12 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

AS PRINCIPAIS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Um dos pontos mais importantes da Trigonometria é o estudo das principais razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Para o uso correto destas razões trigonométricas é vital se lembrar que em todo triângulo retângulo teremos uma hipotenusa, porém dois catetos. Para diferenciá-los, existe o cateto que estará próximo ao ângulo relacionado, que será chamado de cateto adjacente. Por outro lado, existirá um cateto que se encontrará de forma oposta ao ângulo relacionado, que será denominado por cateto oposto. A cotangente será estudada agora também, apesar de ser uma razão trigonométrica menos utilizada nas questões.

Vale ressaltar que a palavra razão tem o significado de divisão, o que podemos representar por meio de uma fração. Assim, devemos saber as seguintes razões, que são criadas inicialmente para cada um dos ângulos agudos do nosso triângulo retângulo:

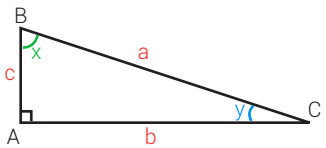
$$\text{Seno} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Tangente} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}}$$

$$\text{Cotangente} = \frac{\text{Cateto Adjecente}}{\text{Cateto Oposto}}$$

Assim, podemos exemplificar como seriam as frações correspondentes a cada uma dessas razões trigonométricas dos ângulos x e y utilizando os lados a, b e c do triângulo da figura abaixo:



$\text{Sen } x = \frac{b}{a}$	$\text{Cos } x = \frac{c}{a}$	$\text{Tg } x = \frac{b}{c}$	$\text{Cotg } x = \frac{c}{b}$
$\text{Sen } y = \frac{c}{a}$	$\text{Cos } y = \frac{b}{a}$	$\text{Tg } y = \frac{c}{b}$	$\text{Cotg } y = \frac{b}{c}$

UMA IMPORTANTE OBSERVAÇÃO SOBRE A TANGENTE

Existe uma maneira alternativa de se visualizar a razão trigonométrica denominada por tangente. Como essa razão é a divisão entre cateto oposto e cateto adjacente, podemos visualizá-la também como a divisão entre seno e cosseno. Ou seja, para calcularmos a tangente de um ângulo, podemos dividir o seno desse ângulo pelo cosseno do mesmo. Veja a demonstração desta afirmativa:

$$\frac{\text{Seno}}{\text{Cosseno}} = \frac{\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}}{\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}} = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} =$$

$$= \text{Tangente, ou seja, } \text{Tg } x = \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x}$$

Desta forma, já podemos ver que a tangente tem uma condição de existência: os valores de tangente serão inexistentes para ângulos cujo valor de cosseno é zero.

ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Além de um ângulo reto, todo triângulo retângulo possui outros dois ângulos que somam 90°, o que nos possibilita denominar tais ângulos como ângulos complementares. Pelo exemplo da figura anterior, percebe-se que quando falamos de dois ângulos complementares, teremos que o valor do seno de um deles é igual ao valor do cosseno do outro e vice-versa. O mesmo também acontece com a tangente e a cotangente, ou seja, o valor da tangente de um ângulo agudo é igual ao valor da cotangente do seu complemento. Isto ficará ainda mais visível quando estivermos trabalhando os ângulos notáveis, estudo que inclui os ângulos de 30° e 60°, que são dois ângulos complementares.

Por ora, veja os exemplos abaixo:

Exemplo 1: sen 40° = cos 50°

Exemplo 2: tg 42° = cotg 48°

OUTRAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

É importante conhecer também outras duas razões trigonométricas, que aparecem menos nas questões em provas, mas que complicam e confundem muito os alunos, devido à ordem em que devemos estabelecer cada uma delas. São elas a secante e a cossecante. A melhor maneira de trabalhar com elas é utilizar alguma razão trigonométrica que já vimos anteriormente. Dessa forma, temos que o valor da secante de um ângulo é o inverso do valor do cosseno do ângulo, assim como o valor da cossecante do ângulo é o inverso do valor do seno deste mesmo ângulo. É importante frisar que a secante de um ângulo só poderá ser calculada para ângulos que possuem valor de cosseno diferente de zero, da mesma forma que o valor da cossecante de um ângulo só pode ser calculado a partir de um ângulo que não possua valor de seno igual a zero. Observe estas razões trigonométricas:

$$\text{Secante} = \frac{1}{\text{Cosseno}} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

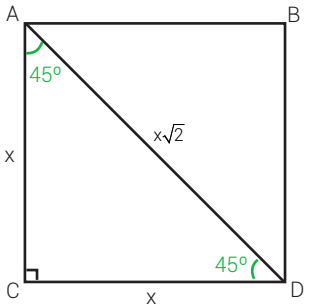
$$\text{Cossecante} = \frac{1}{\text{Seno}} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

ÂNGULOS NOTÁVEIS

Ângulos notáveis são aqueles que são trabalhados de forma mais intensa nas questões de Matemática e, por este motivo, seus valores de seno, cosseno e tangente devem ser conhecidos pelos alunos. As provas nem sempre informam aos candidatos estes valores nas questões.

Com o hábito do estudo, esses valores acabam sendo comuns para os alunos. Porém, caso o aluno esqueça, é possível usar uma figura geométrica na hora da prova e se lembrar facilmente o valor esquecido. Vejamos:

Para o Ângulo de 45°: Utilizaremos um quadrado de lado x com uma de suas diagonais traçadas. A diagonal deste polígono funciona como bissetriz e divide o quadrado em dois triângulos retângulos e isósceles.

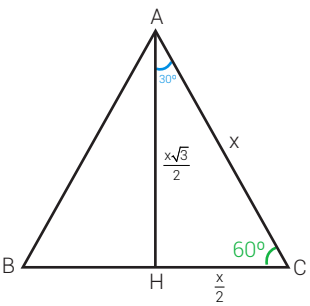


$$\text{Sen } 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos } 45^\circ \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Tg } 45^\circ = \frac{x}{x} = 1$$

Para os Ângulos de 30° e 60°: Utilizaremos apenas uma figura geométrica para esses ângulos, visto que eles são complementares. A figura usada será a de um triângulo equilátero, sendo que a altura relativa a um dos lados estará traçada no nosso esboço, sendo também a mediana e a bissetriz interna deste triângulo. Vejamos:



$$\text{Sen } 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{também será o valor de cos } 60^\circ$$

$$\text{Cos } 30^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{também será o valor de sen } 60^\circ$$

$$\text{Tg } 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tg } 60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$$

Desta forma, podemos resumir esses resultados em uma tabela, como a seguir:

Ângulo	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

TRIÂNGULO EGÍPCIO

É o triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 30° e 60°. Como é muito notável nas provas de Matemática, podemos pensar de maneira a resumir o seu estudo. Observe tais sínteses:

Cateto Oposto a 30°: Sua medida equivale à metade da medida da hipotenusa.

Cateto Oposto a 60°: Sua medida equivale à metade da medida da hipotenusa multiplicada por $\sqrt{3}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC-RJ) O valor de $\frac{\cos 45^\circ + \text{sen} 30^\circ}{\cos 60^\circ}$ é:

a) $\sqrt{2}+1$
b) 2
c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$
e) 0

Resolução: A

A expressão dada é:

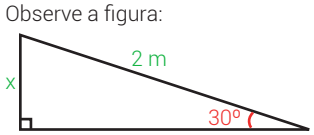
$$E = \frac{\cos 45^\circ + \text{sen } 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}+1$$

02. (CESGRANRIO) Uma escada de 2m de comprimento está apoiada no chão e em uma parede vertical. Se a escada faz 30° com a horizontal, a distância do topo da escada ao chão é de:

a) 0,5 m
b) 1 m
c) 1,5 m
d) 1,7 m
e) 2 m

Resolução: B

Observe a figura:



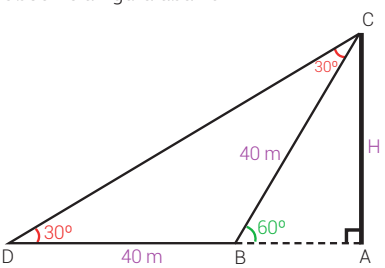
x é o cateto oposto ao ângulo de 30°, que tem comprimento igual à metade da hipotenusa. Assim: $x = \frac{2}{2} = 1\text{m}$

03. (UFSM) Um estudante de Engenharia vê um prédio do Campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30°. Aproximando-se do prédio mais 40m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60°. Considerando que a base do prédio está no mesmo nível do olho do estudante, então a altura h do prédio é igual a:

a) $30\sqrt{3}$ m
b) $20\sqrt{3}$ m
c) 30 m
d) $10\sqrt{3}$ m
e) 28 m

Resolução: B

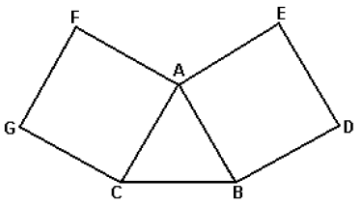
Observe a figura abaixo:



H é o cateto oposto a 60°, que terá metida igual à metade de hipotenusa multiplicada por $\sqrt{3}$. Assim:

$$x = \frac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

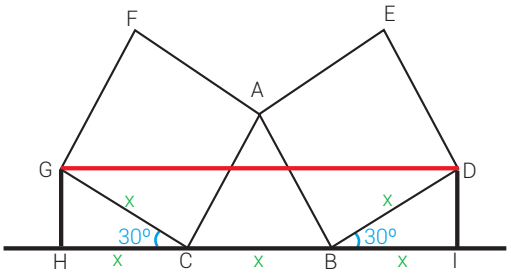
04. (UNIRIO) Na figura a seguir, o triângulo ABC é equilátero de lado x, ABDE e AFGC são quadrados.



Calcule a distância DG, em função de x.

Resolução:

Observe a figura abaixo:



Fazendo o cosseno de 30°, teremos:

$$\cos 30º = \frac{k}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow k = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$DG = k + x + k = 2k + x = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} + x = x\sqrt{3} + x = x(\sqrt{3} + 1)$$

ANOTAÇÕES