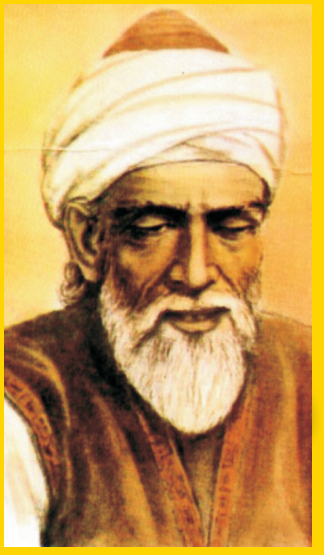
OBJETIVO FRENTE 1

MATEMÁTICA



Abul Wafa (940 – 998) – Responsável por grande parte do conhecimento da trigonometria de hoje.

Trigonometria – Módulos

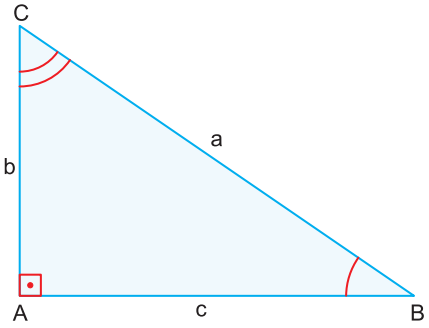
17 – Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo
18 – Arcos notáveis
19 – Arcos notáveis
20 – Arcos notáveis
21 – Relações fundamentais
22 – Relações fundamentais
23 – Medidas de arcos e ângulos
24 – Ciclo trigonométrico – determinações
25 – Função seno
26 – Equações e inequações que envolvem a função seno
27 – Função cosseno
28 – Equações e inequações que envolvem a função cosseno
29 – Função tangente
30 – Equação e inequações que envolvem a função tangente
31 – Equações trigonométricas
32 – Equações trigonométricas

Módulo 17

Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

Palavras-chave:
• Ângulos complementares
• Hipotenusa • Cateto

Consideremos um triângulo retângulo ABC, reto em A. Os outros dois ângulos B e C são agudos e complementares, isto é, B + C = 90°. Para ângulos agudos, temos por definição:



$$\text{sen } B = \frac{\text{cateto oposto a } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto oposto a } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos B = \frac{\text{cateto adjacente a } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos C = \frac{\text{cateto adjacente a } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } B = \frac{\text{cateto oposto a } B}{\text{cateto adjacente a } B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto oposto a } C}{\text{cateto adjacente a } C} = \frac{c}{b}$$

Observações

a) Os **senos** e **cossenos** de ângulos agudos são números compreendidos entre **0** e **1**, pois a medida do cateto é sempre menor do que a medida da hipotenusa.

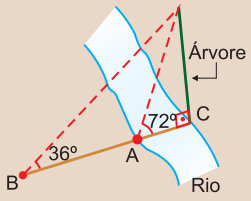
b) O **seno de um ângulo** é igual ao **cosseno do seu complemento** e reciprocamente:

$\text{sen } x = \cos(90° - x)$ $\qquad$ $\cos x = \text{sen}(90° - x)$

c) No triângulo retângulo vale o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Exercício Resolvido

1 (MODELO ENEM)

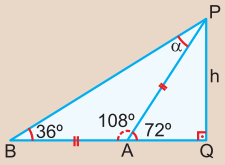


Um observador situado em A, na margem de um rio, avista o topo de uma árvore, situada na margem oposta, sob um ângulo de 72° em relação à horizontal. Desejando calcular a altura da árvore, sem atravessar o rio, afasta-se do ponto A na direção da reta AC até que o ângulo de visão, seja a metade do anterior, chegando assim em B, distante 50m de A.

A altura da árvore, desprezando a do observador, considerando sen 72° ≅ 0,95 é, em metros:

a) 42,4 b) 45,5 c) 47
d) 47,5 e) 49

Resolução



Sendo h a altura da árvore e α o ângulo $B\hat{P}A$ temos:

a) $\alpha + 36° + 108° = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

b) $A\hat{B}P = B\hat{P}A = 36° \Leftrightarrow AP = AB = 50$

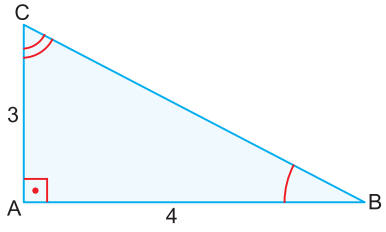
c) $\text{sen } 72° = \frac{h}{AP} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,95 = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 47,5$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 No triângulo retângulo da figura, determinar:



a) a hipotenusa BC
b) sen $\hat{B}$
c) cos $\hat{B}$
d) tg $\hat{B}$
e) sen $\hat{C}$
f) cos $\hat{C}$
g) tg $\hat{C}$

RESOLUÇÃO:

a) 5 **b) $\frac{3}{5}$** **c) $\frac{4}{5}$** **d) $\frac{3}{4}$**

e) $\frac{4}{5}$ **f) $\frac{3}{5}$** **g) $\frac{4}{3}$**

2 A partir da questão anterior, é falso afirmar que:

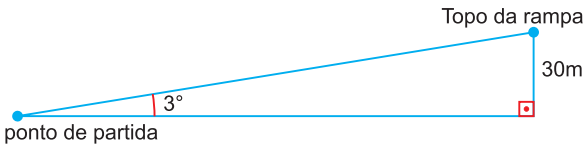
a) $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ b) cos B = sen C c) sen B = cos C
d) tg B < 1 e) tg C < 1

RESOLUÇÃO:

tg C = $\frac{4}{3}$ > 1

Resposta: E

3 (MODELO ENEM) – Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é 30 m.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é

a) 2,5. b) 7,5. c) 10. d) 15. e) 30.

RESOLUÇÃO:

I) Sendo x, em metros, o comprimento da rampa, temos:

$\text{sen } 3° = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = \frac{30}{0,05} \Leftrightarrow x = 600$

II) Observando que 4 metros por segundo correspondem a 240 metros por minuto e sendo t o tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa, temos:

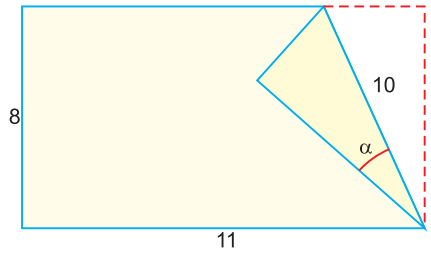
$t = \frac{600}{240} = 2,5$

Resposta: A

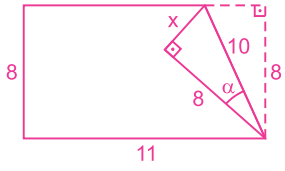
No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M201 e MAT1M202**

4 Um folha de papel retangular é dobrada, conforme a figura a seguir. Determine o valor de 40 . tg α.



RESOLUÇÃO:

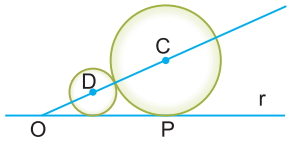


I) $x^2 + 8^2 = 10^2 \Leftrightarrow x = 6$

II) $\text{tg}\ \alpha = \frac{x}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

III) $40 \cdot \text{tg}\ \alpha = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30$

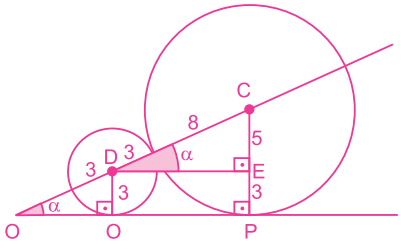
5 **(UNESP – MODELO ENEM)** – A figura mostra duas circunferências de raios 8 cm e 3 cm, tangentes entre si e tangentes à reta r. C e D são os centros das circunferências.



Se α é a medida do ângulo CÔP, o valor de sen α é:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{11}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{8}{23}$ e) $\frac{3}{8}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo retângulo DEC, temos:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{5}{3+8} = \frac{5}{11}$

Resposta: B

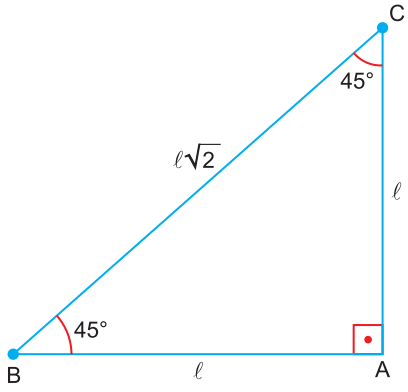
Módulos 18 a 20

Arcos notáveis

Palavras-chave:
- Triângulo retângulo isósceles
- Triângulo equilátero

1. Sen 45°, cos 45°, tg 45°

Num triângulo retângulo isósceles qualquer, se ℓ for a medida de cada cateto então $\ell\sqrt{2}$ será a medida da hipotenusa pois $(BC)^2 = \ell^2 + \ell^2 \Leftrightarrow (BC)^2 = 2\ell^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow BC = \ell\sqrt{2}$.



Assim sendo:

a) $\text{sen}\ \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \text{sen}\ 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$ **sen 45° =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$ **cos 45° =** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{tg}\ \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \text{tg}\ 45° = \frac{\ell}{\ell} \Rightarrow$ **tg 45° = 1**

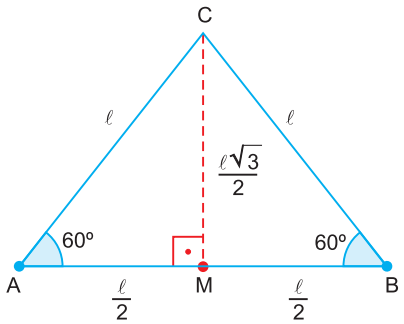
2. Sen 60°, cos 60° e tg 60°

Num triângulo equilátero qualquer, se ℓ for a medida de cada um dos lados então $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ será a medida da altura, pois:

$$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow \ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (MC)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MC)^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (MC)^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Leftrightarrow MC = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Assim sendo:

a) $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

b) $\cos \hat{A} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **cos 60° = $\frac{1}{2}$**

c) $\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{MC}{AM} \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} \Leftrightarrow$ **tg 60° = $\sqrt{3}$**

3. Sen 30°, cos 30° e tg 30°

No triângulo retângulo AMC do item anterior temos:

a) $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

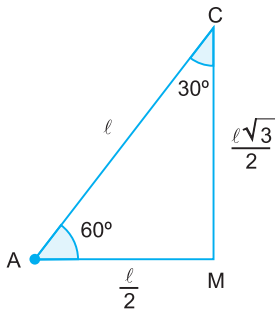
$\Leftrightarrow$ **sen 30° = $\frac{1}{2}$**

b) $\cos \hat{C} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow \cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

c) $\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \operatorname{tg} 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ **tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$**



Note que:

$\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

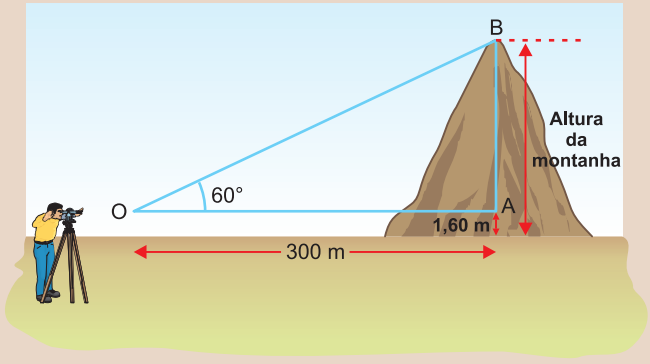
$\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Valores notáveis (30°, 45°, 60°)

x	sen x	cos x	tg x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercício Resolvido – Módulos 18 a 20

1 **(MODELO ENEM)** – Para determinar a altura de uma montanha, um topógrafo colocou-se com seu teodolito a 300 m da montanha.



Posiciona o aparelho que lhe fornece a medida do ângulo de visada de parte do morro, igual a 60º.
Sabendo que o teodolito tem altura de 1,60 m, o topógrafo pode determinar a altura da montanha. Adotando $\sqrt{3} = 1,7$, a altura determinada é:

a) 510 m. b) 420 m. c) 511,6 m.
d) 421,6 m. e) 610 m.

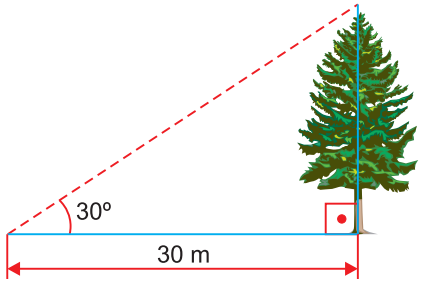
Resolução
No triângulo OAB, retângulo em A, temos:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{300} \Rightarrow AB = 300 . \sqrt{3} = 300 . 1,7 = 510 \text{ m}.$$

O topógrafo conclui que a montanha tem 510 + 1,6 = 511,6 m de altura.
Resposta: C

Exercícios Propostos – Módulo 18

1 **(USF – MODELO ENEM)** – Na figura abaixo, uma árvore é vista sob um ângulo de 30°, a uma distância de 30 m de sua base. A altura da árvore, em metros, é igual a



a) 35 b) 17 c) 14 d) 28 e) 30

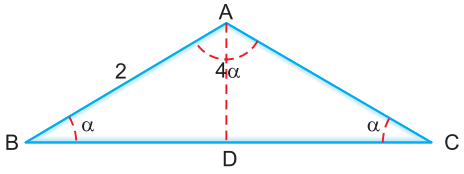
RESOLUÇÃO:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30} \Leftrightarrow x = 10 . \sqrt{3} \cong 10 . 1,7 \cong 17 \text{ m}$$

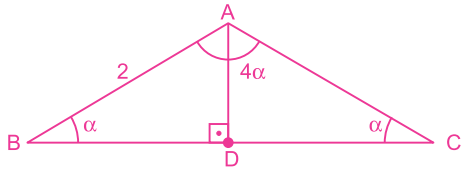
Resposta: B

2 **(MACKENZIE)** – Na figura, a medida da bissetriz $\overline{AD}$ é:

a) 2 b) 1 c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 3



RESOLUÇÃO:



Sendo o ΔABC isósceles e AD mediana, tem-se que AD é altura.
Como $4\alpha + \alpha + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$
Então, no ΔBDA, retângulo em D, tem-se:

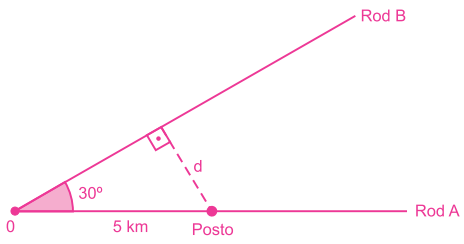
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow AD = 1$$

Resposta: B

3 Duas rodovias **A** e **B** encontram-se em **O**, formando um ângulo de 30°. Na rodovia **A** existe um posto de gasolina que dista 5 km de **O**. A distância do posto de gasolina à rodovia **B** é

a) 5 km b) 10 km c) 2,5 km
d) 15 km e) 1,25 km

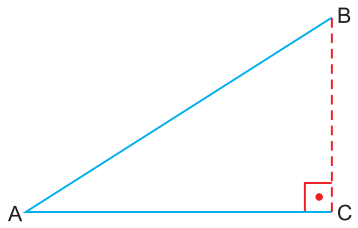
RESOLUÇÃO:



$\text{sen } 30° = \frac{d}{5km} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{5km} \Leftrightarrow d = 2{,}5km$

Resposta: C

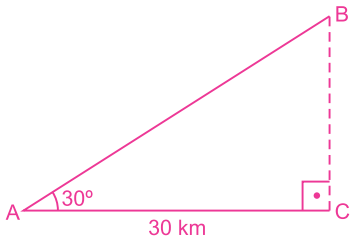
4 **(UNESP – MODELO ENEM)** – Três cidades, A, B e C, são interligadas por estradas, conforme mostra a figura.



As estradas AC e AB são asfaltadas. A estrada CB é de terra e será asfaltada. Sabendo-se que AC tem 30 km, o ângulo entre AC e AB é de 30°, e o triângulo ABC é retângulo em C, a quantidade de quilômetros da estrada que será asfaltada é

a) $30\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{3}$ c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

RESOLUÇÃO:



No triângulo ABC, retângulo em C, tem-se

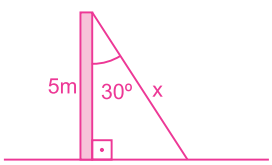
$\text{tg } 30° = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BC}{30km} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BC = 10\sqrt{3}\ km$

Resposta: B

Exercícios Propostos – Módulo 19

1 **(MODELO ENEM)** – Uma escada apoiada em uma parede, num ponto distante 5 m do solo, forma com essa parede um ângulo de 30°. Qual é o comprimento da escada, em metros?

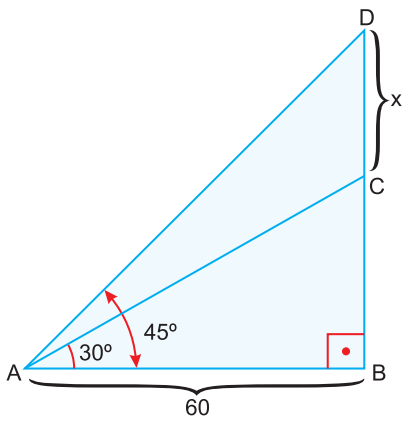
RESOLUÇÃO:



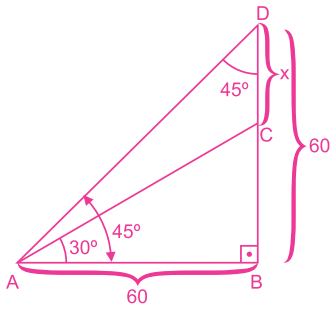
$\cos 30° = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Resposta: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ **m**

2 Determinar o valor de x, na figura abaixo:



RESOLUÇÃO:



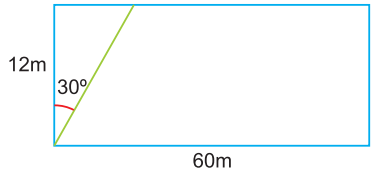
O triângulo ABD é isósceles.

AB = BD ⇒ BD = 60

$$\text{tg } 30° = \frac{BC}{60} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BC}{60} \Rightarrow BC = 20\sqrt{3}$$

$$x = 60 - 20\sqrt{3} = 20(3 - \sqrt{3})$$

3 **(MODELO ENEM)** – A figura indica um terreno retangular repartido em dois lotes, um na forma de triângulo e o outro na de trapézio:

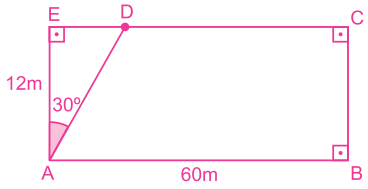


Lembrando que a área de um triângulo é $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, concluímos que a área do lote na forma de trapézio, em m^2, é igual a

a) $50\sqrt{3}$ b) $60\sqrt{3}$ c) $6(15 + \sqrt{3})$

d) $24(30 - \sqrt{3})$ e) $60(15 - \sqrt{3})$

RESOLUÇÃO:



I) $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{ED}{12} \Leftrightarrow ED = 4\sqrt{3}$

II) $S_{ADE} = \frac{DE \cdot AE}{2} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 12}{2} = 24\sqrt{3}$

III) $S_{ABCE} = 60 \cdot 12 = 720$

IV) $S_{ABCD} = 720 - 24\sqrt{3} = 24(30 - \sqrt{3})$

Resposta: D

4 **(MACKENZIE)** – Na figura, tg α vale

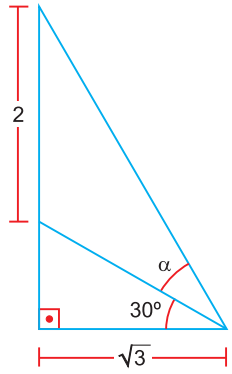
a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

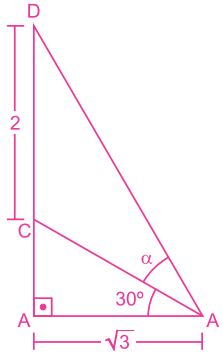
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{2}{3}$



RESOLUÇÃO:



1) No triângulo retângulo ABC, tem-se

$$\text{tg } 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 1$$

2) No triângulo retângulo ABD, tem-se

$$\text{tg}(\alpha + 30°) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow$$

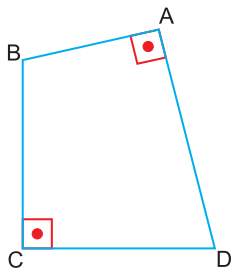
$$\Rightarrow \text{tg}(\alpha + 30°) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + 30° = 60° \Rightarrow \alpha = 30°$$

Portanto $\text{tg } \alpha = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Resposta: C

5 **(VUNESP)** – Do quadrilátero ABCD da figura, sabe-se que os ângulos internos de vértices A e C são retos; os ângulos $C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B$ medem, respectivamente, 45° e 30°; o lado CD mede 2dm. Então os lados AD e AB medem, respectivamente, em dm:



a) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{3}$
b) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{6}$ e $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO:

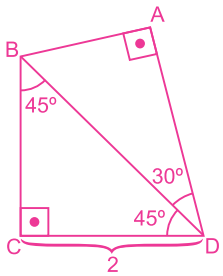
I) BCD é isósceles (BC = CD = 2 e BD = 2 . $\sqrt{2}$)

II) $\text{sen } 30° = \frac{AB}{2 . \sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{2 . \sqrt{2}} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

III) $\cos 30° = \frac{AD}{2 . \sqrt{2}} \Rightarrow$

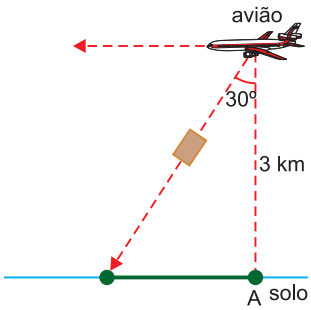
$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{2 . \sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{6}$



Resposta: C

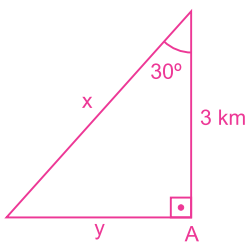
Exercícios Propostos – Módulo 20

1 **(MODELO ENEM)** – Um volume é lançado de um avião que está a 3 km de altitude. Devido à velocidade do avião e à ação do vento o volume cai segundo uma reta que forma um ângulo de 30° com a vertical. Assumindo que $\sqrt{3}$ = 1,7, calcular:



a) a distância percorrida por este volume desde o lançamento até tocar o chão.
b) a distância do ponto A até o ponto em que o volume toca o chão.

RESOLUÇÃO:



a) $\cos 30° = \frac{3}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 2 . \sqrt{3} \Rightarrow$

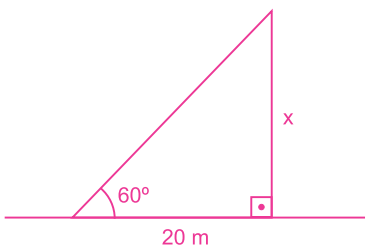
$\Rightarrow x = 3,4 \text{ km}$

b) $\text{tg } 30° = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = \sqrt{3} \Rightarrow y = 1,7 \text{ km}$

2 **(MODELO ENEM)** – Ao meio-dia, Sol a pino, um garoto empina pipa, e a linha que a segura, bem esticada, forma com o chão um ângulo de 60°. Como a sombra da pipa está distante 20 m de onde se encontra o garoto e considerando $\sqrt{3}$ = 1,73, podemos afirmar que a pipa está a uma altura de:

a) 17,40 m b) 28,10 m c) 34,60 m
d) 38,50 m e) 35,14 m

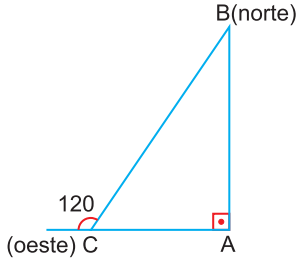
RESOLUÇÃO:



$\text{tg } 60° = \frac{x}{20} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 20 . \sqrt{3} \Rightarrow x = 34,6 \text{ m}$

Resposta: C

3 **(VUNESP – MODELO ENEM)** – Um pequeno avião deveria partir de uma cidade A rumo a uma cidade B ao norte, distante 60 quilômetros de A. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto C, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.

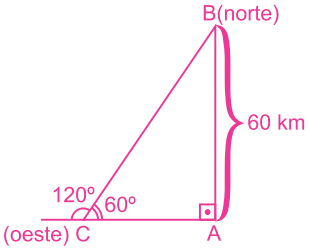


Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou partindo de A até chegar a B é

a) $30\sqrt{3}$ b) $40\sqrt{3}$ c) $60\sqrt{3}$ d) $80\sqrt{3}$ e) $90\sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

A partir do enunciado, no triângulo ABC, temos:



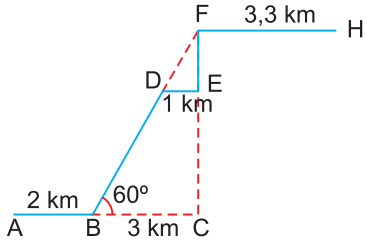
$$\text{sen } 60° = \frac{60}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{BC} \Rightarrow BC = 40\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{60}{AC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{60}{AC} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}$$

A distância em quilômetros, que o avião percorreu partindo de A até chegar a B, é: $AC + BC = 20\sqrt{3} + 40\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$

Resposta: C

4 **(VUNESP)** – Ao chegar de viagem, uma pessoa tomou um táxi no aeroporto para se dirigir ao hotel. O percurso feito pelo táxi, representado pelos segmentos AB, BD, DE, EF e FH, está esboçado na figura, onde o ponto A indica o aeroporto, o ponto H indica o hotel, BCF é um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, o ângulo no vértice B mede 60° e DE é paralelo a BC.



Assumindo o valor $\sqrt{3} = 1,7$ e sabendo-se que AB = 2 km, BC = 3 km, DE = 1 km e FH = 3,3 km, determine

a) as medidas dos segmentos BD e EF em quilômetros;

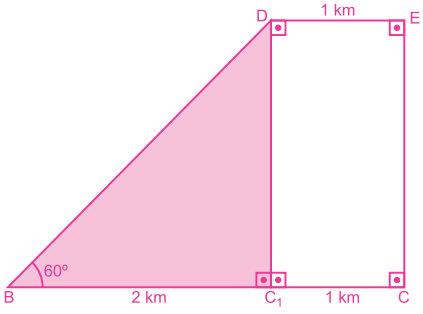
b) o preço que a pessoa pagou pela corrida (em reais), sabendo-se que o valor da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0,8x$ sendo x a distância percorrida em quilômetros e y o valor da corrida em reais.

RESOLUÇÃO:

a) De acordo com o enunciado, $C\hat{B}D = E\hat{D}F = 60°$ (ângulos correspondentes). No triângulo retângulo DEF, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{EF}{ED} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{EF}{1} \Rightarrow EF = \sqrt{3} \Rightarrow EF = 1,7\text{km}.$$

Na figura seguinte, com $\overline{DC_1}$ // $\overline{EC}$, temos o triângulo BC_1D retângulo em C_1 e portanto



$$\cos 60° = \frac{BC_1}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{BD} \Rightarrow BD = 4\text{km}$$

b) A distância de A a H, em quilômetros, é igual a
$AB + BD + DE + EF + FH = 2 + 4 + 1 + 1,7 + 3,3 = 12$
Como o preço da corrida do táxi é dado pela função $y = 4 + 0,8 \cdot x$, para $x = 12$km, tem-se:
$y = 4 + 0,8 \cdot 12 \Rightarrow y = 13,60$ reais

Respostas: a) BD = 4km e EF = 1,7km
b) R$ 13,60

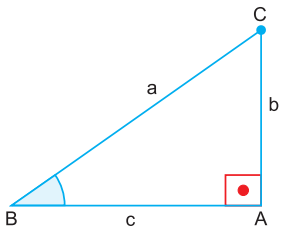
Módulos 21 e 22

Relações fundamentais

Palavras-chave:
• Seno • Cosseno • Tangente
• Cotangente • Secante • Cossecante

1. $sen^2x + cos^2x = 1$

Num triângulo retângulo de catetos **b** e **c** e hipotenusa **a** temos, de acordo com o teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$.



Assim sendo, se **x** for a medida do ângulo agudo **B** então:

$$sen^2x + cos^2x = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Note que

a) $sen^2x = (sen\ x)^2$ b) $cos^2x = (cos\ x)^2$

c) $sen^2x = 1 - cos^2x$ d) $cos^2x = 1 - sen^2x$

2. $tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$

Num triângulo retângulo de catetos **b** e **c** e hipotenusa **a**, se **x** for a medida do ângulo agudo **B** então

$$tg\ x = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\ x}{cos\ x} \Rightarrow tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

3. Cotangente

A **cotangente** de um ângulo agudo **x** é, por definição **o inverso da tangente**. É representada com o símbolo **cotg x**. Assim sendo:

$$cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

4. Secante

A **secante** de um ângulo agudo **x** é, por definição, **o inverso do cosseno**. É representada com o símbolo **sec x**. Assim sendo:

$$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$$

5. Cossecante

A **cossecante** de um ângulo agudo **x** é, por definição, **o inverso do seno**. É representada com o símbolo **cossec x**.

Assim sendo:

$$cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$$

6. Relações auxiliares

a) Dividindo ambos os membros da relação fundamental, $sen^2x + cos^2x = 1$, por cos^2x, temos:

$$\frac{sen^2x}{cos^2x} + \frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x} \Leftrightarrow tg^2x + 1 = sec^2x$$

b) Dividindo ambos os membros da relação fundamental, $sen^2x + cos^2x = 1$, por sen^2x, temos:

$$\frac{sen^2x}{sen^2x} + \frac{cos^2x}{sen^2x} = \frac{1}{sen^2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + cotg^2x = cossec^2x$$

De (a) e (b) temos:

$$sec^2x = 1 + tg^2x$$

$$cossec^2x = 1 + cotg^2x$$

7. Conclusões

Sendo x a medida de um ângulo agudo qualquer, valem as seguintes relações:

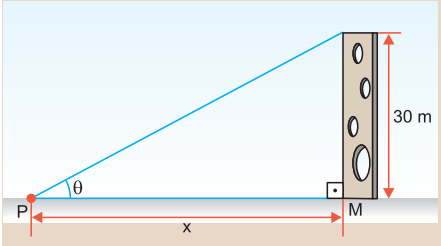
$sen^2x + cos^2x = 1$	
$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$	$cotg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x} = \frac{1}{tg\ x}$
$sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$	$cossec\ x = \frac{1}{sen\ x}$
$sec^2x = 1 + tg^2x$	$cossec^2x = 1 + cotg^2x$

Exercícios Resolvidos – Módulos 21 e 22

1 **(MODELO ENEM)** – Uma prefeitura pretende asfaltar um caminho, em uma região plana, desde um ponto inicial P até um monumento de 30 metros de altura, ao custo de R$ 50,00 o metro quadrado. Do ponto P ao topo do monumento foi determinado um ângulo de inclinação θ, com o plano desse caminho. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$ e que o caminho deve ter 2 metros de largura, calcular o valor do menor custo dessa obra.

a) R$ 2 000,00 b) R$ 4 000,00
c) R$ 1 000,00 d) R$ 40 000,00
e) R$ 20 000,00

Resolução



O menor custo da obra será obtido quando do ponto ínicial P ao monumento, o caminho for representado por um segmento de reta, conforme figura.

Sendo $\operatorname{sen}\theta = 3/5$ e $\cos\theta = 4/5$, temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Portanto, na figura temos:

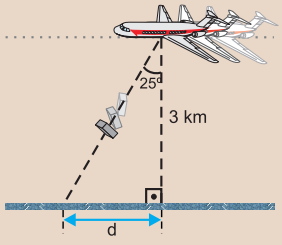
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4} = \frac{30}{x} \Leftrightarrow x = 40\ \text{m}.$$

O custo da obra, com 2 m de largura e R$ 50,00 o metro quadrado, resulta:

C = 2 . 40 . R$ 50,00 = R$ 4 000,00

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)**



Um volume é lançado de um avião que está a 3 km de altitude. Devido à velocidade do avião e à ação do vento, o volume cai segundo uma reta que forma um ângulo de 25° com a vertical. Que distância aproximadamente **d**, medida no solo, esse volume percorreu?

Dado: sen 25° = 0,42

a) 1,38 km b) 1,08 km
c) 2,13 km d) 1,75 km
e) 0,98 km

Resolução

$$\operatorname{tg}25° = \frac{d}{3} \Rightarrow d = 3 \cdot \operatorname{tg}25°$$

Se sen 25° = 0,42 e $\operatorname{sen}^2 25° + \cos^2 25° = 1$,

então, $\cos 25° = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 25°} =$

$= \sqrt{1 - (0{,}42)^2} = 0{,}91$

Logo: $\operatorname{tg}25° = \frac{\operatorname{sen}25°}{\cos 25°} = \frac{0{,}42}{0{,}91} = 0{,}46$

Então, $d = 3 \cdot 0{,}46 \Rightarrow d = 1{,}38$ km

Resposta: A

Exercícios Propostos – Módulo 21

1 Se $0° < x < 90°$ então a expressão $\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$ é igual a:

a) sen x b) cos x c) tg x
d) cotg x e) sec x

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Resposta: E

2 **(UN.ESTÁCIO DE SÁ)** – Simplificando a expressão y = sen 17° . cotg 17° . cotg 73° . sec 73°, encontramos:

a) – 2 b) – 1 c) 2 d) 1 e) 5

RESOLUÇÃO:

$$y = \operatorname{sen}17° \cdot \frac{\cos 17°}{\operatorname{sen}17°} \cdot \frac{\cos 73°}{\operatorname{sen}73°} \cdot \frac{1}{\cos 73°}$$

$$y = \cos 17° \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}73°}$$

Sendo 17° + 73° = 90°, resulta sen 73° = cos 17°, portanto

$$y = \cos 17° \cdot \frac{1}{\cos 17°} = 1$$

Resposta: D

3 Simplificando a expressão tg x . cos x . cossec x, para $0° < x < 90°$, obtém-se:

a) 0 b) 1 c) – 1 d) sen x e) sec x

RESOLUÇÃO:

$$\operatorname{tg}x \cdot \cos x \cdot \operatorname{cossec}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}x} = 1$$

Resposta: B

4 Se $0° < x < 90°$ e $\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{7}{25}$ então sen x será igual a:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{10}$

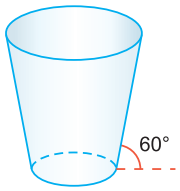
RESOLUÇÃO:

$\cos^4 x - \text{sen}^4 x = \frac{7}{25} \Leftrightarrow (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = \frac{7}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 2\text{sen}^2 x = \frac{7}{25} \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{3}{5}$

(pois $0° < x < 90°$)

5 **(MODELO ENEM)** – Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.



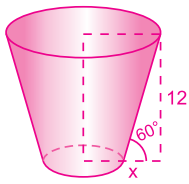
Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.

Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá ter raio igual a

a) $3\sqrt{3}$ m. b) $4\sqrt{3}$ m. c) $5\sqrt{3}$ m.

d) $6\sqrt{3}$ m. e) $7\sqrt{3}$ m.

RESOLUÇÃO:



Se $r = 2\sqrt{3}$ m é o raio da base, o raio da tampa é r + x, sendo

$\text{tg } 60° = \frac{12}{x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$

O raio da tampa é $(2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})\text{m} = 6\sqrt{3}$ m

Resposta: D

Exercícios Propostos – Módulo 22

1 Sabendo que $0° < x < 90°$ e $\text{sen } x = \frac{3}{5}$, calcular cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x.

RESOLUÇÃO:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5}$ (ângulo agudo)

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{tg } x = \frac{3}{4}$

$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \text{cotg } x = \frac{4}{3}$

$\text{sec } x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} \Rightarrow \text{sec } x = \frac{5}{4}$

$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \text{cossec } x = \frac{5}{3}$

2 Se $0° < x < 90°$ e $\text{tg } x = \sqrt[3]{3}$, então o valor de $\frac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3

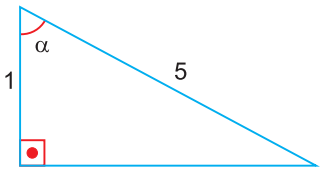
RESOLUÇÃO:

$$\frac{\text{sen}^3 x + \cos^3 x}{\text{sen}^3 x - \cos^3 x} = \frac{\frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}}{\frac{\text{sen}^3 x}{\cos^3 x} - \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}} =$$

$$= \frac{\text{tg}^3 x + 1}{\text{tg}^3 x - 1} = \frac{3 + 1}{3 - 1} = 2$$

Resposta: C

3 **(MACKENZIE)** – Observando o triângulo da figura, podemos afirmar que $\frac{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$ vale:



a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{25}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

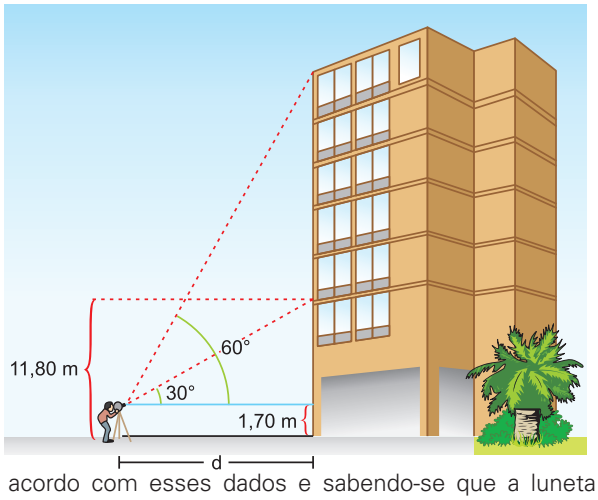
RESOLUÇÃO:

$$\frac{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{(\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\frac{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} =$$

$$= \cos \alpha = \frac{1}{5}$$

Resposta: A

4 **(UFPB – MODELO ENEM)** – Em um determinado edifício, os primeiros andares são destinados às garagens e ao salão de festas e os demais andares, aos apartamentos. Interessado nas dimensões desse prédio, um topógrafo coloca um teodolito (instrumento óptico para medir ângulos horizontais e ângulos verticais) a uma distância d do prédio. Com um ângulo vertical de 30°, esse topógrafo observou que o primeiro piso de apartamentos está a uma altura de 11,80 m do solo; e com um ângulo vertical de 60°, avistou o topo do edifício, conforme a figura abaixo.



De acordo com esses dados e sabendo-se que a luneta do teodolito está a 1,70 m do solo, a altura do edifício é:

a) 31 m b) 23,60 m c) 30,30 m
d) 21,90 m e) 32 m

RESOLUÇÃO:

Sendo h, em metros, a altura do prédio temos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10,1}{d} \\ \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \frac{h - 1,7}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{h - 1,7}{10,1} = 3 \Leftrightarrow h = 32$$

Resposta: E

Módulo 23

Medidas de arcos e ângulos

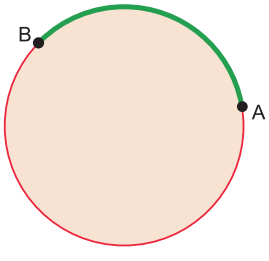
Palavras-chave:

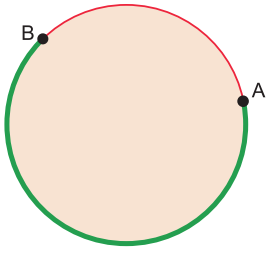
• Graus • Radianos

1. Arcos na circunferência

Seja uma circunferência, na qual são tomados dois pontos **A** e **B**. A circunferência ficará dividida em duas partes chamadas **arcos**. Os pontos **A** e **B** são as extremidades desses arcos.

Quando A e B coincidem, um desses arcos é chamado arco nulo e o outro, arco de uma volta.





2. Medida de um arco em graus

O arco de **uma volta** mede **360°** e o arco **nulo** mede **0°**.

Assim sendo, o **arco de 1 grau** (representado pelo símbolo 1°) **é um arco igual a $\frac{1}{360}$ do arco de uma volta**.

Os submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

O arco de um minuto (representado pelo símbolo 1') é um arco igual a $\frac{1}{60}$ do arco de um grau.

Simbolicamente: $1° = 60'$

O arco de um segundo (representado pelo símbolo 1") é um arco igual a $\frac{1}{60}$ do arco de um minuto.

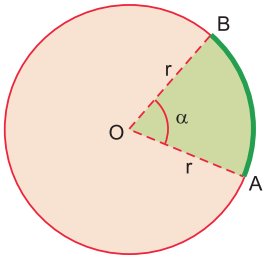
Simbolicamente: $1' = 60''$

Note, ainda que: $1° = 60' = 3600''$

3. Medida de um arco em radianos

A medida de um arco, em radianos, é a razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência sobre a qual este arco está determinado; assim:

$$\alpha = \frac{compr(\overset{\frown}{AB})}{r}$$



Observações

- O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 radiano (1 rad), se o seu comprimento for igual ao raio da circunferência.
- A medida de um arco, em radianos, é um número real "puro" e portanto é costume omitir o símbolo rad. Ao dizer ou escrever que um certo arco mede 3, por exemplo, fica subentendido que sua medida é de 3 radianos ou seja, que o comprimento do arco é o triplo da medida do raio.
- O arco de **uma volta**, cuja medida é **360°**, tem comprimento igual a **2 . π . r**. e sua medida em radianos será, portanto, 2π pois $\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{2.\pi.r}{r} = 2\pi \cong 6{,}28$.

4. Conversões

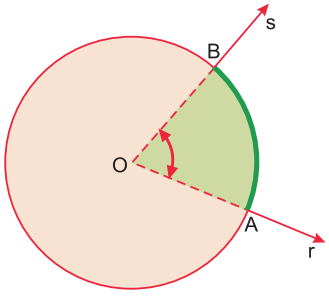
Sendo **G** a medida do arco em graus e **R** a medida em radianos, as conversões de unidades (Graus-Radianos) são feitas através de **uma regra de três simples** a partir da correspondência $360° \leftrightarrow 2\pi$ ou $180° \leftrightarrow \pi$. Assim sendo:

$$\begin{cases} 360° \ldots\ldots 2\pi \\ G \ldots\ldots R \end{cases} \Leftrightarrow \frac{360°}{G} = \frac{2\pi}{R} \Leftrightarrow \frac{180°}{G} = \frac{\pi}{R}$$

5. Medida de ângulos

Seja $r\hat{O}s$ um ângulo de vértice O e lados nas semirretas $\overrightarrow{Or}$ e $\overrightarrow{Os}$. Tomemos uma circunferência de centro no ponto O e raio qualquer.

Os pontos da circunferência e que pertencem à região angular formam um arco $\overset{\frown}{AB}$. Adota-se como medida do ângulo $A\hat{O}B$, a própria medida (em graus ou radianos) do arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim sendo, a medida (em graus ou radianos) de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do ângulo central $A\hat{O}B$ correspondente ao arco.



Exercícios Resolvidos

1 Converter 120° em radianos.

Resolução

$$\begin{cases} 360° \ldots 2\pi \\ 120° \ldots R \end{cases} \Leftrightarrow \frac{360°}{120°} = \frac{2\pi}{R} \Leftrightarrow$$

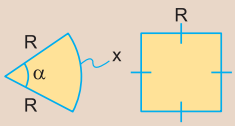
$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{R} = 3 \Leftrightarrow R = \frac{2\pi}{3}$$

Resposta: $\frac{2\pi}{3}$

2 **(FUVEST)** – O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo α radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então, α é igual a

a) π/3 b) 2 c) 1 d) 2π/3 e) π/2

Resolução



$R + R + x = 4R \Rightarrow x = 2R$

$\alpha = \frac{x}{R} = \frac{2R}{R} = 2$

Resposta: B

3 **(FGV – MODELO ENEM)** – Dois pontos, na linha do Equador, apresentam o sol a pino com defasagem de 3 horas. Sabe-se que a menor distância percorrida sobre essa linha, de um ponto ao outro, é 5.000 km. Qual deve ser o diâmetro aproximado do planeta Terra, em quilômetros?

a) $\frac{30000}{2\pi}$ b) $\frac{40000}{\pi}$

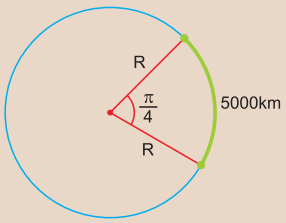
c) $\frac{20000}{\pi - 1}$ d) $\frac{30000}{(\pi - 2)^2}$

e) $\frac{40000}{\pi^2 - 2}$

Resolução

I) Para cada hora corresponde um ângulo equatorial de $\frac{360°}{24} = \frac{180°}{12} = 15°$, assim, para uma defasagem de 3 horas, o ângulo equatorial será $3 . 15° = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad.

II)



$$\frac{\pi}{4} = \frac{5000\ km}{R} \Leftrightarrow R = \frac{20000}{\pi}\ km \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2R = \frac{40000}{\pi}\ km$$

Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Quantos minutos tem o arco de 30°?

RESOLUÇÃO:

1° ——— 60′

30° ——— x

x = 1800′

2 Quantos segundos tem o arco de 5° 15′?

RESOLUÇÃO:

1° ——— 3600″ 1′ ——— 60″

5° ——— x 15′ ——— y

x = 18000″ y = 900″

5°15′ = 18900″

3 Converter as seguintes medidas de graus para radianos.

a) 30° b) 36° c) 240°

RESOLUÇÃO:

a) π ——— 180°
x ——— 30°
$x = \frac{\pi}{6}$

b) 180° ——— π
36° ——— x
$x = \frac{36°\pi}{180°}$
$x = \frac{\pi}{5}$

c) 180° ——— π
240° ——— x
$x = \frac{240°\pi}{180°}$
$x = \frac{4\pi}{3}$

4 Converter as seguintes medidas de radianos para graus.

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{4}$

RESOLUÇÃO:

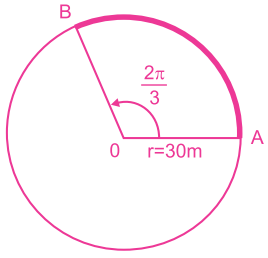
a) $\frac{\pi}{3}$ rad = $\frac{\pi \text{ rad}}{3} = \frac{180°}{3} = 60°$

b) $\frac{\pi}{4}$ rad = $\frac{\pi \text{ rad}}{4} = \frac{180°}{4} = 45°$

5 **(MODELO ENEM)** – Uma pessoa caminha em uma pista circular, com raio igual a 30 m. Se essa pessoa percorrer, nessa pista, um ângulo central correspondente a $\frac{2\pi}{3}$ radianos, qual será a distância percorrida em metros? (adotar $\pi = 3{,}14$).

a) 31,4 b) 73,6 c) 85,1 d) 62,8 e) 58,7

RESOLUÇÃO:



Pela definição de medida de arco, em radianos, temos:

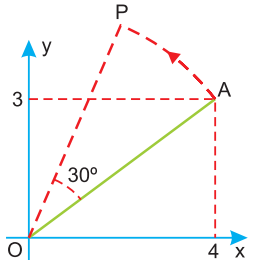
$\alpha = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{r}$

$\frac{2\pi}{3} = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AB})}{30} \Leftrightarrow \text{comp}(\overset{\frown}{AB}) = 20.\pi \text{ m} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{comp}(\overset{\frown}{AB}) = 20.3{,}14 \text{ m} = 62{,}8 \text{ m}$

Resposta: D

6 **(MACKENZIE)** – O segmento OA descreve um ângulo de 30° em torno da origem, como indica a figura. Adotando $\pi = 3$, a distância percorrida pelo ponto A é:



a) 2,5
b) 5,5
c) 1,7
d) 3,4
e) 4,5

RESOLUÇÃO:

A distância do ponto A(4;3) à origem O(0;0) é

$d_{AO} = R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

O arco de circunferência de raio R = 5 e ângulo central 30° = $\frac{\pi}{6}$ radiano tem comprimento igual a $\overset{\frown}{AP}$, tal que:

$\frac{\pi}{6} = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AP})}{OA} \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{\text{comp}(\overset{\frown}{AP})}{5}$

Para $\pi = 3$, resulta $\text{comp}(\overset{\frown}{AP}) = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$

Resposta: A

Módulo 24

Ciclo trigonométrico – determinações

Palavras-chave:
• Quadrantes • Determinações positivas • Determinações negativas

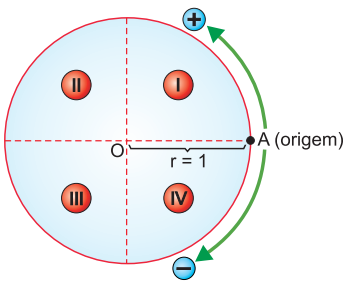
1. Ciclo trigonométrico

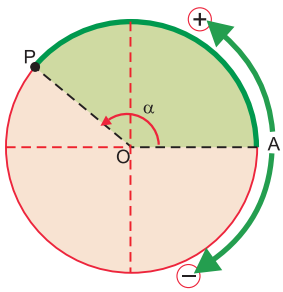
Chamamos de **ciclo trigonométrico** a uma circunferência de raio unitário na qual fixamos um ponto (A) como origem dos arcos e adotamos o sentido **anti-horário** como sendo o **positivo**.

2. Arco trigonométrico

Chamamos de **arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos **"infinitos" arcos de origem A** e **extremidade P**. Esses arcos são obtidos partindo-se da origem **A** e girando em qualquer sentido (positivo ou negativo) até a extremidade **P**, seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

Analogamente, chamamos de **ângulo trigonométrico** $A\hat{O}P$ ao conjunto dos **"infinitos" ângulos** de **lado inicial** $\overrightarrow{OA}$ e **lado terminal** $\overrightarrow{OP}$.



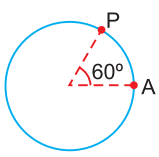


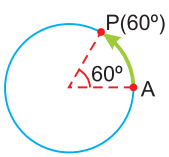
3. Conjunto das determinações de um arco

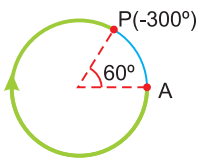
Seja **P** um ponto qualquer de um ciclo trigonométrico de origem **A**. A medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, de origem **A** e extremidade **P**, é, por convenção:

a) Positiva se o sentido de percurso de A para P for o anti-horário.

b) Negativa se o sentido de percurso de A para P for o horário.



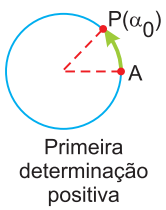




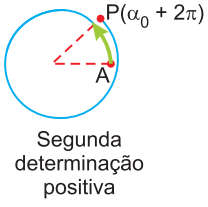
O ponto **P** é extremidade de **infinitos** arcos de origem **A** e a medida de cada um deles é chamada **determinação**. A medida α_0 do arco $\overset{\frown}{AP}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$, é chamada **primeira determinação positiva** do arco.

Adicionando à primeira determinação positiva o número **2π**, que equivale a "percorrer **uma volta** do sentido anti-horário", obtém-se o número $\alpha_0 + 2\pi$ que é a **segunda determinação positiva** de $\overset{\frown}{AP}$.

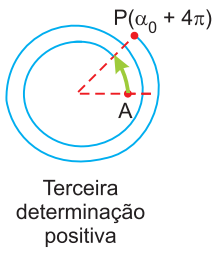
Adicionando à primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = 4\pi$, que equivale a "percorrer **duas voltas** no sentido anti-horário", obtém-se o número $\alpha_0 + 4\pi$ que é a **terceira determinação positiva** do arco $\overset{\frown}{AP}$, e assim por diante.



Primeira determinação positiva



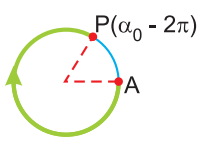
Segunda determinação positiva



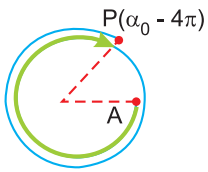
Terceira determinação positiva

Subtraindo da primeira determinação positiva o número **2π**, que equivale a "percorrer **uma volta** no sentido horário", obtém-se $\alpha_0 - 2\pi$ que é a **primeira determinação negativa** do arco $\overset{\frown}{AP}$.

Subtraindo da primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = 4\pi$, que equivale a "percorrer **duas voltas** no sentido horário", obtém-se $\alpha_0 - 4\pi$ que é a **segunda determinação negativa**, e assim por diante.



Primeira determinação negativa



Segunda determinação negativa

As infinitas determinações dos arcos de origem **A** e extremidade **P** são, pois:

	Determinações positivas	Determinações negativas
Primeira	α_0	$\alpha_0 - 1 \cdot 2\pi$
Segunda	$\alpha_0 + 1 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 2 \cdot 2\pi$
Terceira	$\alpha_0 + 2 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 3 \cdot 2\pi$
Quarta	$\alpha_0 + 3 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 4 \cdot 2\pi$
⋮	⋮	⋮

Todas estas determinações são do tipo $\alpha_0 + n \cdot 2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e portanto o conjunto das determinações do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ é:

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \alpha_0 + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

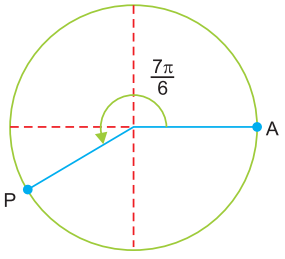
Observações

a) Se a medida dos arcos for expressa em graus, devemos escrever $\alpha = \alpha_0 + n \cdot 360°$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) O número α_0, utilizado no conjunto das determinações, pode ser o valor de uma qualquer das determinações. É costume, porém, escolher o valor da primeira determinação positiva ou negativa.

c) A cada ponto **P** estão associados infinitos números reais, mas **a cada número real está associado um único ponto P**.

Exemplo



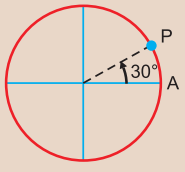
O conjunto das determinações dos arcos de origem **A** e extremidade **P** assinalados na figura é

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi\right\}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}$$

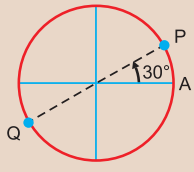
Exercício Resolvido

1 Determinar o conjunto das determinações dos arcos indicados, para cada figura.

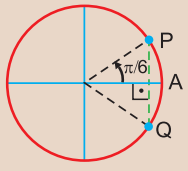
I)



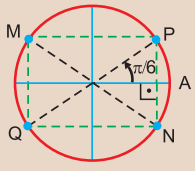
II)



III)



IV)



Resolução

A partir das figuras, temos:

I) $30° + n \cdot 360°$ $(n \in \mathbb{Z})$

II) $30° + n \cdot 180°$ $(n \in \mathbb{Z})$

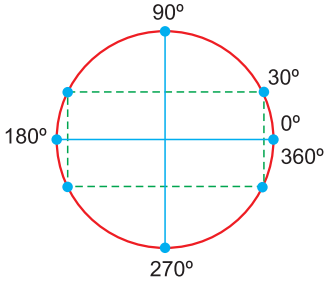
III) $\pm \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

IV) $\pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

Exercícios Propostos

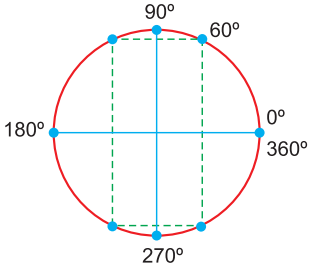
1 Escreva a 1ª determinação positiva dos arcos assinalados em cada ciclo trigonométrico:

a)



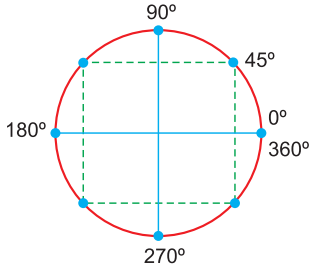
RESOLUÇÃO:
150°, 210° e 330°

b)



RESOLUÇÃO:
120°, 240° e 300°

c)



RESOLUÇÃO:
135°, 225° e 315°

2 Calcular a 1ª determinação positiva dos arcos:
a) 1630° b) –1630° c) 2100°

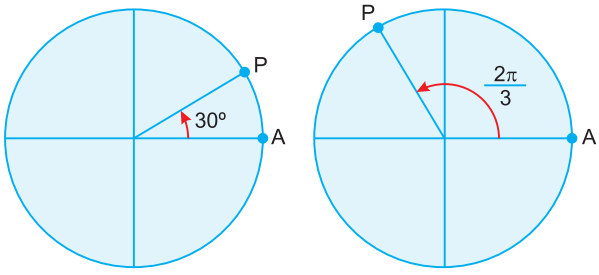
RESOLUÇÃO:

a) $1.630 \;\big|\; \underline{360} \;\Rightarrow a_0 = 190°$
$\quad 190 \qquad 4$

b) $a_0 = 360° - 190° = 170°$

c) $2.100 \;\big|\; \underline{360} \;\Rightarrow a_0 = 300°$
$\quad 300 \qquad 5$

3 Escrever o conjunto das determinações dos arcos assinalados, com extremidades no ponto **P**.
a) b)



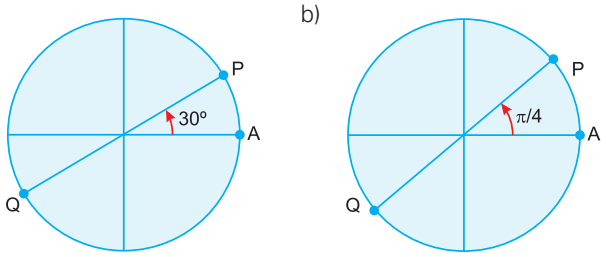
RESOLUÇÃO:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

4 Escrever, em uma única expressão, o conjunto dos arcos assinalados, com extremos em **P** e **Q**, conforme o caso.

a) b)

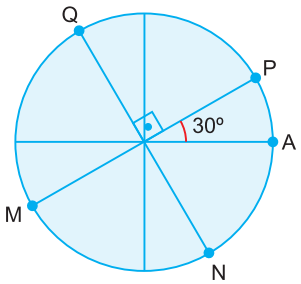


RESOLUÇÃO:

a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

5 Escrever, em uma única expressão, o conjunto dos arcos com extremos em **P**, **Q**, **M** e **N**.



RESOLUÇÃO:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 90°, n \in \mathbb{Z}\}$

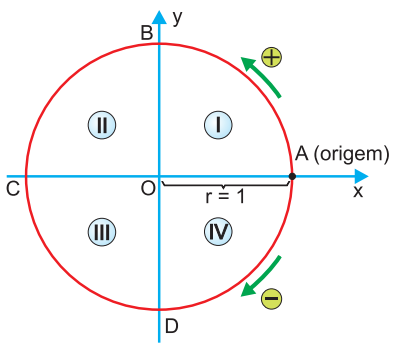
Módulo 25

Função seno

Palavras-chave:
- Seno

1. Introdução

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem **A**, um sistema cartesiano ortogonal xOy conforme mostra a figura. Os pontos A(1; 0), B(0; 1), C(–1;0) e D(0; –1) dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes. Quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AP}$ **pertence ao segundo quadrante**, por exemplo, queremos dizer que **a extremidade P pertence ao segundo quadrante**.

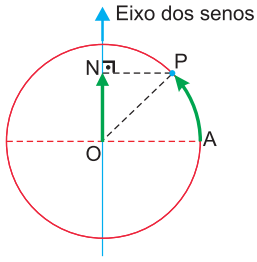


2. Definição da função seno

O **seno de um arco trigonométrico** $\overset{\curvearrowright}{AP}$, de extremidade P, é a **ordenada do ponto P**.

Representa-se:

$$\textit{sen } \overset{\curvearrowright}{AP} = ON$$



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\curvearrowright}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única ordenada chamada seno de x.

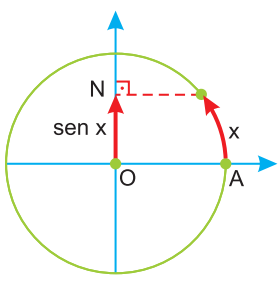
A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a ordenada do ponto P é, por definição, **a função seno**.

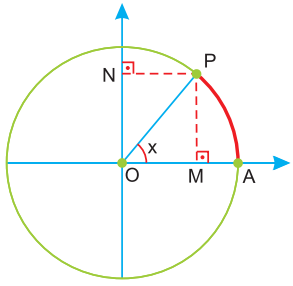
Simbolicamente

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x = ON$$

Observação

A definição é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.





De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio) e MP = ON.

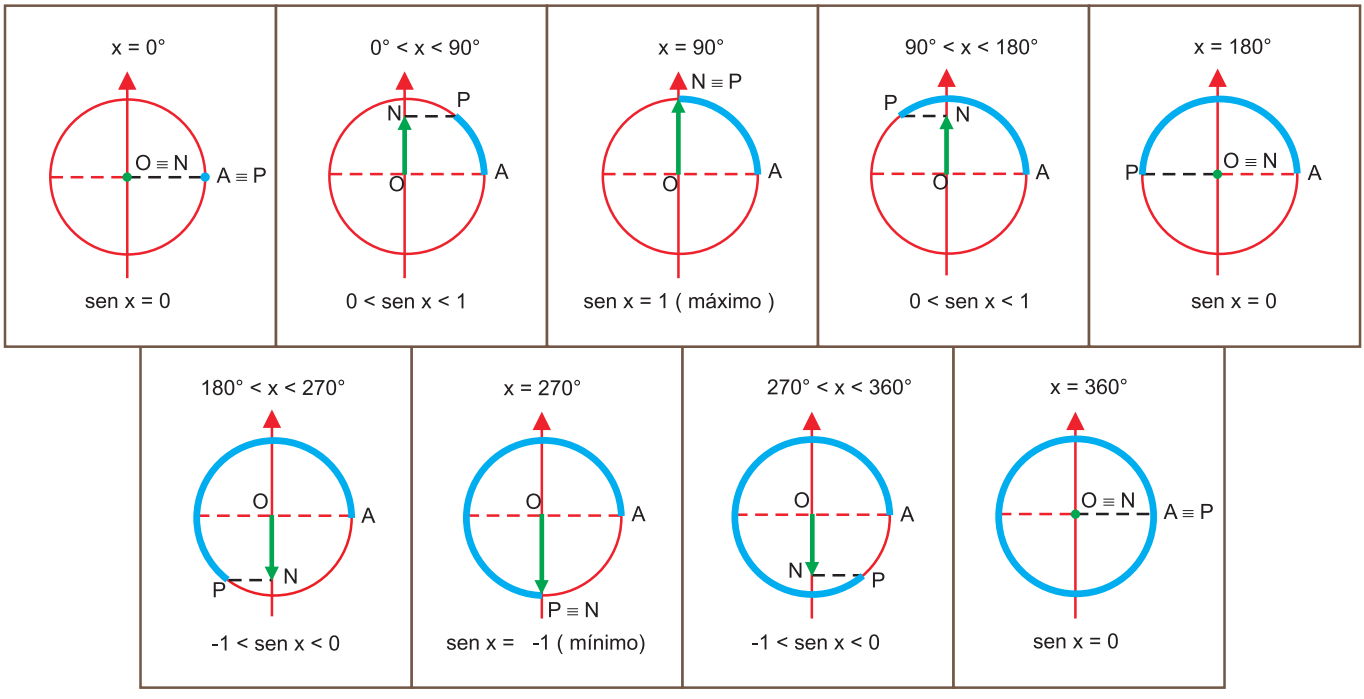
Assim sendo, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\textit{sen } x = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow \textit{sen } x = ON$$

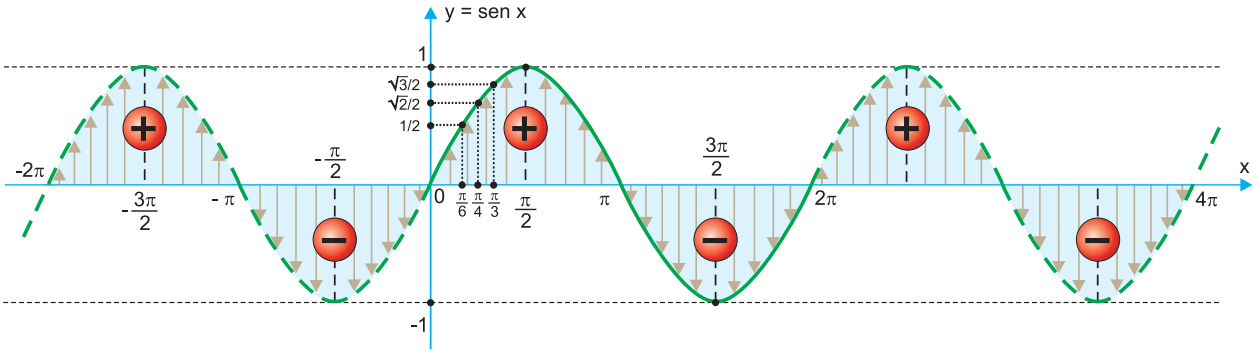
3. Variação da função seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o seno de x varia de – 1 a 1. Observe, na tabela abaixo, as várias situações possíveis.



4. Gráfico

Notando que sen x = sen (x ± 2π), pois **x** e **x ± 2π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = sen x é:



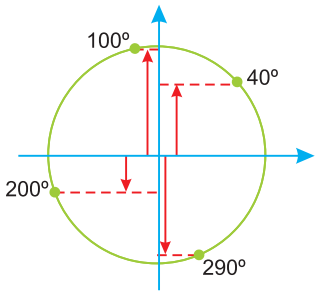
e o conjunto imagem é {y ∈ ℝ | – 1 ≤ y ≤ 1}.

5. Propriedades

Do que foi apresentado nos itens (2), (3) e (4), podemos concluir que a função seno é:

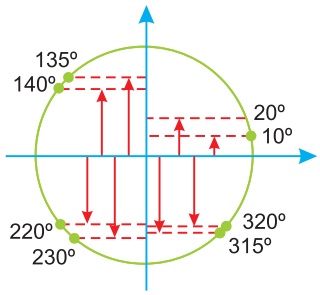
a) **Positiva** no **primeiro** e **segundo** quadrantes; **negativa** no **terceiro** e **quarto** quadrantes.

sen 40° > 0
sen 100° > 0
sen 200° < 0
sen 290° < 0



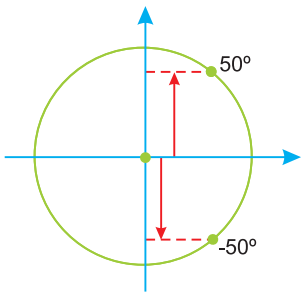
b) **Crescente** no **primeiro** e **quarto** quadrantes; **decrescente** no **segundo** e **terceiro** quadrantes.

sen 20° > sen 10°
sen 135° > sen 140°
sen 220° > sen 230°
sen 320° > sen 315°



c) **Ímpar** pois **sen (–x) = – sen x**.

sen (– 50°) = – sen 50°

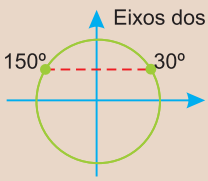


d) **Periódica** de período **2π**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação sen x = $\frac{1}{2}$ sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°

Resolução



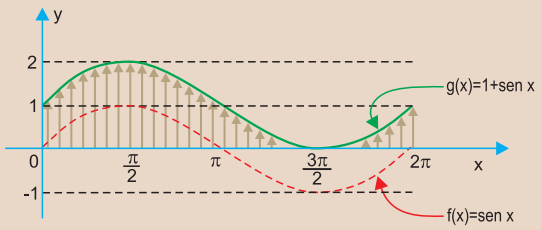
$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } x = \frac{1}{2} \\ 0° \le x \le 360° \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

⇔ x = 30° ou x = 150°

Resposta: V = {30°; 150°}

2 Esboçar o gráfico da função g(x) = 1 + sen x, no intervalo [0; 2π].

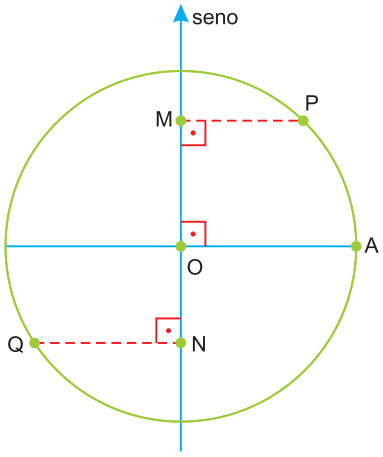
Resolução



Observe que o gráfico do seno se deslocou de uma unidade para cima, resultando imagem Im [g(x)] = [0; 2] e mantendo o período P = 2π.

Exercícios Propostos

1 Utilizando a figura, complete as definições:



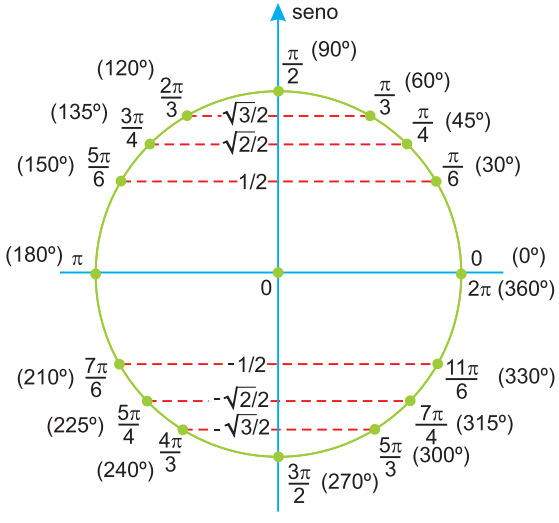
sen $\overset{\frown}{AP}$ = ...

sen $\overset{\frown}{AQ}$ = ...

RESOLUÇÃO:

sen $\overset{\frown}{AP}$ = OM **sen $\overset{\frown}{AQ}$ = ON**

2 Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete:



a) sen 30° = sen 150° = **$\frac{1}{2}$**

b) sen 210° = sen 330° = **$-\frac{1}{2}$**

c) sen 45° = sen 135° = **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**

d) sen 225° = sen 315° = **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

e) sen 60° = sen 120° = **$\frac{\sqrt{3}}{2}$**

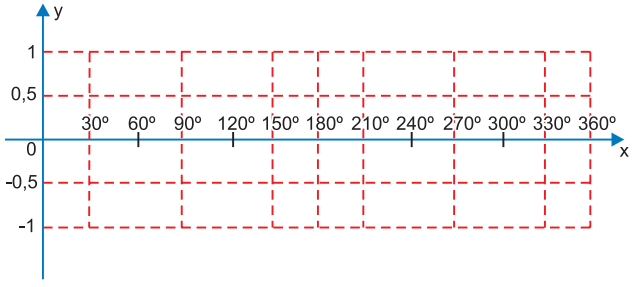
f) sen 240° = sen 300° = **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

g) sen 0° = sen 180° = sen 360° = **0**

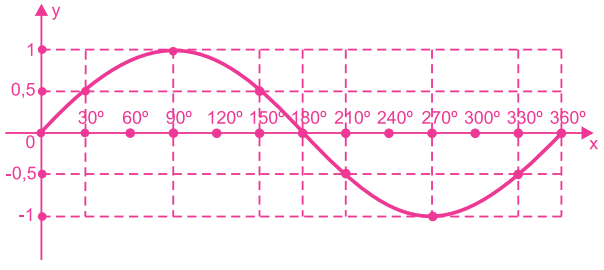
h) sen 90° = **1**

i) sen 270° = **– 1**

3 Esboce o gráfico da função f:[0; 2π] → ℝ definida por f(x) = sen x



RESOLUÇÃO:



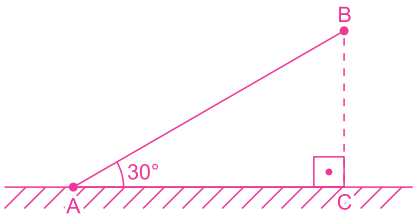
4 Com base no gráfico do exercício anterior, complete:

a) O período da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = sen x é **p = 2π**

b) O conjunto imagem da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = sen x é **Im(f) = [– 1; 1]**

5 (MODELO ENEM) – Uma rampa lisa de 40 m de comprimento faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe esta rampa inteira eleva-se verticalmente
a) 10 m b) 16 m c) 20 m d) 25 m e) 30 m

RESOLUÇÃO:



Seja $\overline{AB}$ a rampa e $\overline{BC}$ a elevação vertical, então

$AB = 40$ m, $B\hat{A}C = 30°$ e $\text{sen}\,B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{40} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 20$ m

Resposta: C

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M203**

Módulo 26 – Equações e inequações que envolvem a função seno

Resumo teórico

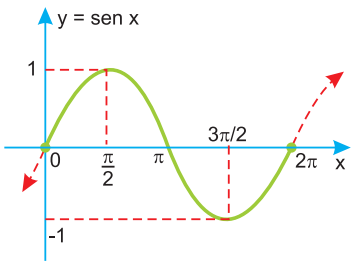
A função seno definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \text{sen}\,x$ tem as seguintes características:

a) Domínio de f: **$D(f) = \mathbb{R}$**

b) Contradomínio de f: **$CD(f) = \mathbb{R}$**

c) Conjunto imagem: **$Im(f) = [-1; 1]$**

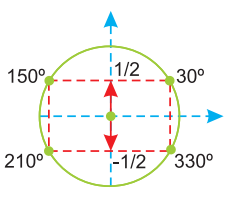
d) Gráfico: **senoide**



e) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$\text{sen}\,30° = \text{sen}\,150° = \frac{1}{2}$

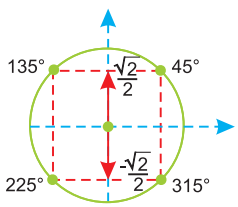
$\text{sen}\,210° = \text{sen}\,330° = -\frac{1}{2}$



f) Para 45°, 135°, 225°, 315° temos:

$\text{sen}\,45° = \text{sen}\,135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

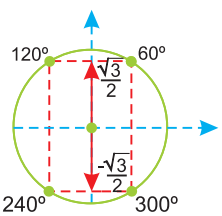
$\text{sen}\,225° = \text{sen}\,315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



g) Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$\text{sen}\,60° = \text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\,240° = \text{sen}\,300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

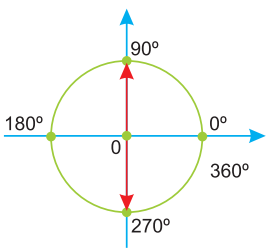


h) Para 0°, 90°, 180°, 270° e 360° temos:

$\text{sen}\,0° = \text{sen}\,180° = \text{sen}\,360° = 0$

$\text{sen}\,90° = 1$

$\text{sen}\,270° = -1$



Exercícios Propostos

1 Resolver a equação

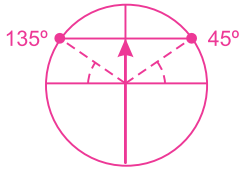
$2 \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

RESOLUÇÃO:

$2 \operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0$

$2 \operatorname{sen} x = \sqrt{2}$

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



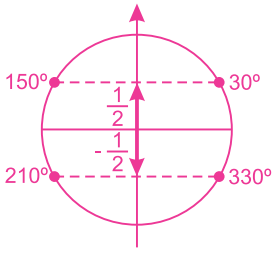
V = {45°, 135°}

2 **(FGV)** – A equação $4 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1$, para $0° \leq x \leq 360°$, tem conjunto verdade igual a:

a) {30°} b) {60°} c) {30°; 210°}

d) {30°; 150°} e) {30°; 150°; 210°; 330°}

RESOLUÇÃO:



Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}$

Portanto:

$x = 30°$ ou $x = 150°$ ou $x = 210°$ ou $x = 330°$

Resposta: E

3 Os valores de x tal que $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ e $0 \leq x \leq 2\pi$ são:

a) 0 e π b) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

RESOLUÇÃO:

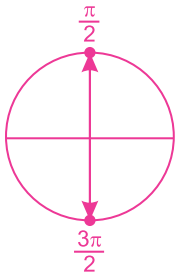
$\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

$\operatorname{sen}^2 x = 1$

$\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{1}$

$\operatorname{sen} x = \pm 1$

$V = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$



Resposta: B

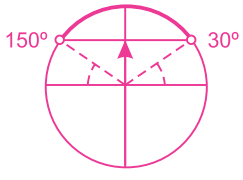
4 Resolver a inequação $2 \operatorname{sen} x - 1 > 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

RESOLUÇÃO:

$2 \operatorname{sen} x - 1 > 0$

$2 \operatorname{sen} x > 1$

$\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$



V = {x ∈ ℝ | 30° < x < 150°}

Módulo 27

Função cosseno

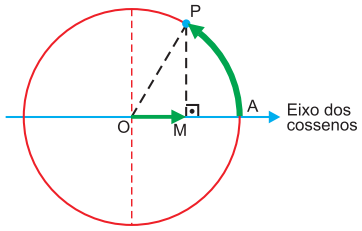
Palavras-chave:

- Cosseno

1. Definição

O **cosseno de um arco trigonométrico** $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade **P**, é a **abscissa do ponto P**. Representa-se:

$$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$$



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única abscissa chamada cosseno de x.

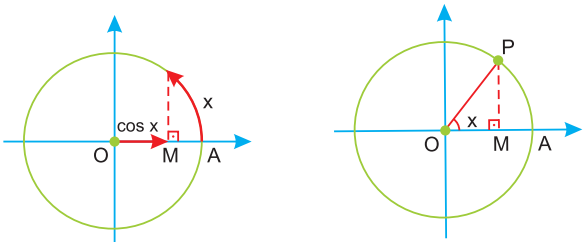
A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P é, por definição, **a função cosseno**.

Simbolicamente

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos x = OM$$

Observações

A definição dada é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.



De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OP = 1 (raio).

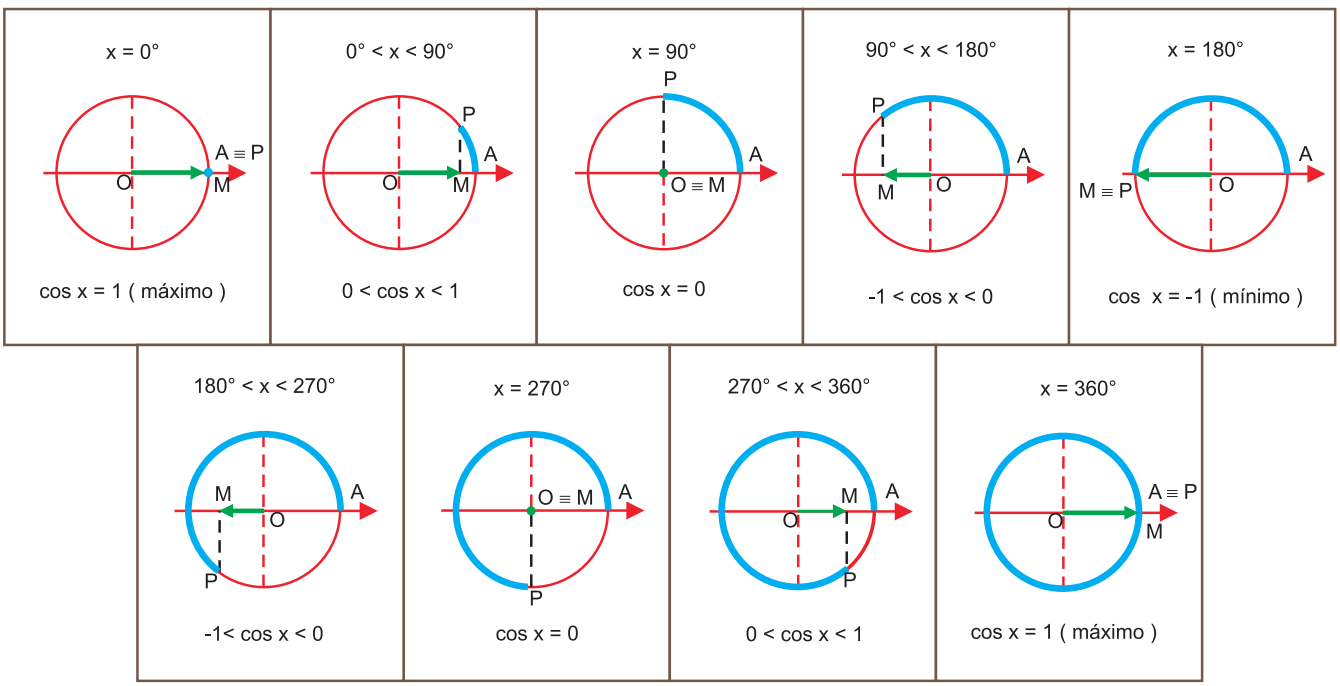
Assim sendo, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\cos x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \cos x = OM$$

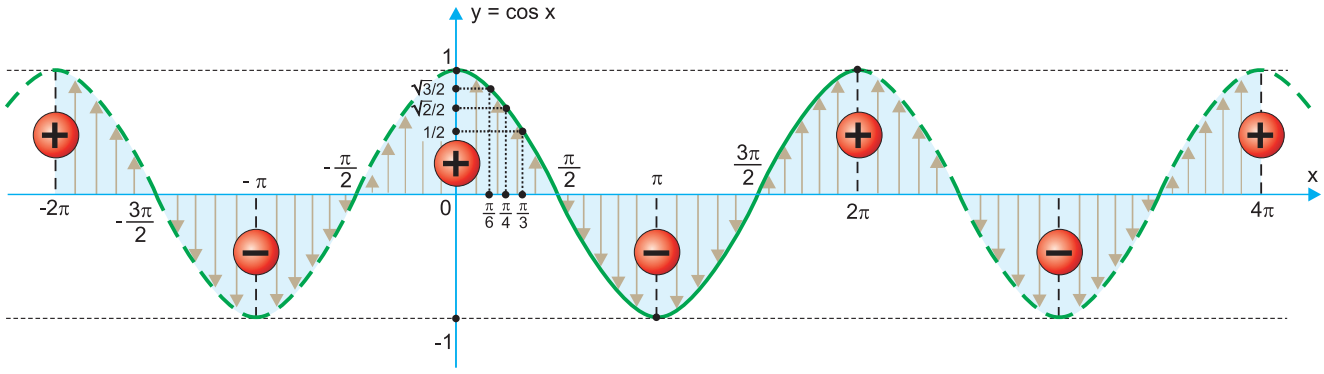
2. Variação da função cosseno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360° e o cosseno de x varia de – 1 a 1. Observe, na tabela a seguir, as várias situações possíveis:



3. Gráfico

Notando que cos x = cos(x ± 2π), pois **x** e **x ± 2π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = cos x é:



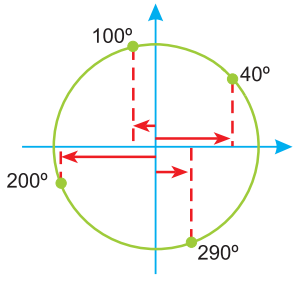
e o conjunto imagem é {y ∈ ℝ | – 1 ≤ y ≤ 1}.

4. Propriedades

Do que foi apresentado nos itens (1), (2) e (3), podemos concluir que a função cosseno é:

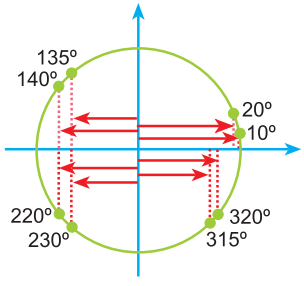
a) **Positiva** no **primeiro** e **quarto** quadrantes; **negativa** no **segundo** e **terceiro** quadrantes.

cos 40° > 0
cos 100° < 0
cos 200° < 0
cos 290° > 0



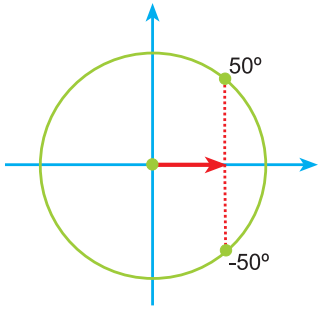
b) **Crescente** no **terceiro** e **quarto** quadrantes; **decrescente** no **primeiro** e **segundo** quadrantes.

cos 10° > cos 20°
cos 135° > cos 140°
cos 230° > cos 220°
cos 320° > cos 315°



c) **Par**, pois **cos (– x) = cos x**.

cos (– 50°) = cos 50°

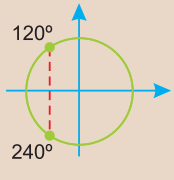


d) **Periódica** de período **2π**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$ sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°

Resolução



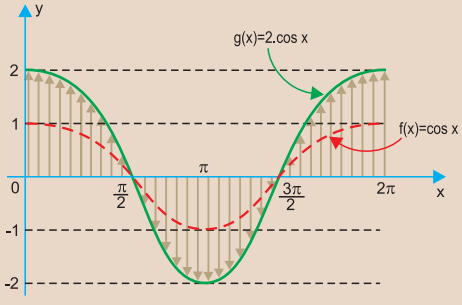
$$\left.\begin{array}{l}\cos x = -\frac{1}{2} \\ 0° \le x \le 360°\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ x = 120° ou x = 240°

Resposta: V = {120°; 240°}

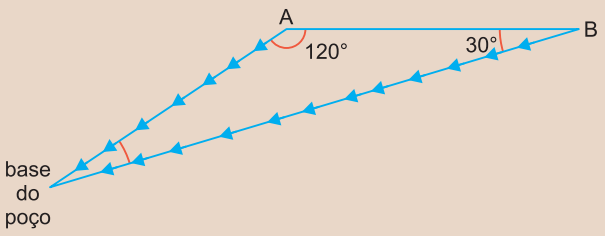
2 Esboçar o gráfico da função g(x) = 2 . cos x, no intervalo [0; 2π].

Resolução



Observe que o gráfico do cosseno abriu no sentido **vertical**, resultando imagem Im [g(x)] = [– 2; 2] e mantendo o período P = 2π.

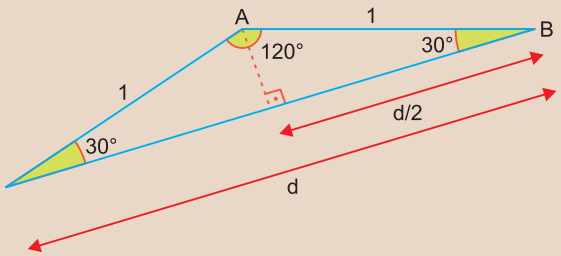
3 **(MODELO ENEM)** – Duas plataformas marítimas (A e B) estão localizadas de tal forma que os ângulos de emissão de sinais de comunicação com a base de um poço submarino são, respectivamente, iguais a 120° e 30°, conforme indica a figura a seguir:



Admitindo-se que os sinais se desloquem em linha reta até a base do poço e que a distância entre as plataformas A e B, em linha reta, seja AB = 1 km, a maior distância entre a base do poço e uma das duas plataformas, em km, é, aproximadamente, igual a:

a) 1,7 b) 1,5 c) 1,3 d) 1,1 e) 1,0

Resolução



$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d/2}{1} \Rightarrow d = \sqrt{3} \cong 1,7$

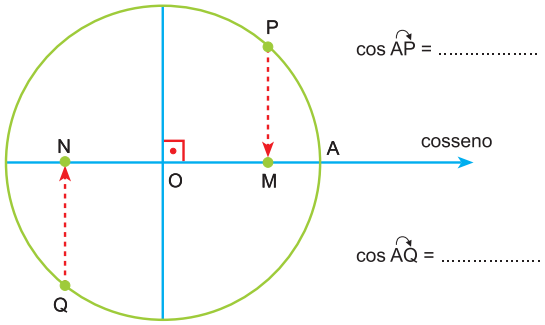
Resposta: A

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M204**

Exercícios Propostos

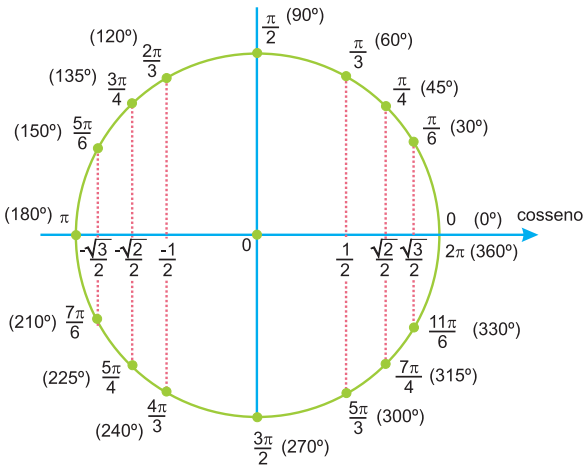
1 Utilizando a figura, complete as definições:



RESOLUÇÃO:

cos $\overset{\frown}{AP}$ = OM **cos $\overset{\frown}{AQ}$ = ON**

2 Utilizando o ciclo trigonométrico abaixo, complete a tabela.



a) cos 30° = cos 330° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) cos 150° = cos 210° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) cos 45° = cos 315° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) cos 135° = cos 225° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) cos 60° = cos 300° = $\frac{1}{2}$

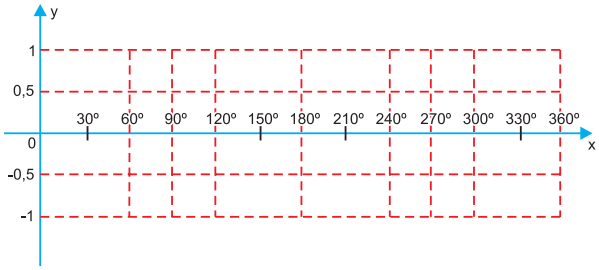
f) cos 120° = cos 240° = $-\frac{1}{2}$

g) cos 90° = cos 270° = 0

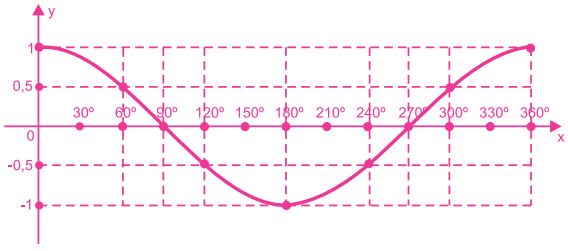
h) cos 0° = cos 360° = 1

i) cos 180° = – 1

3 Esboce o gráfico da função f:[0; 2π] → ℝ definida por f(x) = cos x



RESOLUÇÃO:



4 Com base no gráfico do exercício anterior, complete:

a) O período da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = cos x é **p = 2π**

b) O conjunto imagem da função f : ℝ → ℝ tal que f(x) = cos x é **Im(f) = [– 1; 1]**

5 **(MODELO ENEM)** – Uma máquina produz diariamente x dezenas de certo tipo de peças. Sabe-se que o custo de produção C(x) e o valor de venda V(x) são dados, aproximadamente, em milhares de reais, respectivamente, pelas funções

$C(x) = 2 - \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right)$ e $V(x) = 3\sqrt{2}\,\text{sen}\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, $0 \leq x \leq 6$.

O lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas de peças é

a) 500. b) 750. c) 1000. d) 2000. e) 3000.

RESOLUÇÃO:

Para x dezenas de certo produto, o lucro em milhares de reais é obtido por: L(x) = V(x) – C(x)

Para x = 3, resulta:

$$L(3) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{3 \cdot \pi}{12}\right) - \left[2 - \cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 + 0 = 3 - 2 = 1.$$

Portanto, o lucro, em reais, obtido na produção de 3 dezenas dessas peças é 1000.

Resposta: C

Módulo 28 — Equações e inequações que envolvem a função cosseno

Resumo teórico

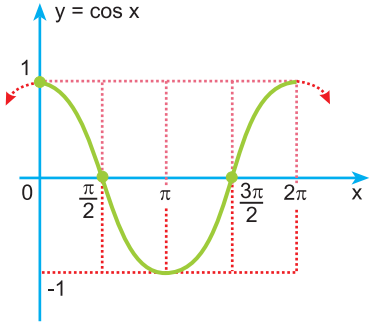
A função cosseno definida em ℝ por f(x) = cos x tem as seguintes características:

a) Domínio de f: **D(f) = ℝ**

b) Contradomínio de f: **CD(f) = ℝ**

c) Conjunto-imagem: **Im(f) = [– 1; 1]**

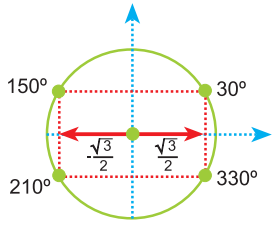
d) Gráfico: **cossenoide**



e) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

cos 30° = cos 330° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

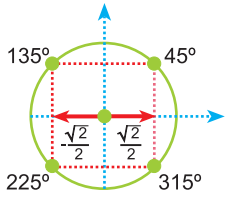
cos 150° = cos 210° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



f) Para 45°, 135°, 225°, 315° temos:

cos 45° = cos 315° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

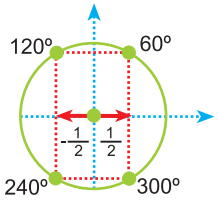
cos 135° = cos 225° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



g) Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$\cos 60° = \cos 300° = \frac{1}{2}$

$\cos 120° = \cos 240° = -\frac{1}{2}$

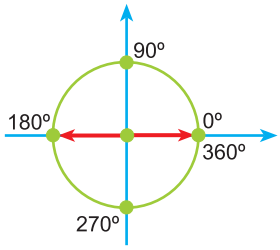


h) Para 0°, 90°, 180°, 270° e 360° temos:

$\cos 0° = \cos 360° = 1$

$\cos 90° = \cos 270° = 0$

$\cos 180° = -1$



Exercício Resolvido

1 (MODELO ENEM) – No setor de pintura de peças em uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão:

$P(t) = 50 + 30 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$.

O valor de t para o qual a pressão é mínima pode ser:

a) 3π b) π c) 2π d) $\frac{5\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

Resolução

Como $-1 \leq \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$, o valor mínimo de P(t) é obtido quando $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -1$. Como $t > 0$, temos:

$t + \frac{\pi}{2} = \pi + n \cdot 2\pi\ (n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi\ (n \in \mathbb{N})$.

Os possíveis valores de t, são: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; ...

Dentre as alternativas, temos: $t = \frac{5\pi}{2}$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 Resolver a equação $2 \cos x - 1 = 0$ sabendo que $0 \leq x \leq 2\pi$.

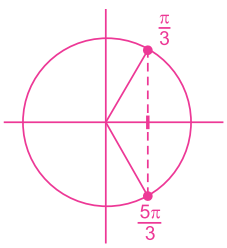
RESOLUÇÃO:

$2 \cos x - 1 = 0$

$2 \cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$V = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$



2 O valor de x, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, tal que $4 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 3$ é

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) 0

RESOLUÇÃO:

$4 \cdot (1 - \text{sen}^2 x) = 3 \Leftrightarrow 4 \cdot \cos^2 x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, resulta $x = \frac{\pi}{6}$.

Resposta: D

3 Resolva a equação $4 \cos^2 x - 3 = 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

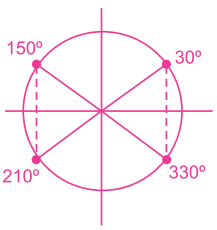
RESOLUÇÃO:

$4 \cos^2 x - 3 = 0$

$\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$V = \{30°; 150°; 210°; 330°\}$



4 Resolver a inequação $2 \cos x - 1 < 0$ sabendo que $0° \leq x \leq 360°$.

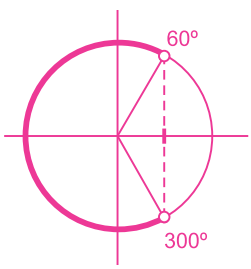
RESOLUÇÃO:

$2 \cos x - 1 < 0$

$2 \cos x < 1$

$\cos x < \frac{1}{2}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 60° < x < 300°\}$



5 Resolver a inequação $\sqrt{2} \cdot \cos x + 1 \leq 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

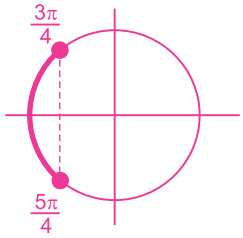
RESOLUÇÃO:

$\sqrt{2} \cdot \cos x + 1 \leq 0$

$\sqrt{2} \cdot \cos x \leq -1$

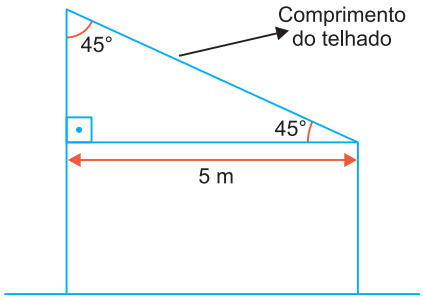
$\cos x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$

6 **(MODELO ENEM)** – A figura a seguir representa uma casa de campo que possui uma varanda.



O comprimento do telhado, em metros, será de:

a) 5 b) $5 \cdot \sqrt{2}$ c) $10 \cdot \sqrt{2}$

d) $25 \cdot \sqrt{2}$ e) $50 \cdot \sqrt{2}$

Dados: seno 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cosseno 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

tangente 45° = 1

RESOLUÇÃO:

Se ℓ for o comprimento do telhado, então:

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Resposta: B

Módulo 29

Função tangente

Palavras-chave:

• Tangente

1. Definição

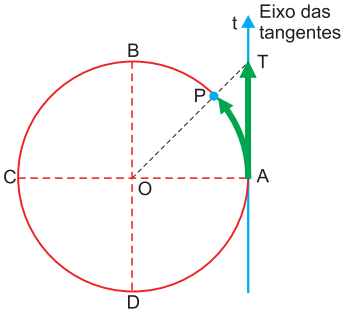
Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, o eixo **t** perpendicular ao eixo **x** e de origem A, chamado eixo das tangentes.

Seja, ainda, T a intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo t.

A tangente do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade P, com P ≠ B e P ≠ D, é a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$.

Representa-se:

$$tg \overset{\frown}{AP} = AT$$



A cada número real **x** corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida **x**. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única medida algébrica AT, chamada tangente de **x**.

A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a medida algébrica AT é, por definição, **a função tangente.**

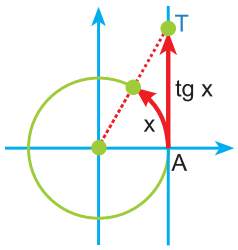
Simbolicamente

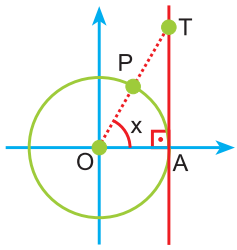
$$f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = tg\, x = AT$$

Observação

A definição é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo.

De fato, se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então P pertence ao primeiro quadrante e além disso OA = 1 (raio).





Assim sendo, no triângulo OAT retângulo em A, temos:

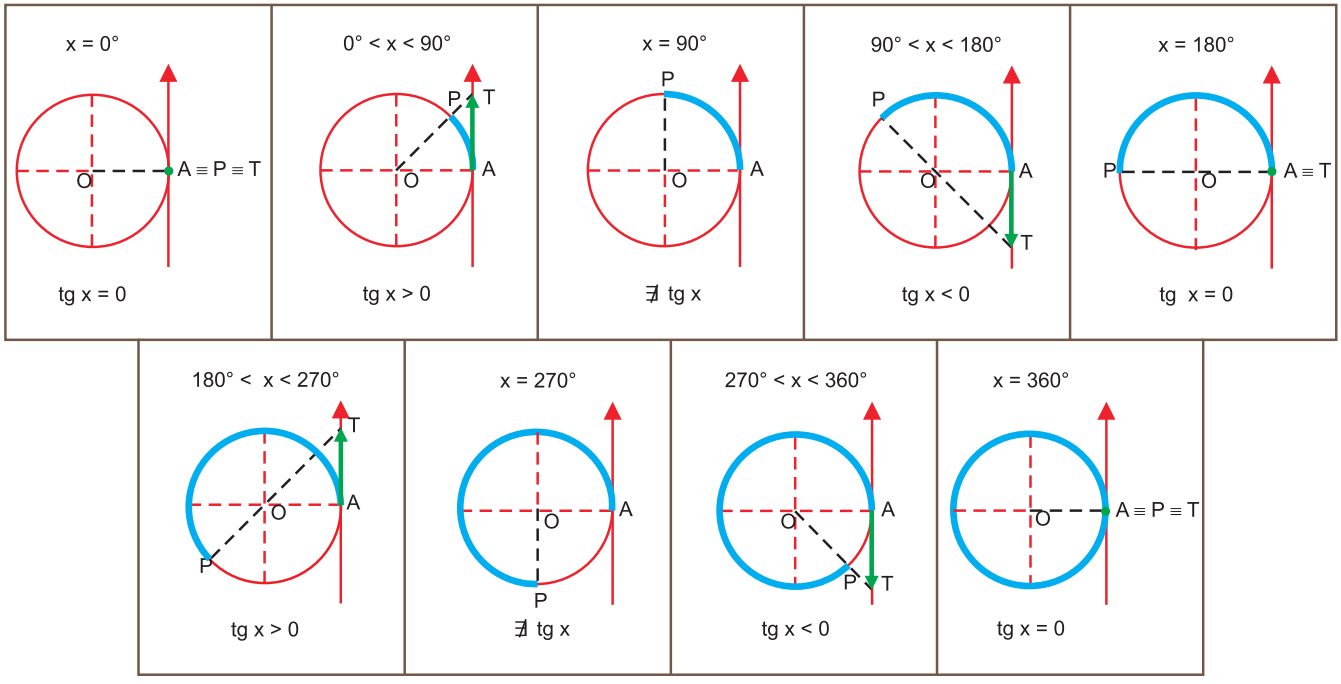
$$tg\ x = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \Leftrightarrow tg\ x = \frac{AT}{OA} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\ x = \frac{AT}{1} \Leftrightarrow tg\ x = AT$$

2. Variação da função tangente

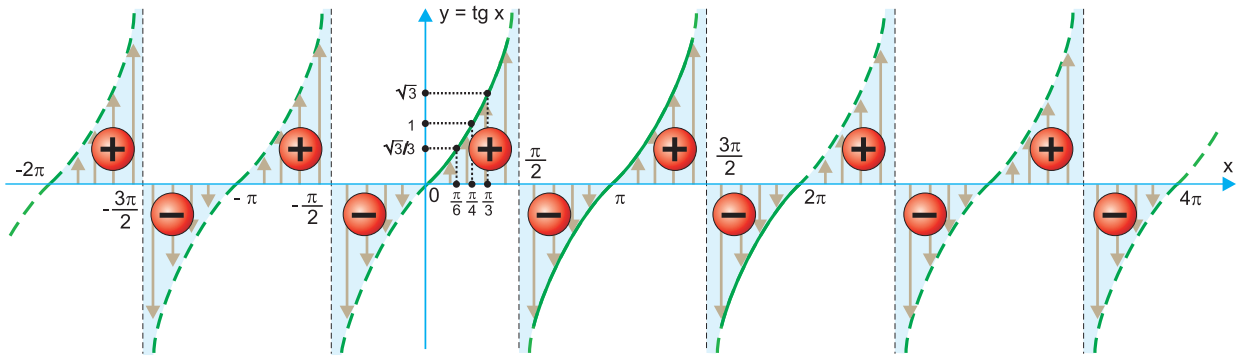
Enquanto o ponto P percorre a primeira volta no sentido anti-horário, o número real x varia de 0° a 360°, e a tangente varia de $-\infty$ a $+\infty$.

Observe na tabela a seguir as várias situações possíveis.



3. Gráfico

Notando que tg x = tg(x ± π), pois **x** e **x ± π** são as medidas de arcos de mesma extremidade, de acordo com a tabela do item anterior, concluímos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = tg x é:



e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

4. Propriedades

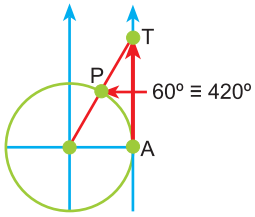
Do que foi exposto nos itens (1), (2) e (3), podemos concluir que a função tangente é:

a) **Positiva** no **primeiro** e **terceiro** quadrantes; **negativa** no **segundo** e **quarto** quadrantes.

b) **Crescente** em cada quadrante

c) **Ímpar**, pois **tg(–x) = – tg x**

d) **Periódica** de período π.



tg(60°) = tg(60° + 360°) =

= tg 420° = $\sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a equação tg x = 1 sabendo que 0° ≤ x ≤ 360°.

Resolução



tg x = 1
0° ≤ x ≤ 360° ⇔ x = 45° ou x = 225°

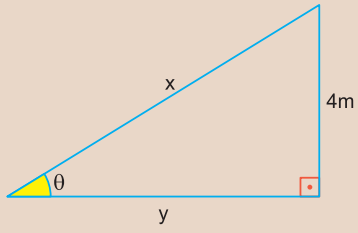
Resposta: V = {45°; 225°}

2 **(MODELO ENEM)** – Quando Eugênio entrou em sua sala de aula, havia o seguinte problema no quadro-negro: "Numa indústria deseja-se construir uma rampa com inclinação de θ graus para vencer um desnível de 4 m. Qual será o comprimento da rampa?" Mas, o professor já havia apagado os valores de sen θ e cos θ, restando apenas tg $\theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Eugênio usou seus conhecimentos de trigonometria e determinou que o comprimento da rampa é:

a) $6\sqrt{6}$ b) $8\sqrt{2}$ c) $10\sqrt{2}$

d) $12\sqrt{2}$ e) $14\sqrt{2}$

Resolução



$\text{tg}\,\theta = \frac{4}{y} = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \sqrt{2}\,y = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 10\sqrt{2}$

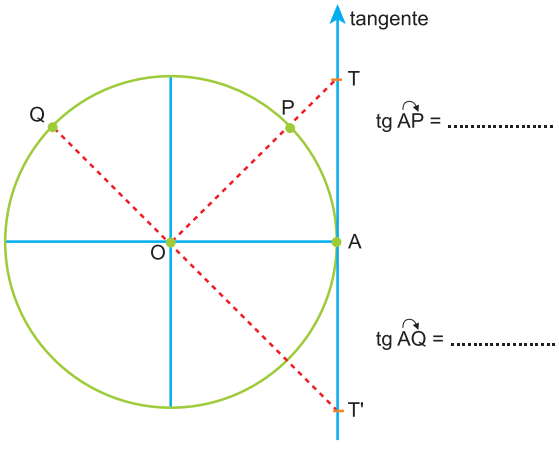
$x^2 = 4^2 + (10\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 216 \Rightarrow x = 6\sqrt{6}$

Resposta: A

Exercícios Propostos

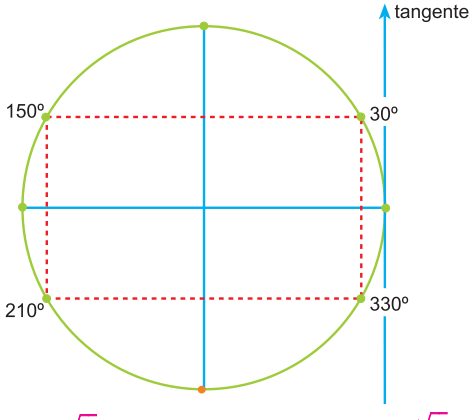
1 Utilizando a figura, complete as definições



RESOLUÇÃO: tg $\overset{\frown}{AP}$ = AT tg $\overset{\frown}{AQ}$ = AT'

2 Determinar graficamente e completar os itens abaixo.

a)



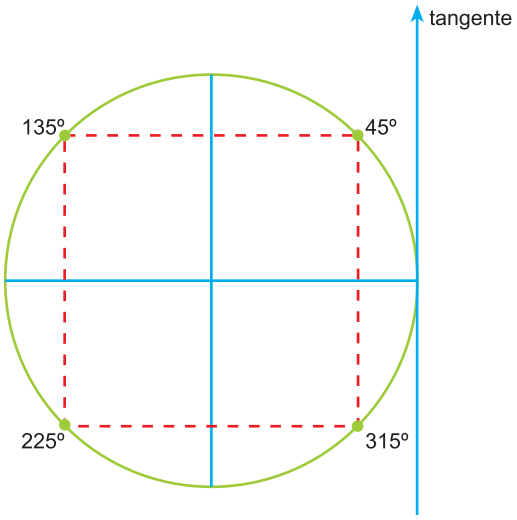
tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tg 150° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

tg 210° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tg 330° = $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M205**

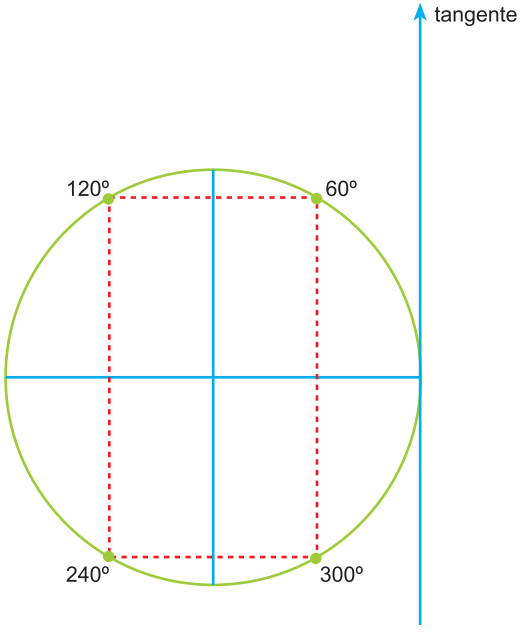
b)



tg 45° = **1** tg 135° = **– 1**

tg 225° = **1** tg 315° = **– 1**

c)

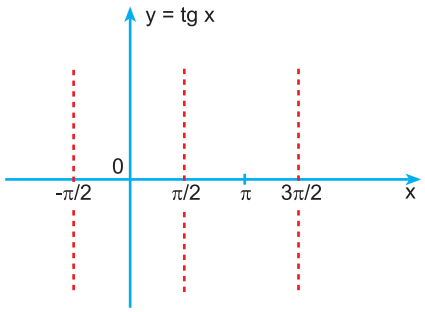


tg 60° = **$\sqrt{3}$** tg 120° = **$-\sqrt{3}$**

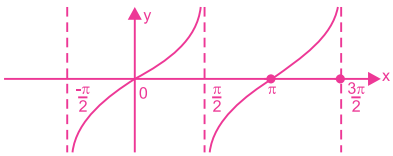
tg 240° = **$\sqrt{3}$** tg 300 ° = **$-\sqrt{3}$**

3 Completar a tabela abaixo e em seguida esboçar o gráfico da função y = tg x no intervalo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, determinando o conjunto imagem e o período da mesma.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
tg x	$\nexists$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$



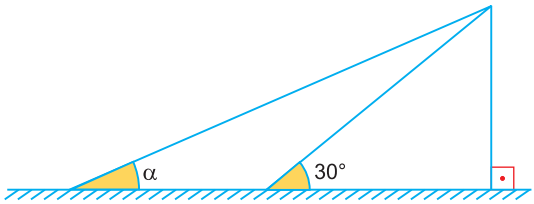
RESOLUÇÃO:



Im = ℝ

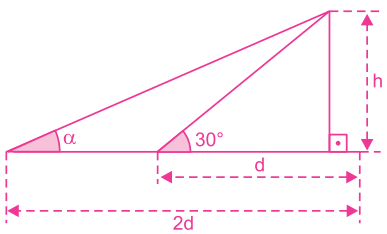
p = π

4 **(MODELO ENEM)** – Um mastro vertical está instalado em um local em que o terreno é horizontal.
Uma pessoa que está à distância **d** da base do mastro vê o seu topo sob um ângulo de 30°. Se ela se afastar do mastro e parar à distância 2d da base do mastro, verá o topo do mastro sob um ângulo α, conforme figura.



Então é correto afirmar que
a) a medida de α é 60°.
b) a medida de α é 15°.
c) a tangente de α é a metade da tangente de 30°.
d) a tangente de α é o dobro da tangente de 30°.
e) a medida de α é 30°.

RESOLUÇÃO:



Sendo h a altura do mastro, temos:

$$\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \frac{h}{2d} \\ \text{tg}\,30° = \frac{h}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,30°} = \frac{h}{2d} \cdot \frac{d}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,30°}{2}$$

Resposta: C

Módulo 30

Equações e inequações que envolvem a função tangente

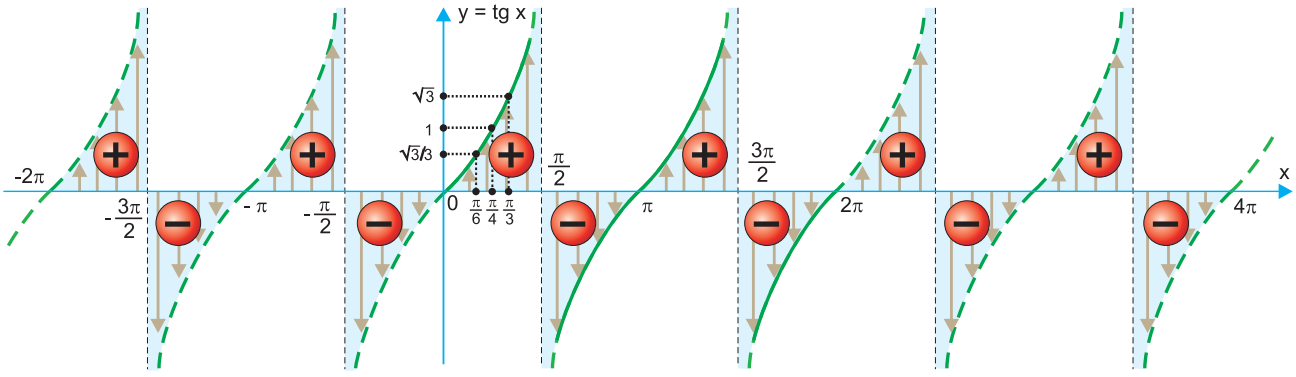
Resumo teórico

A função tangente definida por f(x) = tg x, tem as seguintes características:

a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

b) $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}$

c) Gráfico



d) É **periódica** de período π.

e) É **crescente** em cada quadrante.

f) É **ímpar** pois tg(–x) = – tgx

g) Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$$tg30° = tg\,210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg150° = tg\,330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

h) Para 45°, 135°, 225° e 315° temos:

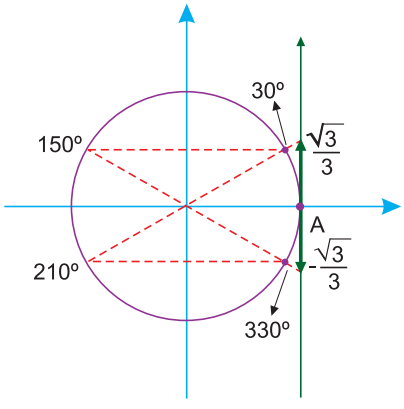
$$tg\,45° = tg\,225° = 1$$

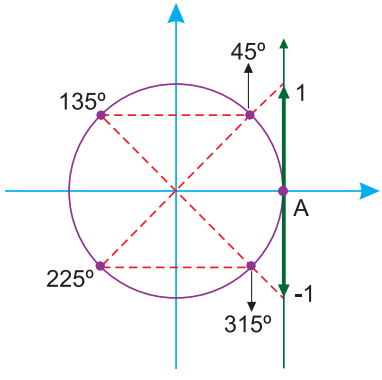
$$tg\,135° = tg\,315° = -1$$

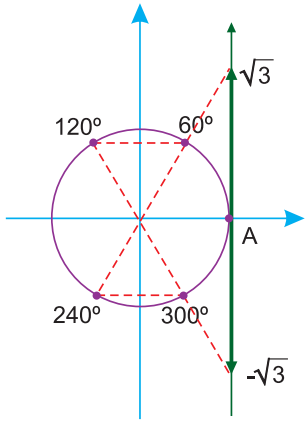
i) Para 60°, 120°, 240° e 330° temos:

$$tg\,60° = tg\,240° = \sqrt{3}$$

$$tg\,120° = tg\,300° = -\sqrt{3}$$







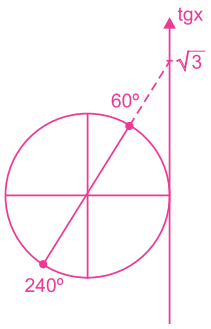
Exercícios Propostos

1 Resolver a equação $\text{tg } x = \sqrt{3}$, supondo $0° \leq x < 360°$.

RESOLUÇÃO:

$\text{tg } x = \sqrt{3}$

$V = \{60°; 240°\}$



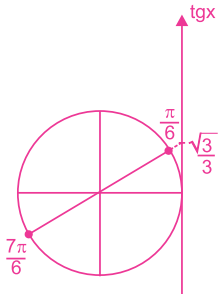
2 Resolva a equação $3 \text{ tg } x - \sqrt{3} = 0$ supondo $0 \leq x < 2\pi$.

RESOLUÇÃO:

$3 \text{ tg } x - \sqrt{3} = 0$

$\text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6} \right\}$



3 Resolver a equação $3\text{tg}^2x - 3 = 0$ supondo $0° \leq x < 360°$.

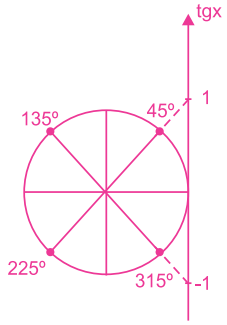
RESOLUÇÃO:

$3 \text{ tg}^2x - 3 = 0$

$\text{tg}^2x = 1$

$\text{tg } x = \pm 1$

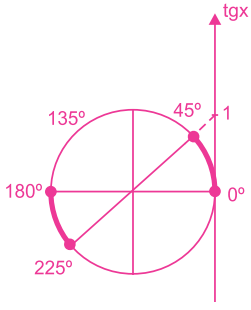
$V = \{45°; 135°; 225°; 315°\}$



4 Resolver a inequação $0 \leq \text{tg } x \leq 1$ supondo $0° \leq x < 360°$.

RESOLUÇÃO:

$0 \leq \text{tg } x \leq 1$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0° \leq x \leq 45° \text{ ou } 180° \leq x \leq 225°\}$

Módulo 31 e 32

Equações trigonométricas

Resumo teórico

1. Função seno

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que **f(x) = sen x = ON**

b) o conjunto imagem é **[–1; 1]** e o período é **2π**

2. Função cosseno

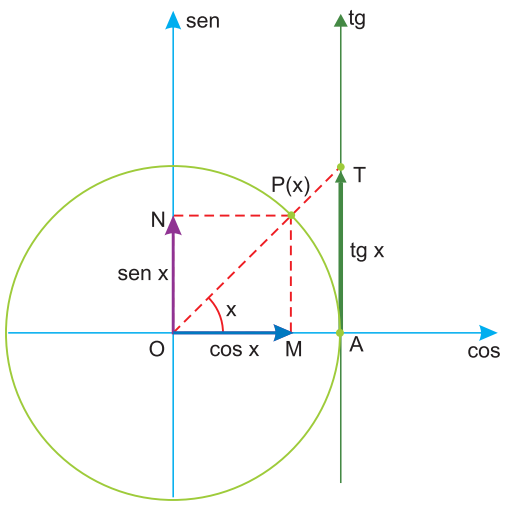
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que **f(x) = cos x = OM**

b) o conjunto imagem é **[–1; 1]** e o período é **2π**

3. Função tangente

a) $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\} \to \mathbb{R}$ tal que **f(x) = tg x = AT**

b) o conjunto imagem é $\mathbb{R}$ e o período é **π**



4. Para 30°, 150°, 210° e 330° temos:

$\text{sen } 30° = \text{sen } 150° = \frac{1}{2}$;

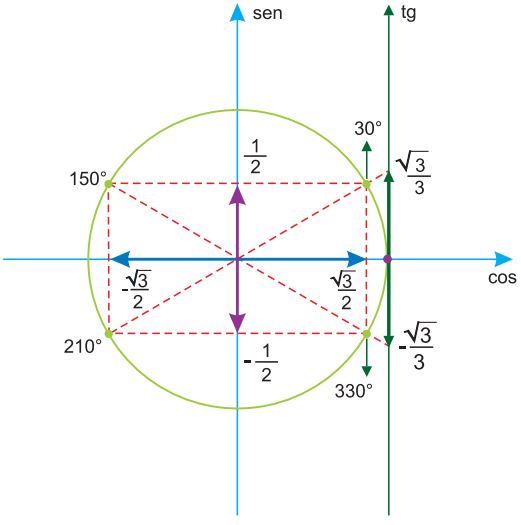
$\text{sen } 210° = \text{sen } 330° = -\frac{1}{2}$

$\cos 30° = \cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 150° = \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \text{tg } 210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\text{tg } 150° = \text{tg } 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



5. Para 45°, 135°, 225° e 315° temos:

$\text{sen } 45° = \text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

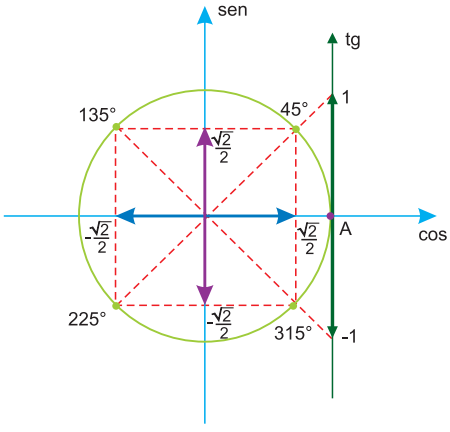
$\text{sen } 225° = \text{sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45° = \cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos 135° = \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } 45° = \text{tg } 225° = 1$;

$\text{tg } 135° = \text{tg } 315° = -1$



6. Para 60°, 120°, 240° e 300° temos:

$\text{sen } 60° = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

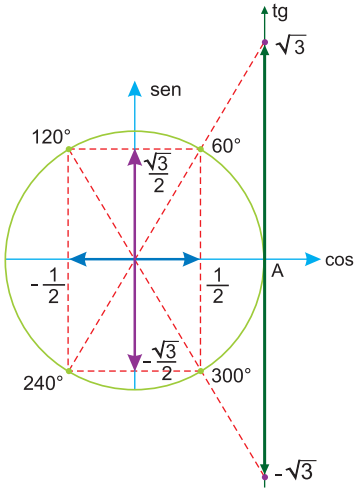
$\text{sen } 240° = \text{sen } 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \cos 300° = \frac{1}{2}$;

$\cos 120° = \cos 240° = -\frac{1}{2}$

$\text{tg } 60° = \text{tg } 240° = \sqrt{3}$;

$\text{tg } 120° = \text{tg } 300° = -\sqrt{3}$



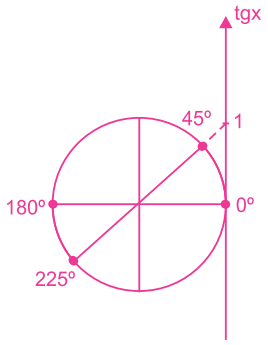
Exercícios Propostos – Módulo 31

1 Resolva a equação $tg^2x - tg\ x = 0$, supondo $0° \leq x < 360°$

RESOLUÇÃO:

$tg^2x - tg\ x = 0$

$tg\ x\ (tg\ x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ x = 0 \\ tg\ x = 1 \end{cases}$



$V = \{0°; 45°; 180°; 225°\}$

2 Se $sec^2x + tg\ x - 7 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor de sec x será

a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{4}$ e) 5

RESOLUÇÃO:

$sec^2x + tg\ x - 7 = 0 \Leftrightarrow tg^2x + tg\ x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\ x = 2$ ou $tg\ x = -3 \Leftrightarrow tg\ x = 2 \left(\text{pois } 0 < x < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow tg^2x + 1 = 5 \Leftrightarrow sec^2x = 5 \Leftrightarrow sec\ x = \sqrt{5}$

Resposta: A

3 **(FUVEST)** – O dobro do seno de um ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, é igual ao triplo do quadrado de sua tangente. Logo, o valor de seu cosseno é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

RESOLUÇÃO:

Sendo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos:

$2 \cdot sen\ \theta = 3 \cdot tg^2\theta \Leftrightarrow 2 \cdot sen\ \theta = 3 \cdot \frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 = 3 \cdot \frac{sen\ \theta}{cos^2\theta} \Leftrightarrow 2\ cos^2\theta = 3 \cdot sen\ \theta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (1 - sen^2\theta) = 3 \cdot sen\ \theta \Leftrightarrow 2 \cdot sen^2\theta + 3 \cdot sen\ \theta - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\ \theta = \frac{1}{2}$ ou $sen\ \theta = -2$ (impossível)

Para $sen\ \theta = \frac{1}{2}$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, temos $cos\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Resposta: B

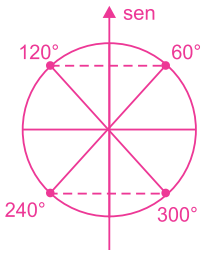
4 Resolva a equação $4\ sen^2(x) - 3 = 0$ supondo $0° \leq x < 360°$.

RESOLUÇÃO:

$4 \cdot sen^2(x) - 3 = 0$

$sen^2(x) = \frac{3}{4}$

$sen(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$



$sen(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60° \\ x = 120° \end{cases}$

$sen(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 240° \\ x = 300° \end{cases}$

$V = \{60°; 120°; 240°; 300°\}$

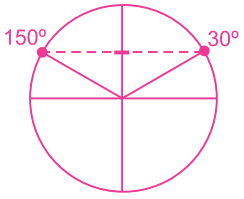
Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de 1 a 4.

1 $2\,\text{sen}(x) - 1 = 0$

RESOLUÇÃO:

$2\,\text{sen}(x) - 1 = 0$

$\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$



$x = 30° + n \cdot 360°$
ou
$x = 150° + n \cdot 360°$

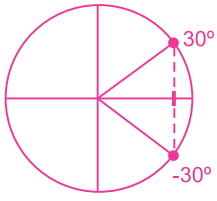
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 360° \text{ ou } x = 150° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

2 $2\cos x = \sqrt{3}$

RESOLUÇÃO:

$2\cos x = \sqrt{3}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 30° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

3 $3\,\text{tg}^2x - \sqrt{3}\,\text{tg}\,x = 0$

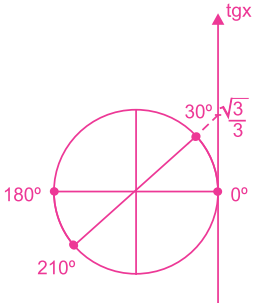
RESOLUÇÃO:

$\text{tg}\,x \cdot (3 \cdot \text{tg}\,x - \sqrt{3}) = 0$

$\text{tg}\,x = 0 \Rightarrow x = n \cdot 180°$

ou

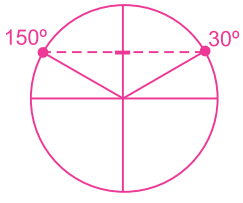
$\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30° + n \cdot 180°$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = n \cdot 180° \text{ ou } x = 30° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z}\}$

4 $2\cos^2x + 5\,\text{sen}\,x - 4 = 0$

RESOLUÇÃO:



$2\cos^2x + 5 \cdot \text{sen}\,x - 4 = 0$

$2(1 - \text{sen}^2x) + 5\,\text{sen}\,x - 4 = 0$

$-2 \cdot \text{sen}^2x + 5 \cdot \text{sen}\,x - 2 = 0$

Fazendo $y = \text{sen}\,x$, temos:

$-2 \cdot y^2 + 5 \cdot y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = \frac{1}{2}$

$y = \text{sen}\,x = 2, \nexists\, x$

$y = \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + n \cdot 360° \\ \text{ou} \\ x = 150° + n \cdot 360° \end{cases}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + n \cdot 360° \text{ ou } x = 150° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}\}$

OBJETIVO

FRENTE 2

MATEMÁTICA



Gottfried Leibniz (1646 – 1716)
A ele é atribuída a criação do termo "função"

Álgebra – Módulos

17 – Equações do 1º grau
18 – Sistemas de equações
19 – Equações do 2º grau – Fórmula de Báskara
20 – Soma e produto – método da tentativa
21 – Equações redutíveis a 1º e 2º graus
22 – Problemas de 1º e 2º graus
23 – Conjuntos numéricos
24 – Função polinomial do 1º grau
25 – Função polinomial do 2º grau
26 – Vértice e conjunto-imagem
27 – Vértice e conjunto-imagem
28 – Inequações do 1º grau
29 – Inequações do 2º grau
30 – Sistemas de inequações
31 – Inequações tipo quociente e tipo produto
32 – Quadro de sinais

Módulo 17

Equações do 1º grau

Palavras-chave:
- Raiz (ou solução)
- Conjunto verdade

1. Sentença aberta e equação

Analisando as sentenças

(I) $2 \cdot 6 - 1 = 13$

(II) $2 \cdot 7 - 1 = 13$

(III) $2 \cdot x - 1 = 13$

podemos fazer as seguintes considerações:

a sentença (I) é falsa, pois $2 \cdot 6 - 1 = 12 - 1 = 11 \neq 13$;

a sentença (II) é verdadeira, pois $2 \cdot 7 - 1 = 14 - 1 = 13$;

a sentença $2x - 1 = 13$ não é verdadeira nem falsa, pois **x**, chamado **variável**, representa qualquer número. Este tipo de sentença é um exemplo de **sentença aberta**.

Toda **sentença aberta** na forma de **igualdade** é chamada **equação**.

Substituindo **x** por **7**, a sentença aberta $2x - 1 = 13$ se transforma em $2 \cdot 7 - 1 = 13$, que é uma sentença verdadeira. Dizemos então que **7** é uma **raiz** (ou uma **solução**) da equação $2x - 1 = 13$.

Substituindo **x** por **6** a sentença aberta $2x - 1 = 3$ se transforma em $2 \cdot 6 - 1 = 13$ que é falsa. Dizemos então que **6** não é **raiz** da equação $2x - 1 = 13$.

2. Raiz e conjunto verdade

Raiz (ou solução) de uma equação é um número que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira. **Conjunto verdade** ou **conjunto solução** de uma equação é o conjunto de todas, e somente, as raízes. **Resolver uma equação é determinar o seu conjunto verdade.**

Exemplos

1. O número 2 é raiz da equação $3x - 1 = 5$, pois substituindo x por 2 a sentença aberta $3x - 1 = 5$ se transforma em $3 \cdot 2 - 1 = 5$, que é uma sentença verdadeira.
2. O número 4 não é raiz da equação $3x - 1 = 5$, pois, substituindo x por 4, a sentença aberta $3x - 1 = 5$ se transforma em $3 \cdot 4 - 1 = 5$, que é uma sentença falsa.

3. Equação do 1º grau

Equação do 1º grau é toda **sentença aberta**, em **x**, redutível à forma $ax + b = 0$ onde **a** e **b** são números reais dados e $a \neq 0$.

Notando que $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$, para $a \neq 0$, concluímos que o conjunto verdade da equação é $V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

4. A equação ax + b = 0, resolvida em $\mathbb{R}$

Analisando a equação **ax + b = 0**, com **a**, **b** $\in \mathbb{R}$, temos as seguintes hipóteses:

- Para **a ≠ 0**, a equação **ax + b = 0** admite **uma única solução**, pois é do primeiro grau.

Assim: $V = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

- Para **a = 0** e **b ≠ 0**, a equação **ax + b = 0 não tem solução**, pois a sentença é **sempre falsa**. Neste caso, $V = \emptyset$

- Para **a = 0** e **b = 0**, a equação **ax + b = 0 admite todos os números reais como solução**, pois a sentença $0 \cdot x + 0 = 0$ é sempre verdadeira. Neste caso $V = \mathbb{R}$.

Exercícios Resolvidos

1 O conjunto-solução da equação $2x - 6 = 0$ é $V = \{3\}$, pois $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

2 O conjunto-verdade da equação $x + 2 = x + 3$ é $\emptyset$, pois $x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 1$, que é uma sentença sempre falsa.

3 Resolvendo, em $\mathbb{R}$, a equação $4x - 12 = 4.(x - 3)$ obtemos, como conjunto verdade, o próprio $\mathbb{R}$, pois $4x - 12 = 4 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4x - 12 = 4x - 12 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$, que é uma sentença sempre verdadeira.

4 Resolvendo a equação $\frac{3x}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3}$ obtemos $V = \left\{\frac{6}{7}\right\}$ pois:

$$\frac{3x}{2} - \frac{x+2}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x - 2(x+2)}{6} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x - 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow 7x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$$

5 Qual a distância percorrida por uma bicicleta sabendo que a roda da frente, que tem 65 cm de diâmetro, deu 100 voltas a mais que a roda traseira, que tem 70 cm de diâmetro?

Supor $\pi = \frac{22}{7}$

Resolução

Sendo x o número de voltas dadas pela roda traseira e $2\pi R$ o comprimento de uma circunferência de raio R temos:

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{65}{2} \cdot (x + 100) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{70}{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65 \cdot (x + 100) = 70x \Leftrightarrow x = 1300$$

Se a roda traseira, de diâmetro 70 cm, deu 1300 voltas então a distância percorrida é:

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{70}{2} \cdot 1\,300 \cong \frac{22}{7} \cdot 70 \cdot 1\,300 =$$

$= 286\,000$ (cm)

Resposta: A distância percorrida pela bicicleta é 2,86 km.

6 **(FAAP – MODELO ENEM)** – Uma escola resolveu descobrir qual é a modalidade esportiva preferida pelos alunos. Cada estudante poderia escolher apenas uma modalidade. Do total de alunos pesquisados, 2/5 escolheram o futebol e 1/4 dos restantes indicaram o voleibol. 72 alunos não optaram nem por futebol, nem por vôlei. O total de alunos pesquisados foi:

a) 120 b) 144 c) 160
d) 288 e) 320

Resolução

Sendo x o número de alunos pesquisados, temos:

$$x = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \left(x - \frac{2}{5} \cdot x\right) + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot x + 72 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20x = 8x + 3x + 1440 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 1440 \Leftrightarrow x = 160$$

Resposta: C

Exercícios Propostos

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x[2x - (3 - x)] - 3 \cdot (x^2 - 1) = 0$.

RESOLUÇÃO:

$2x^2 - 3x + x^2 - 3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$V = \{1\}$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x - \frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{6} + 2$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{6x - 2x + 2}{6} = \frac{x + 1 + 12}{6} \Leftrightarrow 4x + 2 = x + 13 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \Rightarrow V = \left\{\frac{11}{3}\right\}$$

3 **(ESPM – MODELO ENEM)** – Do centro de uma cidade até o aeroporto são 40 km por uma grande avenida. Os táxis que saem do aeroporto cobram R$ 3,60 pela bandeirada e R$ 0,80 por quilômetro rodado. Os que saem do centro cobram R$ 2,00 pela bandeirada e R$ 0,60 por quilômetro rodado. Dois amigos se encontraram num restaurante que fica nessa avenida, sendo que um tomou o táxi que sai do aeroporto e o outro tomou o que parte do centro e, para surpresa dos dois, os seus gastos foram exatamente iguais. A distância do restaurante ao aeroporto é de:

a) 10 km; b) 12 km; c) 14 km;
d) 16 km; e) 18 km.

RESOLUÇÃO:

Sendo x a distância em km do restaurante (R) ao aeroporto (A), e 40 km a distância do centro (C) ao aeroporto (A), temos:



$3,6 + 0,8.x = 2 + 0,6 . (40 – x) \Leftrightarrow 3,6 + 0,8.x = 2 + 24 – 0,6 . x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1,4.x = 22,4 \Leftrightarrow x = 16$
Resposta: D

4 **(UFV – MODELO ENEM)** – Em um programa de televisão, um candidato deve responder a 20 perguntas. A cada pergunta respondida corretamente, o candidato ganha R$ 500,00, e perde R$ 300,00 por pergunta não respondida ou respondida incorretamente. Se o candidato ganhou R$ 7 600,00, o número de perguntas que acertou é:

a) 19 b) 16 c) 20 d) 17 e) 18

RESOLUÇÃO:

Sendo x o número de perguntas respondidas corretamente, temos:
$500.x – 300.(20 – x) = 7600 \Leftrightarrow 5.x – 60 + 3x = 76 \Leftrightarrow 8x = 136 \Leftrightarrow x = 17$
Resposta: D

5 **(MODELO ENEM)** – Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que 10 pessoas haviam desistido de participar da festa e que cada participante deveria contribuir com mais R$ 6,40, pois o valor total da festa não seria alterado.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das pessoas participantes?

a) R$ 14,00. b) R$ 17,00. c) R$ 22,00.
d) R$ 32,00. e) R$ 57,00.

RESOLUÇÃO:

Sendo x a cota de cada uma das pessoas do grupo participante, em reais, temos:
$50 . (x – 6,40) = (50 – 10) . x \Leftrightarrow 50 . (x – 6,40) = 40 . x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x – 32 = 4x \Leftrightarrow x = 32$
Resposta: D

6 **(MODELO ENEM)** – Como resultado do aquecimento da Terra, algumas geleiras estão derretendo. Doze anos depois do desaparecimento das geleiras, pequenas plantas chamadas liquens começaram a crescer nas pedras. Cada líquen cresce de forma mais ou menos circular. A relação entre o diâmetro desse círculo e a idade do líquen pode ser calculada, aproximadamente, pela fórmula

$$d = 7,0 . \sqrt{t – 12}\ , \text{ para } t \geq 12.$$

Nessa fórmula, d representa o diâmetro do líquen em milímetros e t representa o número de anos passados depois do desaparecimento das geleiras.

O número de anos após o desaparecimento das geleiras para que o diâmetro do líquen seja 35mm, é:

a) 21 b) 28 c) 35 d) 37 e) 48

RESOLUÇÃO:

Na relação $d = 7,0 . \sqrt{t – 12}$, para d = 35, temos:

$35 = 7,0 . \sqrt{t – 12} \Leftrightarrow 5 = \sqrt{t – 12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t – 12 = 25 \Leftrightarrow t = 37$

Resposta: D

Módulo 18

Sistemas de equações

Palavras-chave:

• Substituição • Adição

Note que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 10 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação $x + y = 9$.

Além disso, $\begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 7 \\ y = 0 \end{cases}$ são algumas das soluções da equação $x - y = 7$.

Note ainda que **x = 8** e **y = 1** é solução das equações $x + y = 9$ e $x - y = 7$, e portanto o par (8, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Assim sendo, solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas **x** e **y** é qualquer par ordenado (x; y) que satisfaz as duas equações.

Exercícios Resolvidos

1 Determinar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$, pelo método da substituição

Resolução

Fazendo $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \quad (I) \\ 3x + 2y = -4 \quad (II) \end{cases}$, de (I) temos:

$$\boxed{y = \frac{1 - 2x}{5}} \quad (\alpha)$$

Substituindo em (II) resulta

$$3x + 2\left(\frac{1 - 2x}{5}\right) = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x + 2 - 4x = -20 \Leftrightarrow 11x = -22 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -2} \quad (\beta)$$

Substituindo (β) em (α) obtém-se:

$$y = \frac{1 - 2(-2)}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = 1}$$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

2 Determinar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$, pelo método da adição.

Resolução

Façamos $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \quad (I) \\ 3x + 2y = -4 \quad (II) \end{cases}$

Adicionaremos membro a membro as equações, depois de multiplicar (I) por (– 2) e (II) por 5.

$$\begin{cases} -4x - 10y = -2 \\ 15x + 10y = -20 \end{cases}$$

$$11x = -22 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

Agora, adicionaremos membro a membro as equações, depois de multipicar (I) por 3 e (II) por (– 2).

$$\begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$11y = 11 \Leftrightarrow \boxed{y = 1}$$

Resposta: V = {(– 2; 1)}

3 **(MODELO ENEM)** – Atualmente, as montadoras têm concentrado sua fabricação em veículos bicombustíveis, ou seja, veículos movidos a álcool e/ou gasolina. Fabiana comprou um veículo bicombustível e gastou R$ 79,20 (setenta e nove reais e vinte centavos) para encher o tanque, que comporta 50 litros. Considerando-se que, no posto em que Fabiana abasteceu, um litro de gasolina custa R$ 2,40 (dois reais e quarenta centavos) e um litro de álcool custa R$ 1,20 (um real e vinte centavos), as quantidades de litros, respectivamente, de gasolina e de álcool, utilizadas para encher o tanque foram de

a) 38 e 12. b) 34 e 16. c) 25 e 25.
d) 16 e 34. e) 12 e 38.

Resolução

Se a for a quantidade de litros de álcool e g a de gasolina, então:

$$\begin{cases} a + g = 50 \\ 1,2a + 2,4g = 79,20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12a - 12g = -600 \\ 12a + 24g = 792 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + g = 50 \\ 12g = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + g = 50 \\ g = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 34 \\ g = 16 \end{cases}$$

Resposta: D

Exercícios Propostos

1 Resolva, o sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

Método da adição:

Façamos: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

Adicionaremos membro a membro as equações, depois de multiplicar (I) por 2:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$7x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \quad (\alpha)$$

Substituindo-se (α) em uma das equações, (I) por exemplo, obtemos: $2 \cdot (1) - y = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

V = {(1; 1)}

2 (ENEM) – Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano.
O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados.
O número esperado de carros roubados da marca Y é:
a) 20. b) 30. c) 40. d) 50. e) 60.

RESOLUÇÃO:
Sendo x e y respectivamente, o número de carros roubados durante um ano, das marcas X e Y tem-se:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 60\% \cdot 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2y + y = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$$

O número esperado de carros roubados da marca Y, *durante um ano*, é 30.
Resposta: B

3 (UNIFESP – MODELO ENEM) – Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e um estojo é R$ 10,00. O preço do estojo é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. A soma dos preços de aquisição de um estojo e de um lápis é
a) R$ 3,00. b) R$ 4,00. c) R$ 6,00.
d) R$ 7,00. e) R$ 12,00.

RESOLUÇÃO:
Sendo x o preço de 1 lápis e y o preço de 1 estojo, então:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$

Portanto: x + y = 7
Resposta: D

4 As idades de um pai e de seu filho somam hoje 30 anos. Daqui a 12 anos, a idade do pai será o dobro da do filho. A idade do pai é hoje:
a) 6 anos b) 18 anos c) 24 anos
d) 30 anos e) 36 anos

RESOLUÇÃO:
Sendo x a idade atual do pai e y a idade atual do filho, em anos, temos:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x + 12 = 2 \cdot (y + 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 60 \\ x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow 3x = 72 \Leftrightarrow x = 24$$

Resposta: C

5 (FEI – MODELO ENEM) – O professor João tem R$ 275,00 em notas de R$ 5,00 e R$ 10,00; se o número total de cédulas é 40, a diferença entre o número de notas de R$ 5,00 e R$ 10,00 é:
a) 6 b) 8 c) 10 d) 15 e) 20

RESOLUÇÃO:
Se x for o número de cédulas de R$ 5,00 e y for o número de cédulas de R$ 10,00, então:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 5x + 10y = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = -40 \\ x + 2y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow x - y = 10$$

Resposta: C

Módulo 19

Equações do 2º grau – Fórmula de Báskara

Palavras-chave:
- Raízes (ou soluções)
- Conjunto verdade

1. Definição

É toda sentença aberta, em x, redutível ao tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. Resolução para o caso c = 0 e b ≠ 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow V = \left\{0; -\frac{b}{a}\right\}$

3. Resolução para o caso b = 0 e c ≠ 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow V = \left\{\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$ se a e c forem de sinais contrários, ou $V = \emptyset$ se a e c forem de mesmo sinal, para $x \in \mathbb{R}$.

4. Resolução para o caso b = 0 e c = 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$

5. Resolução do caso geral

A sentença $ax^2 + bx + c = 0$ é equivalente a $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação.

Assim, sendo V o conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, temos:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow V = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow V = \emptyset$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $2x^2 - 8x = 0$

Resolução

$2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (x - 4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4 \Leftrightarrow V = \{0; 4\}$

2

a) Resolver, em $\mathbb{R}$ a equação $3x^2 - 12 = 0$

Resolução

$3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow V = \{-2; 2\}$

b) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3x^2 + 12 = 0$

Resolução

$3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -12 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow V = \emptyset$

3 Resolver a equação $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Resolução

Notando que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$, temos:

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3 + 5}{4}$ ou

$x = \frac{3 - 5}{4} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V = \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$

4 **(MODELO ENEM)** – A partir do instante em que foi identificado um vazamento em um tanque de água, os técnicos afirmaram que a quantidade total, em litros, de água no tanque, indicada por Q(t), após **t** horas de vazamento, seria dada pela função $Q(t) = t^2 - 24t + 144$. Dividindo-se o total de água no tanque, no instante em que o vazamento foi identificado, pelo total de horas que ele levou para esvaziar totalmente, pode-se concluir que o escoamento médio, nesse intervalo, em litros por hora, foi igual a:

a) 12 b) 12,5 c) 13
d) 13,5 e) 14

Resolução

I. Q(0) = 144 e, portanto, a quantidade de litros de água, no instante em que o vazamento foi identificado, era 144.

II. $Q(t) = t^2 - 24t + 144 = 0 \Rightarrow t = 12$

III. Após 12 horas, o tanque estará vazio.

IV. O escoamento médio, nesse intervalo, em litros por hora, foi $\frac{144}{12} = 12$.

Resposta: A

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO** (**www.portal.objetivo.br**) e, em "localizar", digite **MAT1M206**

Saiba mais

Provar que a fórmula resolutiva para a equação do segundo grau, $ax^2 + bx + c = 0$, é $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$ significa provar que

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$

Essa demonstração foi feita por Báskara, muito tempo atrás, valendo-se de alguns artifícios.

Observe como foi

1) $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = -c$

2) Multiplicando ambos os membros por 4a obtém-se: $ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

3) Somando b^2 aos dois membros da igualdade temos: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

4) Substituindo $b^2 - 4ac$ por Δ e supondo $\Delta > 0$ temos: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = \Delta \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Logo: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$

Exercícios Propostos

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
$V = \{-2, 2\}$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 4 = 0$.

RESOLUÇÃO:
$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$V = \emptyset$

3 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $5x^2 - 10x = 0$.

RESOLUÇÃO:
$5x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$
$V = \{0, 2\}$

4 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $12x^2 - 7x + 1 = 0$

RESOLUÇÃO:

I) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1$

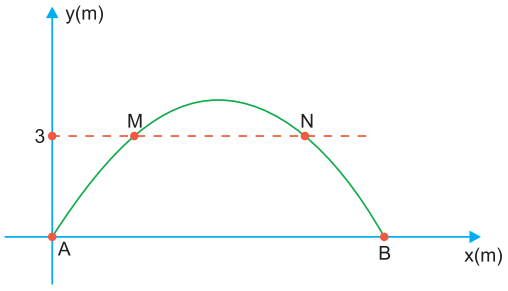
II) $x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 12} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 1}{24} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ ou $x = \frac{1}{3}$

$V = \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right\}$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$.

RESOLUÇÃO:
Notemos que: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$, logo, $V = \emptyset$

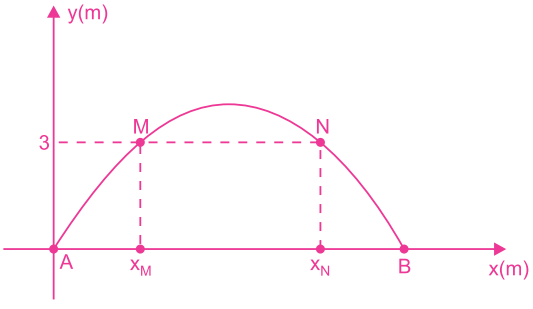
6 O gráfico representa a trajetória de um projétil, desde o seu lançamento (ponto A) até retornar ao solo (ponto B).



Essa trajetória está contida na parábola de equação $y = -2x^2 + 7x$ e os pontos M e N, distam 3 m do solo. A distância em metros, entre os pontos M e N é:

a) 2 b) 2,5 c) 3 d) 3,5 e) 4

RESOLUÇÃO:



Devemos calcular as abscissas dos pontos M e N sabendo que a ordenada desses pontos é 3. Logo:

$y = -2x^2 + 7x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7+5}{4} = 3$ ou $x = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

Assim sendo, $x_M = 0,5$, $x_N = 3$ e a distância pedida, em metros, é $x_N - x_M = 3 - 0,5 = 2,5$

Resposta: B

Módulo 20

Soma e produto – método da tentativa

Palavras-chave:
- Soma das raízes
- Produto das raízes

1. Soma e produto

Se $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ forem as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, **S** a soma das raízes e **P** o produto das mesmas, então:

a) $S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

b) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$

$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$

$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Logo:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

O método da tentativa consiste em obter as raízes de uma equação do 2º grau utilizando estas propriedades, sem o uso da fórmula de Baskara.

2. Obtenção de uma equação do 2º grau a partir de suas raízes

Sendo $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$, então uma equação do 2º grau cujo conjunto verdade é $\{x_1; x_2\}$ será:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 6$

Logo, as raízes são 2 e 3, pois: $2 + 3 = 5$ e $2 \cdot 3 = 6$

Resposta: S = {2; 3}

2 Obter uma equação do 2º grau cujas raízes são 3 e 4.

Resolução

Sendo $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$ com $a \neq 0$, temos: $x^2 - (3 + 4)x + 3 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

Resposta: $x^2 - 7x + 12 = 0$

3 **(PUC-ADAPTADO – MODELO ENEM)** – Um professor propôs a seus alunos a resolução de certa equação do 2º grau. Um dos alunos copiou errado apenas o coeficiente do 1º grau e encontrou as raízes 1 e – 3; outro copiou errado apenas o termo constante, encontrando as raízes – 2 e 4. A soma dos quadrados das raízes da equação proposta por aquele professor é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 18

Resolução

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, a equação proposta pelo professor e $\{x_1; x_2\}$ seu conjunto solução. Lembrando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ temos:

1) O aluno que copiou **errado** apenas o coeficiente **b acertou** os coeficientes **a** e **c** e obteve o valor correto do produto das raízes e, portanto,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \cdot (-3) = -3$

2) O aluno que copiou **errado** apenas o termo constante **acertou** o valor da soma das raízes e, portanto

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = (-2) + 4 = 2$

3) Se a soma é 2 e o produto é – 3, **por tentativa**, obtém-se as raízes 3 e – 1 e a soma dos seus quadrados é $3^2 + (-1)^2 = 9 + 1 = 10$.

4) Outra forma de resolução é obter a equação correta e resolvê-la pois

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -1$

5) Poder-se-ia, ainda, obter a soma dos quadrados sem obter as raízes pois

$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot (x_1 \cdot x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2 \cdot (-3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 = x_1^2 + x_2^2 - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10$

Resposta: B

Exercícios Propostos

Empregando as propriedades da soma e do produto das raízes, resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de **1** a **3**.

1 $x^2 - 7x + 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \frac{-(-7)}{1} = 7$ **$P = \frac{10}{1} = 10$**

Logo x = 2 ou x = 5. **V = {2, 5}**

2 $x^2 + 4x + 3 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \frac{-4}{1} = -4$ **$P = \frac{3}{1} = 3$**

Logo x = – 1 ou x = – 3. **V = {– 3, – 1}**

3 $x^2 - 3x - 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

$S = \frac{-(-3)}{1} = 3$ **$P = \frac{-10}{1} = -10$**

Logo x = – 2 ou x = 5. **V = {– 2, 5}**

4 Determine uma equação do 2º grau cujas raízes são 4 e – 6.

RESOLUÇÃO:

Lembrando que $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$, temos:

$x^2 - [4 + (-6)]x + [4 \cdot (-6)] = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$

5 Determine **m** para que uma das raízes da equação $x^2 - 12x + (5m + 2) = 0$ seja o dobro da outra.

RESOLUÇÃO:

Seja $V = \{\alpha, 2\alpha\}$ o conjunto-verdade da equação

Assim, $S = \alpha + 2\alpha = \frac{-(-12)}{1} \Leftrightarrow \alpha = 4$

Como $\alpha = 4$ é raiz, temos: $4^2 - 12 \cdot 4 + (5m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 6$

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M207**

6 **(FUVEST)** – A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então m + n é igual a

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

RESOLUÇÃO:

Sabendo-se que na equação $ax^2 + bx + c = 0$, a soma S das raízes é $-\frac{b}{a}$ e o produto P das raízes é $\frac{c}{a}$, tem-se:

$$\begin{cases} S = \frac{5n}{4m + 3n} = \frac{5}{8} \\ P = \frac{m - 2}{4m + 3n} = \frac{3}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5.(4m + 3n) = 5n \cdot 8 \\ 32.(m - 2) = 3 \cdot (4m + 3n) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m - 25n = 0 \\ 20m - 9n = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}$$

Logo, m + n = 9

Resposta: A

7 **(MODELO ENEM)** – As promoções do tipo "leve 5 e pague 4", ou seja, levando-se um conjunto de 5 unidades, paga-se o preço de 4, acenam com um desconto sobre cada conjunto vendido de

a) 10% b) 15% c) 20% d) 25% e) 30%

RESOLUÇÃO:

Na promoção, a cada 5 se tem o desconto de uma unidade e, portanto, desconto de $\frac{1}{5}$ = 0,20 = 20%

Resposta: C

Módulo 21

Equações redutíveis a 1º e 2º graus

Palavras-chave:
• Substituição
• Fatoração • Verificação

1. Troca de variáveis

A equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$, por exemplo, pode ser transformada numa equação do 2º grau fazendo uma **troca de variáveis**.

Substituindo $\mathbf{x^3}$ por **y** obtém-se **y** resolvendo a equação do 2º grau. Em seguida desfaz-se a troca e determina-se a incógnita inicial **x**.

2. Equação "tipo produto"

Lembrando que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ pode-se resolver uma equação de grau maior que dois se for possível transformá-la num produto de fatores do 1º e 2º graus.

3. Equações irracionais

a) Definição

Equação irracional é uma equação em que a incógnita aparece sob um ou mais radicais.

b) Resolução

Para resolver uma equação irracional, devemos transformá-la eliminando os radicais. Para isso, elevamos ambos os membros da equação a expoentes convenientes.

c) Verificação

Elevando os dois membros da equação a expoentes pares obtemos uma nova equação, nem sempre equivalente à equação inicial.

Note, por exempo, que x = 2 e $x^2 = 4$ não possuem o mesmo conjunto verdade. Isto nos obriga a verificar se cada raiz encontrada é realmente raiz da equação original.

Exercícios Resolvidos

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Resolução

a) substituindo x^3 por y temos:

$y^2 - 9y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1$ ou $y = 8$

b) Desfazendo a troca temos:

$y = x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$y = x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Resposta: V = {1; 2}

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$

Resolução

$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x - 3) - 2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = \pm\sqrt{2}$

Resposta: V = $\{3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

3 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x+2} + x = 4$.

Resolução

$\sqrt{x+2} + x = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 4 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 = 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = 2$

Verificação

x = 7 $\Rightarrow \sqrt{x+2} + x = \sqrt{7+2} + 7 = 10$;

logo 7 não é raiz.

x = 2 $\Rightarrow \sqrt{x+2} + x = \sqrt{2+2} + 2 = 4$;

logo 2 é raiz.

Resposta: V = {2}

4 **(MODELO ENEM)** – De acordo com a fórmula de Báskara, o conjunto solução da equação $x^2 - x - 12 = 0$ é {4; – 3}, pois:

$1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -3$

O conjunto solução da equação $(1{,}4x - 0{,}2)^2 = 1{,}4x + 11{,}8$ é {a; b} com a > b.

O valor de 3a – 2b é:

a) 21 b) 18 c) 16 d) 13 e) 8

Resolução

1) $(1{,}4x - 0{,}2)^2 = 1{,}4x + 11{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1{,}4x - 0{,}2)^2 = (1{,}4x - 0{,}2) + 12$

2) Substituindo 1,4x – 0,2 por y, temos:

$y^2 = y + 12 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 4$ ou $y = -3$

3) Se $1{,}4x - 0{,}2 = 4$, então $x = 3$.

4) Se $1{,}4x - 0{,}2 = -3$, então $x = -2$.

5) De acordo com o enunciado, a = 3 e b = – 2; portanto:

$3a - 2b = 3 \cdot 3 - 2(-2) = 9 + 4 = 13$

Resposta: D

Exercícios Propostos

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de **1** a **4**:

1 $(x+4)^2 - 3(x+4) - 10 = 0$

RESOLUÇÃO:

Fazendo-se x + 4 = y, temos: $y^2 - 3y - 10 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 5$

Assim, $x + 4 = -2$ ou $x + 4 = 5 \Leftrightarrow x = -6$ ou $x = 1$

V = {– 6, 1}

2 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

RESOLUÇÃO:

Fazendo-se $x^2 = y$, temos: $x^4 = y^2$ e a equação

$y^2 - 13y + 36 = 0$, cujas raízes são y = 4 ou y = 9.

Assim, $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = -3$ ou $x = 3$

V = {– 3; – 2; 2; 3}

3 $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

RESOLUÇÃO:

$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - 4(x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4) \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

V = {– 2; 2; 4}

4 $\sqrt{2x+5} = x + 1$

RESOLUÇÃO:

$\sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+5})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

Verificação:

x = 2 **$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 2 + 5} = 2 + 1 \Leftrightarrow$**

$\Leftrightarrow 3 = 2 + 1 \Leftrightarrow 3 = 3$, logo 2 é raiz

x = – 2 **$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot (-2) + 5} = -2 + 1 \Leftrightarrow$**

$\Leftrightarrow 1 = -2 + 1 \Leftrightarrow 1 = -1$, logo – 2 não é raiz

V = {2}

A temperatura T, em °C, na qual a água ferve, relaciona-se com a altitude h, em metros, sobre o nível do mar, de acordo com a fórmula:

$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$, válida para $95 \leq T \leq 100$

A Fórmula da Báskara permite, além disso, concluir que a raiz positiva da equação $29x^2 + 50x - 442 = 0$ é, aproximadamente, igual a 3,14.

Supondo que a fórmula apresentada seja válida, resolva a questão **5**.

5 **(MODELO ENEM)** – O cume do Monte Everest está 8840m acima do nível do mar. A temperatura em que ferve a água, nesse local, em °C, é aproximadamente

a) 96,86 b) 96,40 c) 96,00

d) 95,98 e) 95,42

RESOLUÇÃO:

Sendo h = 8840 e substituindo 100 – T por x, temos:

$8840 = 1000 \cdot x + 580 \cdot x^2 \Leftrightarrow 58x^2 + 100x - 884 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 29x^2 + 50x - 442 = 0$

Só interessa a solução positiva dessa equação (pois $T \leq 100$ e $100 - T \geq 0$) e pelo enunciado este valor é 3,14

Assim sendo, $100 - T = 3{,}14 \Leftrightarrow T = 96{,}86$

Resposta: A

Módulo 22 — Problemas de 1º e 2º graus

1 (MODELO ENEM) – A soma dos gastos efetuados por um município para erradicar as doenças X e Y é igual a R$ 77.000,00. Reduzindo-se R$ 5.000,00 nos gastos com a erradicação da doença X e mantendo-se os gastos para a erradicação de Y, a razão entre os gastos para a erradicação de X e Y, nessa ordem, será igual a $\frac{5}{4}$.

Nessas condições, é correto afirmar que os gastos para erradicar a doença X superam os gastos para erradicar a doença Y em:

a) R$ 9.000,00 b) R$ 11.000,00
c) R$ 12.000,00 d) R$ 13.000,00
e) R$ 15.000,00

RESOLUÇÃO:

Se "x" e "y" forem as quantias gastas para erradicar as doenças "X" e "Y", respectivamente, então:

$$\begin{cases} x + y = 77000 \\ \frac{x - 5000}{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -308000 \\ 4x - 5y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 77000 \\ -9y = -288000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 77000 \\ y = 32000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 45000 \\ y = 32000 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 13000$$

Resposta: D

2 (FUVEST – MODELO ENEM) – Se Amélia der R$ 3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$ 6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

RESOLUÇÃO:

Se ℓ, m e a são as quantias em reais que Lúcia, Maria e Amélia possuem, então

$$\begin{cases} \ell + 3 = a - 3 \\ \ell + \frac{m}{3} = a + 6 \\ \frac{a}{2} = \frac{m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3\ell - 3a + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3.(\ell - a) + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3.(-6) + m = 18 \\ 3a - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell - a = -6 \\ 3a - 2m = 0 \\ m = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 18 \\ m = 36 \\ a = 24 \end{cases}$$

Resposta: Amélia possui 24 reais, Lúcia possui 18 reais e Maria possui 36 reais.

3 (PUCC – MODELO ENEM) – Certo pai disse a seu filho: "Hoje, a minha idade é o quadrado da sua, mas daqui a 10 anos, a minha excederá a sua em 30 anos." A soma das idades do pai e do filho, hoje, é:

a) 90 anos b) 72 anos c) 56 anos
d) 42 anos e) 30 anos

RESOLUÇÃO:

Sejam x e y as idades atuais do pai e do filho, respectivamente.

Assim, $\begin{cases} x = y^2 & \text{(I)} \\ x + 10 = (y + 10) + 30 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo-se (I) em (II), temos:

$y^2 + 10 = (y + 10) + 30 \Leftrightarrow y^2 - y - 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 6}$ **ou** $\boxed{y = -5}$ **(não convém)**

Substituindo y = 6 em (I) obtém-se $x = 6^2 = 36$

Assim, as idades atuais do pai e filho são, respectivamente, 36 anos e 6 anos. A soma das idades é, portanto, 42 anos.

Resposta: D

4 (UNICAMP) – Ache dois números inteiros, positivos e consecutivos, sabendo que a soma de seus quadrados é 481.

RESOLUÇÃO:

Sejam x e x + 1 os números procurados.

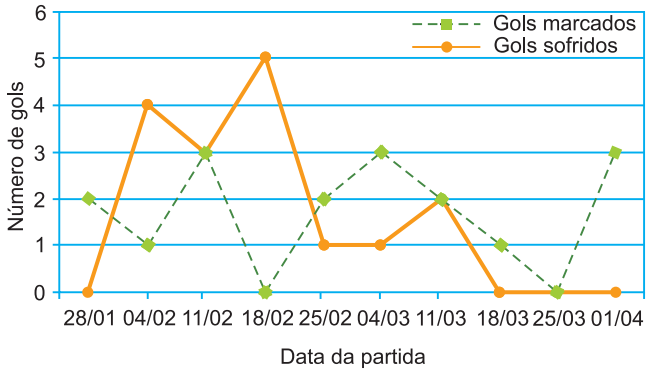
$x^2 + (x + 1)^2 = 481 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 481 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 15$ ou $x = -16$

Como x deve ser positivo, temos que $x = -16$ não convém, logo, $x = 15$.

Assim, os números procurados são 15 e 16.

5 **(MODELO ENEM)** – No gráfico, estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a

a) 15 b) 17 c) 18 d) 20 e) 24

RESOLUÇÃO:

A equipe em questão ganhou 5 partidas, empatou 3, e perdeu 2.

O número de pontos acumulados ao final da 10a. partida é

3 . 5 + 1 . 3 = 18

Resposta: C

Módulo 23 — Conjuntos numéricos

Palavras-chave:
• Naturais • Inteiros
• Racionais • Irracionais • Reais

1. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$



Note que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

2. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e além disso:

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0\}$

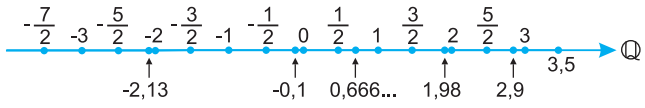
$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots -4, -3, -2, -1\}$

3. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais

Um número é **racional** se puder ser representado na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Todo número **racional** é **inteiro** ou **decimal exato** ou **dízima periódica.**



Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

4. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

É a união o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais com o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos irracionais. Demonstra-se que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais está em correspondência biunívoca com os pontos da reta. Assim:

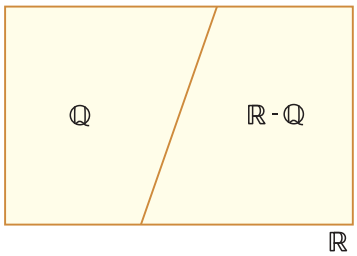


Observe que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

$\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$



São normalmente utilizados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ é o conjunto dos números reais diferentes de zero.

b) $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ é o conjunto dos números reais positivos.

c) $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ é o conjunto dos números reais estritamente positivos.

d) $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ é o conjunto dos números reais negativos.

e) $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ é o conjuntos dos números reais estritamente negativos.

5. Desigualdade em $\mathbb{R}$

Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, assumimos que:

I) $a \leq b$ é equivalente a $a < b$ ou $a = b$

II) $a < b$ é equivalente a $b > a$

III) $a < b$ é equivalente a $a - b < 0$

IV) $a > b$ é equivalente a $a - b > 0$

V) $a \neq b$ é equivalente a $a - b \neq 0$

VI) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$

VII) $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot b > 0$

VIII) $a > 0$ e $b < 0$ ou $a < 0$ e $b > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot b < 0$

Saiba mais

1) O número inteiro 3, por exemplo, é racional pois $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{30}{10} = \ldots$

2) O número decimal exato 4,17, por exemplo, é racional pois $4{,}17 = \frac{417}{100} = \frac{834}{200} = \ldots$

3) O número decimal não-exato e periódico (chamado dízima periódica) 0,414141..., por exemplo, é racional pois $0{,}414141\ldots = \frac{41}{99}$

4) $\frac{41}{99}$ é chamada geratriz da dízima periódica 0,414141... . Para obter a dízima, a partir da geratriz, basta dividir 41 por 99.

5) 0,414141... é a dízima periódica. Para obter a geratriz $\frac{41}{99}$ a regra é:

a) O numerador 41 é o período da dízima.

b) O denominador é sempre formado por tantos noves quantos forem os algarismos do período. Como no caso o período (41) de **2 algarismos**, o denominador é formado por **2 algarismos** iguais a 9.

6) Os únicos números reais que não são racionais são os decimais não exatos e não periódicos. Esses números são os irracionais.

Números irracionais

São aqueles que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Os únicos números desse tipo são os decimais não exatos e não periódicos. Representa-se o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplos

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$

b) $\pi = 3{,}1415926\ldots$

c) $\sqrt{n}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e não quadrado perfeito.

d) $e = 2{,}718281827\ldots$

6. Intervalos

Sendo $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, com $a < b$, intervalo é qualquer um dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos e representados a seguir como subconjuntos da reta real.

a) $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



b) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



c) $[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



d) $]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$



e) $[a, +\infty[= [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



f) $]a, +\infty[= (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



g) $]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



h) $]-\infty, a[= (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



Exercícios Resolvidos

1 Provar que se $\{a;b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ então $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

Resolução

$a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + b)(a - b) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a - b > 0$ (pois $a + b > 0$) $\Leftrightarrow a > b$

2 Dos números abaixo, o mais próximo de $\dfrac{(6{,}01)^3 \cdot (9{,}92)^2}{(11{,}9)^2}$ é:

a) 1500 b) 150 c) 25
d) 15 e) 2,5

Resolução

O número mais próximo de $\dfrac{(6{,}01)^3 \cdot (9{,}92)^2}{(11{,}9)^2}$ é:

$$\frac{6^3 \cdot 10^2}{12^2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6} = 150$$

Resposta: B

3 Para cada número real x, admita que [x] seja igual a x se x for inteiro, e igual ao maior inteiro menor que x se x não for inteiro.

O valor de $\left[\dfrac{[-2,7]}{[0,7] + \left[\frac{16}{3}\right]}\right]$ é:

a) – 2 b) – 1 c) 0
d) 1 e) 2

Resolução

1) $[-2, 7] = -3$; $[0,7] = 0$; $\left[\dfrac{16}{3}\right] = 5$

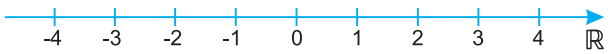
2) $\left[\dfrac{[-2, 7]}{[0,7] + \left[\frac{16}{3}\right]}\right] = \left[\dfrac{-3}{0 + 5}\right] =$

$= \left[-\dfrac{3}{5}\right] = [-0{,}6] = -1$

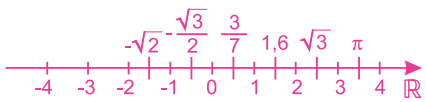
Resposta: B

Exercícios Propostos

1 Na reta real, marque aproximadamente a posição dos números 1,6 , $-\sqrt{2}$, $\frac{3}{7}$, π, $\sqrt{5}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



RESOLUÇÃO:



2 Represente na reta real os conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

RESOLUÇÃO:



b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

RESOLUÇÃO:



c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3$ ou $x > 5\}$

RESOLUÇÃO:



3 Descreva os conjuntos representados nas retas reais por uma propriedade e também na forma [a,b], [a,b[,]a,b[ou]a,b].

a)



RESOLUÇÃO:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\} =]-\infty, 3[$

b)



RESOLUÇÃO:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty[$

c)



RESOLUÇÃO:

$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\} = [-1, 3[$

d)



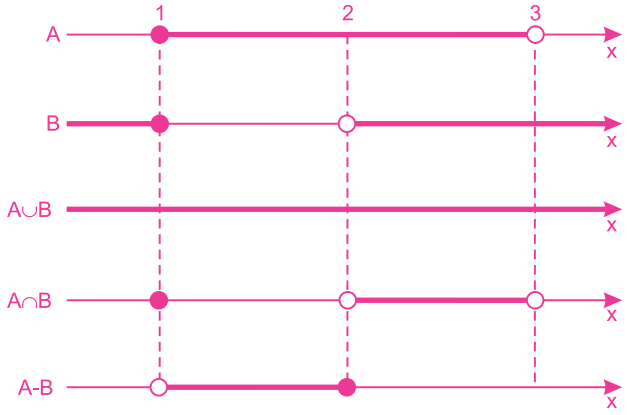
RESOLUÇÃO:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ ou $x > 3\} =]-\infty, -2] \cup]3, +\infty[$

4 Sendo A = {x ∈ ℝ | 1 ≤ x < 3} e B = {x ∈ ℝ | x ≤ 1 ou x > 2}, determinar:

a) A ∪ B b) A ∩ B c) A – B

RESOLUÇÃO:



a) ℝ b) {1} ∪]2, 3[c)]1, 2]

5 (MODELO ENEM) – Na receita de bolo de Maria constam as seguintes informações:



⋮

dois ovos

meio quilograma de farinha de trigo

duzentos gramas de manteiga

⋮

Asse-o à temperatura de duzentos graus celsius e resfrie-o à temperatura de cinco graus abaixo de zero.

⋮

Para melhor representar as quantidades de ovos, farinha, manteiga e as temperaturas citadas na receita, podemos utilizar, respectivamente, números:

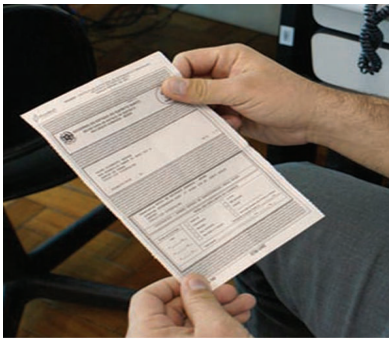
a) naturais, racionais, naturais, inteiros
b) naturais, inteiros, racionais, reais
c) inteiros, naturais, reais, racionais
d) racionais, inteiros, inteiros, naturais
e) naturais, racionais, inteiros, naturais

RESOLUÇÃO:

A quantidade de ovos é sempre expressa por números naturais; meio quilograma de farinha $\left(\frac{1}{2}\text{ kg}\right)$ é expressa por um número racional; 200g de manteiga é expressa por um número natural; – 5°C é expressa por um número inteiro.

Resposta: A

6 (MODELO ENEM) – Os números de identificação



utilizados no cotidiano (de contas bancárias, de CPF, de Carteira de Identidade etc.) usualmente possuem um dígito de verificação, normalmente representado após o hífen, como em 17326-9. Esse dígito adicional tem a finalidade de evitar erros no preenchimento ou na digitação de documentos. Um dos métodos usados para gerar esse dígito compõe-se dos seguintes passos:

- multiplica-se o último algarismo do número por 1, o penúltimo por 2, o antepenúltimo por 1 e assim por diante, sempre alternando multiplicações por 1 e por 2;
- soma-se 1 a cada um dos resultados dessas multiplicações que for maior do que 10 ou igual a 10;
- somam-se os resultados obtidos;
- calcula-se o resto da divisão dessa soma por 10, obtendo-se, assim, o dígito de verificação.

O dígito de verificação para o número 24685 fornecido pelo processo descrito anteriormente é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

RESOLUÇÃO:

1) 1 . 2 + 2 . 4 + 1 . 6 + (2 . 8 + 1) + 1 . 5 = 2 + 8 + 6 + 17 + 5 = 38

2)

38	10
8	3

3) O dígito é 8.

Resposta: E

Módulo 24

Função polinomial do 1º grau

Palavras-chave:
• Reta
• Crescente • Decrescente

1. Definição

Chama-se **função polinomial do 1º grau** a toda função f : ℝ → ℝ definida por:

$$f(x) = ax + b, \quad a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

2. Como obter o gráfico

Exemplo 1

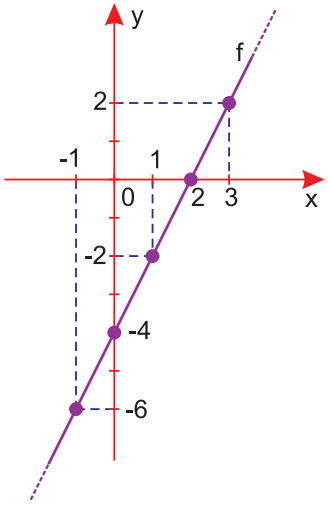
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = 2x – 4.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	y = 2x – 4	x
– 1	y = 2 . (– 1) – 4 = – 6	(– 1; – 6)
0	y = 2 . 0 – 4 = – 4	(0; – 4)
1	y = 2 . 1 – 4 = – 2	(1; – 2)
2	y = 2 . 2 – 4 = 0	(2; 0)
3	y = 2 . 3 – 4 = 2	(3; 2)

Localizamos os pontos obtidos no sistema de coordenadas cartesianas.



Exemplo 2

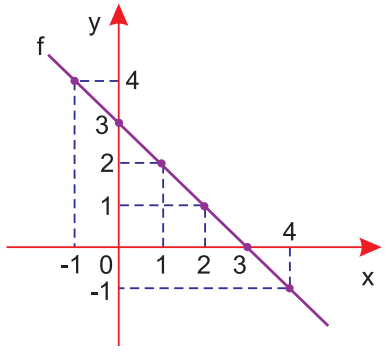
Construir o gráfico da função f : ℝ → ℝ definida por f(x) = – x + 3

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	y = – x + 3	x
– 1	y = – (– 1) + 3 = 4	(– 1; 4)
0	y = – 0 + 3 = 3	(0; 3)
1	y = – 1 + 3 = 2	(1; 2)
2	y = – 2 + 3 = 1	(2; 1)
3	y = – 3 + 3 = 0	(3; 0)
4	y = – 4 + 3 = – 1	(4; – 1)

Localizamos os pontos obtidos no sistema de coordenadas cartesianas.



Demonstra-se que:

a) O gráfico da função polinomial do **1º grau** é sempre uma **reta oblíqua**.

b) Se a > 0 então a função é **estritamente crescente**.

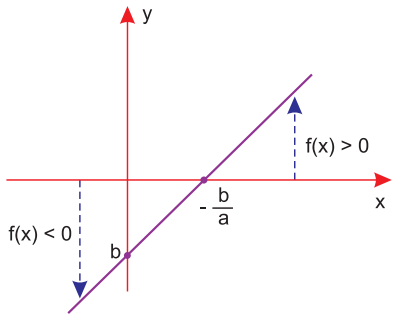
c) Se a < 0 então a função é **estritamente decrescente**.

d) O gráfico de **f** intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ no ponto $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ ou seja: $-\frac{b}{a}$ é a raiz de **f**.

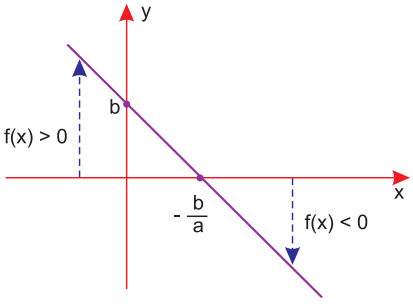
e) O gráfico de **f** intercepta o eixo $\overrightarrow{Oy}$ no ponto **(0; b)**

f) A função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = ax + b é **bijetora** e seu gráfico é sempre do tipo:

a > 0



a < 0



Saiba mais

Analisando o gráfico conclui-se que:

a) Se a > 0 então:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

b) Se a < 0 então:

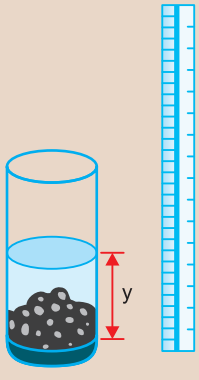
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Exercícios Resolvidos

1 **(ENEM)** – Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura ao lado. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em; www.penta.ufrgs.br
Acesso em: 13 jan 2009 (adaptado)

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) y = 30x.
b) y = 25x + 20,2.
c) y = 1,27x.
d) y = 0,7x.
e) y = 0,07x + 6.

Resolução

Se a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x) é do primeiro grau, então y = ax + b.

Para os resultados do experimento, temos:

$$\begin{cases} a \cdot 5 + b = 6{,}35 \\ a \cdot 10 + b = 6{,}70 \\ a \cdot 15 + b = 7{,}05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}07 \\ b = 6 \end{cases}$$

Logo, y = 0,07x + 6.

Resposta: E

2 **(MODELO ENEM)** – Uma artesã que produz pequenas esculturas em argila. Pensando em ampliar seu negócio, elaborou a tabela a seguir para calcular seus custos mensais.

Salário do auxiliar	R$ 450,00
Energia elétrica e água	R$ 60,00
Impostos	R$ 160,00
Combustível	R$ 70,00
Material para uma peça	R$ 3,40
Embalagem de uma peça	R$ 0,60

Utilizando-se os dados da tabela, a relação entre o custo C e o número de peças N produzidas mensalmente pode ser estabelecida na sentença matemática dada por:

a) C = 740N
b) C = 4 + 740N
c) C = 740 – 4N
d) C = 4N + 740
e) C = 4N + 820

Resolução

O custo C para produzir N peças é:

C = 450 + 60 + 160 + 70 + 3,40N + 0,60N

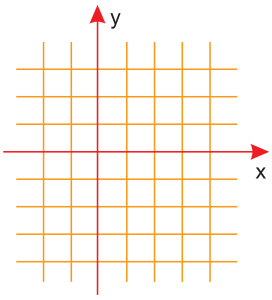
C = 740 + 4N

Resposta: D

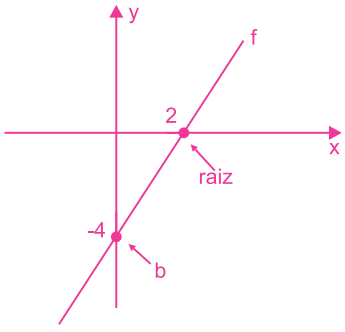
Exercícios Propostos

1 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por f(x) = 2x – 4. Complete a tabela e esboce o gráfico de **f**.

x	f(x)
0	
2	



RESOLUÇÃO:



x	f(x)
0	– 4
2	0

2 Analisando o gráfico da função **f** do exercício anterior, complete as sentenças abaixo:

a) A função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = 2x – 4 é estritamente

crescente

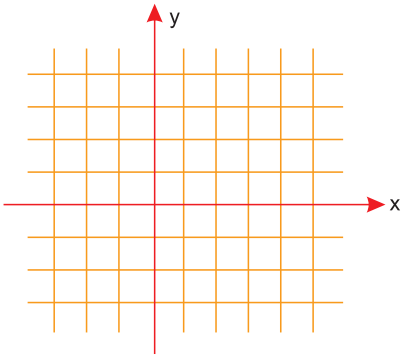
b) O conjunto solução da equação f(x) = 0 ou 2x – 4 = 0 é V = **{2}**

c) O conjunto solução da inequação f(x) > 0 ou 2x – 4 > 0 é V = **$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$**

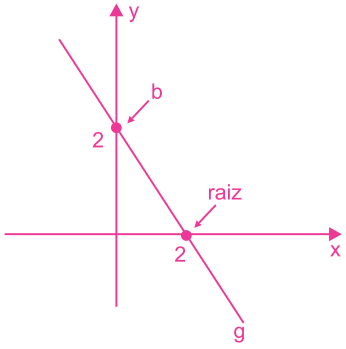
d) O conjunto solução da inequação f(x) < 0 ou 2x – 4 < 0 é V = **$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$**

3 Seja g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por g(x) = – x + 2. Complete a tabela e esboce o gráfico de **g**.

x	g(x)
0	
2	



RESOLUÇÃO:



x	g(x)
0	2
2	0

4 A função **f**, do 1º grau, é definida por f(x) = 3x + k. Determine:

a) O valor de **k** para que o gráfico de **f** "corte" o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 5.

b) O ponto em que o gráfico de **f** "corta" o eixo das abscissas.

c) O gráfico de **f**.

RESOLUÇÃO:

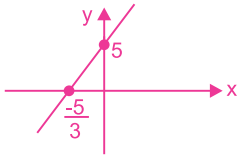
a) O gráfico de f "corta" o eixo das ordenadas no ponto (0; 5), logo, f(0) = 5.
Assim: $f(0) = 5 \Leftrightarrow 3 \cdot 0 + k = 5 \Leftrightarrow k = 5$

b) A função f é definida por f(x) = 3x + 5 e seu gráfico "corta" o eixo das abscissas no ponto (x; 0), logo, f(x) = 0.

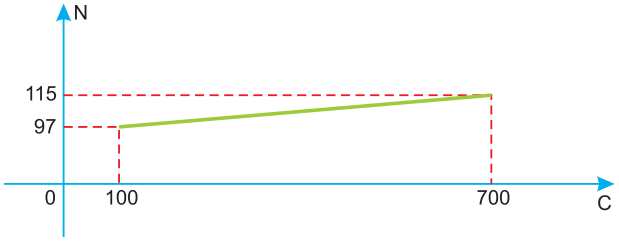
Assim: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$

Portanto, o ponto é $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$

c) Utilizando as intersecções com os eixos, temos o seguinte gráfico:



5 **(MODELO ENEM)** – Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO_2 (dióxido de enxofre). Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista "Science" em 1972 concluiu que o número (N) de mortes por semana, causadas pela inalação de SO_2, estava relacionado com a concentração média (C), em $\mu g/m^3$, do SO_2 conforme o gráfico abaixo: os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura.



Com base nos dados apresentados, a relação entre N e C($100 \leq C \leq 700$) pode ser dada por:

a) $N = 100 - 700\,C$ b) $N = 94 + 0{,}03\,C$

c) $N = 97 + 0{,}03\,C$ d) $N = 115 - 94\,C$

e) $N = 97 + 600\,C$

RESOLUÇÃO:

O gráfico representa uma função do 1º grau do tipo $N = a \cdot C + b$, passando pelos pontos (100; 97) e (700; 115), então:

$$\begin{cases} 97 = a \cdot 100 + b \\ 115 = a \cdot 700 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -97 = -100 \cdot a - b \\ 115 = 700 \cdot a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18 = 600 \cdot a \\ 115 = 700 \cdot a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}03 \\ b = 94 \end{cases}$$

Portanto, a relação entre N e C é $N = 0{,}03 \cdot C + 94$

Resposta: B

6 **(MODELO ENEM)** – Várias escalas podem ser usadas para a graduação de um termômetro. As mais usadas são a Celsius e a Fahrenheit.

Na tabela a seguir, são mostrados alguns valores dessas escalas.

	Celsius	**Fahrenheit**
Temperatura de fusão do gelo	0 grau	32 graus
Temperatura de ebulição da água	100 graus	212 graus

Se uma temperatura corresponde a x graus na Celsius e a y graus na Fahrenheit, a relação entre essas duas escalas é dada por $y = \frac{9}{5}x + 32$. Com base nessas informações, em um dia em que a diferença entre a temperatura máxima e a mínima foi 18 graus na escala Fahrenheit, é correto afirmar que essa diferença, na escala Celsius, foi de

a) 32 graus. b) 18 graus. c) 14 graus.

d) 10 graus. e) 12 graus.

RESOLUÇÃO:

Sejam y_M e y_m as temperaturas máxima e mínima em graus Fahrenheit e sejam ainda x_M e x_m as temperaturas máxima e mínima em graus Celsius. Assim:

$$\begin{cases} y_M = \frac{9}{5}x_M + 32 \\ y_m = \frac{9}{5}x_m + 32 \end{cases} \Rightarrow y_M - y_m = \frac{9}{5} \cdot (x_M - x_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 = \frac{9}{5} \cdot (x_M - x_m) \Leftrightarrow x_M - x_m = 10$$

Resposta: D

Módulo 25

Função polinomial do 2º grau

Palavras-chave:

• Parábola • Concavidade

1. Definição

Chama-se **função polinomial do 2º grau**, ou função quadrática, a toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$

2. Como obter o gráfico

Exemplo 1

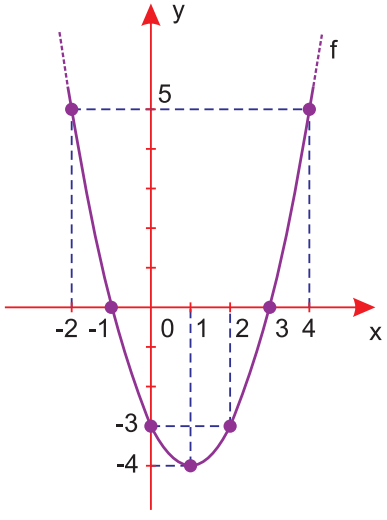
Construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = x^2 - 2x - 3$	(x; y)
– 2	$y = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 3 = 5$	(– 2; 5)
– 1	$y = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 = 0$	(– 1; 0)
0	$y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$	(0; – 3)
1	$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$	(1; – 4)
2	$y = 2^2 - 2 \cdot 2 - 3 = -3$	(2; – 3)
3	$y = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$	(3; 0)
4	$y = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 5$	(4; 5)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas:



Exemplo 2

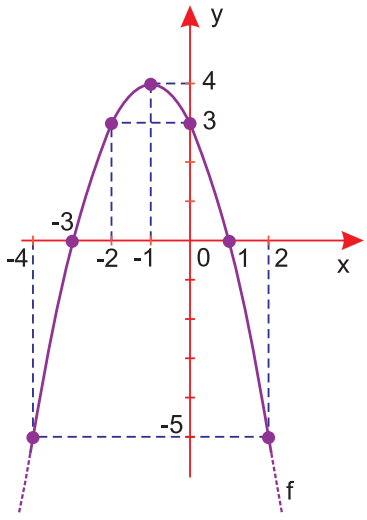
Construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = -x^2 - 2x + 3$	(x; y)
– 4	$y = -(-4)^2 - 2 \cdot (-4) + 3 = -5$	(– 4; – 5)
– 3	$y = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 3 = 0$	(– 3; 0)
– 2	$y = -(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 3 = 3$	(– 2; 3)
– 1	$y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$	(– 1; 4)
0	$y = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$	(0; 3)
1	$y = -1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 0$	(1; 0)
2	$y = -2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = -5$	(2; – 5)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas:



Exemplo 3

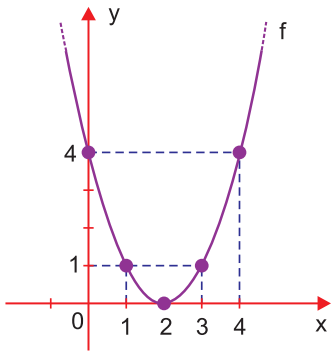
Construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

x	$y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$	(x; y)
0	$y = (0 - 2)^2 = 4$	(0; 4)
1	$y = (1 - 2)^2 = 1$	(1; 1)
2	$y = (2 - 2)^2 = 0$	(2; 0)
3	$y = (3 - 2)^2 = 1$	(3; 1)
4	$y = (4 - 2)^2 = 4$	(4; 4)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas.



Exemplo 4

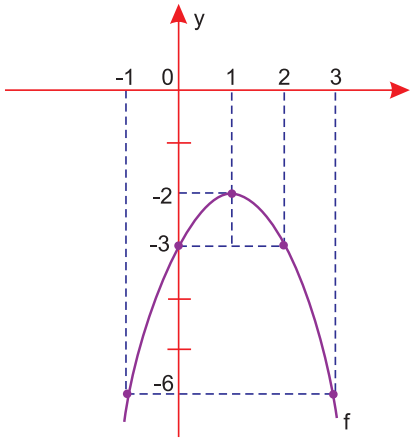
Construir o gráfico da função f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

Resolução

Construímos uma tabela atribuindo alguns valores a **x** e calculando as imagens correspondentes.

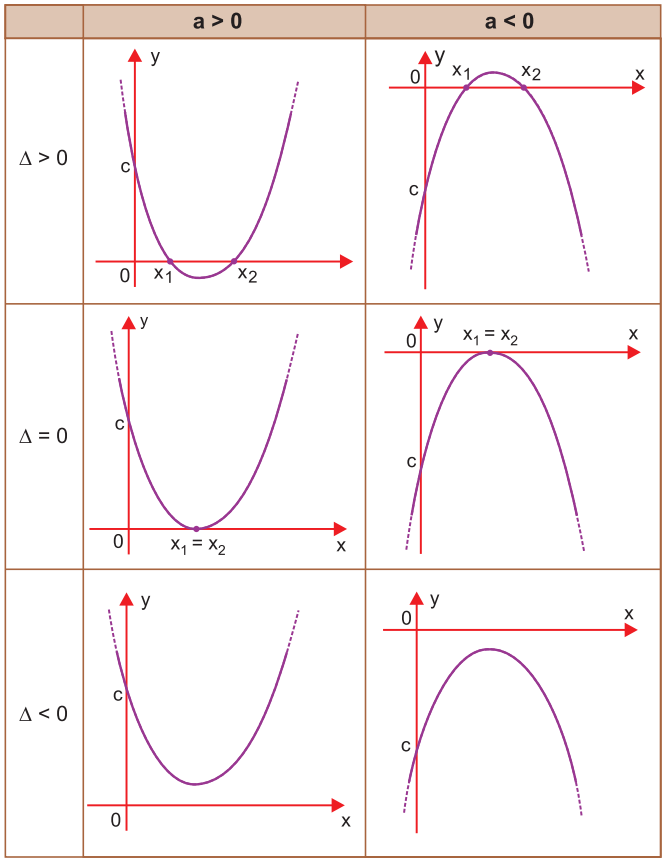
x	$y = -x^2 + 2x - 3$	(x; y)
– 1	$y = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -6$	(– 1; – 6)
0	$y = -0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$	(0; – 3)
1	$y = -1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -2$	(1; – 2)
2	$y = -2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = -3$	(2; – 3)
3	$y = -3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = -6$	(3; – 6)

Localizamos os pontos obtidos num sistema de coordenadas cartesianas.



3. Tipos de gráfico

O gráfico da função polinomial do 2º grau é sempre uma **parábola**. Dependendo do valor de **a** e do valor de **Δ** temos os seguintes tipos de gráficos:



Saiba mais

a) O gráfico de f é sempre uma **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo $\overrightarrow{Oy}$.

b) Se a > 0 então a parábola tem a "concavidade voltada para cima".

c) Se a < 0 então a parábola tem a "concavidade voltada para baixo".

d) A parábola **sempre intercepta** o eixo $\overrightarrow{Oy}$ no ponto (0; c)

e) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então **f** não admite raízes reais. A parábola não intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

f) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então **f** admite uma única raiz. A parábola tangencia o eixo $\overrightarrow{Ox}$.

g) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então **f** admite duas raízes reais distintas. A parábola intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos.

h) A função polinomial do 2º grau, definida em $\mathbb{R}$, não é nem injetora e nem sobrejetora.

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M208**

Exercício Resolvido

1 **(ENEM)** – Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.
Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10\,000 + 50x - x^2$. b) $V = 10\,000 + 50x + x^2$.
c) $V = 15\,000 - 50x - x^2$. d) $V = 15\,000 + 50x - x^2$.
e) $V = 15\,000 - 50x + x^2$.

Resolução

A partir do enunciado, o valor arrecadado V, em R$, por dia, com a venda do álcool, deve obedecer à seguinte expressão:

$V = (10000 + 100 \cdot x) \cdot (1{,}50 - 0{,}01 \cdot x)$

$V = 15000 + 150 \cdot x - 100 \cdot x - x^2$

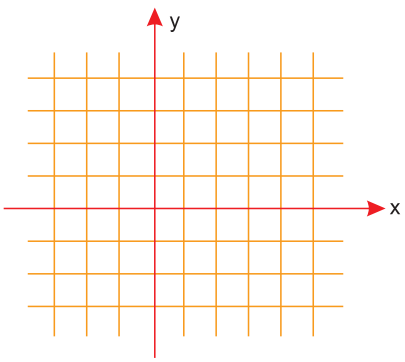
$V = 15000 + 50 \cdot x - x^2$

Resposta: D

Exercícios Propostos

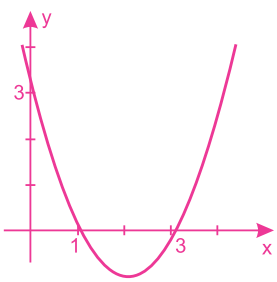
1 Complete a tabela e esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

x	f(x)
0	
1	
2	
3	
4	

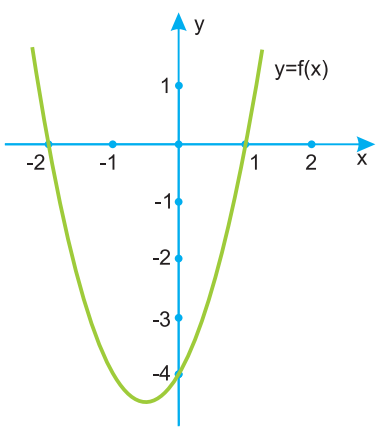


RESOLUÇÃO:

x	f(x)
0	3
1	0
2	– 1
3	0
4	3



2 **(UNESP)** – A expressão que define a função quadrática f(x), cujo gráfico está esboçado, é:



a) $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$. b) $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
c) $f(x) = x^2 + x - 2$. d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$.
e) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$.

RESOLUÇÃO:

Sugestão: A sentença que define f, do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode também assumir a forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ onde x_1 e x_2 são as raízes.

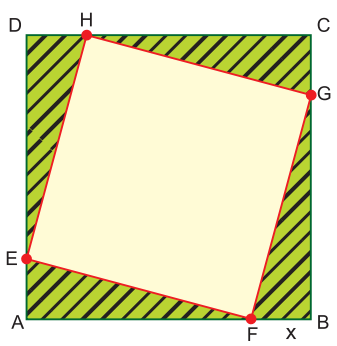
Sendo – 2 e 1, as raízes da função quadrática, a expressão que define a função f, cujo gráfico foi dado, é tal que

$$\begin{cases} f(x) = a(x + 2)(x - 1) \\ f(0) = -4 \end{cases} \Rightarrow -4 = a \cdot 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow a = 2$$

Portanto, a expressão é $f(x) = 2(x + 2)(x - 1) \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

Resposta: D

3 **(MODELO ENEM)** – Pretende-se fazer, numa escola, um jardim na forma de um quadrado ABCD de 7 m de lado, como mostra a figura.



A área hachurada representa o lugar onde se pretende plantar grama e o quadrado EFGH é o local destinado ao plantio de roseiras. Tem-se, em metros, AE = BF = CG = DH = x.

A função em x, para $0 \leq x \leq 7$, que permite calcular a área A(x), em metros quadrados, em que será plantada a grama é definida por:

a) $A(x) = 14x - 2x^2$

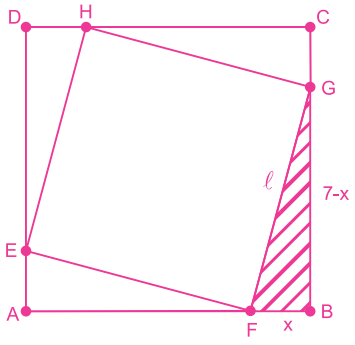
b) $A(x) = 7x - x^2$

c) $A(x) = \dfrac{7x - x^2}{2}$

d) $A(x) = x(x - 4)$

e) $A(x) = -x^2 + 4x$

RESOLUÇÃO:



A área do triângulo retângulo FBG é $\dfrac{x(7 - x)}{2}$

A área reservada ao plantio de grama é

$A(x) = 4 \cdot \dfrac{x(7 - x)}{2} = 2x(7 - x) = 14x - 2x^2$

Resposta: A

4 Um homem-bala é lançado de um canhão e sua trajetória descreve uma parabóla. Considerando que no instante de lançamento (t = 0) ele está a 3 metros do solo, 1 segundo após ele atinge a altura de 4 metros e 3 segundos após o lançamento ele atinge o solo, pede-se:

a) A altura **h** do homem-bala, medida em metros e a partir do chão, em função do tempo **t**, medido em segundos.

b) O valor de **h** para t = 2.

RESOLUÇÃO:

a) A sentença que permite calcular a altura h em função do tempo *t* é do tipo $h(t) = at^2 + bt + c$ passando esta função pelos pontos (0; 3), (1; 4) e (3; 0). Logo:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b = 1 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow h(t) = -t^2 + 2t + 3$

b) $t = 2 \Rightarrow h(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 3$

Módulos 26 e 27

Vértice e conjunto-imagem

Palavras-chave:

• Vértice • Máximo • Mínimo

1. Vértice da parábola

O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo $\overrightarrow{Oy}$.

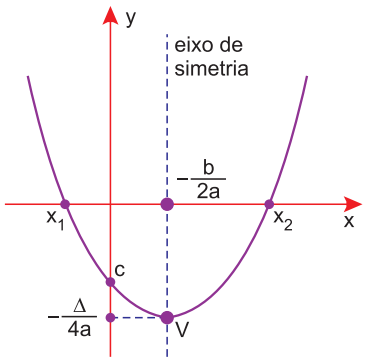
O **vértice** da parábola, representado por **V**, é o ponto de **ordenada mínima** (quando a > 0) ou o ponto de **ordenada máxima** (quando a < 0).

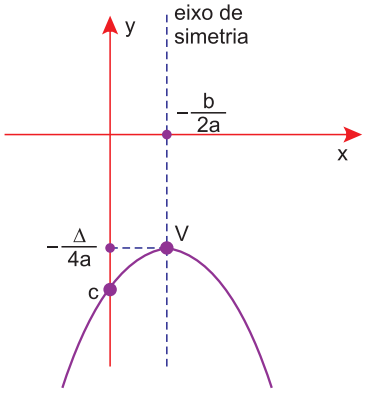
A abscissa do vértice é $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e coincide com o ponto médio entre as raízes reais, quando estas existem.

A ordenada de **V** pode ser obtida apenas substituindo, na sentença que define **f**, **x** pela abscissa já encontrada.

Pode também ser calculada utilizando a fórmula $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Assim sendo: $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$





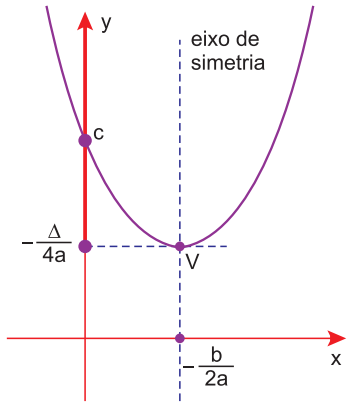
2. Conjunto-imagem

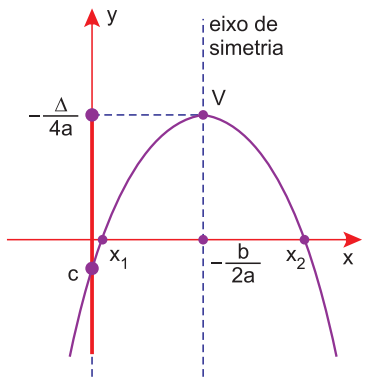
a) Se **a > 0** então **V** será ponto de **mínimo** da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O conjunto-imagem de **f**, representado por Im(f), será:

$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} \right\} = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty \right[$$

b) Se **a < 0** então **V** será ponto de **máximo** da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O conjunto-imagem de **f**, representado por Im(f), será:

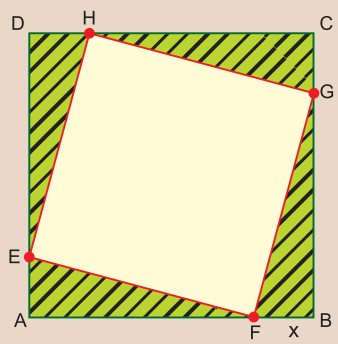
$$Im(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a} \right\} = \left] -\infty; -\frac{\Delta}{4a} \right]$$





Exercício Resolvido – Módulos 26 e 27

1 **(MODELO ENEM)** – Pretende-se fazer, numa escola, um jardim na forma de um quadrado ABCD de 7 m de lado, como mostra a figura.



A área hachurada representa o lugar onde se pretende plantar grama e o quadrado EFGH é o local destinado ao plantio de roseiras. Cada roseira precisa, para poder se desenvolver, de uma área equivalente à de um quadrado de 20 cm de lado.

Tem-se, em metros, AE = BF = CG = DH = x.

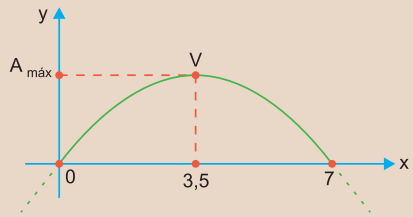
Visto que é muito caro plantar e cuidar das roseiras, deseja-se que a área a elas reservada seja a menor possível. Supondo que isso aconteça, podemos concluir que a área em que será plantada a grama, em metros quadrados, é:

a) 20 b) 21,5 c) 24 d) 24,5 e) 26

Resolução

A área reservada ao plantio de grama é $A(x) = 4 \cdot \frac{x \cdot (7 - x)}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = 2 \cdot x \cdot (7 - x)$ e o gráfico dessa função é do tipo



A área máxima, reservada ao plantio de grama, acontece para x = 3,5 e o seu valor é $A_{máx} = 2 \cdot 3,5 \cdot (7 - 3,5) = 24,5$

Resposta: D

1 Obter o vértice e o conjunto-imagem da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

RESOLUÇÃO:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$

$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5)}{4 \cdot 1}$

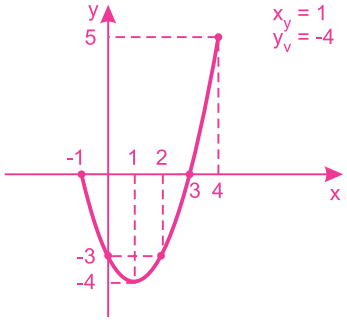
$y_v = \frac{-16}{4} = -4$

$V = (3; -4)$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$

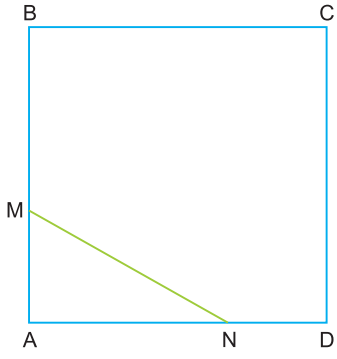
2 Esboçar o gráfico e obter o conjunto imagem da função f: $[-1; 4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

RESOLUÇÃO:



$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$

3 **(GV)** – A área do quadrado ABCD é 4 cm^2. Sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ do quadrado são tomados dois pontos M e N, tais que AM + AN = AB. Desse modo, o maior valor que pode assumir a área do triângulo AMN é:



a) $\frac{1}{4}$ cm^2 b) 2 cm^2

c) $\frac{1}{2}$ cm^2 d) 4 cm^2

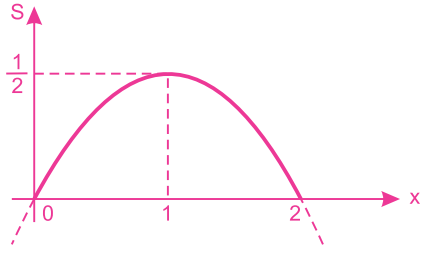
e) $\frac{1}{8}$ cm^2

RESOLUÇÃO:

Sendo x e y as medidas, em centímetros, dos segmentos AM e AN, respectivamente, S a área, em centímetros quadrados, do triângulo AMN, e 4 cm^2 a área do quadrado ABCD, temos:

I) AM + AN = AB $\Rightarrow$ x + y = 2 $\Leftrightarrow$ y = 2 – x

II) $S = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x(2-x)}{2}$, que possui valor máximo igual a $\frac{1}{2}$, pois o gráfico da função $S(x) = \frac{x \cdot (2-x)}{2}$ é do tipo:



Resposta: C

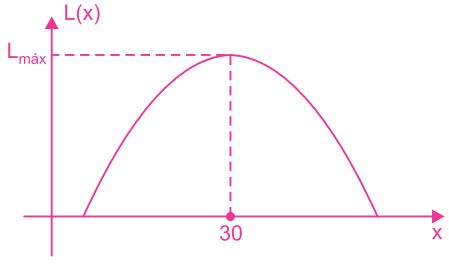
4 **(MODELO ENEM)** – A empresa WQTU Cosmético vende uma quantidade x de determinado produto, cujo custo de fabricação é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função 180x – 116. A empresa vendeu 10 unidades do produto, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo.
Considerando que o lucro obtido é dado pela diferença entre os valores de venda e custo, a quantidade de unidades a serem vendidas para se obter lucro máximo é:

a) 10 b) 30 c) 58 d) 116 e) 232

RESOLUÇÃO:

Sendo x a quantidade vendida do produto, ($3x^2 + 232$) e (180x – 116) respectivamente o custo de produção e a receita pela venda, temos o lucro:

L (x) = (180x – 116) – ($3x^2 + 232$) = $-3x^2 + 180x - 348$ que é máximo quando $x = \frac{-(+180)}{2 \cdot (-3)} = 30$, como ilustra a figura:



Resposta: B

Exercícios Propostos – Módulo 27

1 **(MODELO ENEM)** – Considere as funções **f** e **g**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 8$ e $g(x) = 2x + 2$.
O valor mínimo da função **h**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

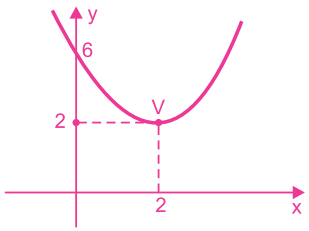
RESOLUÇÃO:

I) $h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 2x + 8) - (2x + 2) = x^2 - 4x + 6$

II) O vértice da parábola de equação $h(x) = x^2 - 4x + 6$ é $V(2; 2)$; pois

$$\begin{cases} x_v = -\dfrac{-4}{2} = 2 \\ h(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2 \end{cases}$$

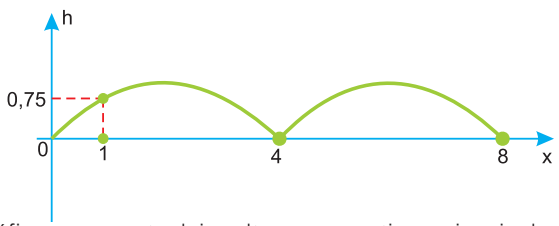
III) O gráfico da função h é do tipo



IV) A função h assume valor mínimo igual a 2.

Resposta: B

2 **(MODELO ENEM)** – O alcance horizontal de cada salto de uma rã, que é parabólico, é de 4dm.



O gráfico representa dois saltos consecutivos e iguais dessa rã, contém o ponto (1; 0,75) e permite obter a altura h em função de x, ambos em decímetros. A altura máxima atingida pela rã, em decímetros, é:

a) 0,8 b) 0,9 c) 1 d) 1,5 e) 1,8

RESOLUÇÃO:

$h(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 4) = a \cdot x \cdot (x - 4)$, para $0 \leq x \leq 4$

$h(1) = a \cdot 1 \cdot (-3) = 0,75 \Leftrightarrow a = -0,25$

Assim, $h(x) = -0,25 \cdot x \cdot (x - 4)$

Portanto, $x_v = 2$ e a altura máxima é

$h_v = h(2) = -0,25 \cdot 2 \cdot (2 - 4) = 1$

Resposta: C

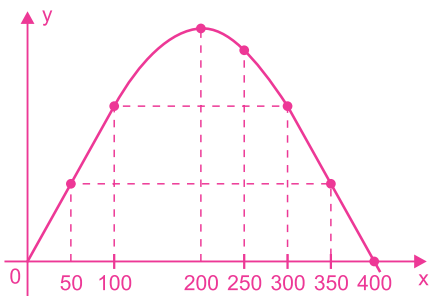
3 **(MODELO ENEM)** – Uma indústria tem seu lucro mensal, L(x), em reais, dado em função do número de peças produzidas (x) pela expressão $L(x) = 400x - x^2$. Desta forma, é incorreto afirmar que

a) o lucro obtido pela produção de 300 peças é menor que o lucro obtido pela produção de 250 peças.
b) o lucro máximo que pode ser obtido é de R$ 40 000,00.
c) produzindo 100 peças, obtém-se mais lucro que produzindo 350 peças.
d) para ter lucro de R$ 17 500,00 deve-se produzir, obrigatoriamente, 50 peças.
e) o lucro máximo que pode ser obtido ocorre se, e somente se, a indústria produzir 200 peças.

RESOLUÇÃO:

1) $L(x) = 400x - x^2 \Leftrightarrow L(x) = -(x - 0)(x - 400)$

2) O gráfico da função
$L(x) = -(x - 0)(x - 400)$, para $x \geq 0$, é do tipo



e deste gráfico concluímos que

3) $L(250) > L(300)$ e portanto a afirmação a é correta.

4) O lucro máximo ocorre se, e somente se, $x = 200$; o valor desse lucro máximo é $L(200) = -(200 - 0)(200 - 400) = 40\,000$.
Assim sendo, as alternativas b e e são corretas.

5) $L(100) = L(300) > L(350)$ e portanto c é verdadeira.

6) $L(50) = -(50 - 0)(50 - 400) = 17\,500$

7) $L(50) = L(350) = 17\,500$ e portanto o lucro de R$ 17 500,00 pode também ser obtido com $x = 350$. A alternativa d é incorreta.

Resposta: D

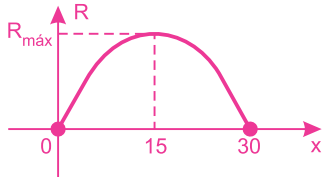
4 **(GV-Adaptado)** – Quando uma pizzaria cobra R$ 14,00 por pizza, 80 unidades são vendidas por dia. Quando o preço é R$ 12,00 por pizza, 90 unidades são vendidas. Admitindo que a quantidade vendida (y) seja função do 1º grau do preço (x), dada pela expressão y = –5x + 150, qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita diária?

RESOLUÇÃO:

A equação da função que determina a quantidade vendida (y) em função do preço (x), em reais, é y = – 5x + 150

Desta forma, a receita R, em função de x, é

$R(x) = x \cdot y = x(-5x + 150) = -5x^2 + 150x$, e é máxima para x = 15, pois seu gráfico é



Resposta: R$ 15,00

No Portal Objetivo

Para saber mais sobre o assunto, acesse o **PORTAL OBJETIVO (www.portal.objetivo.br)** e, em "localizar", digite **MAT1M209**

Módulo 28

Inequações do 1º grau

Palavras-chave:

• Reta • Crescente • Decrescente

1. Definição

Chama-se **inequação do 1º grau** a toda sentença aberta do tipo $ax + b > 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b < 0$ ou $ax + b \leq 0$, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

2. Resolução

a) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 1º grau "do tipo" **ax + b > 0** é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de **f(x) = ax + b** se encontra **acima do eixo x**.

b) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 1º grau "do tipo" **ax + b < 0** é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de **f(x) = ax + b** se encontra **abaixo do eixo x**.

É mais prático, porém, apenas "isolar o x" lembrando que:

$$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$x < y \Leftrightarrow x \cdot a < y \cdot a, \forall a \in \mathbb{R}_+^*$$

$$x < y \Leftrightarrow x \cdot a > y \cdot a, \forall a \in \mathbb{R}_-^*$$

Exercícios Resolvidos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $-4x + 12 > 0$.

Resolução

$-4x + 12 > 0 \Leftrightarrow -4x > -12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x < 12 \Leftrightarrow x < 3$

Resposta: V = {x ∈ ℝ | x < 3}

2 **(MODELO ENEM)** – Para ser aprovado num curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais, durante o período letivo, e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média, no mínimo, igual a 7. Se um estudante obteve, nas provas parciais, as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota mínima que necessita obter, na prova final, para ser aprovado é:

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

Resolução:

Se **x** for a nota do estudante, na prova final, então:

$$\frac{1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot x}{7} \geq 7 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 22 + 3x \geq 49 \Leftrightarrow 3x \geq 27 \Leftrightarrow x \geq 9$

Resposta: A

Exercícios Propostos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$:

a) $3x - 6 < 0$

RESOLUÇÃO:

$3x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} =]-\infty, 2[$

b) $-3x + 6 < 0$

RESOLUÇÃO:

$-3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x > 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, +\infty[$

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq x < 3$$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 3\} = [-6, 3[$

b) $0 \leq \dfrac{x + 1}{3} < 2$

RESOLUÇÃO:

$$0 \leq \frac{x + 1}{3} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x + 1 < 6 \Leftrightarrow -1 \leq x < 5$$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 5\} = [-1; 5[$

3 As idades, em anos, de três crianças são números pares e consecutivos. A diferença entre a soma das idades das duas mais novas e a idade da mais velha é menor que 5 anos. Sabendo que a soma das idades é maior que 23 anos, determine a idade de cada criança.

RESOLUÇÃO:

Sendo x, x + 2 e x + 4 as idades das três crianças, temos:

$$\begin{cases} (x + x + 2) - (x + 4) < 5 \\ x + (x + 2) + (x + 4) > 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 5 \\ 3x + 6 > 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > \frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 6$, pois $x \in \mathbb{N}^*$

Logo, as idades são 6, 8 e 10 anos.

4 (**MACKENZIE – MODELO ENEM**) – Uma escola paga, pelo aluguel anual do ginásio de esportes de um clube A, uma taxa fixa de R$ 1 000,00 e mais R$ 50,00 por aluno. Um clube B cobraria pelo aluguel anual de um ginásio o equivalente a uma taxa fixa de R$ 1 900,00, mais R$ 45,00 por aluno. Para que o clube B seja mais vantajoso economicamente para a escola, o menor número N de alunos que a escola deve ter é tal que:

a) $100 \leq N < 150$ b) $75 \leq N < 100$ c) $190 \leq N < 220$
d) $150 \leq N < 190$ e) $220 \leq N < 250$

RESOLUÇÃO:

Se n for o número de alunos da escola, então o clube B será mais vantajoso que o clube A se, e somente se,
$1900 + 45n < 1000 + 50n \Leftrightarrow 5n > 900 \Leftrightarrow n > 180$.
Se N for o menor número de alunos para o qual o clube B é mais vantajoso, então N = 181 e, portanto, $150 \leq N < 190$.
Resposta: D

Módulo 29 — Inequações do 2º grau

Palavras-chave:

• Parábola • Raízes • Concavidade

1. Definição

Chama-se **inequação do 2º grau** a toda sentença aberta do tipo $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$, com $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

2. Resolução

a) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 2º grau "do tipo" **$ax^2 + bx + c > 0$** ($a \neq 0$) é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encontra **acima do eixo x**.

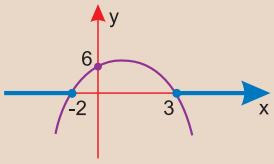
b) Resolver, em $\mathbb{R}$, uma inequação do 2º grau "do tipo" **$ax^2 + bx + c < 0$** ($a \neq 0$) é determinar o conjunto de todos os valores da variável **x** para os quais o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se encontra **abaixo do eixo x**.

Exercícios Resolvidos

1 Resolver a inequação $-x^2 + x + 6 \leq 0$

Resolução

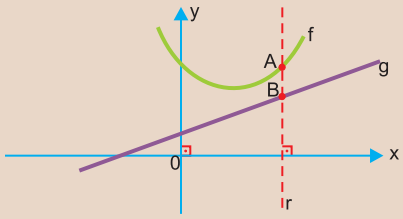
O gráfico da função $f(x) = -x^2 + x + 6$ é do tipo:



O conjunto verdade da inequação $-x^2 + x + 6 \leq 0$ é, pois:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3\}$

2 **(MODELO ENEM)** – No gráfico estão representadas as funções **f** e **g**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 2x + 8$ e $g(x) = 2x + 2$.



A reta r, paralela a 0y intercepta **f** e **g** em A e B, respectivamente. A função **h**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ fornece a medida do segmento $\overline{AB}$. Se a medida de $\overline{AB}$ for menor do que 3, então:

a) $x < 0$ b) $0 < x < 2$ c) $1 < x < 3$
d) $2 < x < 4$ e) $3 < x < 5$

Resolução

a) $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow$

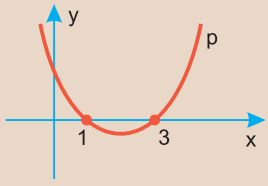
$\Rightarrow h(x) = (x^2 - 2x + 8) - (2x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x) = x^2 - 4x + 6$

b) $h(x) < 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$,

pois o gráfico de $p(x) = x^2 - 4x + 3$ é do tipo



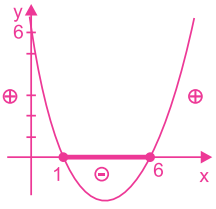
Resposta: C

Exercícios Propostos

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de **1** a **5**.

1 $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

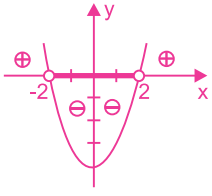
RESOLUÇÃO:
Raízes: 1 e 6



$x^2 - 7x + 6 \leq 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$

2 $x^2 < 4$

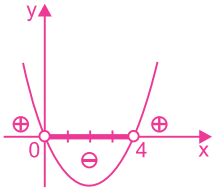
RESOLUÇÃO:
Raízes: – 2 e 2



$x^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

3 $x^2 < 4x$

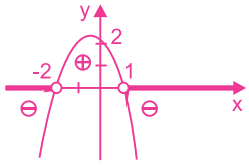
RESOLUÇÃO:
Raízes: 0 e 4



$x^2 < 4x \Rightarrow x^2 - 4x < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

4 $-x^2 - x + 2 < 0$

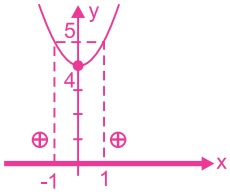
RESOLUÇÃO:
Raízes: – 2 e 1



$-x^2 - x + 2 < 0$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 1\}$

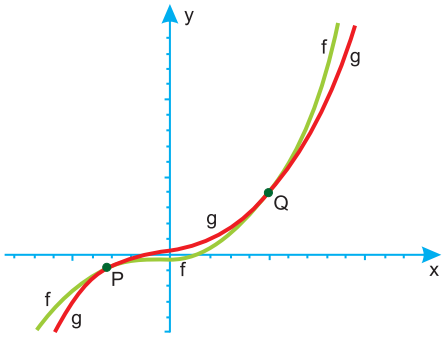
5 $x^2 + 4 > 0$

RESOLUÇÃO:
Raízes: não tem raiz real



$x^2 + 4 > 0$
$V = \mathbb{R}$

6 **(UNESP-adaptado – MODELO ENEM)** – Considere as funções polinomiais $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ e $g(x) = x^3 + 3x + 1$, cujos gráficos se interceptam em dois pontos como esboçado na figura (não em escala).



O conjunto de todos os valores de **x** para os quais $f(x) \leq g(x)$ é:

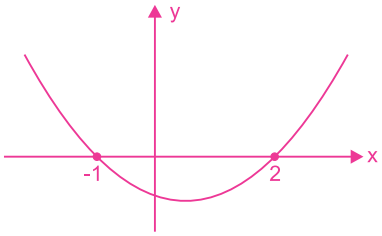
a) [– 2; 0] b) [– 1; 1] c) [– 1; 2]

d) [– 2; 2] e) [0; 2]

RESOLUÇÃO:

$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow (x^3 + x^2 + 2x - 1) - (x^3 + 3x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$, pois o gráfico da função $h(x) = x^2 - x - 2$ é do tipo



Resposta: C

Módulo 30 – Sistemas de inequações

Palavras-chave:

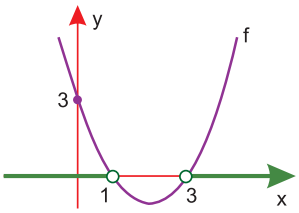
• Intersecção • Solução comum

Exemplo

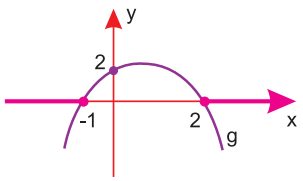
Resolver o sistema $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ -x^2 + x + 2 \leq 0 \end{cases}$

Resolução

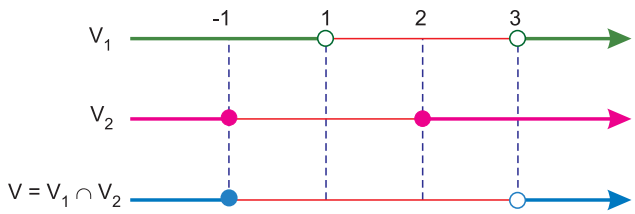
a) De acordo com o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ concluimos que o conjunto verdade da inequação $x^2 - 4x + 3 > 0$ é $V_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$



b) De acordo com o gráfico da função $g(x) = -x^2 + x + 2$ concluimos que o conjunto verdade da inequação $-x^2 + x + 2 \leq 0$ é $V_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$



c) O conjunto verdade do sistema é $V = V_1 \cap V_2$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > 3\}$

Exercícios Propostos

Resolver, em $\mathbb{R}$, os sistemas de **1** a **4**.

1 $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$

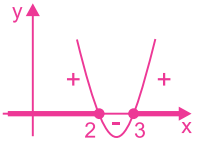
RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 & ① \\ x - 1 > 0 & ② \end{cases}$

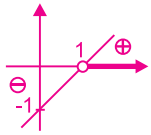
1) Raízes: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2$ ou $x_2 = 3$

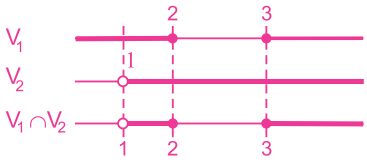
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$



2) Raiz: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$



$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

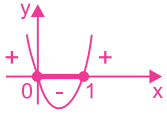
2 $\begin{cases} x^2 - x \leq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - x \leq 0 & ① \\ x^2 - 1 \geq 0 & ② \end{cases}$

1) Raízes: $x^2 - x = 0$

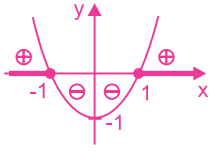
$x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$



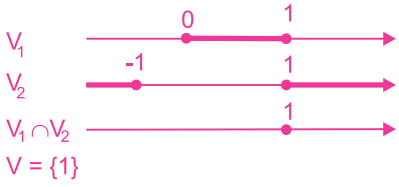
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

2) Raízes: $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 1$



$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$



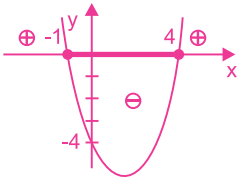
3 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ -1 < x - 2 \leq 3 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & ① \\ -1 < x - 2 \leq 3 & ② \end{cases}$

1) Raízes: $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1$ ou $x_2 = 4$

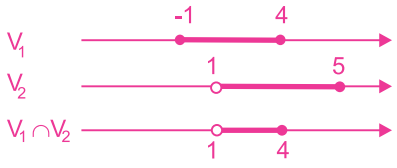


$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

2) $-1 < x - 2 \leq 3 \ (+2)$

$1 < x \leq 5$

$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$

4 $\begin{cases} 3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 \\ x^2 - 49 \leq 0 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} 3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 & ① \\ x^2 - 49 \leq 0 & ② \end{cases}$

1) $3 < \dfrac{2x - 1}{3} < 5 \ . \ (3)$

$9 < 2x - 1 < 15 \ (+1)$

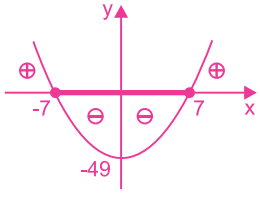
$10 < 2x < 16 \ (:2)$

$5 < x < 8$

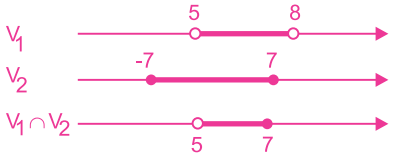
$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$

2) Raízes: $x^2 - 49 = 0$

$x_1 = -7$ ou $x_2 = 7$



$V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 7\}$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}$

Módulo 31

Inequações tipo quociente e tipo produto

Palavra-chave:

• Sinal da função

1. Fatoração do trinômio do 2º grau

Se $\{x_1; x_2\}$ for o conjunto verdade, em $\mathbb{R}$, da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, então a forma fatorada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ será:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Se $x_1 = x_2$ então a forma fatorada será:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)^2$$

Saiba mais

Toda inequação do "tipo quociente" pode ser transformada numa inequação equivalente do "tipo produto".

2. Propriedade

Lembrando que a "regra de sinais" para a multiplicação e para a divisão é a mesma, concluimos que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0 \text{ e } g(x) \neq 0$$

Exercício Resolvido

1 Fatorar $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Resolução

As raízes da equação

$2x^2 - 10x + 12 = 0$ serão 2 e 3 pois:

$2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$

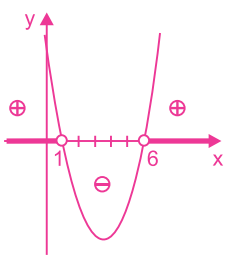
A forma fatorada é, pois: **f(x) = 2 . (x – 2) . (x – 3)**

Exercícios Propostos

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x - 1)(x - 6) > 0$

RESOLUÇÃO:

(x – 1) (x – 6) > 0



V = {x ∈ ℝ | x < 1 ou x > 6}

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de 2 a 6.

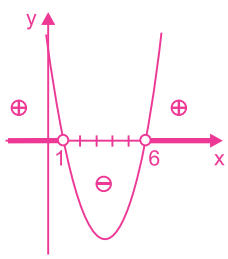
2 $\frac{x - 1}{x - 6} > 0$

RESOLUÇÃO:

$\frac{x - 1}{x - 6} > 0$

(x – 1) (x – 6) > 0

V = {x ∈ ℝ | x < 1 ou x > 6}



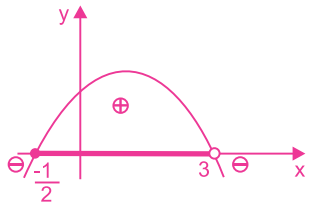
3 $\frac{2x + 1}{3 - x} \geq 0$

RESOLUÇÃO:

$\frac{2x + 1}{3 - x} \geq 0$

$(2x + 1)\,(3 - x) \geq 0$ e $x \neq 3$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 3\right\}$



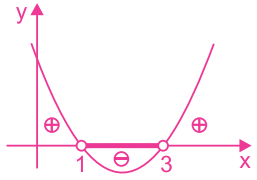
4 $\frac{1}{(x - 1)(x - 3)} < 0$

RESOLUÇÃO:

$\frac{1}{(x - 1)\,(x - 3)} < 0$

$1\,.\,(x - 1)\,(x - 3) < 0$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$



5 $\frac{2x - 1}{x - 3} < 1$

RESOLUÇÃO:

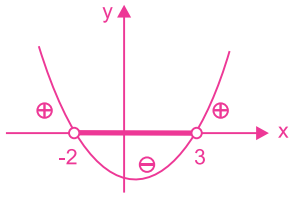
$\frac{2x - 1}{x - 3} < 1$

$\frac{2x - 1}{x - 3} - 1 < 0$

$\frac{2x - 1 - (x - 3)}{x - 3} < 0$

$\frac{x + 2}{x - 3} < 0$

$(x + 2)\,.\,(x - 3) < 0$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3\}$

6 $\frac{x + 1}{x} \geq 3$

RESOLUÇÃO:

$\frac{x + 1}{x} \geq 3$

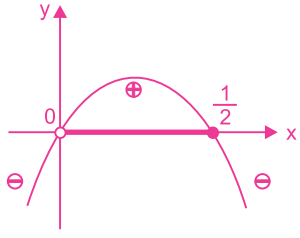
$\frac{x + 1}{x} - 3 \geq 0$

$\frac{x + 1 - 3x}{x} \geq 0$

$\frac{-2x + 1}{x} \geq 0$

$(-2x + 1)\,.\,x \geq 0$ e $x \neq 0$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$



Módulo 32

Quadro de sinais

Palavra-chave:

• Sinal da função

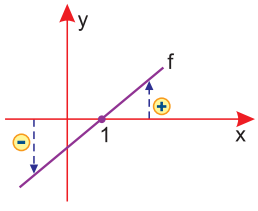
Exemplo

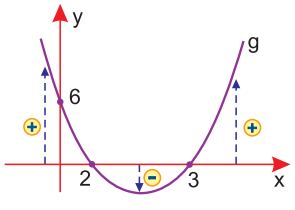
Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0$$

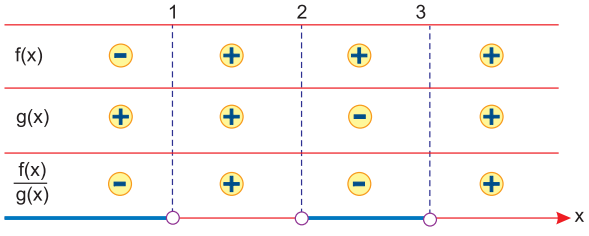
Resolução

a) Analisamos, separadamente, os sinais de $x - 1$ e $x^2 - 5x + 6$ utilizando o gráfico de $f(x) = x - 1$ e de $g(x) = x^2 - 5x + 6$.





b) Deduzimos os sinais de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pelo quadro de sinais.



Assim sendo, o conjunto verdade da inequação $\frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6} < 0$ é: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

Observação

Lembrando que a regra de sinais para a multiplicação e para a divisão é a mesma, concluimos que o conjunto verdade da inequação $(x - 1)\,(x^2 - 5x + 6) < 0$ também é:

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

Exercícios Propostos

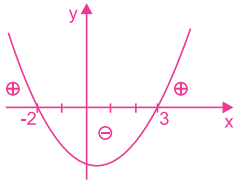
Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de 1 a 4.

1 $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} \geq 0$

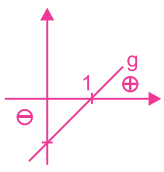
RESOLUÇÃO:

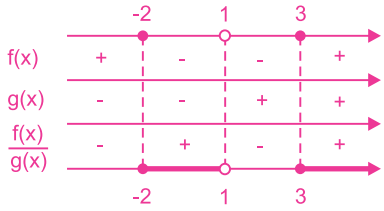
$\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 1} \geq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$f(x) = x^2 - x - 6$



$g(x) = x - 1$





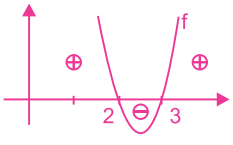
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 3\}$

2 $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} < 0$

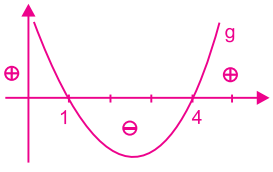
RESOLUÇÃO:

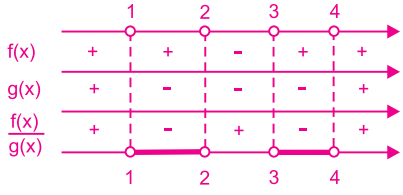
$\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} < 0$

$f(x) = x^2 - 5x + 6$



$g(x) = x^2 - 5x + 4$





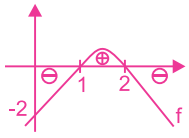
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$

3 $(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - x) < 0$

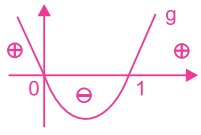
RESOLUÇÃO:

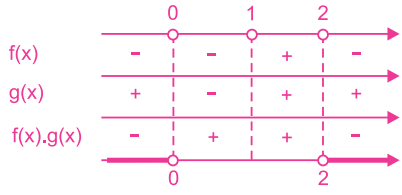
$(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - x) < 0$

$f(x) = -x^2 + 3x - 2$



$g(x) = x^2 - x$





$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

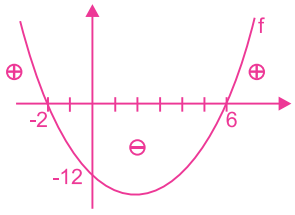
4 $\dfrac{x^2 - 12}{x} \leq 4$

RESOLUÇÃO:

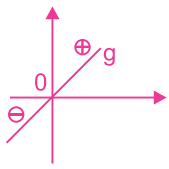
$\dfrac{x^2 - 12}{x} \leq 4 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 12}{x} - 4 \leq 0$

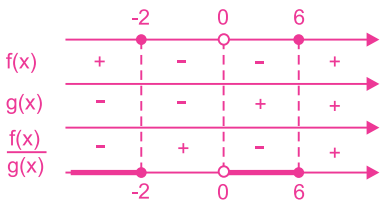
$\dfrac{x^2 - 12 - 4x}{x} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 12}{x} \leq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$f(x) = x^2 - 4x - 12$



$g(x) = x$



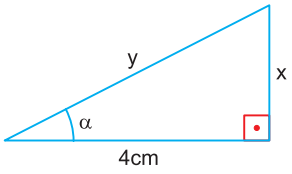


$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 < x \leq 6\}$

FRENTE 1

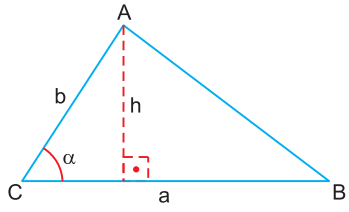
Módulo 17 – Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

1 Obter x e y no triângulo da figura,



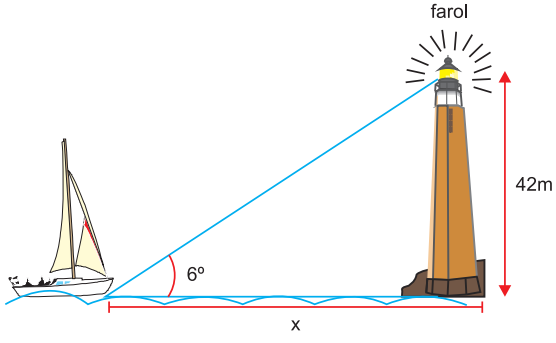
dado tg $\alpha = 1{,}5$.

2 A altura h, relativa ao lado $\overline{BC}$, vale:

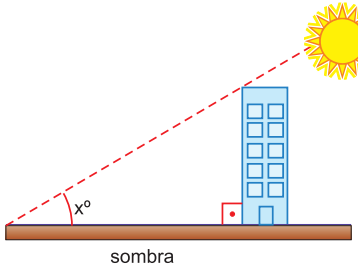


a) a . sen α
b) a . cos α
c) b . sen α
d) b . cos α
e) b . tg α

3 Um barco avista a torre de um farol segundo um ângulo de 6° com o nível do mar. Sabendo que a altura do farol é de 42 m, determinar a distância do barco até o farol.
Dado tg 6° = 0,105.



4 Quando o sol está x° acima do horizonte (ver figura), a sombra de um edifício de 80 m de altura tem que comprimento?



Considere $\text{tg } x = \frac{10}{17}$

a) 132 m b) 136 m c) 140 m
d) 142 m e) 146 m

5 Se um cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo medem **a** e **3a**, respectivamente, então o cosseno do ângulo oposto ao menor lado é

a) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e) $2\sqrt{2}$

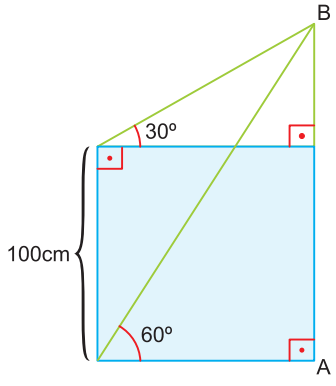
Módulo 18 – Arcos notáveis

1 **(FGV)** – Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 e um ângulo mede 60°. A soma das medidas dos catetos vale:

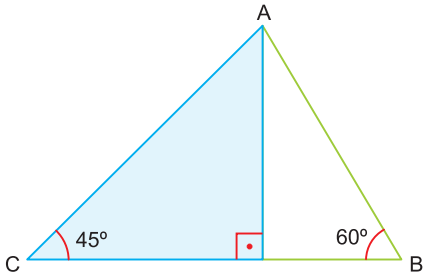
a) $\frac{15(1+\sqrt{3})}{4}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $15(1+\sqrt{3})$

d) $\frac{15}{2}$ e) $\frac{15(1+\sqrt{3})}{2}$

2 Na figura abaixo, determinar o valor de AB.



3 Num triângulo ABC, sabe-se que $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$ e AB = 4 m. Determinar a medida do lado $\overline{BC}$.



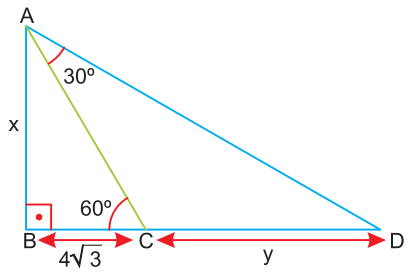
4 Uma escada apoiada em uma parede, num ponto que dista 3 m do solo, forma, com essa parede, um ângulo de 30°. Calcular a distância da parede ao pé da escada.

5 O lado de um triângulo equilátero mede 6 cm. O comprimento da sua altura, em cm, é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{3}$

Módulo 19 – Arcos notáveis

De acordo com os dados da figura, resolver as questões 1 e 2.



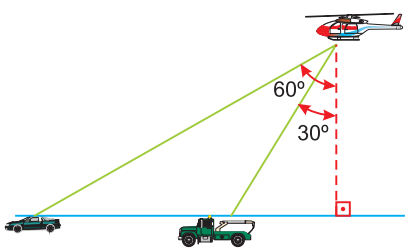
1 O valor de x é:

a) $4\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{3}$ c) 12 d) $12\sqrt{3}$ e) 15

2 O valor de y é:

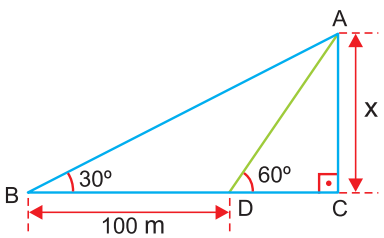
a) $4\sqrt{3}$ b) $8\sqrt{3}$ c) 12 d) $12\sqrt{3}$ e) 15

3 Um helicóptero está a 200 metros de altura, na vertical, sobre uma estrada. Na posição em que se encontra, o piloto do helicóptero enxerga um carro quebrado em uma direção que forma 60° com a vertical e, na mesma estrada, um guincho em uma direção de 30° com a mesma vertical, conforme o desenho a seguir. Sabendo que $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a distância aproximada entre o carro quebrado e o guincho, nesse momento, é igual a:



a) 230 m b) 270 m c) 320 m
d) 340 m e) 380 m

4 **(FUVEST)** – Calcular **x** indicado na figura.

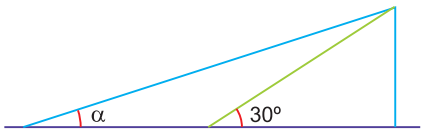


5 **(UNIP)** – Duas rodovias, **A** e **B**, encontram-se em **O**, formando um ângulo de 30°. Na rodovia A, existe um posto de gasolina que dista 5 km de **O**. O posto dista da rodovia **B**

a) 5 km b) 10 km c) 2,5 km
d) 15 km e) 1,25 km

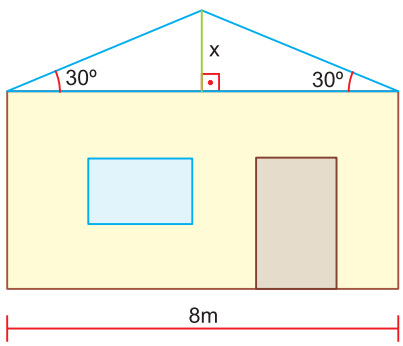
Módulo 20 – Arcos notáveis

1 Um mastro vertical está instalado em um local em que o terreno é horizontal. Uma pessoa que está à distância **d** da base do mastro vê o seu topo sob um ângulo de 30°. Se ela se afastar do mastro e parar à distância **2d**, verá o topo do mastro sob um ângulo α, conforme a figura abaixo. Então, é correto afirmar:



a) A medida de α é 60°.
b) A medida de α é 15°.
c) A tangente de α é a metade de tg 30°.
d) A tangente de α é o dobro de tg 30°.
e) A medida de α é 30°.

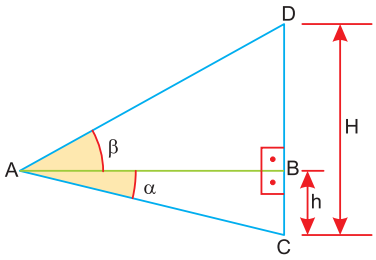
2 A figura a seguir representa o desenho de uma casa em construção. A telha que vai ser usada nessa construção necessita de um ângulo de inclinação de 30° para o telhado. Portanto, a altura x do telhado para se obter a inclinação desejada, em metros, é:



a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) 1

3 Um foguete é lançado, formando um ângulo de 30° com a reta horizontal que passa pelo ponto de lançamento. Supondo que a trajetória seja retilínea, calcular a que distância estará do ponto de lançamento quando atingir a altura de 3 km.

4 Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, tendo a seguir medido BC = h. Determinar a altura H da chaminé, em função de h, α e β.



Módulo 21 – Relações fundamentais

1 Seja x um ângulo agudo tal que $\text{sen } x = \frac{4}{5}$. Calcular cos x, tg x, cotg x, sec x, cossec x.

2 Se $0° < x < 90°$ e $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, então o valor de $\frac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x}$ será:

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 1

3 Se $0° < x < 90°$ e $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, então o valor de tg x + cotg x será:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ c) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

4 **(USF)** – Seja k o número real que satisfaz simultaneamente as equações $\text{sen } x = (k - 1) \cdot \sqrt{2}$ e $\cos x = \sqrt{2 - 3k}$. O valor de k é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 3 c) 3 ou $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$

5 Sendo $\cos x = \sqrt{a}$ e $\text{sen } x = \sqrt{a^2 + 1}$, com $a \in \mathbb{R}$, então

a) a = – 1 b) a = 0 c) a = 0 ou a = – 1

d) $a = \sqrt{2}$ e) $a = \frac{1}{2}$

Módulo 22 – Relações fundamentais

1 Sendo $\text{tg } a = \frac{1}{2}$, calcular $y = \frac{\text{cossec } a - \text{sen } a}{\sec a - \cos a}$.

2 Sendo sen a + cos a = m, então sen a . cos a é igual a:

a) $\frac{m - 1}{2}$ b) $\frac{m^2 - 1}{2}$ c) $\frac{m^2 + 1}{2}$

d) $\frac{m + 1}{2}$ e) $\frac{m}{2}$

3 Se $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e $y = \sec^2 x - \text{tg } x \cdot \sec x$, então o valor de y será:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

4 **(UFSCar)** – Os valores de r e θ no sistema de equações $\begin{cases} r \cdot \text{sen } \theta = \sqrt{3} \\ r \cdot \cos \theta = 1 \end{cases}$, para $r > 0$ e $0° \leq \theta < 90°$, são respectivamente:

a) 2; 30° b) 1; 60° c) 2; 10°

d) 1; 0° e) 2; 60°

5 A expressão tg a + cotg a resulta igual a

a) 1 b) sec a c) cossec a

d) sec a . cossec a e) sec a + cossec a

Módulo 23 – Medidas de arcos e ângulos

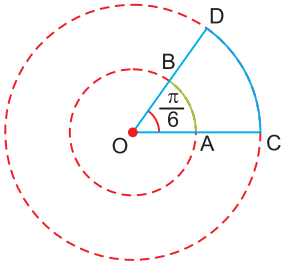
1 Quantos segundos tem um arco de medida 5°10'?

2 O valor de 7'20" + 1°3'4", em segundos, é:

a) 440 b) 444 c) 2640 d) 3280 e) 4224

3 Transformar 12° em radianos.

4 **(UFBA)**



Na figura, têm-se dois círculos de raios 3 cm e 5 cm. Sendo s_1 o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ e s_2 o comprimento do arco $\overset{\frown}{CD}$, então o valor de $s_2 - s_1$ é aproximadamente, em cm, igual a

a) 0,52 b) 1,05 c) 1,57 d) 3,14 e) 4,71

5 **(UNESP)** – O menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 20 minutos é

a) 8° b) 50° c) 52,72° d) 60° e) 62°

Módulo 24 – Ciclo trigonométrico – determinações

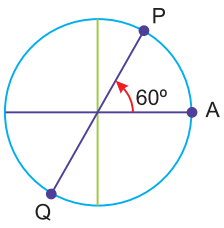
1 Obter a 1ª determinação positiva dos arcos com medidas:

a) 1550° b) 1840° c) – 3000°

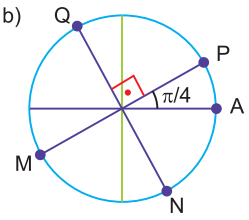
d) $\frac{72\pi}{5}$ e) $-\frac{97\pi}{7}$

2 Escrever, em uma única expressão, o conjunto das determinações dos arcos assinalados, com extremidades em P, Q, M e N.

a)



b)



3 Assinalar a alternativa correta:

a) A 1ª determinação positiva do arco de 780° é 30°;

b) A 1ª determinação positiva do arco de – 600° é 240°;

c) A 1ª determinação positiva do arco de $\frac{284\pi}{9}$ é $\frac{7\pi}{9}$;

d) A 1ª determinação negativa do arco de $\frac{37\pi}{3}$ é $-\frac{5\pi}{3}$;

e) A 1ª determinação positiva do arco de $-\frac{51\pi}{5}$ é $\frac{\pi}{5}$.

4 Obter a 1ª determinação positiva dos arcos com medidas:

a) 1000° b) –1210° c) $\frac{8\pi}{3}$ rad

5 Marcando no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos da forma K . 40°, sendo K um número natural, obtemos os vértices de um polígono regular cujo número de lados é igual a

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

Módulo 25 – Função seno

1 Determinar:

a) sen 150° = b) sen 210° = c) sen 330° =

d) sen $\frac{5\pi}{6}$ = e) sen 1920° =

2 O número de arcos existentes entre 0° e 1560° cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

3 Se existir um número real x tal que sen x = $\frac{2a-1}{3}$, então:

a) $-1 \leq a \leq 2$ b) $-2 \leq a \leq 1$ c) $0 \leq a \leq 1$
d) $-1 \leq a \leq 1$ e) $a \geq 1$

4 **(UNICAMP)** – Considere a função
$S(x) = 1 + 2 \,.\, \text{sen } x + 4 \,.\, (\text{sen } x)^2 + 8 \,.\, (\text{sen } x)^3$, para $x \in \mathbb{R}$.
Calcule $S\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5 O valor da expressão

$$\frac{\text{sen } 0° + \text{sen } 60° + \text{sen}120° + \text{sen}180°}{\text{sen } 30° + \text{sen } 150°}$$ é

a) 0 b) 1 c) – 1 d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

Módulo 26 – Equações e inequações que envolvem a função seno

1 Resolver a equação $2 \text{ sen } x - \sqrt{3} = 0$, no intervalo $0° \leq x \leq 360°$.

2 Resolver, para $0 \leq x \leq 2\pi$, a equação $2 \text{ sen } x + \sqrt{2} = 0$.

3 Resolver, para $0° \leq x \leq 360°$, a inequação $4 \text{ sen } x + 2 < 0$.

4 Determinar o conjunto solução da equação
$2\text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$, no intervalo $[0; 2\pi]$.

5 Para $0° \leq x \leq 360°$, a soma das soluções da equação sen x = cossec x é igual a

a) 90° b) 180° c) 270° d) 360° e) 450°

Módulo 27 – Função cosseno

1 Determinar:

a) cos 150° = d) cos $\frac{7\pi}{4}$ =

b) cos 210° = e) cos 855° =

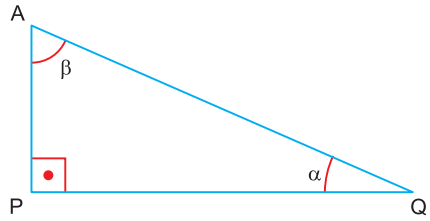
c) cos 330° =

2 Ao descrever o tipo de salto de uma ginasta, um entendido no assunto assim a ele se referiu: "Era como se seus dedos dos pés descrevessem no espaço um arco de circunferência de 124 cm de comprimento." Considerando que cada perna dessa ginasta, juntamente com seu pé esticado, estivessem em linha reta perfazendo 60 cm, e usando $\pi = 3{,}1$, o cosseno do ângulo de abertura de suas pernas mediria

a) – 1 b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

3 **(MACKENZIE)** – No triângulo retângulo da figura, $\overline{AQ} = 2.\overline{AP}$. Então, sen$(\alpha + 3\beta)$ vale



a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 Se $x \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ e $\cos x = 2k - 1$, então, k pertence ao intervalo:

a) $]-2; -1[$ b) $\left]-1; -\frac{1}{2}\right[$

c) $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ d) $\left]0; \frac{1}{2}\right[$

e) $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

5 O valor da expressão

$$\frac{\cos 30° + \cos 60° + \cos 90° + \cos 120° + \cos 150° + \cos 180°}{\cos 45°}$$ é

a) 0 b) 1 c) – 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\sqrt{2}$

Módulo 28 – Equações e inequações que envolvem a função cosseno

1 Resolver a equação $\cos x - 1 = 0$ no intervalo $0° \leq x \leq 360°$.

2 Qual o número de soluções da equação $2\cos^2 x - 1 = 0$ no intervalo $[0; 2\pi]$?

3 Resolver a equação $\cos^2 x - \cos x = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$.

4 A soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π, é:

a) π b) 2π c) 4π d) 3π e) 5π

5 Para $0° \leq x \leq 360°$, a soma das soluções da equação $\cos x = \sec x$ é:

a) 180° b) 270° c) 360° d) 540° e) 630°

Módulo 29 – Função tangente

1 Completar a tabela abaixo e esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0; 2\pi]$.

x		tg x
0°	0	
30°	$\frac{\pi}{6}$	
45°	$\frac{\pi}{4}$	
60°	$\frac{\pi}{3}$	
90°	$\frac{\pi}{2}$	
180°	π	
270°	$\frac{3\pi}{2}$	
360°	2π	

2 Determine:

a) tg 1860° =

b) tg $\frac{21\pi}{4}$ =

3 Sabendo que sen $x = \frac{4}{5}$ e x pertence ao 2º quadrante, obter o valor da tg x.

4 A expressão
sen (2010°) . cos (1230°) . tg (1560°) é igual a:

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) 0 e) $-\frac{3}{4}$

5 O valor de tg 2565° é

a) 0 b) 1 c) – 1 d) $\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Módulo 30 – Equações e inequações que envolvem a função tangente

1 Resolver a equação $3\text{tg } x - \sqrt{3} = 0$, supondo $0° \leq x \leq 360°$.

2 Resolver a inequação $\text{tg } x \geqslant \sqrt{3}$, supondo $0° \leqslant x \leqslant 360°$.

3 Resolver $\text{tg}^2 x - \sqrt{3} \cdot \text{tg } x = 0$, supondo $x \in [0; 2\pi]$.

4 Resolver a equação $\text{tg } x + \text{cotg } x = 2$, supondo $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

5 Mostre que $\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Módulo 31 – Equações trigonométricas

1 Resolver a equação $\text{sen}^2x + \text{sen}\ x = 0$, supondo $0° \leq x < 360°$.

2 Se $\sec^2x - 3\text{tg}\ x - 11 = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor do sen x é:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ c) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

d) $\frac{\sqrt{24}}{24}$ e) $\frac{5\sqrt{24}}{24}$

3 Resolver a equação $3 \cdot [\text{tg}^2x + 1] = 4\sqrt{3}\ \text{tg}\ x$, sabendo que $0 < x < 3\pi$.

4 **(UNICAMP)** – Considere a função

$f(x) = x^2 + x \cdot \cos\alpha + \text{sen}\ \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$ para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

5 A soma das raízes da equação

$\text{sen}\ x = \sec x - \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$, é

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) 2π c) $\frac{5\pi}{2}$ d) 3π e) $\frac{7\pi}{2}$

Módulo 32 – Equações trigonométricas

Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de 1 a 3.

1 $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

2 $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

3 $5\cos(3x) - 4 + 2\,\text{sen}^2(3x) = 0$

4 **(MACKENZIE)** – A equação

$1 + \text{tg}^2x = \cos x$ tem uma solução pertencente ao intervalo

a) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ b) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

c) $\left[\frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$ d) $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

e) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$

5 Um valor de x que satisfaz a equação

$\text{sen}^2x + \text{sen}^4x + \text{sen}^6x + \text{sen}^8x + \text{sen}^{10}x = 5$ é

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{6}$ e) $\frac{4\pi}{3}$

FRENTE 2

Módulo 17 – Equações do 1º grau

1 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $3x - 12 = 0$
b) $2x + 16 = x - 4$
c) $x + 4 = -x - 7$

2 Resolva a equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x-1}{6} = 1$.

3 **(SENAI)** – Numa indústria, o custo da produção mensal é composto de um custo fixo de R$ 5000,00, e um custo de R$ 3,50 por peça produzida. Quantas peças foram produzidas em um mês em que o custo total foi de R$6225,00?

a) 175 b) 225 c) 350 d) 360 e) 375

4 **(UFV)** – O número **n** de aulas de Matemática, Geografia e Inglês corresponde a 2/5 do total de aulas que Beatriz tem durante a semana, Sabendo que Beatriz tem ainda 24 aulas de outras matérias durante a semana, conclui-se que **n** é igual a:

a) 16 b) 18 c) 12 d) 14

5 Dada a sentença $\frac{x}{2} - 2 = -\frac{1}{2}(4 - x)$, podemos afirmar que:

a) é falsa para todos $x \in \mathbb{R}$
b) é verdadeira somente se $x = 0$
c) é falsa, $\forall x \in \mathbb{N}$
d) é verdadeira, $\forall x \in \mathbb{R}$
e) é falsa para $x = 0$

Módulo 18 – Sistemas de equações

1 Num sítio existem patos e porcos, num total de 48 cabeças e 120 pés. O número de porcos é:

a) 10 b) 12 c) 24 d) 30 e) 36

2 Num estacionamento há 37 veículos, entre motos e automóveis. O total de rodas é 118. Quantos automóveis existem nesse estacionamento?

3 Há 5 anos, a idade de João era o dobro da idade de Maria. Daqui a 5 anos, a soma das duas idades será 65 anos. Quantos anos João é mais velho que Maria?

4 **(UNICAMP)** – Em um restaurante, todas as pessoas de um grupo pediram o mesmo prato principal e uma mesma sobremesa. Com o prato principal, o grupo gastou R$ 56,00 e com a sobremesa, R$ 35,00; cada sobremesa custou R$ 3,00 a menos do que o prato principal.

a) Encontre o número de pessoas deste grupo.
b) Qual é o preço do prato principal?

5 Resolver o sistema $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

Módulo 19 – Equações do 2.º grau – Fórmula de Báskara

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

2 Resolver, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $3x^2 + 12x = 0$

b) $9 - 4x^2 = 0$

3 **(FAAP)** – Numa região, foram colhidas 8400 toneladas de trigo. A mesma colheita poderia ter sido obtida numa área com 20 hectares a menos, se mais uma tonelada tivesse sido colhida por hectare. Quantas toneladas foram colhidas por hectare?

a) 14 b) 34 c) 16 d) 28 e) 20

4 Qual o número que se deve subtrair de cada fator do produto 5 x 8, para que esse produto diminua de 42?

a) 6 ou 7 b) 2 ou – 1 c) – 20 ou 2
d) 3 ou – 14 e) 4 ou 40

5 **(PUCCAMP)** – Considere as seguintes equações:

I. $x^2 + 4 = 0$

II. $x^2 - 2 = 0$

III. $0,3x = 0,1$

Sobre as soluções dessas equações, é verdade dizer que em

a) II são números irracionais.
b) III é número irracional.
c) I e II são números reais.
d) I e III são números não reais.
e) II e III são números racionais.

Módulo 20 – Soma e produto – Método da tentativa

Empregando as propriedades da soma e do produto das raízes, resolva, em $\mathbb{R}$, as equações de 1 a 3.

1 $x^2 - 5x + 6 = 0$

2 $x^2 - 6x + 8 = 0$

3 $x^2 + 4x + 3 = 0$

4 Obtenha uma equação do 2º grau cujas raízes são 2 e $\frac{1}{3}$.

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$.

Módulo 21 – Equações redutíveis a 1.º e 2.º graus

1 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

2 O conjunto verdade da equação
$(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$ é:

a) {– 1; – 2} b) {2; 1} c) {– 2; – 1; 1; 2}
d) {5; 2} e) {– 5; – 2; 2; 5}

3 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3}$$

4 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{x + 1 + \sqrt{2x - 3}} = 2$

5 **(UNIP)** – Se **x** é positivo e se o inverso de x + 1 é x – 1, então x é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

Módulo 22 – Problemas de 1.º e 2.º graus

1 O conjunto verdade da equação
$x^2 - x + c = 0$, em $\mathbb{R}$, é {2; a}. O valor de **a** + **c** é:

a) 2 b) 1 c) – 1 d) – 2 e) – 3

2 Sejam **a** e **b** as raízes da equação
$x^2 - 3k\,x + k^2 = 0$, tais que $a^2 + b^2 = 1,75$. Determine k^2.

3 **(UNICAMP)** – Ache dois números inteiros, positivos e consecutivos, sabendo que a soma de seus quadrados é 481.

4 **(UNICAMP)** – O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseador visitou 102, quantas residências tem a cidade?

5 **(UNIFOR)** – As idades de dois irmãos somam, hoje, 30 anos. Se, há 8 anos, o produto de suas idades era 48, a idade atual do mais velho é

a) 20 b) 19 c) 18 d) 17 e) 16

Módulo 23 – Conjuntos numéricos

1 Na reta real, marque aproximadamente a posição dos números $-\pi$, $-\frac{3}{2}$, -3, 1, $\sqrt{2}$ e π.



2 Represente na reta real os conjuntos:
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x \geq 5\}$

3 Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$, determine:
a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$
Represente-os também na forma [a; b],]a; b[, [a; b[,]a; b],]– ∞; a] ou]b; + ∞[.

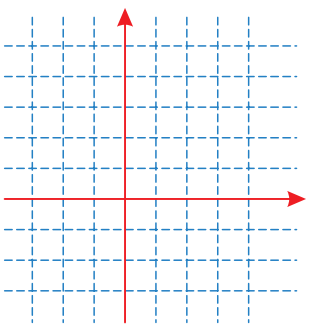
4 **(PUC)** – Seja x elemento de A.
Se $x \notin]-1; 2]$ e, além disso, $x < 0$ ou $x \geq 3$, determine A.

5 Considere as afirmações
I) $\{1; 2; 3\} = [1; 3]$ II) $[1; 3] =]1; 3[\cup \{1; 3\}$
III) $]1; 3[= \{1; 2; 3\} - \{2\}$ IV) $]1; 3[= [1; 3] - \{1; 3\}$
O número de afirmações verdadeiras é
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Módulo 24 – Função polinomial do 1º grau

1 Esboce o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela sentença $f(x) = 2x - 4$.

x	f(x)



2 Determine a sentença que define a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do 1º grau, sabendo que $f(-1) = 2$ e $f(1) = 4$.

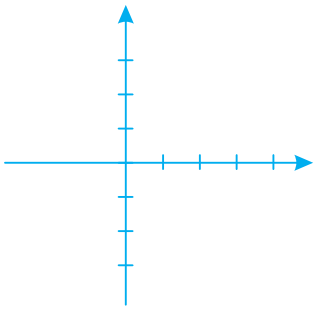
3 Uma função real f do primeiro grau é tal que $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$. Então $f(3)$ é igual a:
a) – 3 b) – 5/2 c) – 1 d) 0 e) 7/2

4 **(UEPB)** – Em uma indústria de autopeças, o custo de produção de peças é de R$ 12,00 fixo, mais um custo variável de R$ 0,70 por cada unidade produzida. Se em um mês foram produzidas x peças, então a lei que representa o custo total dessas x peças é:
a) $f(x) = 0{,}70 - 12x$ b) $f(x) = 12 - 0{,}70x$
c) $f(x) = 12 + 0{,}70x$ d) $f(x) = 0{,}70 + 12x$
e) $f(x) = 12 \times 0{,}70x$

5 A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é estritamente crescente. Podemos afirmar que
a) $a > 0$ e $b > 0$ b) $a > 0$ e $b < 0$ c) $a < 0$ e $b < 0$
d) $a < 0$ e $b > 0$ e) $a > 0$

Módulo 25 – Função polinomial do 2.º grau

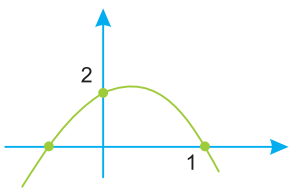
1 Esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.



2 Sendo f a função do exercício anterior, obter o conjunto verdade das sentenças:
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) > 0$ c) $f(x) < 0$

3 Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ uma função real definida para todo número real. Sabendo-se que existem dois números, x_1 e x_2, distintos, tais que $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, pode-se afirmar que
a) f passa necessariamente por um máximo.
b) f passa necessariamente por um mínimo.
c) $x_1 \cdot x_2$ é necessariamente negativo.
d) $b^2 - 4ac > 0$

4 O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:



O valor de a + b é:
a) 1 b) 2 c) – 1 d) – 2 e) 3

5 **(UNIFOR)** – O gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 3x - 10$, intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B. A distância AB é igual a
a) 3 b) 5 c) 7 d) 8 e) 9

Módulo 26 – Vértice e conjunto imagem

1 O vértice da parábola de equação $f(x) = x^2 - 7x + 6$ é o ponto
a) $\left(\frac{7}{4}; \frac{25}{4}\right)$ b) $\left(-\frac{7}{2}; \frac{25}{4}\right)$ c) $\left(\frac{7}{2}; -\frac{25}{2}\right)$
d) $\left(\frac{7}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ e) $\left(\frac{7}{2}; \frac{25}{4}\right)$

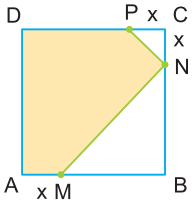
2 O conjunto imagem da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 7x + 6$ é:

a) $\left[-\frac{25}{4}; +\infty \right[$ b) $\left[-\frac{25}{2}; +\infty \right[$ c) $\left[\frac{25}{4}; +\infty \right[$

d) $\left[\frac{25}{2}; +\infty \right[$ e) $[0; +\infty[$

3 Esboce o gráfico da função f : [0; 5] → $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Ache o máximo e o mínimo de f.

4 O quadrado ABCD da figura tem 6 cm de lado. Determine o valor de x para que a área da região hachurada seja máxima. Calcule, em seguida, o valor da área máxima.



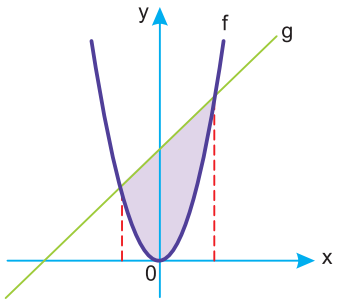
5 Para um certo produto, a função de receita é $R = -x^2 + 10{,}5x$ e a função de custo é $C = x^2 + 0{,}5x + 1$ (x representa a quantidade do produto).
A função do lucro é definida como a diferença entre a receita e o custo. O lucro máximo possível é (em unidades monetárias):
a) 12 b) 11,5 c) 8,5 d) 10,5 e) 14

Módulo 27 – Vértice e conjunto imagem

1 Um fabricante pode produzir sapatos ao custo de R$ 20, 00 o par. Estima-se que, se cada par for vendido por x reais, o fabricante venderá por mês 80 – x pares de sapatos ($0 \leqslant x \leqslant 80$). Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Assinale a alternativa que indica, em reais, o preço de venda que proporciona o lucro mensal máximo:
a) 20 b) 50 c) 60 d) 35 e) 40

2 Observando a parábola descrita pelo dardo arremessado por um atleta, um matemático resolveu obter uma expressão que lhe permitisse calcular a altura y, em metros, do dardo em relação ao solo, decorridos t segundos do instante de seu lançamento (t = 0). Se o dardo chegou à altura máxima de 20 m e atingiu o solo 4 segundos após o seu lançamento, então, desprezada a altura do atleta, a expressão que o matemático encontrou foi
a) $y = -5t^2 + 20t$ b) $y = -5t^2 + 10t$
c) $y = -5t^2 + t$ d) $y = -10t^2 + 50$
e) $y = -10t^2 + 10$

3 **(FGV)** – Na parte sombreada da figura, as extremidades dos segmentos de reta paralelos ao eixo y são pontos das representações gráficas das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 6$, conforme indicado.



A medida do comprimento do maior desses segmentos, localizado na região indicada na figura, é
a) 6 b) 6,25 c) 6,5 d) 6,75 e) 7

4 **(UFOP)** – Em relação ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, pode-se afirmar:
a) é uma parábola de concavidade voltada para cima.
b) seu vértice é o ponto V(2; 1).
c) intercepta o eixo das abscissas em P(– 3; 0) e Q(3; 0).
d) o seu eixo de simetria é o eixo das ordenadas.
e) intercepta o eixo das ordenadas em R(0; 3).

5 **(UPMS)** – A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = -2x^2 + x + 1$
admite como conjunto imagem o conjunto:

a) $\left] -\infty; \frac{9}{8} \right]$ b) $\left] -\infty; -\frac{9}{8} \right]$ c) $\left] -\infty - \frac{1}{4} \right]$

d) $\left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$ e) $\left[\frac{9}{8}; +\infty \right[$

Módulo 28 – Inequações do 1.º grau

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações **1** e **2**.

1 $2x - 10 < 4$

2 $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} < 1$

3 Resolva, em $\mathbb{R}$, os sistemas:

a) $1 < \frac{2x-3}{3} \leqslant 5$ b) $\begin{cases} 2x - 10 < 0 \\ -3x + 6 \leqslant 0 \end{cases}$

4 **(UNICAMP)** – Numa escola, é adotado o seguinte critério: a nota da primeira prova é multiplicada por 1, a nota da segunda prova é multiplicada por 2 e a nota da terceira prova é multiplicada por 3. Os resultados, após somados, são divididos por 6. Se a média por este critério for maior ou igual a 6,5, o aluno é dispensado das atividades de recuperação. Suponha que um aluno tenha tirado 6,3 na primera prova e 4,5 na segunda prova. Quanto precisará tirar na terceira prova para ser dispensado da recuperação?

5 **(MACK)** – Em $\mathbb{N}$, o produto das soluções da inequação $2x - 3 \leqslant 3$ é:
a) maior que 8 b) 6 c) 2 d) 1 e) 0

Módulo 29 – Inequações do 2.º grau

Resolver, em $\mathbb{R}$, as inequações de 1 a 3.

1 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

2 $x^2 + 4x + 4 > 0$

3 $x^2 < 3$

4 O conjunto solução da inequação $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$, em $\mathbb{R}$, é

a) $\emptyset$ b) $\mathbb{R}$ c) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$ e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{3}\right\}$

5 Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 5x - 4 > 2\}$, então

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x < 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x < 3\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x < 4\}$

Módulo 30 – Sistemas de inequações

1 Considere os conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 \geq 0\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 < 0\}$ e calcule $A \cap B$.

2 O conjunto solução do sistema

$\begin{cases} 3x + 5 \leq 2x + 3 \\ x^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$ é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq -2\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$

3 Resolver o sistema $\begin{cases} 1 \leq \frac{2x - 5}{3} \leq 3 \\ x^2 - x - 30 < 0 \end{cases}$

4 Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema $0 \leq x^2 - 5x + 6 \leq 2$.

5 A solução do sistema de inequações

$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$ é:

a) $x = 1$ b) $0 < x < 1$ c) $x > 1$

d) $0 \leq x \leq 1$ e) $x > 7$

Módulo 31 – Inequações tipo quociente e tipo produto

1 Fatorar o trinômio $y = x^2 + x - 6$.

2 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $(x + 3)(x - 2) \leq 0$.

3 Resolver a inequação $\frac{x + 3}{x - 2} \leq 0$.

4 Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$\frac{x - 1}{x - 2} \leq \frac{x - 3}{x - 4}$.

5 Resolvendo-se a inequação $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \leq 8$, em $\mathbb{R}$, obtém-se

a) $x \leq 6$ b) $x \leq 6$ e $x \neq 2$ c) $x \neq 2$

d) $2 \leq x \leq 8$ e) $-2 \leq x \leq 2$

Módulo 32 – Quadro de sinais

1 A solução da inequação $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$ é

a) $-2 < x < 3$ ou $x > 5$ b) $3 < x < 5$ ou $x < -2$

c) $-2 < x < 5$ d) $x > 6$

e) $x < 3$

2 A inequação $\frac{x^2 - 3x + 8}{x + 1} < 2$ tem como solução o conjunto:

a) $]-\infty; -1[\cup]2; 3[$ b) $]2; 3[$

c) $]-\infty; 1] \cup [2; 3]$ d) $[2; 3]$

e) $]1; 4]$

3 O conjunto solução da inequação $\frac{x}{x + 3} - \frac{1}{x - 1} < 1$ é:

a) $-3 < x < 1$

b) $-3 < x < 0$ ou $x > 1$

c) $-3 < x < -\sqrt{3}$ ou $1 < x < \sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3} < x < 1$ ou $x > \sqrt{3}$

e) $-1 < x < 1$ ou $x > 3$

4 **(FATEC)** – A solução real da inequação produto $(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4x) \geq 0$ é:

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x \leq 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$

e) $S = \emptyset$

5 A solução da inequação $\frac{x}{x + 3} - \frac{1}{x - 1} > 1$ é:

a) $-3 < x < 1$

b) $x < -3$ ou $0 < x < 1$

c) $-3 < x < -\sqrt{3}$ ou $1 < x < \sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3} < x < 1$ ou $x > \sqrt{3}$

e) $-1 < x < 1$ ou $x > 3$

FRENTE 1

Módulo 17 – Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

1 I) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow 1{,}5 = \dfrac{x}{4} \Leftrightarrow x = 6\ \text{cm}$

II) Teorema de Pitágoras:

$y^2 = x^2 + 4^2$

$y^2 = 6^2 + 4^2$

$y^2 = 52 \Rightarrow y = \sqrt{52} \Leftrightarrow y = 2\sqrt{13}\ \text{cm}$

2 No triângulo retângulo de hipotenusa **b** e cateto **h**, temos:

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{b} \Leftrightarrow h = b \cdot \operatorname{sen}\alpha$

Resposta: C

3 $\operatorname{tg} 6° = \dfrac{42}{x} \Leftrightarrow 0{,}105 = \dfrac{42}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{42}{0{,}105} \Leftrightarrow x = 400\text{m}$

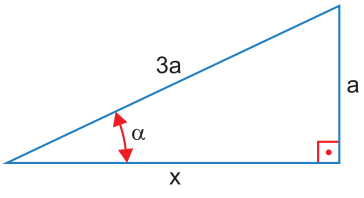
4 Sendo **c** o comprimento da sombra, em metros, temos que

$\operatorname{tg} x = \dfrac{80}{c} = \dfrac{10}{17}$.

Logo, $10c = 1360 \Leftrightarrow c = 136$

Resposta: B

5



(I) $x^2 + a^2 = (3a)^2 \Leftrightarrow x^2 = 9a^2 - a^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = a\,2\sqrt{2}$

(II) $\cos\alpha = \dfrac{x}{3a}$

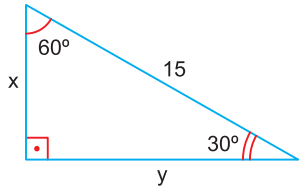
De (I) e (II), concluímos que

$\cos\alpha = \dfrac{a\,2\sqrt{2}}{3a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Resposta: B

Módulo 18 – Arcos notáveis

1 A partir do enunciado, temos:



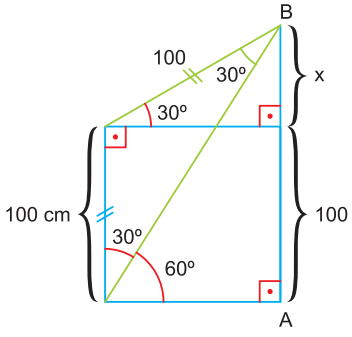
$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{x}{15} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{15} \Rightarrow x = \dfrac{15}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{y}{15} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

logo: $x + y = \dfrac{15}{2} + \dfrac{15\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15(1+\sqrt{3})}{2}$

Resposta: E

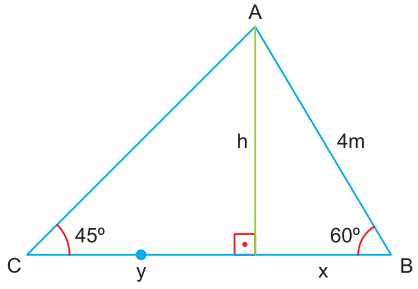
2



$\operatorname{sen} 30° = \dfrac{x}{100} \Rightarrow x = 50$

AB = 150 cm

3



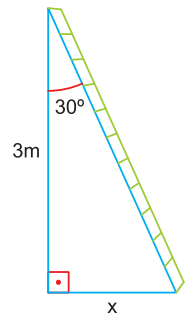
$\operatorname{sen} 60° = \dfrac{h}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{4} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow x = 2$

$\operatorname{tg} 45° = \dfrac{h}{y} \Rightarrow 1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{y} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = x + y = (2 + 2\sqrt{3})\text{m}$

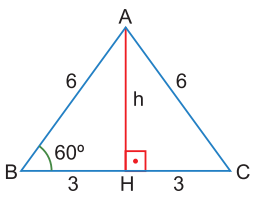
4



$$\text{tg } 30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}\ \text{m}$$

5



Na figura, AH = h é a altura do triângulo equilátero ABC de lado ℓ = 6cm.

No triângulo retângulo ABH, temos que

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Leftrightarrow 2h = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$$

Resposta: B

Módulo 19 – Arcos notáveis

1 No triângulo ABC, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 12$$

Resposta: C

2 No triângulo ABC, temos: AC = y e

$$\cos 60° = \frac{4\sqrt{3}}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{y} \Leftrightarrow y = 8\sqrt{3}$$

Resposta: B

3 A distância x entre o carro e o guincho é igual à distância entre o guincho e o helicóptero.

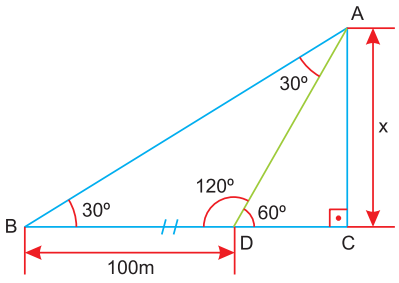
Logo:

$$\cos 30° = \frac{200}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{200}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{400}{\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{3}}{3} \cong \frac{400 \,.\, 1{,}73}{3} \cong 230$$

Resposta: A

4



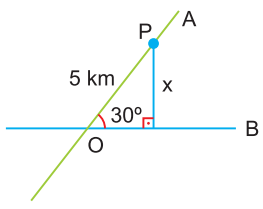
O Δ ABD é isósceles, pois $B\hat{A}D = A\hat{B}D =$

$= 30°$ (veja figura). Então, AD = BD = 100 m.

No Δ ACD, $\text{sen } 60° = \frac{x}{100} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = 50\sqrt{3}$

Resposta: $50\sqrt{3}$ m

5



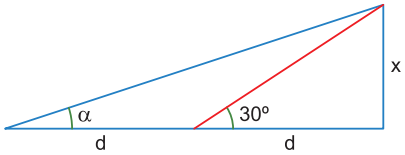
Se P representa o posto, no desenho, então

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Resposta: C

Módulo 20 – Arcos notáveis

1 Sendo x a altura do mastro e de acordo com o enunciado, temos:

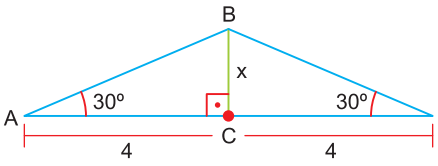


I) $\text{tg } 30° = \frac{x}{d}$

II) $\text{tg } \alpha = \frac{x}{2d} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{x}{d} = \frac{1}{2} \,.\, \text{tg } 30° = \frac{\text{tg } 30°}{2}$

Resposta: C

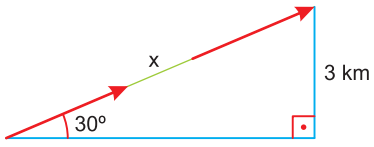
2 No triângulo ABC, temos:



$$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: B

3



$$\text{sen } 30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = 6$$

Resposta: 6 km

4 I) No ΔABD:

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow \text{tg } \beta = \frac{H - h}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{H - h}{\text{tg } \beta} \quad (a)$$

II) No ΔABC:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \text{tg } \alpha = \frac{h}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{h}{\text{tg } \alpha} \quad (b)$$

III) Comparando as igualdades (a) e (b), temos:

$$\frac{H - h}{\text{tg } \beta} = \frac{h}{\text{tg } \alpha} \Leftrightarrow (H - h) \cdot \text{tg } \alpha = h \cdot \text{tg } \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cdot \text{tg } \alpha - h \cdot \text{tg } \alpha = h \cdot \text{tg } \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cdot \text{tg } \alpha = h \cdot \text{tg } \alpha + h \cdot \text{tg } \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cdot \text{tg } \alpha = h \cdot (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{h \cdot (\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}{\text{tg } \alpha}$$

Módulo 21 – Relações fundamentais

1 Sendo x um ângulo agudo ($0° < x < 90°$) e $\text{sen } x = \frac{4}{5}$, temos:

I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2x = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}, \text{ pois } \cos x > 0$$

II) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

III) $\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{3}{4}$

IV) $\text{sec } x = \frac{1}{\cos x} = \frac{5}{3}$

V) $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{5}{4}$

2 Para $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, temos:

$$\frac{\cos^2x}{1 - \text{sen } x} = \frac{1 - \text{sen}^2x}{1 - \text{sen } x} =$$

$$= \frac{(1 + \text{sen } x) \cdot (1 - \text{sen } x)}{1 - \text{sen } x} =$$

$$= 1 + \text{sen } x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Resposta D

3 Para $0° < x < 90°$ e $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, temos:

I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2x = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ pois } \cos x > 0$$

II) $\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x} =$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{9}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Resposta: C

4 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow [(k-1) \cdot \sqrt{2}]^2 + [\sqrt{2 - 3k}]^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (k^2 - 2k + 1) + (2 - 3k) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k^2 - 7k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 3$ ou $k = \frac{1}{2}$

O único valor possível é $k = \frac{1}{2}$, pois para

$k = 3$ resultaria $\sin x = 2\sqrt{2} > 1$

Resposta: A

5 $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \cos x = \sqrt{a}, \ a \geq 0 \\ \sin x = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{a^2+1})^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + a^2 + 1 = 1 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0$ ou $a = -1$ (não serve).

Portanto, $a = 0$

Resposta: B

Módulo 22 – Relações fundamentais

1 $y = \frac{\operatorname{cossec} a - \sin a}{\sec a - \cos a} = \frac{\frac{1}{\sin a} - \sin a}{\frac{1}{\cos a} - \cos a} =$

$$= \frac{\frac{1 - \sin^2 a}{\sin a}}{\frac{1 - \cos^2 a}{\cos a}} = \frac{\frac{\cos^2 a}{\sin a}}{\frac{\sin^2 a}{\cos a}} =$$

$$= \frac{\cos^2 a}{\sin a} \cdot \frac{\cos a}{\sin^2 a} = \frac{\cos^3 a}{\sin^3 a} = \operatorname{cotg}^3 a$$

Como $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, então $\operatorname{cotg} a = 2$ e, assim,

$y = \operatorname{cotg}^3 a = 2^3 \Leftrightarrow y = 8$

2 $\sin a + \cos a = m \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = m^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 a + 2 \cdot \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a = m^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = m^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = m^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{m^2 - 1}{2}$

Resposta: B

3 Para $\sin x = \frac{1}{3}$, temos:

$y = \sec^2 x - \operatorname{tg} x \cdot \sec x = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$

$= \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x) \cdot (1 - \sin x)} =$

$= \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

Resposta: E

4 $\begin{cases} r \cdot \sin \theta = \sqrt{3} \\ r \cdot \cos \theta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{r} \\ \cos \theta = \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}$

Como $0° \leq \theta < 90°$, resulta $\theta = 60°$

Para $\theta = 60°$, temos:

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{r} \\ \cos \theta = \frac{1}{2} = \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow r = 2$$

Os valores de r e θ são, respectivamente, 2 e 60°.

Resposta: E

5 $\text{tg } a + \text{cotg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\text{sen } a} =$

$= \frac{\text{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos a \,.\, \text{sen } a} = \frac{1}{\cos a \,.\, \text{sen } a} =$

$= \frac{1}{\cos a} \cdot \frac{1}{\text{sen } a} = \sec a \,.\, \text{cossec } a$

Resposta: D

Módulo 23 – Medidas de arcos e ângulos

1 I) $5° = 5 \,.\, 60' = 300' = 300 \,.\, 60'' = 18\,000''$

II) $10' = 10 \,.\, 60'' = 600''$

III) $5°10' = 18\,000'' + 600'' = 18\,600''$

2 I) $\begin{cases} 7' = 7 \,.\, 60'' = 420'' \\ 7'20'' = 420'' + 20'' = 440'' \end{cases}$

II) $\begin{cases} 1° = 60' = 60 \,.\, 60'' = 3\,600'' \\ 3' = 3 \,.\, 60'' = 180'' \\ 1°3'4'' = 3\,600'' + 180'' + 4'' = 3\,784'' \end{cases}$

III) $7'20'' + 1°3'4'' = 440'' + 3\,784'' = 4\,224''$

Resposta: E

3

Graus		Radianos
180°	⟷	π
12°	⟷	x

$x \,.\, 180° = 12° \,.\, \pi$

$x = \frac{12\pi}{180°} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15}$ radianos

4 $\frac{\text{comp } (\overset{\frown}{AB})}{3} = \frac{\text{comp } (\overset{\frown}{CD})}{5} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{s_1}{3} = \frac{s_2}{5} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 3\pi/6 \\ s_2 = 5\pi/6 \end{cases}$

Então: $s_2 - s_1 = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow s_2 - s_1 \cong \frac{3{,}14}{3} \cong 1{,}05$

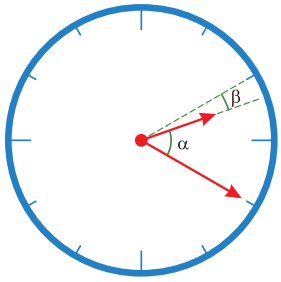
Resposta: B

5 Sendo α a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio e β a medida do ângulo descrito pelo ponteiro menor em 20 minutos, temos:

Ponteiro "pequeno":

$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ minutos} — 30° \\ 20 \text{ minutos} — \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{20}{60} \,.\, 30° = 10°$

Como $\alpha + \beta = 60°$, resulta $\alpha = 50°$



Resposta: B

Módulo 24 – Ciclo trigonométrico – determinações

1 a)

1550°	360°
− 1440°	4 voltas
110°	

O arco de 1550° corresponde a 4 voltas completas mais 110°. Assim, a 1ª determinação positiva é 110°.

b)

1840°	360°
− 1800°	5 voltas
40°	

A 1ª determinação positiva é 40°.

c)

3000°	360°
− 2880°	8 voltas
120°	

A 1ª determinação **negativa** é – 120°, então, a 1ª determinação **positiva** é 360° – 120° = 240°.

d) Observe que $2\pi = \frac{10\pi}{5}$.

$\frac{72\pi}{5}$	$2\pi = \frac{10\pi}{5}$
$-\frac{70\pi}{5}$	7 voltas
$\frac{2\pi}{5}$	

A 1ª determinação positiva é $\frac{2\pi}{5}$.

e) Observe que $2\pi = \frac{14\pi}{7}$.

$$\begin{array}{l|l} \frac{97\pi}{7} & 2\pi = \frac{14\pi}{7} \\ -\frac{84\pi}{7} & 6 \text{ voltas} \\ \hline \frac{13\pi}{7} & \end{array}$$

A 1ª determinação **negativa** é $-\frac{13\pi}{7}$, então, a 1ª determinação **positiva** é

$$2\pi - \frac{13\pi}{7} = \frac{14\pi - 13\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$$

2 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 60° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$

3 a)

$$\begin{array}{r|l} 780° & 360° \\ -\ 720° & 2 \text{ voltas} \\ \hline 60° & \end{array}$$

A 1ª determinação positiva é 60°

b)

$$\begin{array}{r|l} 600° & 360° \\ -\ 360° & 1 \text{ volta} \\ \hline 240° & \end{array}$$

A 1ª determinação positiva é 360° – 240° = 120°

c)

$$\begin{array}{l|l} \frac{284\pi}{9} & 2\pi = \frac{18\pi}{9} \\ -\frac{270\pi}{9} & 15 \text{ voltas} \\ \hline \frac{14\pi}{9} & \end{array}$$

A 1ª determinação positiva é $\frac{14\pi}{9}$

d)

$$\begin{array}{l|l} \frac{37\pi}{3} & 2\pi = \frac{6\pi}{3} \\ -\frac{36\pi}{3} & 6 \text{ voltas} \\ \hline \frac{\pi}{3} & \end{array}$$

A 1ª determinação negativa é

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$$

e)

$$\begin{array}{l|l} \frac{51\pi}{5} & 2\pi = \frac{10\pi}{5} \\ -\frac{50\pi}{5} & 5 \text{ voltas} \\ \hline \frac{\pi}{5} & \end{array}$$

A 1ª determinação positiva é

$$2\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}$$

Resposta: D

4 a)

$$\begin{array}{r|l} 1000° & 360° \\ 280° & 2 \end{array}$$

A 1ª determinação positiva do arco de medida 1000° é 280°.

b)

$$\begin{array}{r|l} 1210° & 360° \\ 130° & 3 \end{array}$$

A 1ª determinação positiva do arco de medida – 1210° é 360° – 130° = 230°.

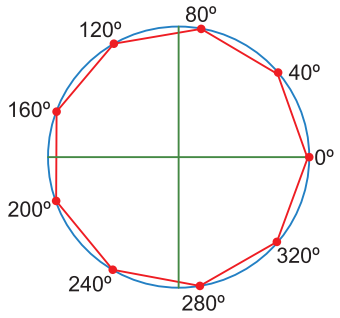
c)

$$\begin{array}{l|l} \frac{8\pi}{3} & \frac{6\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} & 1 \end{array}$$

A 1ª determinação positiva do arco de medida $\frac{8\pi}{3}$ é $\frac{2\pi}{3}$.

5 Sendo $K \in \mathbb{N}$, os arcos da forma $K \cdot 40°$ são 0°, 40°, 80°, 120°, ...

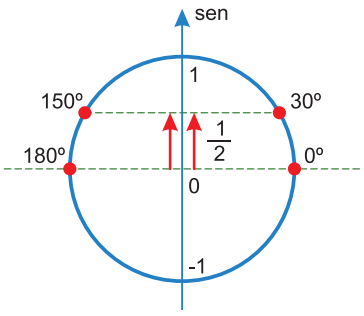
No círculo trigonométrico, resulta um polígono regular de 9 lados.



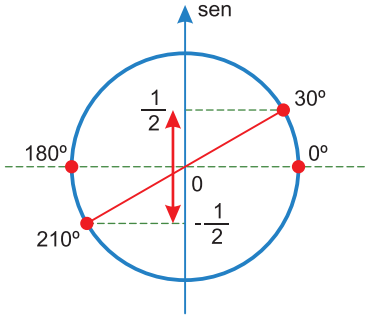
Resposta: C

Módulo 25 – Função seno

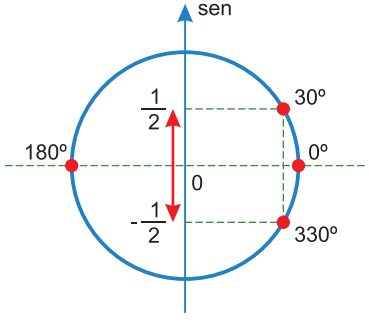
1 a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$



b) $\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$

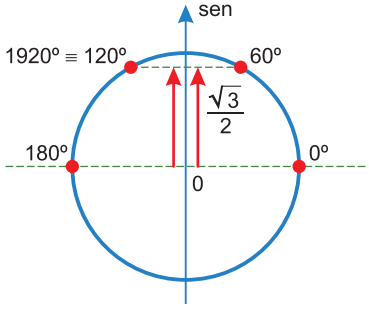


c) $\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$



d) $\text{sen } \frac{5\pi}{6} = \text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

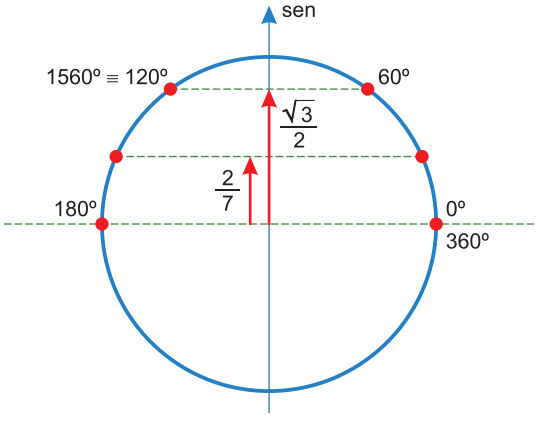
e) $\text{sen } 1920° = \text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$



2 I) A 1ª determinação positiva do arco de 1560° é 120°, pois:

$$\begin{array}{r|l} 1560° & 360° \\ -\,1440° & 4 \text{ voltas} \\ \hline 120° & \end{array}$$

II)



III) Existem 2 arcos em cada volta no ciclo trigonométrico cujo seno vale $\frac{2}{7}$. Assim, em 4 voltas completas existem 8 arcos e, entre 1440° e 1560°, há mais 1 arco, totalizando, portanto, 9 arcos.

Resposta: D

3 Para $\text{sen } x = \frac{2a-1}{3}$, temos:

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2a-1}{3} \leqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leqslant 2a-1 \leqslant 3 \Leftrightarrow -2 \leqslant 2a \leqslant 4 \Leftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 2$$

Resposta: A

4 Para $x = \frac{\pi}{3}$, temos $\text{sen } x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Então:

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 =$$

$$= 1 + \sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}$$

5 $\frac{\text{sen } 0° + \text{sen } 60° + \text{sen } 120° + \text{sen } 180°}{\text{sen } 30° + \text{sen } 150°} =$

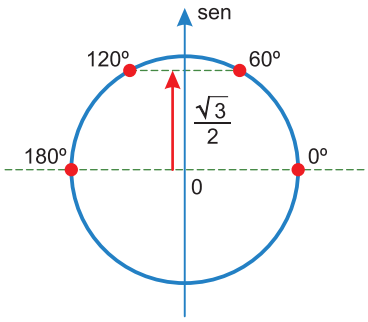
$$= \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Resposta: D

Módulo 26 – Equações e inequações que envolvem a função seno

1 $2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

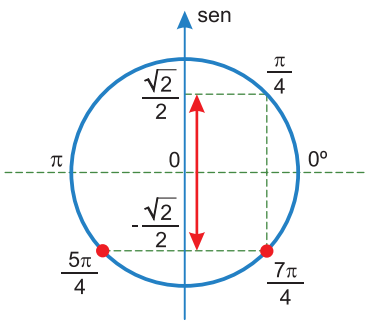
Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:



$S = \{60°; 120°\}$

2 $2\operatorname{sen} x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

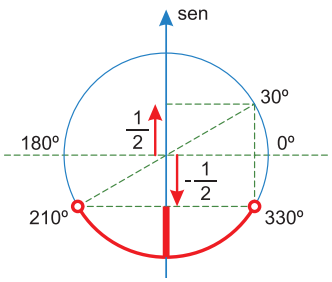
Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:



$S = \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

3 $4\operatorname{sen} x + 2 < 0 \Leftrightarrow 4\operatorname{sen} x < -2 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}$

Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:



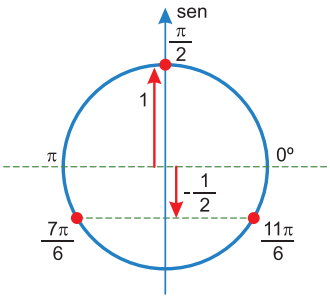
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 210° < x < 330°\}$

4 $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 1 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{-1}{2}$$

Para $x \in [0; 2\pi]$, temos:



$S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

5 $\operatorname{sen} x = \operatorname{cossec} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1$

$= \operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x = -1$.

Para $0° < x < 360°$, $x = 90°$ ou

$x = 270°$ e, então, $90° + 270° = 360°$.

Resposta: D

Módulo 27 – Função cosseno

1 a) $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

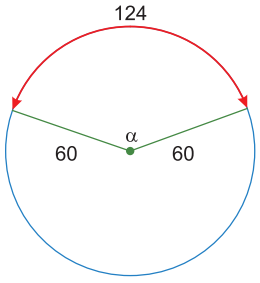
b) $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos \frac{7\pi}{4} = \cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos 855° = \cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2



I) $\alpha = \frac{124}{60} = \frac{31}{15} = \frac{10 \cdot \pi}{15} = \frac{2\pi}{3}$

II) $\cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

Resposta: D

3 $\cos \beta = \frac{AP}{AQ} = \frac{AP}{2 \cdot AP} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 60°$ e, portanto, $\alpha = 30°$

Assim, sen $(\alpha + 3 \cdot \beta) =$

$= \text{sen}\,(30° + 3 \cdot 60°) = \text{sen}\,210° = -\frac{1}{2}$

Resposta: C

4 Se $x \in]\pi; \frac{3\pi}{2}[$, então, $-1 < \cos x < 0$.

Para $\cos x = 2k - 1$, temos:

$-1 < 2k - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < 2k < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < k < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \in]0; \frac{1}{2}[$

Resposta: D

5 $\frac{\cos 30° + \cos 60° + \cos 90° + \cos 120° + \cos 150° + \cos 180°}{\cos 45°} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

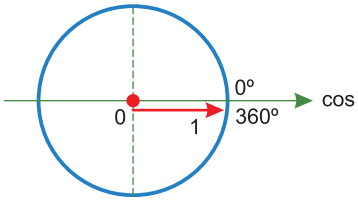
$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Resposta: E

Módulo 28 – Equações e inequações que envolvem a função cosseno

1 $\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$

Para $0 \leq x \leq 360°$, temos:



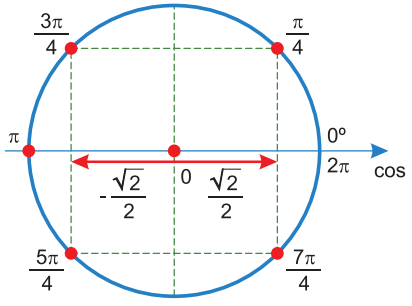
$S = \{0; 360°\}$

2 $2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

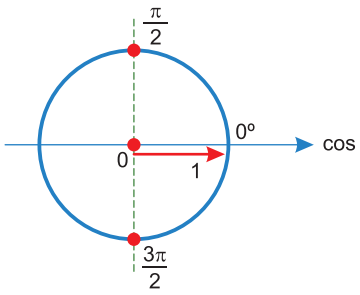


$S = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$, portanto, a equação tem 4 soluções.

3 $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x \cdot (\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$

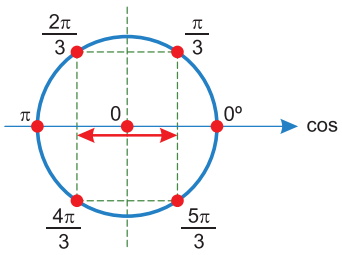
Para $0 \leq x < 2\pi$, temos:



$S = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$

4 $1 - 4\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow -4\cos^2 x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = -\frac{1}{2}$



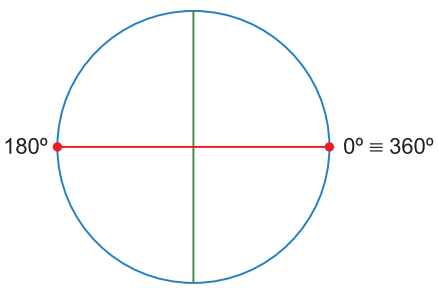
Logo, a soma das raízes compreendidas entre 0 e π é:

$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

Resposta: A

5 $\cos x = \sec x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$ ou $\cos x = -1$.



Para $0° \leq x \leq 360°$ temos que $\cos x = \text{sen } x$ para $x = 0°$ ou $x = 180°$ ou $x = 360°$.

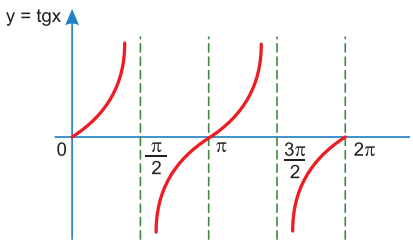
A soma desses valores é $180° + 360° = 540°$

Resposta: D

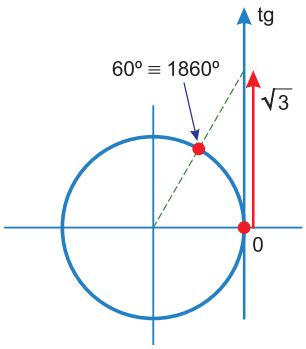
Módulo 29 – Função tangente

1

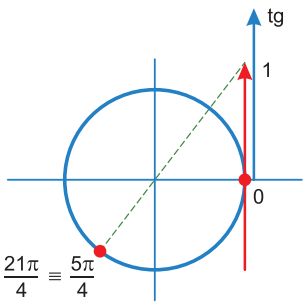
x		tg x
0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	∄
180°	π	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	∄
360°	2π	0



2 a) $\text{tg } 1860° = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$



b) $\text{tg } \frac{21\pi}{4} = \text{tg } \frac{5\pi}{4} = 1$



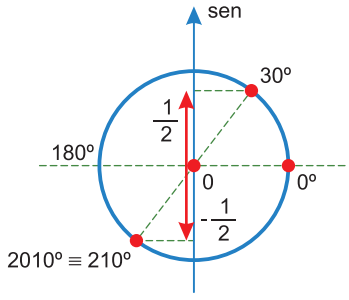
3 I) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2x = 1 \Leftrightarrow \cos^2x = 1 - \frac{16}{25}$$

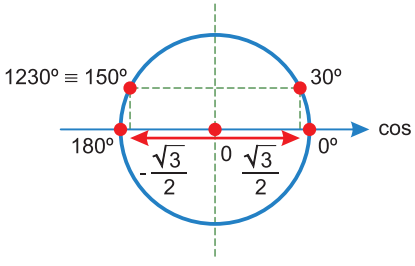
$$\cos^2x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{5} \text{ (não convém!)} \\ \cos x = -\frac{3}{5} \text{ (x} \in \text{2º quadrante)} \end{cases}$$

II) $\text{tg } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \text{tg } x = -\frac{4}{3}$

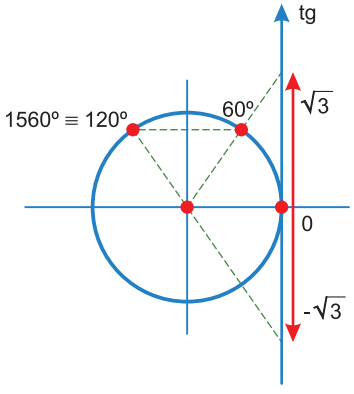
4 I) $\text{sen } (2010°) = \text{sen } (210°) = -\text{ sen } (30°) = -\frac{1}{2}$



II) $\cos (1230°) = \cos (150°) = -\cos (30°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



III) $\text{tg } (1560°) = \text{tg } (120°) = -\text{ tg } (60°) = -\sqrt{3}$



IV) $\text{sen } (2010°) \cdot \cos (1230°) \cdot \text{tg } (1560°) =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$$

Resposta: E

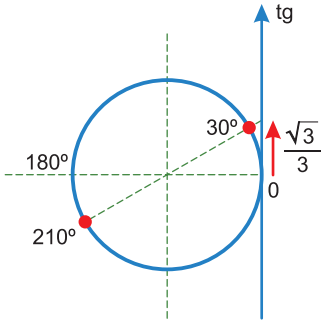
5 $2565° \,\big|\, 360°$
$45° \quad\quad 7$

A 1ª determinação positiva do arco de medida 2565° é 45° e, portanto, $\text{tg } 2565° = \text{tg } 45° = 1$.
Resposta: B

Módulo 30 – Equações e inequações que envolvem a função tangente

1 $3 \text{ tg } x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3 \text{ tg } x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{tg } x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

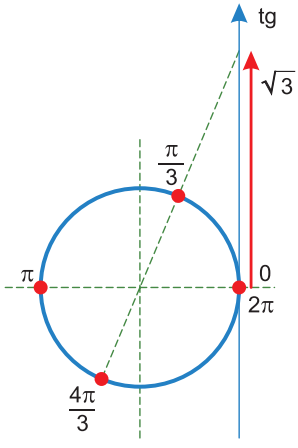
Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:



V = {30°; 210°}

2 $\text{tg } x \geq \sqrt{3}$

Para $0° \leq x \leq 360°$, temos:

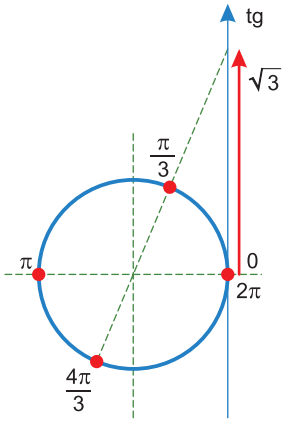


V = {x ∈ ℝ / 60° ≤ x < 90° ou 240° ≤ x < 270°}

3 $tg^2x - \sqrt{3} \cdot tg\ x = 0 \Leftrightarrow tg\ x\ (tg\ x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\ x = 0$ ou $tg\ x = \sqrt{3}$

Para $x \in [0; 2\pi]$, temos:



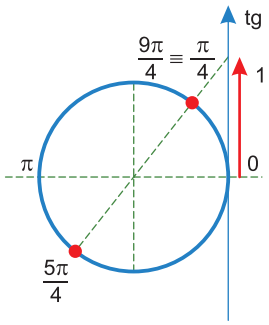
$V = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$

4 $tg\ x + cotg\ x = 2 \Leftrightarrow tg\ x + \frac{1}{tg\ x} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg^2x + 1 = 2 \cdot tg\ x \Leftrightarrow tg^2x - 2 \cdot tg\ x + 1 = 0$

$tg\ x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} \Leftrightarrow tg\ x = 1$

Para $0 \leq x \leq 3\pi$, temos:



$V = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right\}$

5 $sen^2\ x + cos^2\ x = 1 \Leftrightarrow \frac{sen^2\ x}{cos^2\ x} + \frac{cos^2\ x}{cos^2\ x} =$

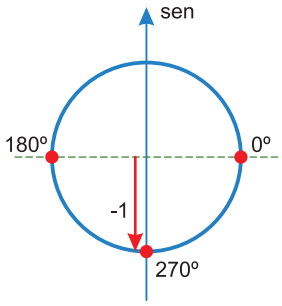
$= \frac{1}{cos^2\ x} \Leftrightarrow tg^2\ x + 1 = sec^2\ x$

Módulo 31 – Equações trigonométricas

1) $sen^2x + sen\ x = 0 \Leftrightarrow sen\ x \cdot (sen\ x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\ x = 0$ ou $sen\ x = -1$

Para $0° \leq x < 360°$, temos:



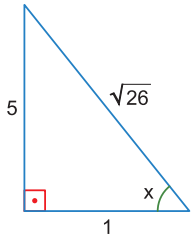
$V = \{0°; 180°; 270°\}$

2 $sec^2x + 3tg\ x - 11 = 0 \Leftrightarrow tg^2x + 1 - 3tg\ x - 11 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg^2x - 3tg\ x - 10 = 0 \Leftrightarrow tg\ x = 5$ ou $tg\ x = -2$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, devemos ter $tg\ x = 5$.

Um triângulo retângulo que possui um ângulo x tal que $tg\ x = 5$ é dado abaixo.



Nesse triângulo, obtemos $sen\ x = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$

Resposta: C

3 $3 \cdot [tg^2x + 1] = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot tg\ x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\ tg^2x + 3 = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot tg\ x \Leftrightarrow$

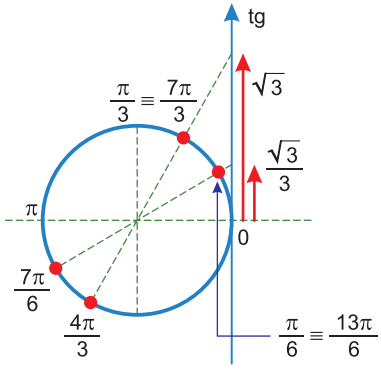
$\Leftrightarrow 3 \cdot tg^2x - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot tg\ x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\ x = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 - 36}}{6} =$

$= \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{tg } x = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Para $0 < x < 3\pi$, temos:



$V = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}\right\}$

4 Para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, temos:

$f(x) = x^2 + x \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \text{sen } \frac{3\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x \cdot 0 + (-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \pm 1$

$V = \{-1; 1\}$

5 $\text{sen } x = \sec x - \cos x \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{1}{\cos x} - \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cos x = 1 - \cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cos x = 1 - (1 - \text{sen}^2 x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cos x = 1 - 1 + \text{sen}^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x \cos x - \text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x (\cos x - \text{sen } x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x - \text{sen } x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$

Para $0 \leq x < 2\pi$, devemos ter $x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.

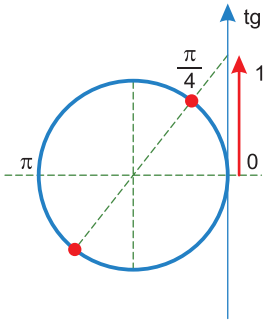
A soma desses valores é

$0 + \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Resposta: C

Módulo 32 – Equações trigonométricas

1 $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$



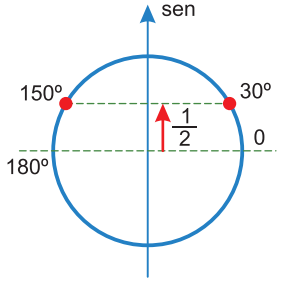
Em $\mathbb{R}$, temos:

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$

$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

2 $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$



Em $\mathbb{R}$, temos:

$\frac{x}{2} = 30° + n \cdot 360°$ ou $\frac{x}{2} = 150° + n \cdot 360° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 60° + n \cdot 720°$ ou $x = 300° + n \cdot 720°$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 60° + n \cdot 720°$ ou

$x = 300° + n \cdot 720°, n \in \mathbb{Z}\}$

3 $5 \cdot \cos(3x) - 4 + 2 \cdot \operatorname{sen}^2(3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot \cos(3x) - 4 + 2 \cdot [1 - \cos^2(3x)] = 0 \Leftrightarrow$

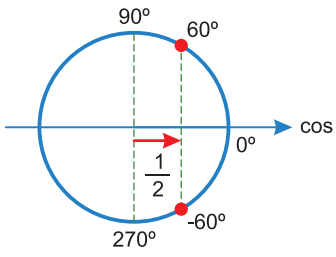
$\Leftrightarrow 5 \cdot \cos(3x) - 4 + 2 - 2 \cdot \cos^2(3x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot \cos^2(3x) - 5 \cdot \cos(3x) + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(3x) = 2$ (não existe x) ou

$\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$



Em $\mathbb{R}$, temos:

$3x = \pm 60° + n \cdot 360° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \pm 20° + n \cdot 120°$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm 20° + n \cdot 120°, n \in \mathbb{Z}\}$

4 Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \cos x \Leftrightarrow \sec^2 x = \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x} = \cos x \Leftrightarrow \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

Uma das soluções é 2π, pertencente ao intervalo $\left[\dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{9\pi}{4}\right]$

Resposta: C

5 Como $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = 1$, temos

$\operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^4 \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^6 \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^8 \dfrac{\pi}{2} +$

$+ \operatorname{sen}^{10} \dfrac{\pi}{2} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

Resposta: B

FRENTE 2

Módulo 17 – Equações do 1º grau

1 a) $3x - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$

b) $2x + 16 = x - 4 \Leftrightarrow 2x - x = -4 - 16 \Leftrightarrow x = -20$

c) $x + 4 = -x - 7 \Leftrightarrow 2x = -4 - 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -11 \Leftrightarrow x = -\dfrac{11}{2}$

2 $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{1}{1} \Leftrightarrow \dfrac{3x + 2x + x - 1}{6} = \dfrac{6}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 1 = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{6}$

$V = \left\{\dfrac{7}{6}\right\}$

3 Sendo x o número de peças produzidas, temos:

$5000 + 3{,}5 \cdot x = 6225$

$3{,}5 \cdot x = 6225 - 5000$

$3{,}5 \cdot x = 1225$

$x = 350$

Resposta: C

4 O número total de aulas de Beatriz é $n + 24$.

Então, $n = \dfrac{2}{5}(n + 24) \Leftrightarrow 5n = 2n + 48 \Leftrightarrow 5n - 2n = 48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n = 48 \Leftrightarrow n = 16$

Resposta: A

5 $\dfrac{x}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}(4 - x) \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} - 2 = -2 + \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4 = -4 + x \Leftrightarrow x - x = -4 + 4 \Leftrightarrow 0x = 0$

que é verdadeira para todo número real x.

Resposta: D

Módulo 18 – Sistemas de equações

1 Sendo x o número de patos e y o número de porcos, temos:

$\begin{cases} x + y = 48 \\ 2x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -96 \\ 2x + 4y = 120 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 24 \Leftrightarrow y = 12$

Resposta: B

2 Se **m** for o número de **motos** e **a** o número de **automóveis**, então:

$$\begin{cases} m + a = 37 \\ 2m + 4a = 118 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m - a = -37 \\ m + 2a = 59 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 22 \\ m + 2a = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 22 \\ m = 15 \end{cases}$$

Resposta: 22 automóveis

3 Sejam x e y as idades atuais de João e Maria, respectivamente.

Assim:

$$\begin{cases} x - 5 = 2(y - 5) \\ (x + 5) + (y + 5) = 65 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 5 \\ x + y = 55 \end{cases} \Rightarrow x = 35 \text{ e } y = 20$$

Portanto, as idades atuais de João e Maria são 35 e 20 anos, respectivamente. Logo, João é **15 anos** mais velho que Maria.

4 Sendo **p** o preço do prato principal, **p – 3** o preço da sobremesa e **n** o número de pessoas do grupo, temos:

$$\begin{cases} p \cdot n = 56 \\ (p - 3) \cdot n = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{p-3} = \frac{56}{35} \\ pn = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35p = 56p - 168 \\ pn = 56 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21p = 168 \\ pn = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 8 \\ n = 7 \end{cases}$$

Respostas: a) 7 pessoas
b) R$ 8,00

5 $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

Somando, membro a membro, as duas equações, obtém-se $3y = 3 \Leftrightarrow y = 1$.

Para y = 1, na 1ª equação, $x + 2 \cdot 1 = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

Resposta: V = {(2; 1)}

Módulo 19 – Equações do 2.º grau – Fórmula de Báskara

1 a) $1 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 10 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$x = 5$ ou $x = 2$

$V = \{2; 5\}$

b) $1 \cdot x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$x = -1$ ou $x = -3$

$V = \{-3; -1\}$

2 a) $3x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3x + 12) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$

$V = \{0; -4\}$

b) $9 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

$$V = \left\{\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

3 Sendo x o número de toneladas colhidas por hectare e y o número de hectares plantados, temos:

I) $x \cdot y = 8400 \Leftrightarrow y = \frac{8400}{x}$

II) $(y - 20) \cdot (x + 1) = 8400$

$xy + y - 20x - 20 = 8400$

$$8400 + \frac{8400}{x} - 20x - 20 = 8400$$

$$\frac{8400}{x} - 20x - 20 = 0 \quad (\div 20)$$

$$\frac{420}{x} - x - 1 = 0$$

$-x^2 - x + 420 = 0 \Rightarrow x = 20$, pois $x > 0$

Resposta: E

4 De acordo com o enunciado, temos:

$(5 - x) \cdot (8 - x) = 40 - 42$

$40 - 5x - 8x + x^2 = -2$

$x^2 - 13x + 42 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 7$

Resposta: A

5 I. $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

II. $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

II. $0{,}3x = 0{,}1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\sqrt{-4}$ não é número real, $\sqrt{2}$ é irracional e $\frac{1}{3}$ é racional.

Resposta: A

Módulo 20 – Soma e produto – Método da tentativa

1 $1 \cdot x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-5}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow V = \{2; 3\}$$

2 $1 \cdot x^2 - 6x + 8 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-6}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow V = \{2; 4\}$$

3 $1 \cdot x^2 + 4x + 3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{4}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V = \{-3; -1\}$

4 Uma equação do segundo grau, cujas raízes são 2 e $\frac{1}{3}$, é:

$$x^2 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)x + \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

5 $1 \cdot x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{\sqrt{6}}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

Módulo 21 – Equações redutíveis a 1º e 2º graus

1 $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) - (x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

$V = \{-1; 1; 3\}$

2 $(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 10 = 0$

Fazendo $x^2 + 1 = y$, temos:

$y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 5$

Para $y = 2$, temos $x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Para $y = 5$, temos $x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$

Assim, o conjunto verdade da equação é

$V = \{-2; -1; 1; 2\}$

Resposta: C

3 I) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (x-1)^2 - 3 \cdot (x-2)^2 = 8 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 3 \cdot (x^2 - 4x + 4) =$

$= 8 \cdot (x^2 - 2x - x + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 12x - 12 =$

$= 8x^2 - 24x + 16 \Leftrightarrow 8x^2 - 30x + 25 = 0$

II) $\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 25 = 900 - 800 = 100$

III) $8x^2 - 30x + 25 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm 10}{16} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ ou $x = \frac{5}{2}$

Portanto, $V = \left\{\frac{5}{4}; \frac{5}{2}\right\}$

4 $\sqrt{x + 1 + \sqrt{2x - 3}} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + 1 + \sqrt{2x - 3}}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 + \sqrt{2x - 3} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 3} = 3 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2x - 3})^2 = (3 - x)^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 6$

Verificação:

Para $x = 2$, temos $\sqrt{x + 1 + \sqrt{2x - 3}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2 + 1 + \sqrt{2 \cdot 2 - 3}} = 2 \Rightarrow 2 = 2$ (verdadeira),

logo, $x = 2$ é solução.

Para $x = 6$, temos $\sqrt{x + 1 + \sqrt{2x - 3}} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{6 + 1 + \sqrt{2 \cdot 6 - 3}} = 2 \Rightarrow \sqrt{10} = 2$ (falsa),

logo $x = 6$ não é solução. Portanto, $V = \{2\}$

5 $\frac{1}{x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 1 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Como x é positivo, então $x = \sqrt{2}$.

Resposta: D

Módulo 22 – Problemas de 1.º e 2.º graus

1 Sendo $V = \{2; a\}$ o conjunto verdade da equação

$1 \cdot x^2 - 1 \cdot x + c = 0$, então:

$$\begin{cases} 2 + a = \frac{1}{1} \\ 2 \cdot a = \frac{c}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a = 1 \\ 2 \cdot a = c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2 \cdot (-1) = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Portanto, $a + c = -1 + (-2) = -3$

Resposta: E

2 Sendo $V = \{a; b\}$ o conjunto verdade da equação

$x^2 - 3k\,x + k^2 = 0$, então:

$$\begin{cases} a + b = 3k \\ a \cdot b = k^2 \end{cases}$$

$a + b = 3k \Rightarrow (a + b)^2 = (3k)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 9k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{1,75} + 2 \cdot \underbrace{ab}_{k^2} = 9k^2 \Leftrightarrow 1,75 + 2k^2 = 9k^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7k^2 = 1,75 \Leftrightarrow 7k^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4}$

3 Sejam x e x + 1 os números procurados.

$x^2 + (x + 1)^2 = 481 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 481 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 240 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 15$ ou $x = -16$

Como x deve ser positivo, temos que $x = -16$ não convém; logo, $x = 15$. Assim, os números procurados são 15 e 16.

4 Sejam x e y o número de residências e recenseadores, respectivamente.

Assim: $\begin{cases} 100 \cdot y + 60 = x & \text{(I)} \\ 102 \cdot y = x & \text{(II)} \end{cases}$

Comparando (I) e (II), temos:

$102 \cdot y = 100y + 60 \Leftrightarrow 2y = 60 \Leftrightarrow y = 30$

Substituindo $y = 30$ em (II), obtemos:

$102 \cdot 30 = x \Leftrightarrow x = 3060$

Logo, a cidade tem 3060 residências.

5 Se as idades são **x** e **y**, então

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ (x - 8) \cdot (y - 8) = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ (x - 8)(y - 8) = 48 \end{cases}$$

Substituindo y por $30 - x$ na segunda equação, resulta

$(x - 8)(30 - x - 8) = 48 \Leftrightarrow (x - 8)(22 - x) =$

$= 48 \Leftrightarrow 22x - x^2 - 176 + 8x = 48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 30x + 224 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$

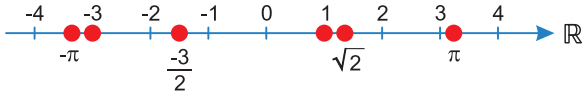
$\Leftrightarrow x = 16$ ou $x = 14$ (não serve)

Se $x = 16$, então $y = 14$.

Resposta: E

Módulo 23 – Conjuntos numéricos

1



2 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$



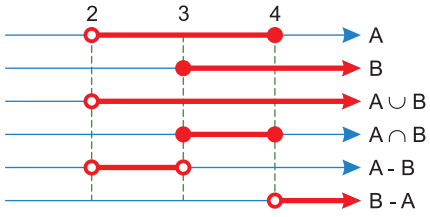
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$



c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x \geq 5\}$



3



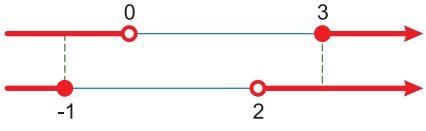
a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2; +\infty[$

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\} = [3; 4]$

c) $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\} =]2; 3[$

d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} =]4; +\infty[$

4



$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$

5 I e III são falsas

II e IV são verdadeiras

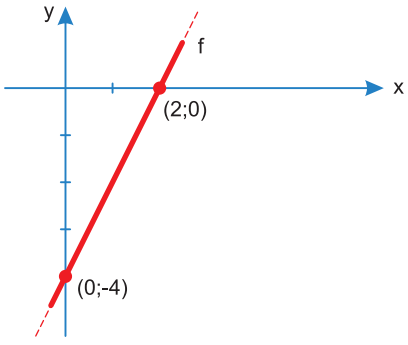
Resposta: C

Módulo 24 – Função polinomial do 1º grau

1 Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2x - 4$, então:

x	f(x)	(x; y)
0	– 4	(0; – 4)
2	0	(2; 0)

O gráfico de **f** é, pois:



2 a) $\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b \\ f(-1) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot (-1) + b = 2$

b) $\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b \\ f(1) = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot 1 + b = 4$

c) $\left\{\begin{matrix} a(-1) + b = 2 \\ a \cdot 1 + b = 4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -a + b = 2 \\ a + b = 4 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = 1 \\ b = 3 \end{matrix}\right.$

d) Se a = 1 e b = 3, então a sentença que define f é: **f(x) = x + 3**.

3 a) $\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b \\ f(0) = 1 + f(1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot 0 + b = 1 + a \cdot 1 + b \Rightarrow a = -1$

b) $\left.\begin{matrix} f(x) = -x + b \\ f(-1) = 2 - f(0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow -(-1) + b = 2 - (-0 + b) \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

c) Se $a = -1$ e $b = \frac{1}{2}$, então $f(x) = -x + \frac{1}{2}$

d) $f(3) = -3 + \frac{1}{2} = \frac{-6 + 1}{2} = \frac{-5}{2}$

Resposta: B

4 Na produção mensal de x peças, temos:

I) custo fixo: R$ 12,00

II) custo variável: R$ 0,70 . x

III) custo total: 12,00 + 0,70 . x

Portanto, a função que representa o custo total é $f(x) = 12 + 0{,}70 \cdot x$

Resposta: C

5 Se $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é estritamente crescente, então $a > 0$.

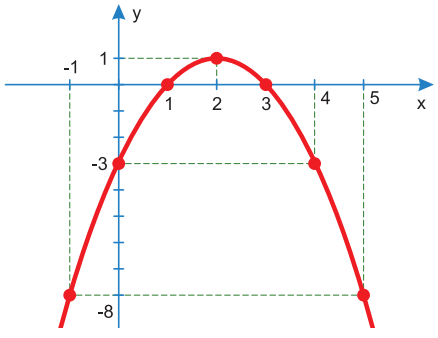
Resposta: E

Módulo 25 – Função polinomial do 2.º grau

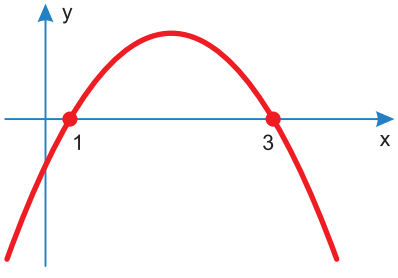
1

x	f(x)	(x; y)
–1	$f(-1) = -(-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 3 = -8$	(–1; –8)
0	$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$	(0; –3)
1	$f(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 3 = 0$	(1; 0)
2	$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$	(2; 1)
3	$f(3) = -3^2 + 4 \cdot 3 - 3 = 0$	(3; 0)
4	$f(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3$	(4; –3)
5	$f(5) = -5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -8$	(5; –8)

O gráfico de **f** é:



2 O gráfico de **f** é:



Assim sendo:

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$

$V = \{1; 3\}$

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 3$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

3 Se $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, então $f(x_1)$ e $f(x_2)$ têm sinais contrários, isto é, ($f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$) ou ($f(x_1) < 0$ e $f(x_2) > 0$). Pode-se, portanto, afirmar que a função tem parte do gráfico acima do eixo "x" e parte do gráfico abaixo do eixo "x", o que ocorre apenas quando $\Delta > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$.

Resposta: D

4 $\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + 2 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow a + b + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a + b = -2$

Resposta: D

5 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 2$.



A distância AB é $2 - (-5) = 7$.

Resposta: C

Módulo 26 – Vértice e conjunto imagem

1 $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49 - 24}{4 \cdot 1} = -\frac{25}{4}$

O vértice da parábola é, pois, o ponto

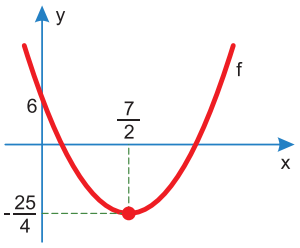
$V = \left(\frac{7}{2}; -\frac{25}{4}\right)$

Resposta: D

2 O vértice da parábola da equação $f(x) = x^2 - 7x + 6$ é:

$$\begin{cases} x_V = \frac{7}{2} \\ y_V = -\frac{49 - 24}{4} = -\frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow V\left(\frac{7}{2}; -\frac{25}{4}\right)$$

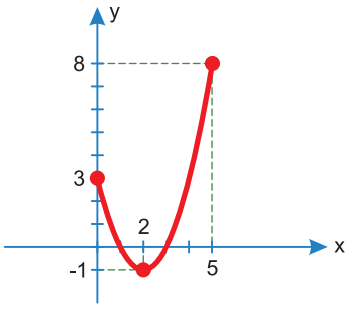
O gráfico de f é:



O conjunto imagem de f é: $\left[-\frac{25}{4}; +\infty\right[$

Resposta: A

3 O gráfico da função é



Valor máximo da função: 8
Valor mínimo da função: – 1

4 $S(x) = S_{ABCD} - S_{PCN} - S_{MNB} \Rightarrow$

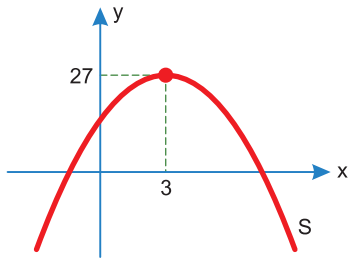
$$\Rightarrow S(x) = 6^2 - \frac{x \cdot x}{2} - \frac{(6 - x)(6 - x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S(x) = -x^2 + 6x + 18$$

O vértice da parábola é

$$\begin{cases} x_V = \frac{-6}{-2} = 3 \\ y_V = S(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 18 = 27 \end{cases} \Rightarrow V(3; 27)$$

O gráfico é:



Assim sendo, a área é máxima para x = 3 e o valor máximo desta área é 27 cm^2.

Resposta: x = 3 cm; $S_{máx}$ = 27 cm^2

5 $L(x) = R - C = (-x^2 + 10{,}5x) - (x^2 + 0{,}5x + 1)$

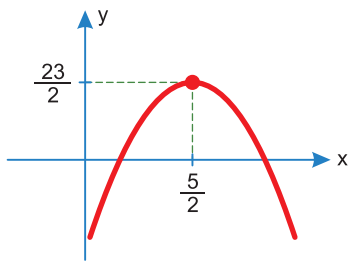
$L(x) = -2x^2 + 10x - 1$

O vértice da parábola correspondente é:

$$\begin{cases} x_V = -\frac{10}{-4} = \frac{5}{2} \\ y_V = L\left(\frac{5}{2}\right) = -2 \cdot \frac{25}{4} + 10 \cdot \frac{5}{2} - 1 = \frac{23}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{5}{2}; \frac{23}{2}\right)$$

O gráfico de L é:



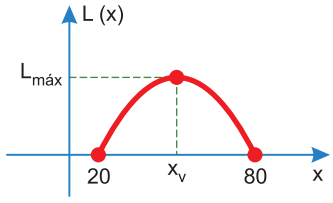
O lucro máximo é $\frac{23}{2} = 11{,}5$

Resposta: B

Módulo 27 – Vértice e conjunto imagem

1 I) Se, para cada par de sapatos, o preço de venda, em reais, é x e o preço de custo é R$ 20,00, o lucro obtido é de (x – 20) reais por par.

II) Na venda de (80 – x) pares por mês, o lucro mensal é dado pela função L(x) = (x – 20) . (80 – x), cujas raízes são 20 e 80 e cujo gráfico é

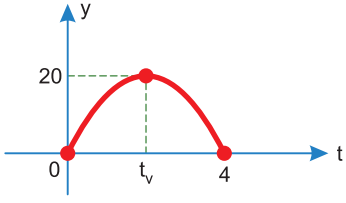


III) O lucro máximo é obtido para

$$x = x_V = \frac{20 + 80}{2} = 50$$

Resposta: B

2 I) De acordo com o enunciado, temos o seguinte esboço do gráfico:



II) As raízes da função são 0 e 4, então, a função é do tipo
$y = a \cdot (t - 0) \cdot (t - 4) = a \cdot t \cdot (t - 4)$

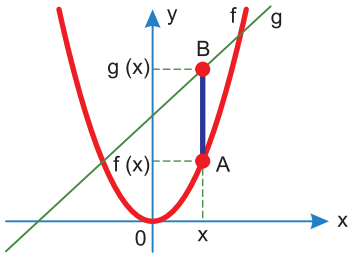
III) A abscissa t do vértice é

$$t_V = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

IV) Para $t = 2 \Rightarrow y = 20$, então:
$y = a \cdot t \cdot (t - 4) \Rightarrow 20 = a \cdot 2 \cdot (2 - 4) \Leftrightarrow a = -5$

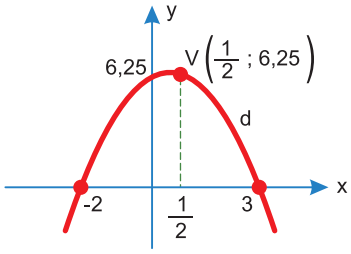
Portanto, a função é
$y = -5 \cdot t \cdot (t - 4) = -5t^2 + 20t$
Resposta: A

3 Os segmentos descritos no enunciado são do tipo $\overline{AB}$, com $A \in f$, $B \in g$ e $\overrightarrow{AB} // Oy$.



Se d(x) for a medida do segmento $\overline{AB}$, então:
$d(x) = g(x) - f(x) \Leftrightarrow d(x) = x + 6 - x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(x) = -x^2 + x + 6$

O gráfico da função d é do tipo



Sendo $x_V = \frac{1}{2}$ e $y_V = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = 6,25$.

Assim sendo, o máximo valor de **d** é 6,25.

Resposta: B

4 Em relação ao gráfico da função em que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, pode-se afirmar que

a) é uma parábola de concavidade voltada para baixo;

b) seu vértice é o ponto

$$V\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(2; -\frac{4}{-4}\right) = (2; 1)$$

c) intercepta o eixo das abscissas nos pontos em que $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$. Os pontos são (1; 0) e (3; 0).

d) seu eixo de simetria é a reta $x = \frac{-b}{2a} = 2$.

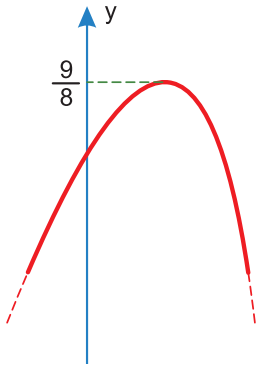
e) intercepta o eixo das ordenadas em (0; –3).

Resposta: B

5 A ordenada do vértice da parábola é

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1)}{4 \cdot (-2)} = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}$$

Como $a = -2 < 0$, a concavidade está voltada para baixo.



O conjunto imagem é Im(f) = $\left]-\infty\ ;\ \frac{9}{8}\right]$

Resposta: A

Módulo 28 – Inequações do 1º grau

1 $2x - 10 < 4 \Leftrightarrow 2x < 14 \Leftrightarrow x < 7$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$

2 $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} < 1 \Leftrightarrow \frac{3x - 2(x+1)}{6} < \frac{6}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - 2x - 2 < 6 \Leftrightarrow x < 8$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

3 a) $1 < \frac{2x-3}{3} \leq 5 \Leftrightarrow 3 < 2x - 3 \leq 15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 < 2x \leq 18 \Leftrightarrow 3 < x \leq 9$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 9\}$

b) $\begin{cases} 2x - 10 < 0 \\ -3x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 5$, pois:



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

4 Se n for a nota da terceira prova, então, pelo enunciado, temos:

$\frac{6{,}3 \cdot 1 + 4{,}5 \cdot 2 + n \cdot 3}{6} \geq 6{,}5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6{,}3 + 9 + 3n \geq 39{,}0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n \geq 39 - 15{,}3 \Leftrightarrow 3n \geq 23{,}7 \Leftrightarrow n \geq 7{,}9$

Resposta: Nota maior ou igual a 7,9.

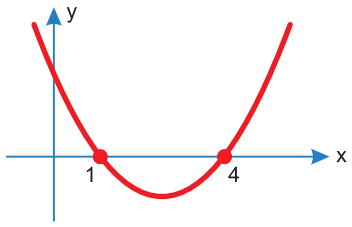
5 $2x - 3 \leq 3 \Leftrightarrow 2x \leq 3 + 3 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$

As soluções pertencentes a $\mathbb{N}$ são 0, 1, 2, 3 e o produto delas é 0. 1. 2. 3 = 0.

Resposta: E

Módulo 29 – Inequações do 2º grau

1 O gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 4$ é do tipo:

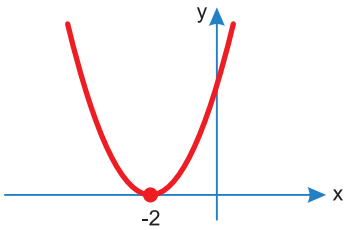


De acordo com o gráfico:

$x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

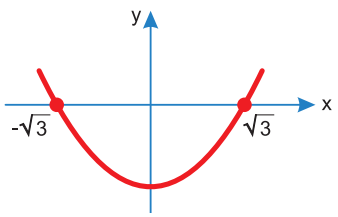
2 O gráfico de $f(x) = x^2 + 4x + 4$ é:



Do gráfico, temos: $x^2 + 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

$V = \mathbb{R} - \{-2\}$

3 O gráfico $f(x) = x^2 - 3$ é:

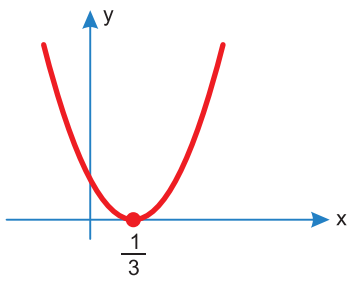


Do gráfico, temos:

$x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

4 O gráfico $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$ é do tipo:

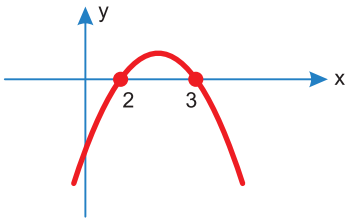


De acordo com o gráfico:

$9x^2 - 6x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Resposta: C

5 O gráfico $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ é do tipo:



De acordo com o gráfico:

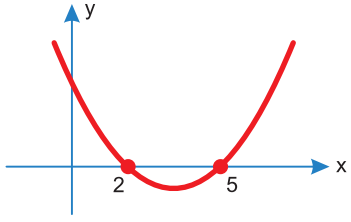
$-x^2 + 5x - 4 > 2 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 < x < 3 \Leftrightarrow x > 2$ e $x < 3$

Resposta: B

Módulo 30 – Sistemas de inequações

1 a) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 7x + 10$ é

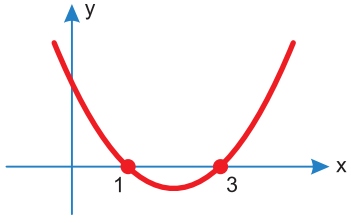


Do gráfico, temos:

$x^2 - 7x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ou $x \geq 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2$ ou $x \geq 5\}$

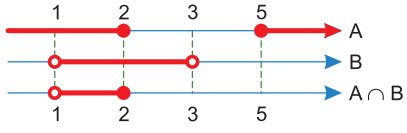
b) O gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$ é



Do gráfico, temos: $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

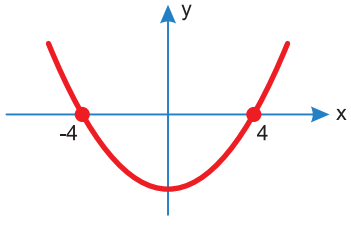
c) De (a) e (b), temos:



$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$

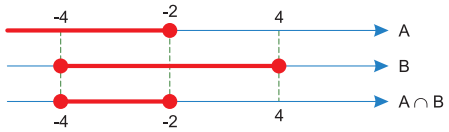
2 a) $3x + 5 \leq 2x + 3 \Leftrightarrow x \leq -2$

b) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 16$ é



Assim, $x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

c) De (a) e (b), temos:

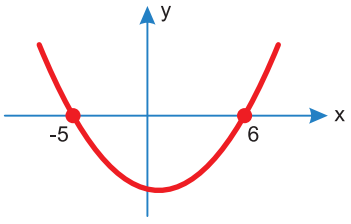


Resposta: D

3 a) $1 \leq \frac{2x - 5}{3} \leq 3 \Leftrightarrow 3 \leq 2x - 5 \leq 9 \Leftrightarrow$

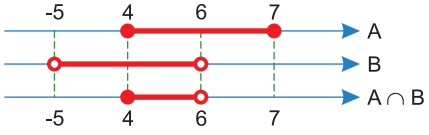
$\Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 7$

b) O gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 30$ é



e, portanto, $x^2 - x - 30 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 6$

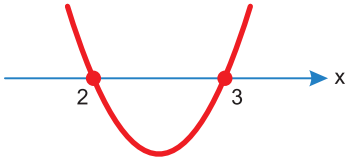
c) De (a) e (b), temos:



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x < 6\}$

4 a) $0 \leq x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0$

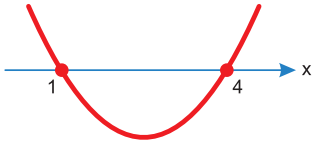
O gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é do tipo



Assim, $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ ou $x \geq 3$

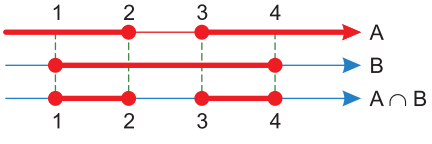
b) $x^2 - 5x + 6 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0$

O gráfico da função $g(x) = x^2 - 5x + 4$ é do tipo



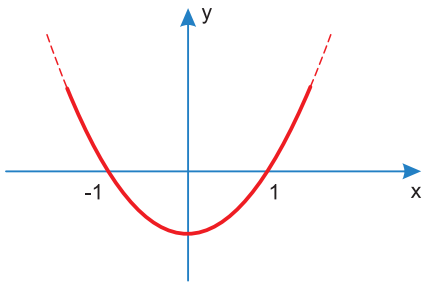
Assim, $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

c) De (a) e (b), temos:

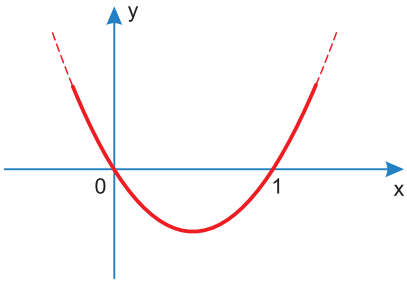


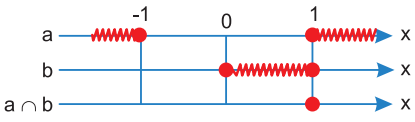
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2$ ou $3 \leq x \leq 4\}$

5 a) $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ é do tipo



b) $x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$, pois o gráfico de $f(x) = x^2 - x$ é do tipo





Portanto, a única solução do sistema é x = 1

Resposta: A

Módulo 31 – Inequações tipo quociente e tipo produto

1 Em $y = x^2 + x - 6$, temos:

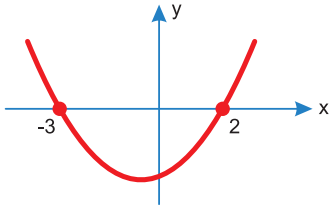
a) O coeficiente de x^2 é a = 1

b) as raízes da equação $x^2 + x - 6 = 0$ são –3 e 2

c) a forma fatorada é:

$y = 1 \cdot (x - (-3)) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = (x + 3) \cdot (x - 2)$

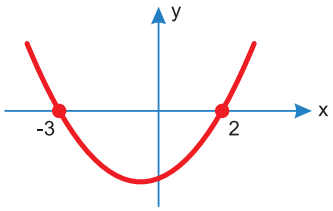
2 O gráfico de $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 2)$ é:



e, portanto, $(x + 3) \cdot (x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$

3 O gráfico de $f(x) = (x + 3) \cdot (x - 2)$ é:



e, portanto, $\frac{x+3}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x + 3) \cdot (x - 2) \leq 0$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow -3 \leq x < 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$

4 $\frac{x-1}{x-2} \leq \frac{x-3}{x-4} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow$

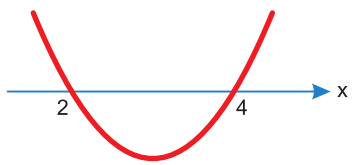
$\Leftrightarrow \frac{(x-1) \cdot (x-4) - (x-3) \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - x + 4 - (x^2 - 3x - 2x + 6)}{(x-2) \cdot (x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + 5x - 6}{(x-2) \cdot (x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x-2) \cdot (x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-4) > 0$

O gráfico da função $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 4)$ é do tipo



e, portanto, $(x - 2) \cdot (x - 4) > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 4\}$

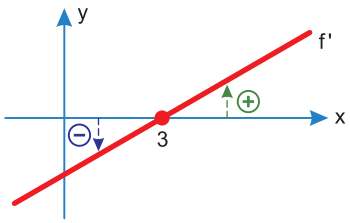
5 $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \leq 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 \leq 8$ e $x \neq 2 \Leftrightarrow x \leq 6$ e $x \neq 2$

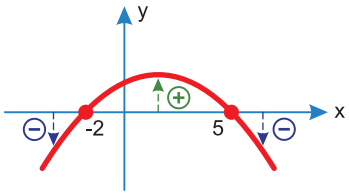
Resposta: B

Módulo 32 – Quadro de sinais

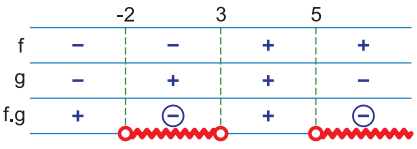
1 a) O gráfico da função $f(x) = x - 3$ é



b) O gráfico da função $g(x) = -x^2 + 3x + 10$ é



c) Pela tabela de sinais, temos:



e, portanto, $(x - 3) \cdot (-x^2 + 3x + 10) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x < 3$ ou $x > 5$

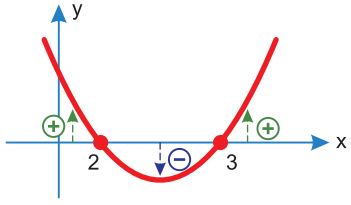
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$

Resposta: A

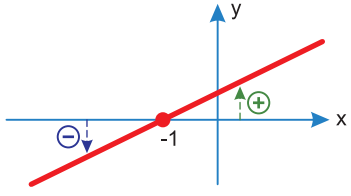
2 a) $\dfrac{x^2 - 3x + 8}{x + 1} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 8}{x + 1} - \dfrac{2}{1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 3x + 8 - 2(x + 1)}{x + 1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} < 0$

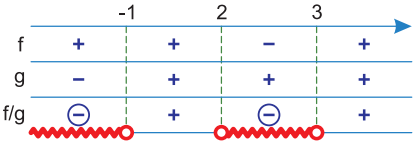
b) O gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ é



c) O gráfico de $g(x) = x + 1$ é



d) Pela tabela de sinais, temos



e, portanto, $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < -1$ ou $2 < x < 3 \Leftrightarrow V =]-\infty; -1[\cup]2; 3[$

Resposta: A

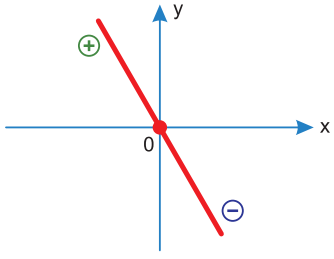
3 a) $\dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{1}{x - 1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{1}{x - 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x \cdot (x-1) - 1(x+3) - 1 \cdot (x+3) \cdot (x-1)}{(x + 3) \cdot (x - 1)} < 0 \Leftrightarrow$

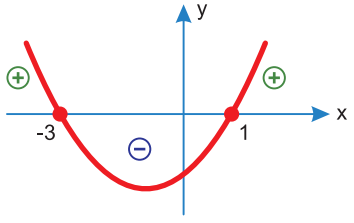
$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x - x - 3 - x^2 + x - 3x + 3}{(x + 3) \cdot (x - 1)} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4x}{(x + 3) \cdot (x - 1)} < 0$

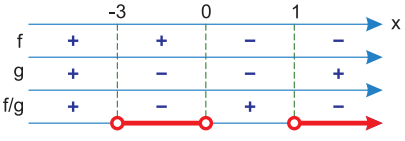
b) O gráfico da função $f(x) = -4x$ é



c) O gráfico de $g(x) = (x + 3) \cdot (x - 1)$ é



d) Pelo quadro de sinais, temos

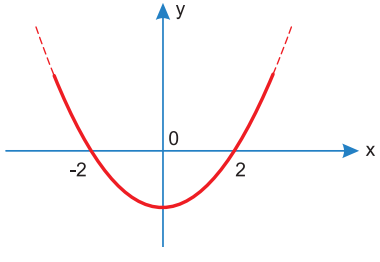


e, portanto, $\dfrac{-4x}{(x + 3) \cdot (x - 1)} < 0 \Leftrightarrow$

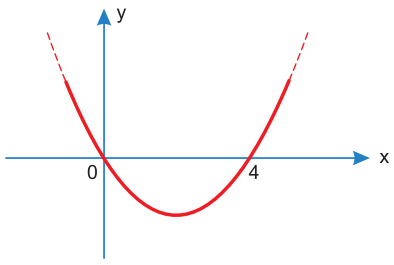
$\Leftrightarrow -3 < x < 0$ ou $x > 1$

Resposta: B

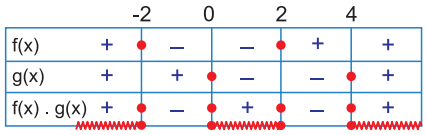
4 O esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 4$ é



O esboço do gráfico de $g(x) = x^2 - 4x$ é



Quadro de sinais



Portanto, $(x^2 - 4)(x^2 - 4x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$

ou $0 \leq x \leq 2$ ou $x \geq 4$

Resposta: D

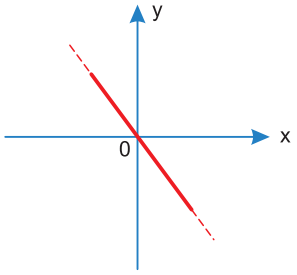
5 $\frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1) - 1.(x+3) - 1.(x+3)(x-1)}{(x+3).(x-1)} > 0 \Leftrightarrow$

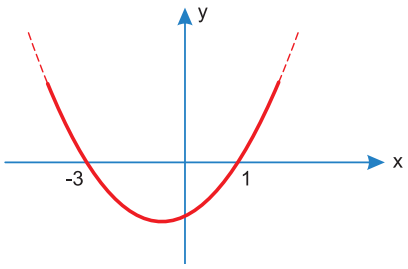
$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - x - 3 - x^2 + x - 3x + 3}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-4x}{(x+3)(x-1)} > 0$

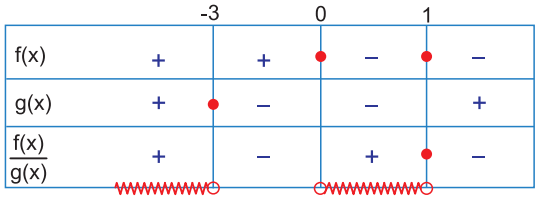
O esboço do gráfico de $f(x) = -4x$ é



O esboço do gráfico de $g(x) = (x + 3)(x - 1)$ é



Quadro de sinais, lembrando que $x \neq -3$ e $x \neq 1$.



O conjunto verdade da inequação é

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 0 < x < 1\}$

Resposta: B