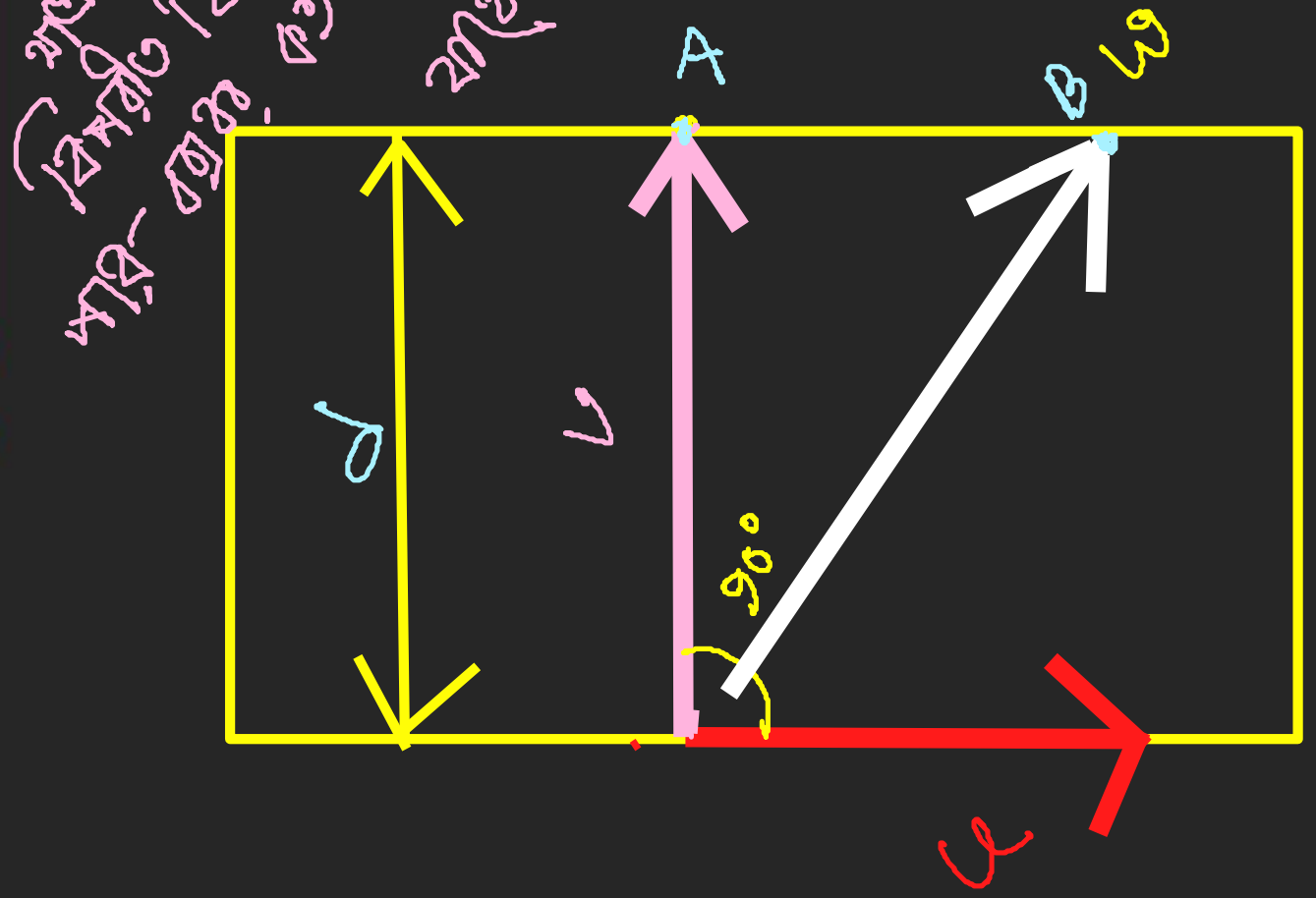
$\alpha = ?$

$t = \frac{d}{v\sin\alpha}$

$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$

নদী ও নৌকা : সর্বনিম্ন সময়ে নদী পারাপার

$AB = ut$



* নৌকার বেগ এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $= 90°$

$$t = \frac{d}{v}$$

$$w^2 = u^2 + v^2$$

Problem

নদীতে নৌকা ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে 8 km/h ও 3 km/h. নদীর প্রস্থ 500 m ন্যূনতম কত সময়ে নদী পার হওয়া সম্ভব? পাড় বরাবর নৌকা কতটুকু সরে যাবে?

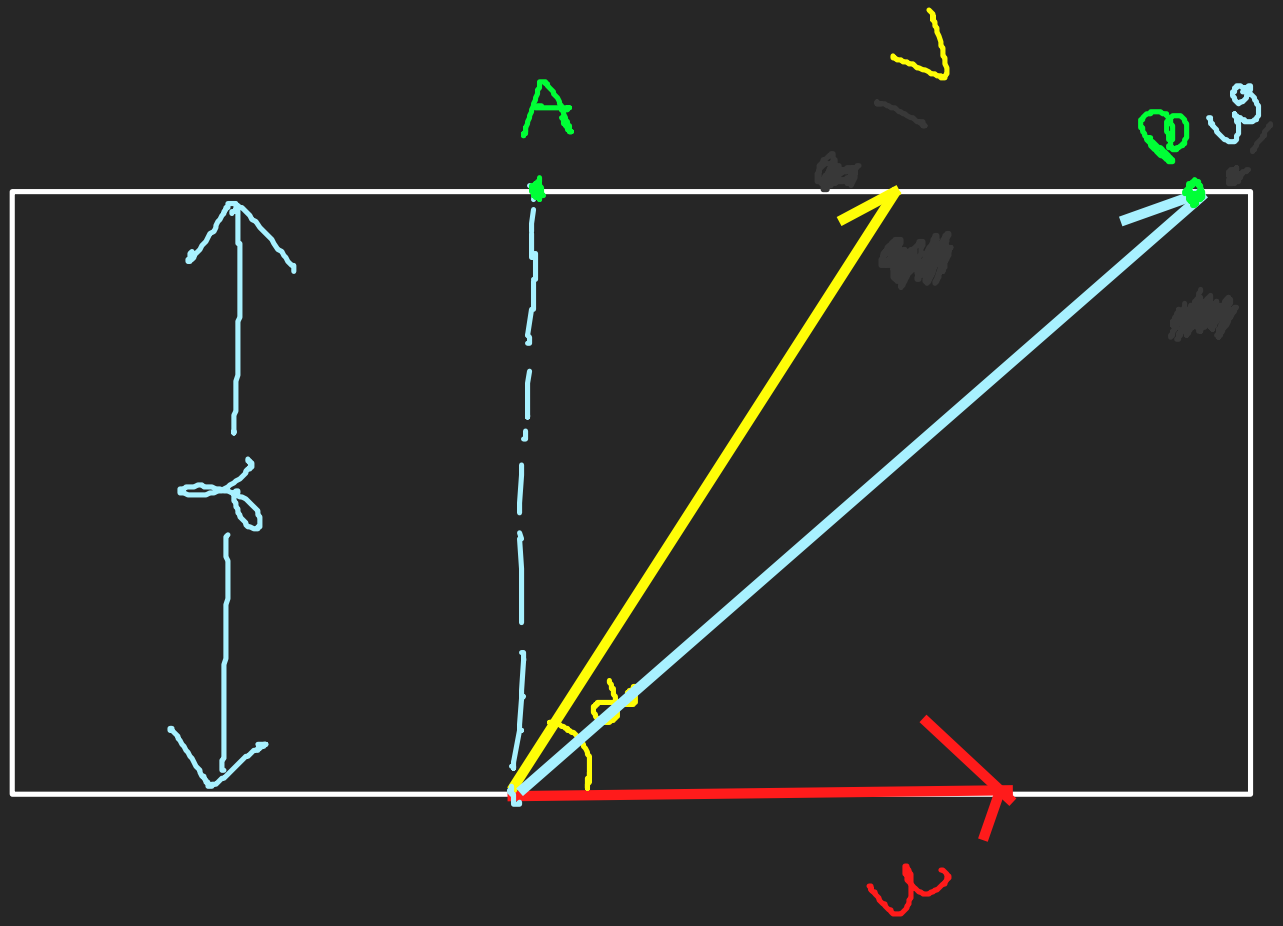
$v = 8\,kmh^{-1}$ | $u = 3\,kmh^{-1}$

$d = 0.5\,km$

$t = \frac{d}{v}$

$Ab = ut$

নদী ও নৌকা : General Case



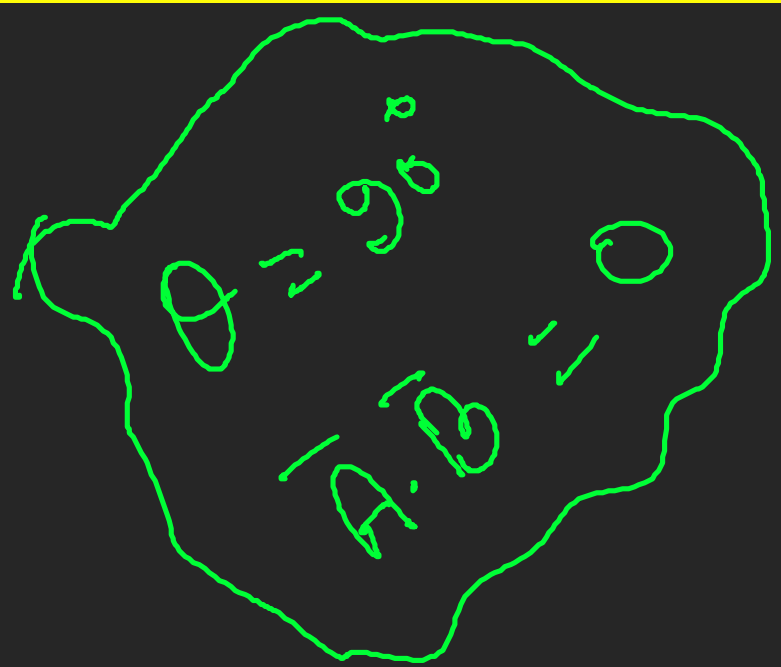
$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$$

$$t = \frac{d}{v\sin\alpha}$$

$$AB = (u + v\cos\alpha)t$$

ভেক্টরের ডট গুণন

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$$



Problem

$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটির অক্ষত্রয়ের সাথে কৌণিক ব্যবধান নির্ণয় কর।

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + k}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} \quad \frac{-3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{14}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

x অক্ষের সাথে কৌণিক ব্যবধান

$$\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{14}}$$

y অক্ষের সাথে কৌণিক ব্যবধান

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

z অক্ষের

$\gamma = ?$

$\beta = ?$ 143.3°

Problem

$\vec{A} = 3\hat{i} + 2m\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5m\hat{i} - 3m\hat{j} - 12\hat{k}$; m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে?

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \times 5m + (2m)(-3m) + (-3)(-12) = 0$$

$$\Rightarrow 15m - 6m^2 + 36 = 0$$

$$\Rightarrow -6m^2 + 15m + 36 = 0$$

$$m = 4, -1.5$$

ভেক্টরের ক্রস গুণন

$$\vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\alpha)\hat{n}$$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\alpha$

sheetal140648@gmail.com

Problem

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = 5\hat{i} + m\hat{j} + 2\hat{k}$

'm' –এর মান কত হলে ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হবে?

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 5 & m & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$m = ?$

$\therefore 2(-4 + 4m) - (-1)(1 \times 2 - 5 \times (-4)) + 3(1 \times m - 5 \times (-2)) = 0$

ভেক্টর ক্যালকুলাস : গ্র্যাডিয়েন্ট

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\text{gradient} = \vec{\nabla} F$$

Problem

কোনো স্থানে ক্রিয়াশীল তড়িৎ বিভব F = (xy + yz [redacted]).
(1, 1, 1) বিন্দুতে gradient মান নির্ণয় কর।

$x=1$
$y=1$
$z=1$

$$\text{gradient} = \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) F$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$$

$$= y\hat{i} + (z+x)\hat{j} + y\hat{k}$$

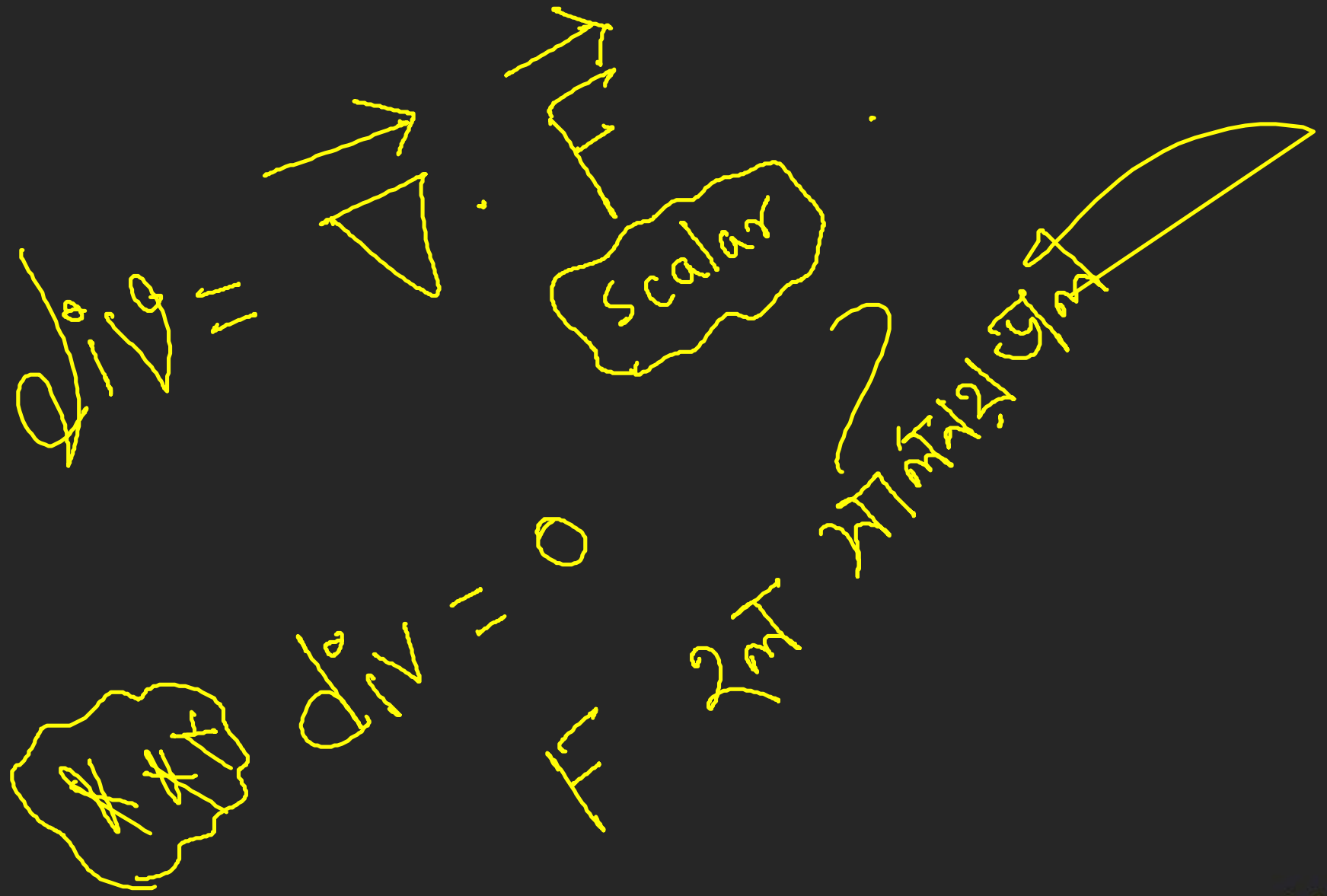
$$\text{grad} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy + yz) = y\frac{\partial x}{\partial x} + 0 = y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy + yz) = x\frac{\partial y}{\partial y} + z\frac{\partial y}{\partial y} = x + z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(xy + yz) = 0 + y\frac{\partial z}{\partial z} = y$$

ভেক্টর ক্যালকুলাস : ডাইভারজেন্স



Problem

$\vec{A} = (x - 3y)\hat{i} + (3y - z)\hat{j} + (bz - 2x)\hat{k}$ 'b' -এর মান কত হলে ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল হবে?

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left((x - 3y)\hat{i} + (3y - z)\hat{j} + (bz - 2x)\hat{k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x - 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(3y - z) + \frac{\partial}{\partial z}(bz - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + b = 0$$

$$b = -4$$

ভেক্টর ক্যালকুলাস : কার্ল

$$\text{curl} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

$$\text{curl} = 0$$

রক্ষণশীল

Problem

$F = y\hat{i} + x\hat{j} + 0\hat{k}$

ভেক্টর ক্ষেত্রটি ঘূর্ণনশীল ?

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}y\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right)$$

$$= 0\hat{i} - 0\hat{j} + k(1-1)$$

$$= 0$$

Poll Question-01

- নদীতে নৌকা ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে 4m/s ও 8m/s। সরাসরি নদী পার হতে চাইলে স্রোতের সাথে কত কোণে রওনা দিতে হবে?

(a) 90°

(b) 120°

(c) 60°

(d) কোনোটিই নয়

Poll Question-02

- খাড়াভাবে বৃষ্টি পড়ছে। দুইজন ব্যক্তি একই দিকে ভিন্ন বেগে হাঁটছেন। বৃষ্টি থেকে বাঁচতে তারা ছাতা খুললেন। কার ছাতা উলম্বের সাথে বেশি কৌণিক ব্যবধানে থাকবে?

  (a) যার বেগ বেশি

  (b) যার বেগ কম

  (c) উভয়ের একই হবে

  (d) মান জানা না থাকলে বলা সম্ভব না

Poll Question-03

- $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল হলে কোনটি সঠিক?

(a) $\vec{A} . \vec{B} = 0$

(b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

(c) $\vec{A} = m \vec{B}$

(d) (b) ও (c) উভয়ই

Poll Question-04

- কোনটির ডাইভারজেন্স নির্ণয় সম্ভব না?

(a) তড়িৎ ক্ষেত্র

(b) তাপমাত্রা

(c) চৌম্বক ক্ষেত্র

(d) মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র

Poll Question-05

- $\vec{A} = 2i - j + 3k$, $\vec{B} = 4i + j + k$, $\vec{C} = m\,i + 2j - 2k$

  'm' এর মান কত হলে এরা সমতলীয় হবে?

  (a) 5

  (b) 3

  (c) 2

  (d) 7

না বুঝে মুখস্থ করার অভ্যাস প্রতিভাকে ধ্বংস করে