ইঞ্জিনিয়ারিং এডমিশন প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : M-04

অধ্যায় ০২ : ভেক্টর

অধ্যায় ০৮ : ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

ভেক্টর

মান ও অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ ধনাত্মক x-অক্ষের সঙ্গে ভেক্টর $\overline{A} = -\sqrt{3}i + j$ যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। [RUET'18-19]

$\vec{A} \cdot \hat{i} = |\bar{A}| \times |\hat{i}| \cos\theta$

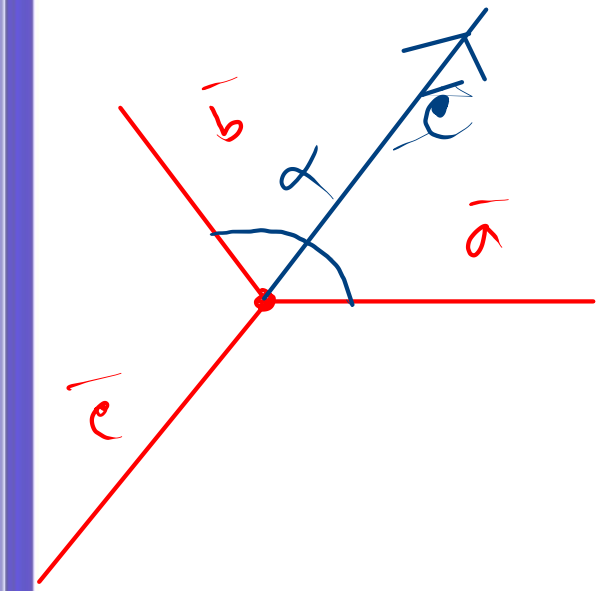
$\therefore \cos\theta = \dfrac{\bar{A} \cdot \hat{i}}{|\bar{A}| \times |\hat{i}|} = \dfrac{-\sqrt{3} \times 1}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cos 150^\circ$

$\therefore \theta = 150^\circ$ (Ans)

মান ও অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ যদি $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ এবং $|\underline{a}| = 3, |\underline{b}| = 5, |\underline{c}| = 7$ হয়, তাহলে $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [BUET'17-18]



$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$c^2 - a^2 - b^2 = 2ab\cos\alpha$$

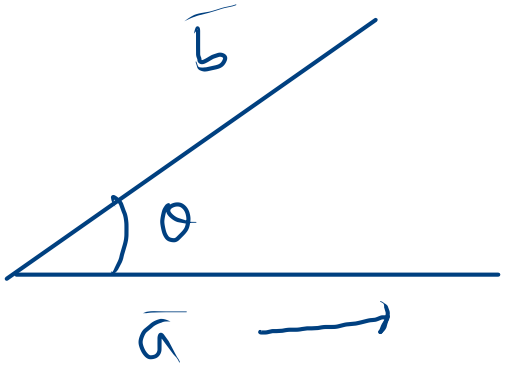
$$\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

$$= \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{2\times 3\times 5} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$\therefore \alpha = 60^\circ$

উপাংশ ও অভিক্ষেপ সংক্রান্ত

❖ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর $\vec{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ ও $\vec{a}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{b}$ এর উপাংশ নির্ণয় কর। [BUET'08-09;KUET' 05-06,09-10; DU'16-17]



$\bar{a}$ vector বরাবর $\bar{b}$ এর অভিক্ষেপ $= b\cos\theta$

এখন, $\bar{a}\cdot\bar{b} = ab\cos\theta$

$\therefore b\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{a} = \frac{4\times1 + 8\times2 + 2\times(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$

$= 6$

উপাংশ: অভিক্ষেপ × একক vector

$= 6 \times \left(\frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}\right)$ Ans

একক ভেক্টর সংক্রান্ত

❖ P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $(1,1,1)$ এবং $(3,2,-1)$ হলে, $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [BUET'03-04]

$\overrightarrow{OP} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OQ} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$= 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ সমান্তরাল একক vector $= \dfrac{2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}}$

লম্ব ও সমান্তরাল ভেক্টর সংক্রান্ত

❖ $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর সমান্তরাল নাকি লম্ব যাচাই কর।
[BUTex'10-11,07-08,03-04]

$\frac{8}{4}$ $\frac{1}{-2}$ $\frac{-6}{5}$ ×

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 8 \times 4 + 1 \times (-2) + (-6) \times 5$

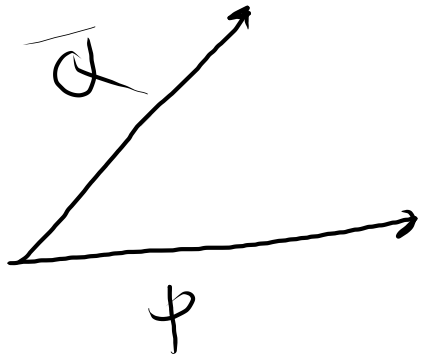
$= 32 - 2 - 30 = 0$

লম্ব

ক্ষেত্রফল ও আয়তন সংক্রান্ত

❖ $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [CUET'15-16, DU'17-18]

Question bank must solve



$$|\bar{P} \times \bar{Q}|$$

$$\bar{P} \times \bar{Q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4+2) - \hat{j}(-4-2) + \hat{k}(-8+8)$$

$$= 6\hat{i} + 6\hat{j}$$

$$|\bar{P} \times \bar{Q}| = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{72} \text{ (Ans)}$$

ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

ফাংশনের মান নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ $f(x^2 - 5x + 4) = x + 3$ হলে, $f(-2) = ?$ [SUST'12-13]

$x^2 - 5x + 4 = -2$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore x = 3, 2$

$\therefore f(2^2 - 5 \times 2 + 4) = 2 + 3$

$= 5$

$\therefore f(3^2 - 5 \times 3 + 4) = 3 + 3$

$= 6$

Ans: 5, 6

$f(2x+1) = x + 5$ এর

$f(2) = ?$

$2x + 1 = 2$

$2x = 2 - 1$

$x = 1/2$

$\therefore f(2 \times 1/2 + 1) = 1/2 + 5$

Domain নির্ণয়

$y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে,

x-এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য y তথা $f(x)$-এর মান বাস্তব হবে, তাদের (x-এর মানের) সেটকেই $f(x)$-এর Domain (ডোমেন) বলে।

Domain: set of independent variable: [x এর মানের সেট]

Range: set of dependent y [y এর মানের সেট]

Domain নির্ণয়

$f: A \longrightarrow B; f(x) =$ জগতের যেকোন সম্পর্ক

Domain

co-domain

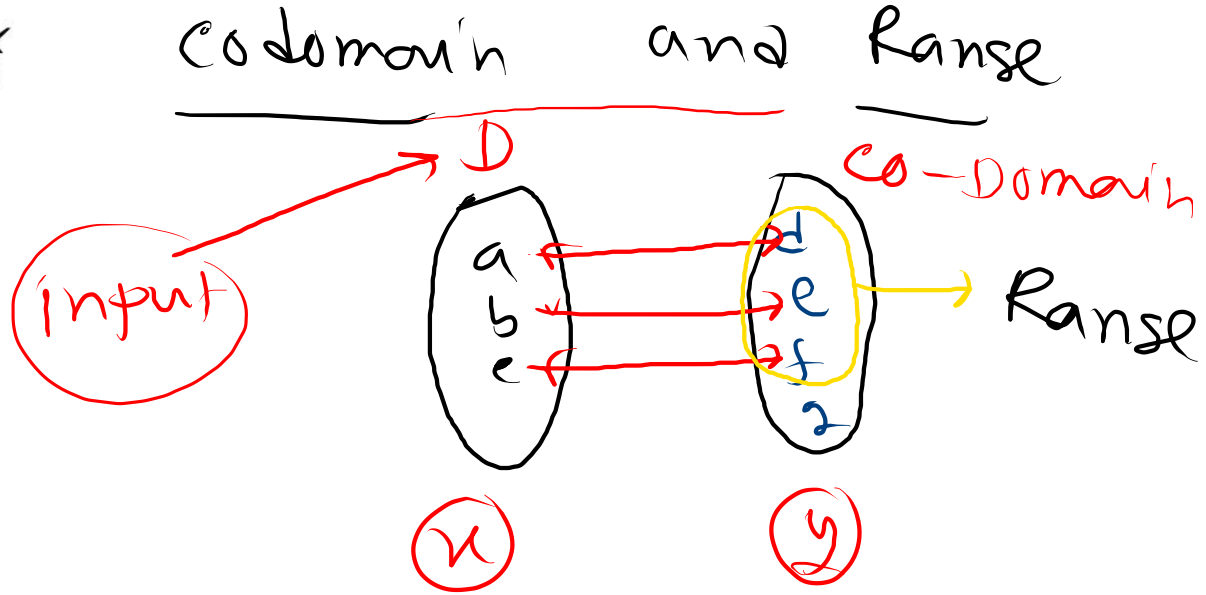
Example: $f: R_+ \longrightarrow R; f(x) = 5x + 3$

Domain

Codomain

Domain: R_+

Codomain and Range



Range is a subset of co domain.

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

❖ $f(x) = \frac{5x+1}{7x+3}$

$7x+3 \neq 0$

$7x \neq -3$

$\therefore x \neq -3/7$

$D_f = R - \{-3/7\}$

❖ $f(x) = \sqrt{4x+3}$

D_f:

$4x+3 \geq 0$

$4x \geq -3$

$x \geq -3/4$

❖ $f(x) = \sqrt[3]{4x+3}$

↳ Domain: R

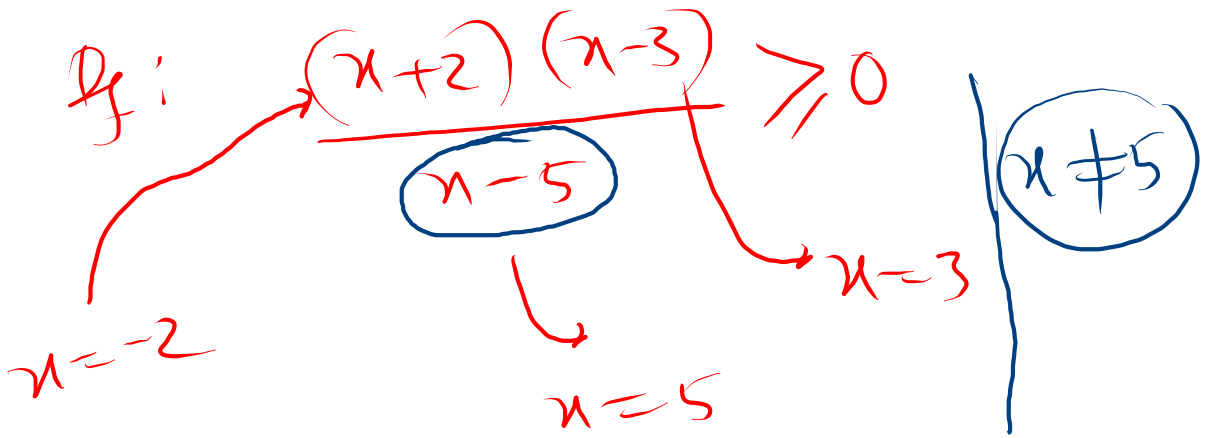


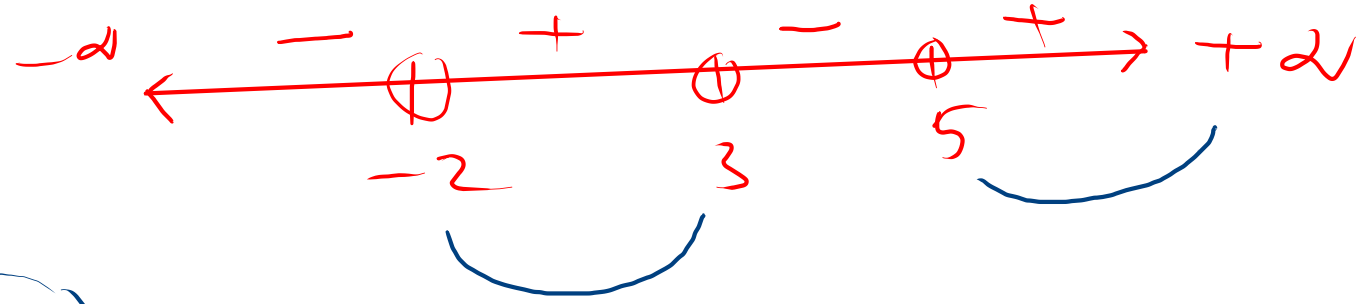
$R \to R^- \cup \{0\} \cup \{R^+\}$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

❖ $f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{(x-5)}}$





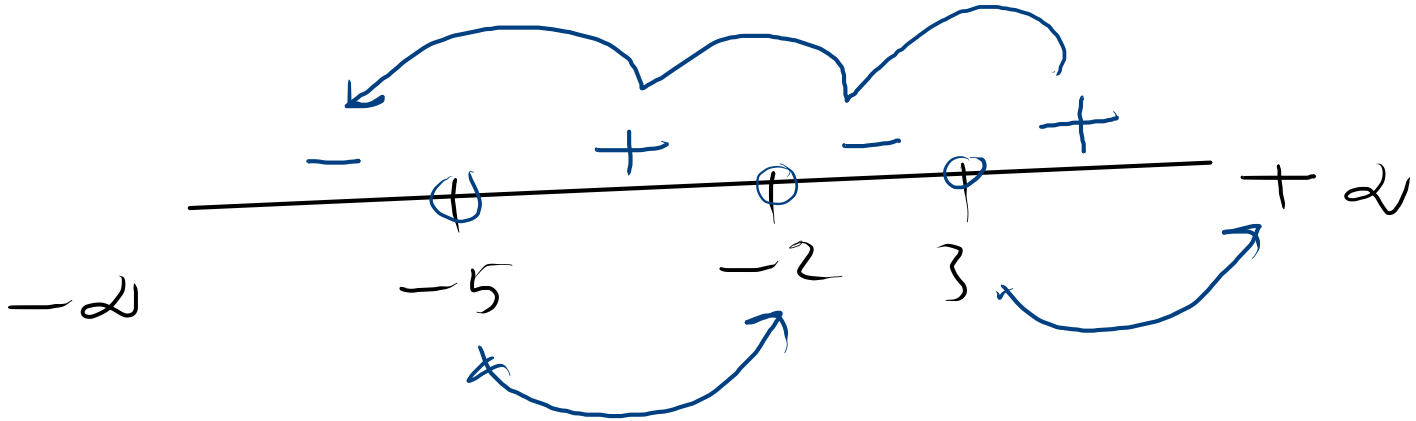
$-2 \leq x \leq 3$ or $5 < x < \infty$

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x+5)} > 0$$

$x+2=0$
$x=-2$

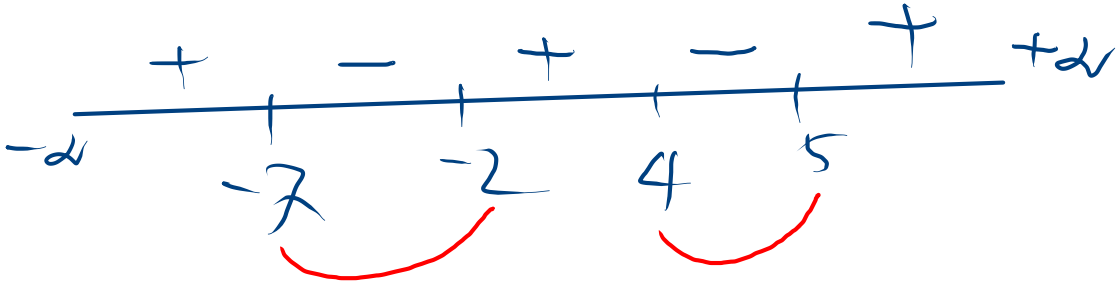
$x-3=0$
$x=3$

$x+5=0$
$x=-5$



$-5 < x < -2$ or $3 < x < \infty$

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x-5)(x+7)} < 0$$



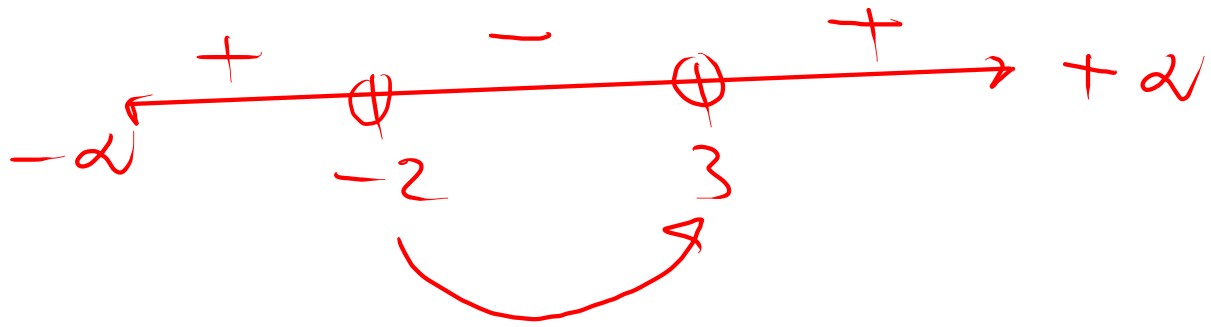
$-7 < x < -2$ or $4 < x < 5$

এভাবেও সমাধান

$(x+2)(x-3) < 0$

$x = -2$

$x = 3$



$-2 < x < 3$

$(x+2)(x-3) \leq 0$

$-2 \leq x \leq 3$

$a < x < b \xrightarrow{(3,4)} (a,b) \longrightarrow]a,b[$

$a \leq x \leq b \longrightarrow [a,b]$

$a \leq x < b \longrightarrow [a,b)$ ou $[a,b[$

$a < x \leq b \longrightarrow (a,b]$ ou $]a,b]$

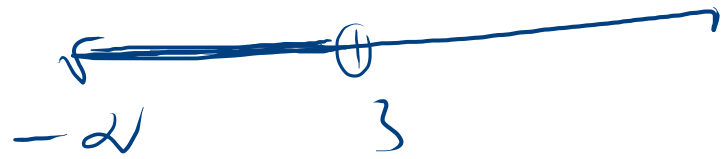
$x > 3$



$3 < x < \infty$

$(3, \infty)$

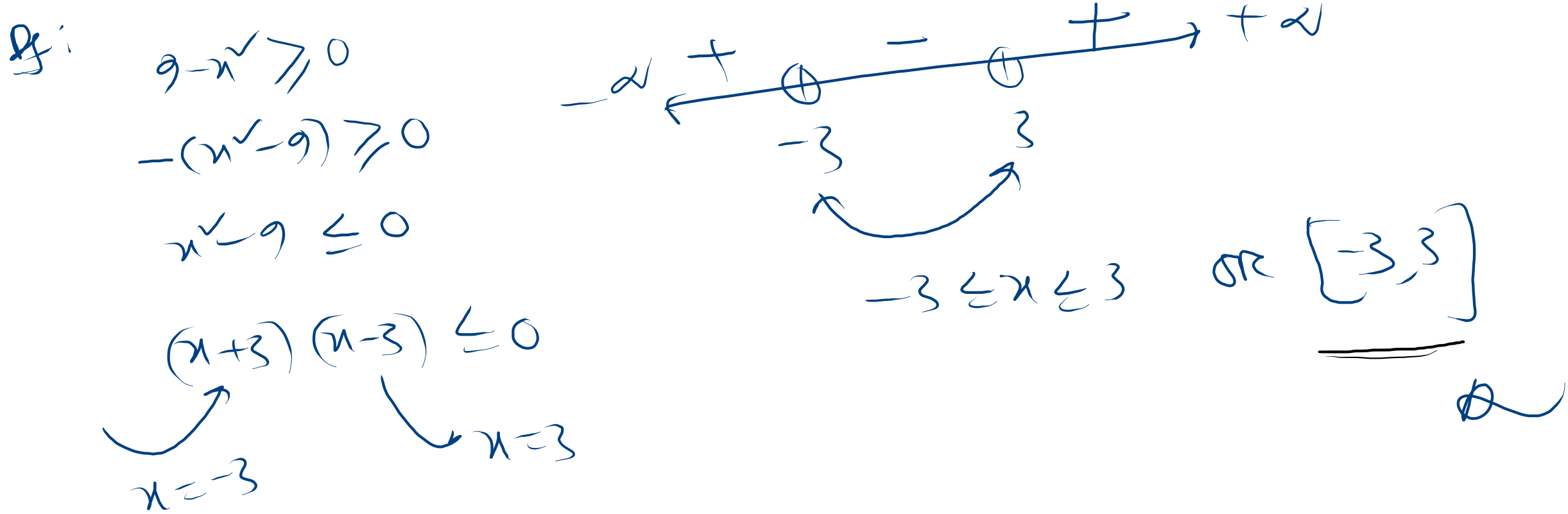
$x < 3$



$-\infty < x < 3$ ou $(-\infty, 3)$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

❖ $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ [RUET '15-16]



Poll Question-01

❑ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{64-49x^2}}$ ফাংশনের Domain নির্ণয় কর।

(a) $(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8})$

(b) $[-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}]$

(c) $(-\frac{8}{7}, \frac{8}{7})$

(d) $[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}]$

$64-49x^2 > 0$

$-(49x^2-64) > 0$

$49x^2-64 < 0$

$(7x)^2 - 8^2 < 0$

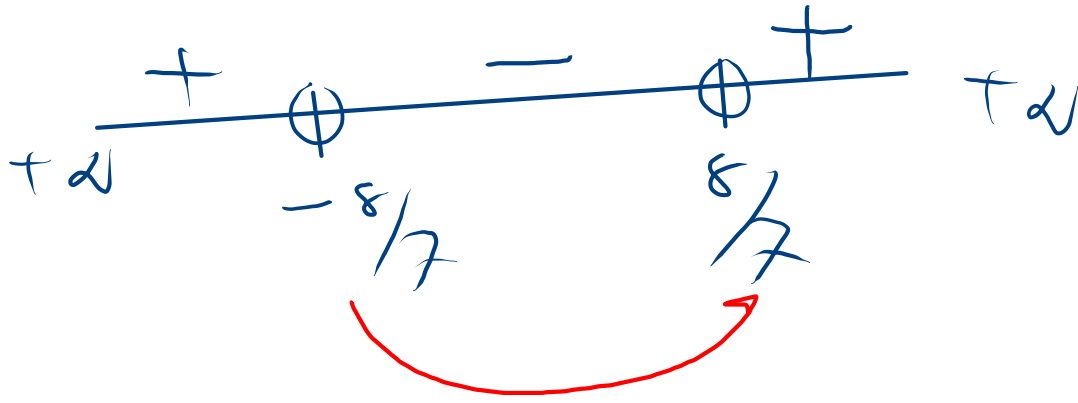
$(7x+8)(7x-8) < 0$

$7x+8=0$

$7x=-8$

$x=-8/7$

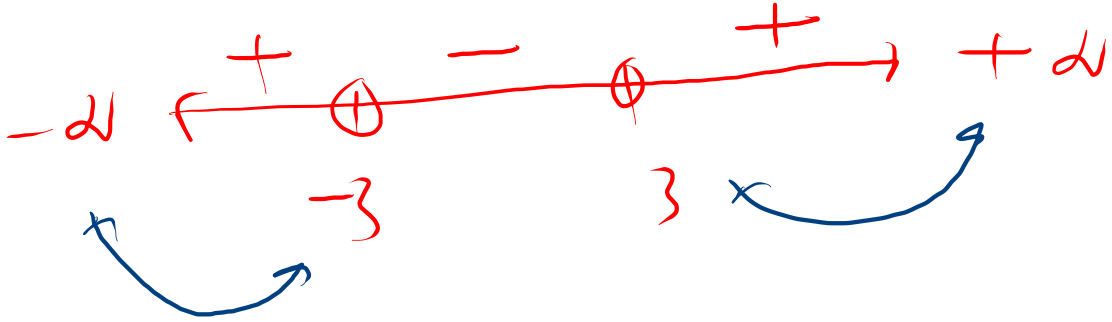
$x=8/7$



$-8/7 < x < 8/7$

বিভিন্ন ফাংশনের Domain নির্ণয়

❖ $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$



Ans: $x^2 - 9 \geq 0$

$(x+3)(x-3) \geq 0$

$x = -3$ $\quad x = 3$

$-\infty < x \leq -3$ or $3 \leq x < \infty$

$(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

Poll Question-02

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{49x^2-64}}$ ফাংশনের Domain নির্ণয় কর।

(a) $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}, \infty\right)$

(b) $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right] \cup \left[\frac{7}{8}, \infty\right)$

(c) $\left]-\infty, -\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{8}{7}, \infty\right[$

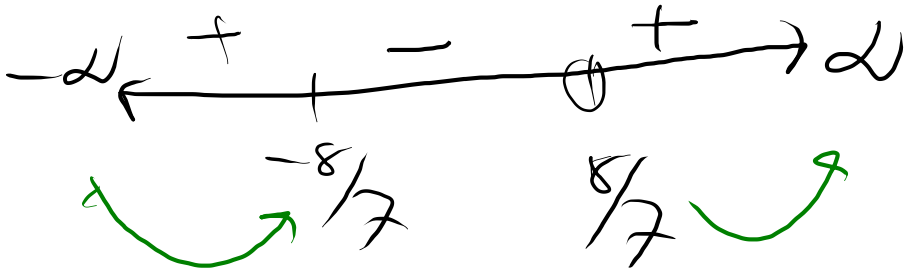
(d) None

$49x^2 - 64 > 0$

$(7x)^2 - 8^2 > 0$

$(7x+8)(7x-8) > 0$

$x = -8/7$ $\quad x = 8/7$



$(-\infty, -8/7) \cup (8/7, \infty)$

$7x+8=0$

$7x=-8$

$x=-8/7$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

$\log_a x$

এখানে দু'টি বিষয় খেয়াল রাখতে হবে।

1. $x>0$
2. $a>0$ এবং $a \neq 1$

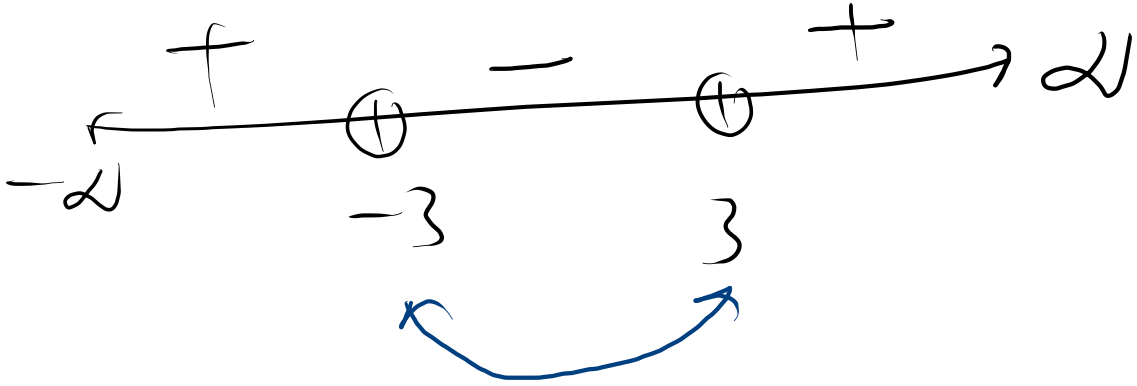
আরো জেনে রাখা ভাল, $\log_a x = p$ হলে,

$x=a^p$ হবে।

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

$\sqrt{\square}$ $\square \geq 0$

❖ $f(x) = \log(9 - x^2)$



$-3 < x < 3$

বা

$(-3, 3)$

$9 - x^2 > 0$

$-(x^2 - 9) > 0$

$x^2 - 9 < 0$

$(x+3)(x-3) < 0$

$x = -3$ $\quad$ $x = 3$

লগারিদমিক ফাংশনের Domain নির্ণয়

❖ $f(x) = \ln\ln\ln\ln x$

main

$\ln x = 2$

$x = e^2$

$\ln(\ln\ln x) > 0$

$\ln\ln x > e^0$

$\ln\ln x > 1$

$\ln x > e^1$

$x > e^e$

$\ln(\ln\ln 5x)$

$x > e/5$

Ans: $\ln\ln 5x > 0$

$\ln 5x > e^0$

$\ln 5x > 1$

$5x > e$

Range নির্ণয়

$y = f(x)$ ফাংশনের ক্ষেত্রে,

y তথা $f(x)$-এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব এবং Domain-এর অন্তর্ভূক্ত হবে, তাদের(y -এর মানের) সেটকেই $f(x)$-এর Range(রেঞ্জ) বলে।

Range নির্ণয়

❖ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Range : $R - \left\{ \frac{\text{ছকের } x \text{ এর সহগ}}{\text{হরের } x \text{ এর সহগ}} \right\}$

$\Rightarrow R - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

$f(x) = \frac{5x+6}{2x+3}$

$R - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

Range নির্ণয়

↳ সর্বনিম্ন → সর্বোচ্চ

❖ $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Range: $[0, 3]$

Df: $[-3, 3]$

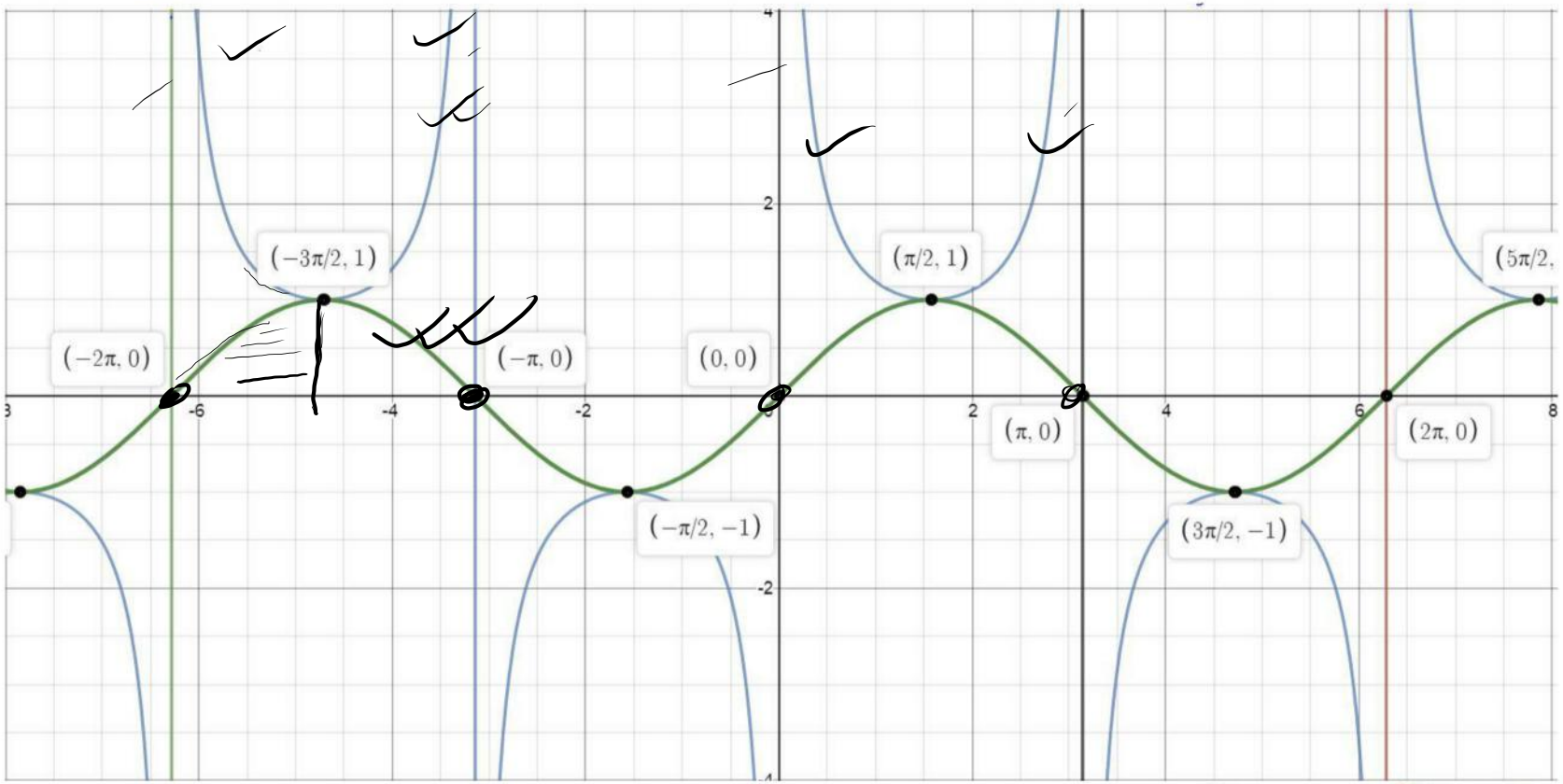
x	f(x)	
−3	0	→ সর্বনিম্ন 0
−2	$\sqrt{5}$	
−1	$\sqrt{8}$	
0	3	→ সর্বোচ্চ 3
1	$\sqrt{8}$	
2	$\sqrt{5}$	
3	0	

ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin x$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$
$\operatorname{cosec} x$	$\mathbf{R} - \{n\pi, n\epsilon\mathbf{Z}\}$	$(-\infty,-1] \cup [1, \infty)$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

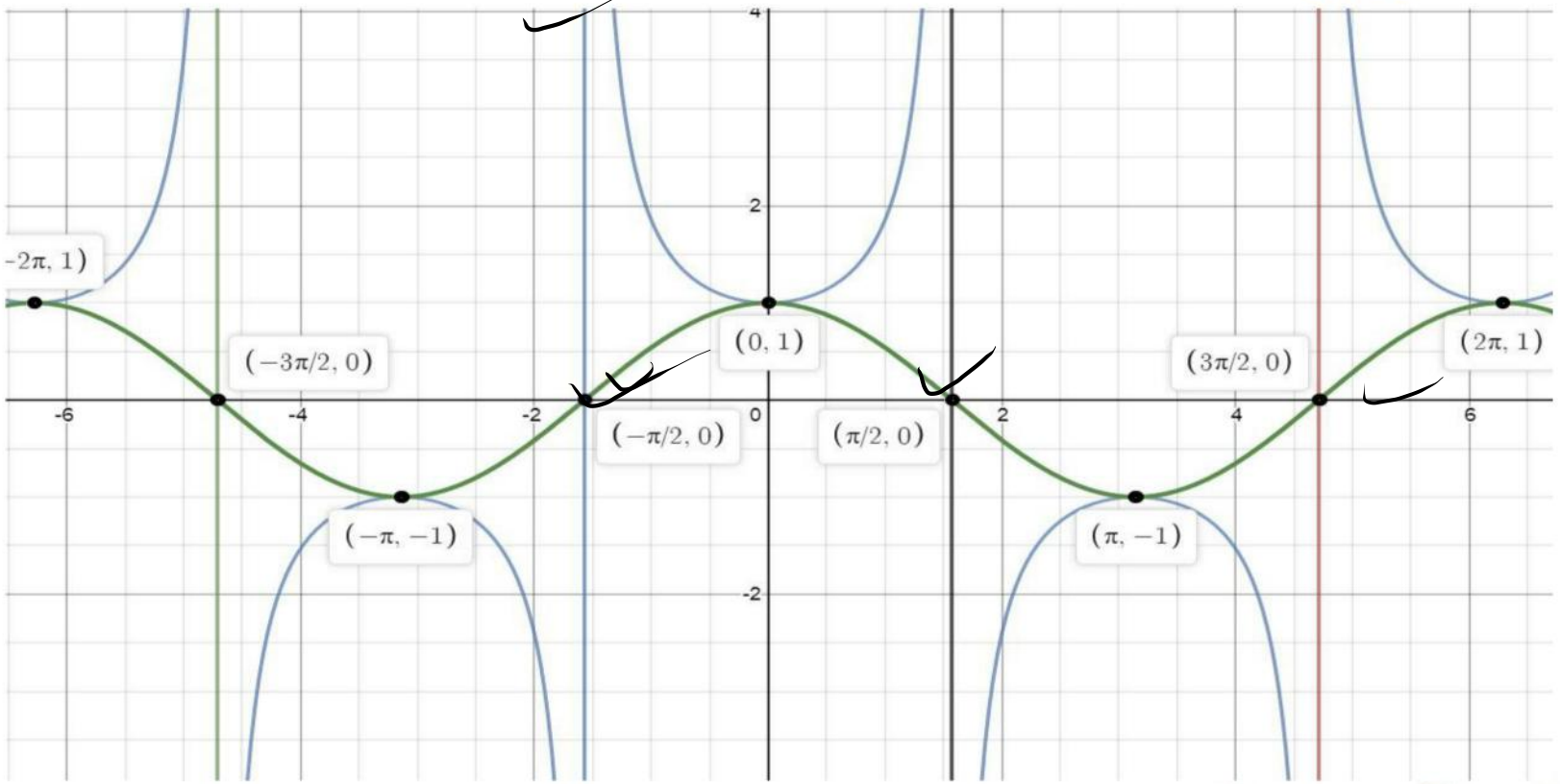


ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
cos x	**R**	[-1,1]
sec x	**R** – {(2n+1)π/2, n∈**Z**}	(-∞,-1] ∪ [1, ∞)

$f(x) = \cos x$

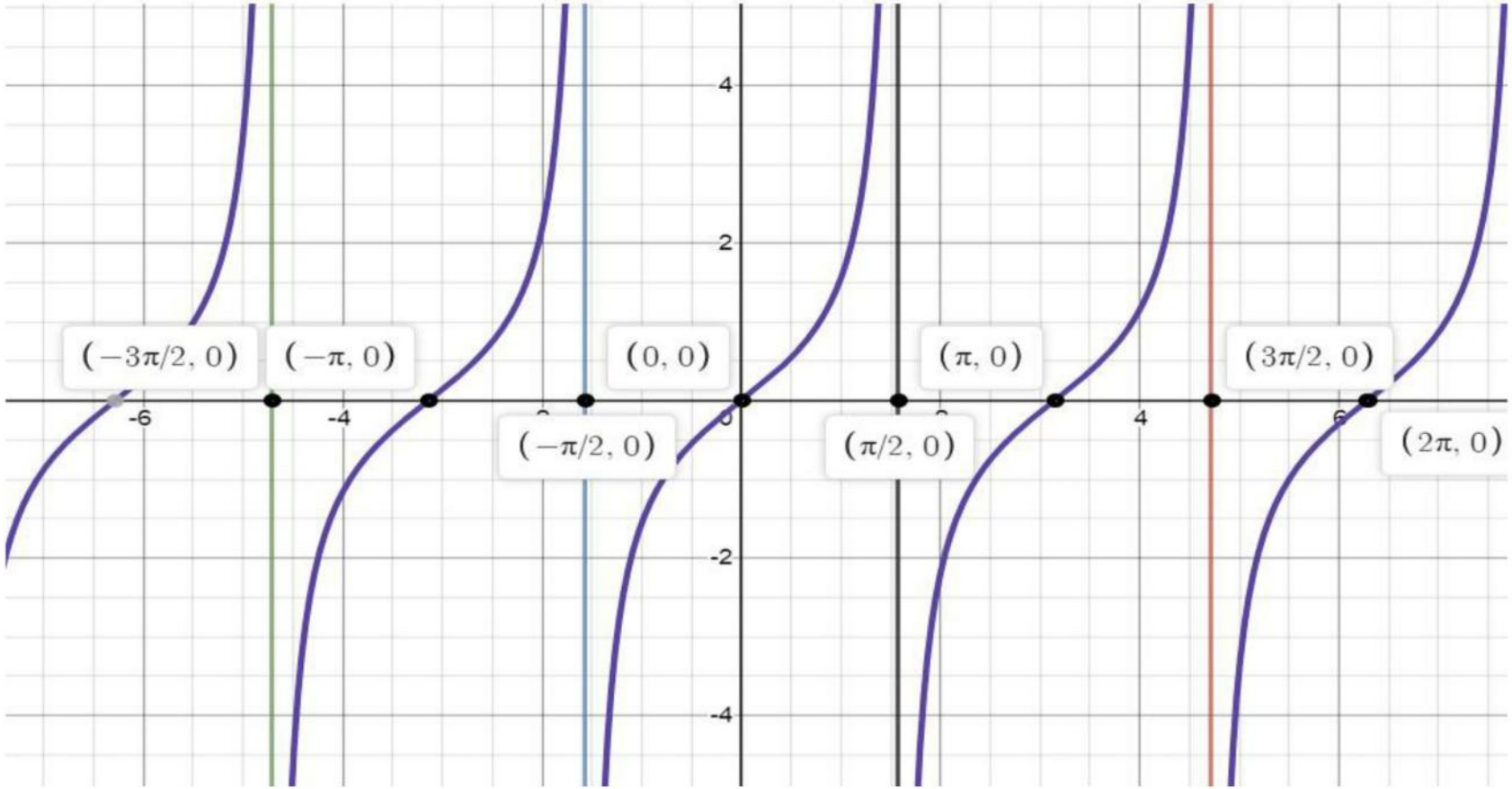
$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
tan x	$\mathbf{R} - \{(2n+1)\pi/2, n\epsilon\mathbf{Z}\}$	**R**

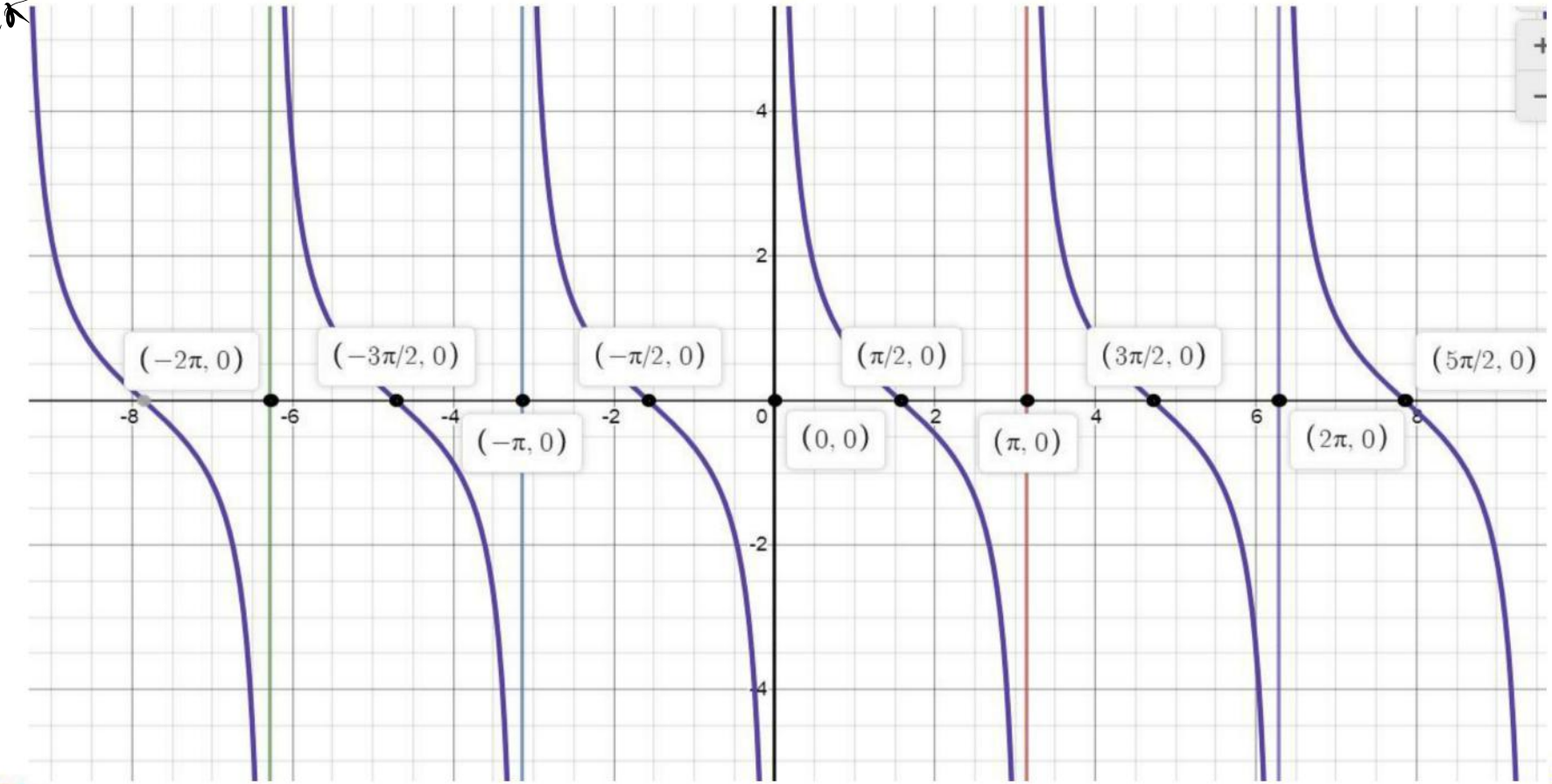
$f(x) = \tan x$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
cot x	$\mathbf{R} - \{n\pi, n\epsilon\mathbf{Z}\}$	**R**

$f(x) = \cot x$



ত্রিকোনমিতিক ফাংশনের Domain এবং Range

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ যখন $\cos x \neq 0$

- $f(x) = 2 + 3\sin x$; ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

$f(x) = 2020 + 5\sin x$

$0 \rightarrow \min$

domain: $\mathbb{R}$

$2 + 3\sin x$

$f_{min} = 2 + 3 \times (-1)$

$= -1$

$f_{max} = 2 + 3 \times 1$

$= 5$

Range: $[-1, 5]$

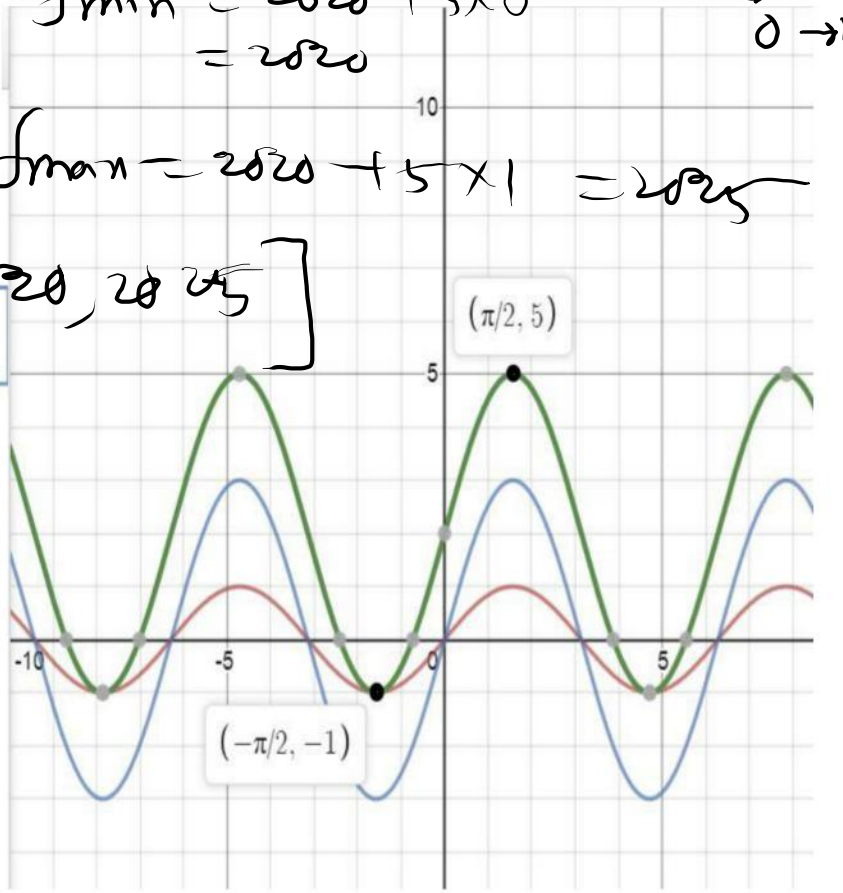
$f_{min} = 2020 + 5 \times 0$

$= 2020$

$f_{max} = 2020 + 5 \times 1 = 2025$

$\sin x$
$3 \sin x$
$2 + 3 \sin x$

$[2020, 2025]$



বিপরীত ফাংশন নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ $f: R \to R$ কে $f(x) = 2x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(x)$ এর মান কত? [KUET'13-14, BUTex'14-15]

Domain, Codomain, R

ধাপ-১: $x_1 \in$ রেঞ্জ এবং $x_2 \in$ রেঞ্জ

(১) $f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

ধাপ-২: রেঞ্জ নির্ণয়:

Range = Co domain

$f(x) = 2x - 3 \to$ Range: R

(২) $f^{-1}(x)$ → বের করি

(৩) $y = f(x)$

$x = f^{-1}(y)$

ধাপ-৪:

$y = 2x - 3$

$y + 3 = 2x$

$x = \frac{y+3}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ (Ans)

বিপরীত ফাংশন নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$, $f(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$ হলে, $f^{-1}(x)$=?

Codomain: $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$ ⟹ Range: $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

(5-2)

Step-1

1-1 test

$f(x_1) = f(x_2)$

⋮

$x_1 = x_2$

(5-3)

$y = \frac{5x+3}{2x-1}$

$2xy - y = 5x + 3$

$2xy - 5x = y + 3$

$x(2y-5) = y+3$

$x = \frac{y+3}{2y-5}$

$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2y-5}$

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2x-5}$

(Du)

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+b}{cx-(-d)}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$$

$$= \frac{x+3}{2x-5}$$

$$f(x) = \frac{-3x+5}{2x+4}$$

$$= \frac{-3x+5}{2x-(-4)}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-4x+5}{2x-(-3)}$$

Poll Question-03

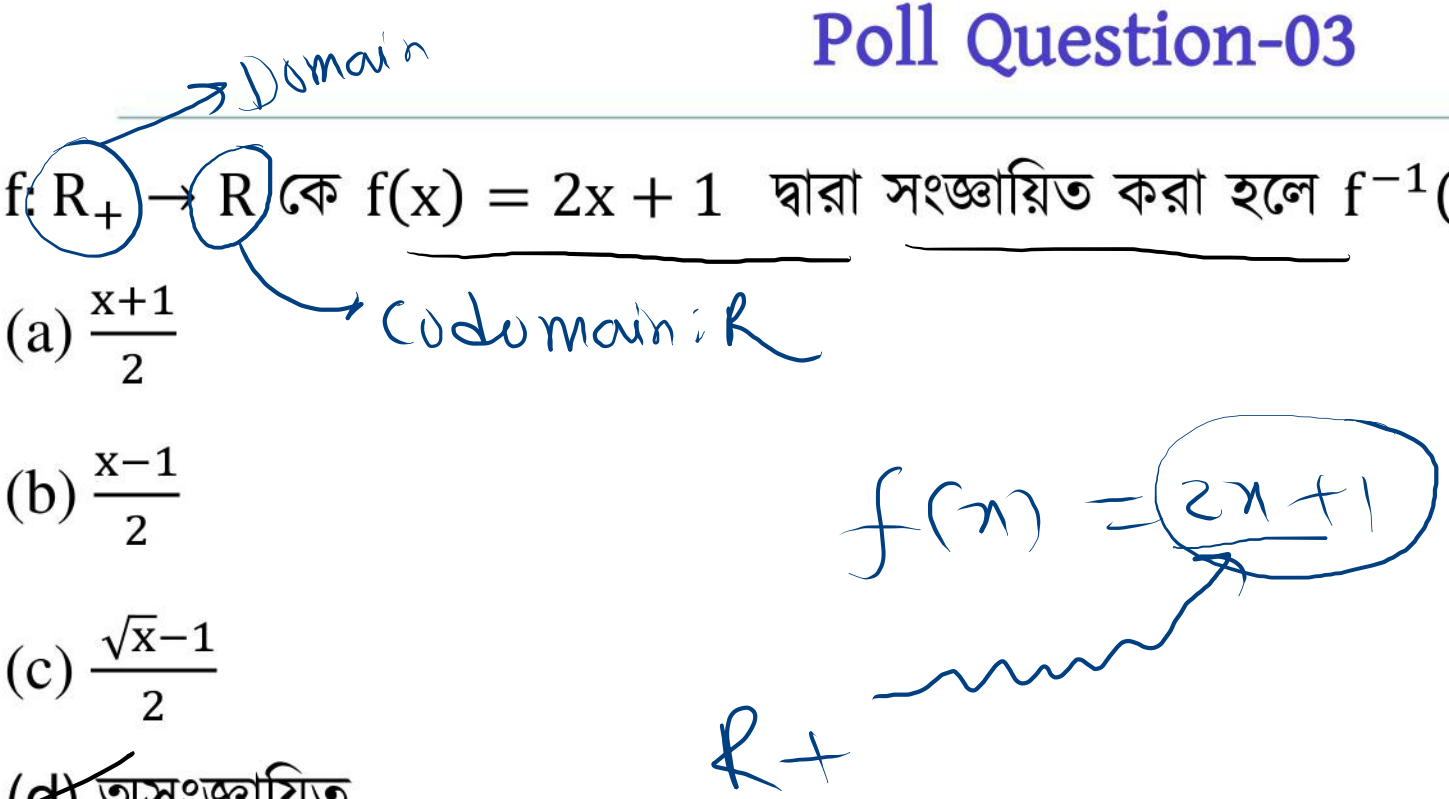
❖ $f: R_+ \to R$ কে $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(x)$ এর মান কত?

(a) $\frac{x+1}{2}$

(b) $\frac{x-1}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{x}-1}{2}$

~~(d)~~ অসংজ্ঞায়িত



সংযোজিত ফাংশন নির্ণয় সংক্রান্ত

❖ $f(x) = \sqrt{x-1}, (x \geq 1), g(x) = x^2 + 2$ হলে, $(gof^{-1})(x)$ নির্ণয় কর। [BUET'18-19]

$$(gof^{-1})(x) = g(f^{-1}(x))$$

$$= g(1+x^2)$$

$$= (1+x^2)^2 + 2$$

$$= 1 + 2x^2 + x^4 + 2$$

$$= x^4 + 2x^2 + 3 \quad \text{Ans}$$

$y = \sqrt{x-1}$

$y^2 = x - 1$

$y^2 + 1 = x$

$x = 1 + y^2$

$f^{-1}(y) = 1 + y^2$

$f^{-1}(x) = 1 + x^2$

বিশেষ কিছু ফাংশন

- **যুগ্ম ফাংশনঃ** (জোড় fun^{n})

$f(x) = \cos x / \sec x / x^2 / x^4$ | $f(x) = \cos x$, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

(±) চিহ্নের ক্ষেত্রে

$f(x) = f(-x)$

- **অযুগ্ম ফাংশনঃ** $f(x) = -f(x)$

$\therefore f(x) = \sin x / \tan x / x^3 / x^5$ | $f(x) = \sin x$, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

- ~~**অভেদক ফাংশন (Identity Function):**~~ $f(x) = x$ → input = output
- **ধ্রুবক ফাংশন (Constant function):** $f(x) = c$

ফাংশনের লেখচিত্র

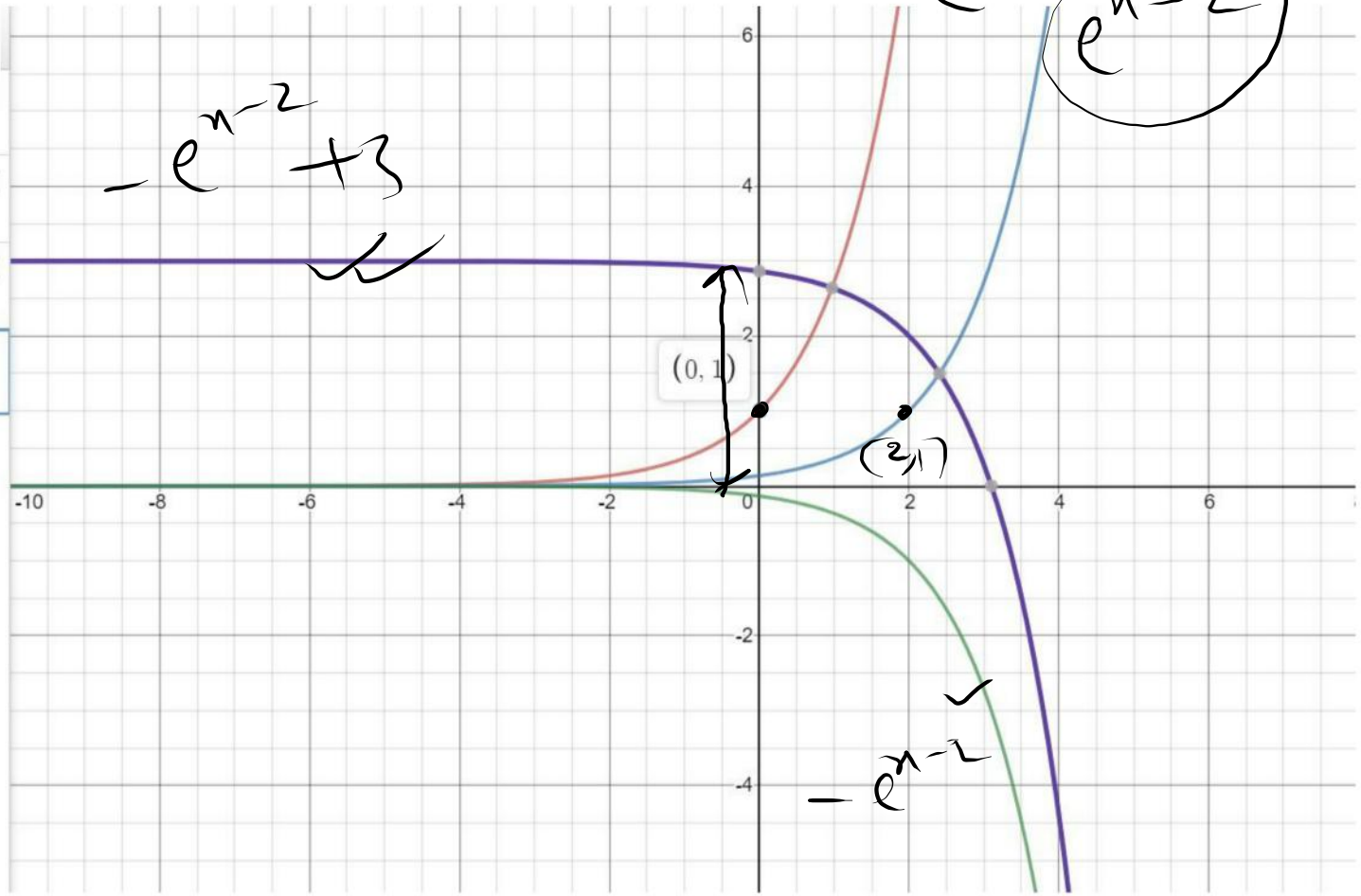
$f(x) = e^x$ –এর সাহায্যে $f(x) = -e^{(x-2)} + 3$ এর লেখচিত্র অংকন কর।

e^x

e^{x-2}

$-e^{x-2}$

$-e^{x-2} + 3$

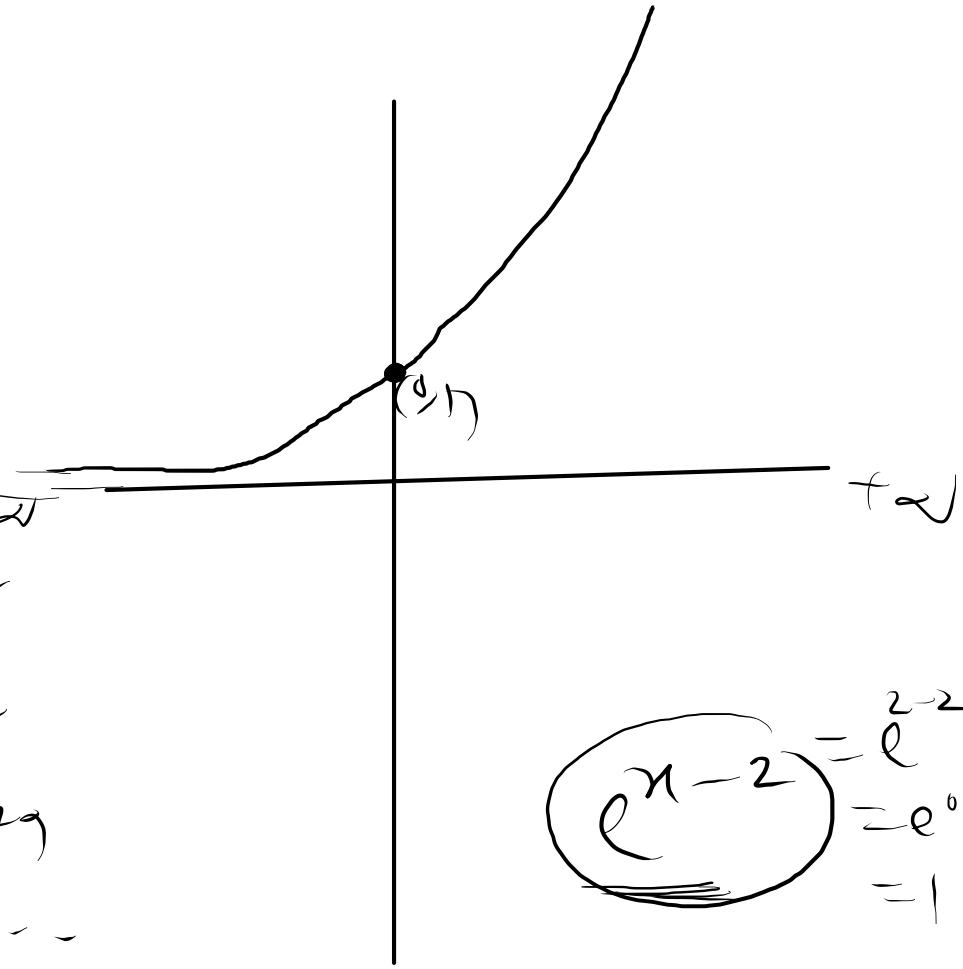


$$f(x) = -e^{(x-2)} + 3$$

Step-1

x	e^x
0	$e^0 = 1$
-1	$e^{-1} = 0.36$
-2	$e^{-2} = 0.135$
-3	$e^{-3} = 0.049$
$\vdots$	
$-\infty$	$e^{-\infty} \to 0$

x	e^x
0	$e^0 = 1$
1	$e^1 = 2.718$
2	$e^2 = 7.338$
3	$e^3 = 20.079$
4	$e^4 = 54\ldots$
$\vdots$	
∞	$e^{\infty} \to \infty$



$e^{x-2} = e^{2-2}$

$= e^0$

$= 1$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

লেগে থাকো সৎভাবে স্বপ্নজয় তোমারই হবে