

# TÍNH TÍCH PHÂN

## PHẦN 1: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

### I. LÝ THUYẾT

#### 1. Định nghĩa tích phân

- Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$

trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó ta có  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ .

- Ta gọi  $\int_a^b$  là dấu tích phân,  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên

**Chú ý:** Trong trường hợp  $a = b$  hoặc  $a > b$ , ta quy ước  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ;  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ .

#### 2. Tính chất của tích phân

**Tính chất 1:**  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$  ( $k$  là hằng số).

**Tính chất 2:**  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ .

**Tính chất 3:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  ( $a < c < b$ ).

### II. BÀI TẬP TRÊN LỚP

**Câu 1: (MĐ101 – BGD&ĐT – 2023)** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết hàm số  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  và  $F(2) = 6$ ,  $F(4) = 12$ . Tích phân  $\int_2^4 f(x)dx$  bằng

- A. 2.                                      B. 6.                                      C. 18.                                      D. - 6.

**Câu 2:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(2) - F(0) = 5$ . Khi đó  $\int_0^2 3f(x)dx$  bằng

- A. 6.                                      B. 15.                                      C. 10.                                      D. 5.

**Câu 3:** Cho  $\int_{-2}^3 f(x)dx = -10$ ,  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-2; 3]$ ,  $F(3) = -8$ .

Tính  $F(-2)$

- A. 2.                                      B. -18.                                      C. 3.                                      D. 18.



**Câu 4:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên đoạn  $[1; 2]$ ,  $f(1) = 1$  và  $f(2) = 2$ . Tính  $I = \int_1^2 f'(x) dx$ .

A.  $I = \frac{7}{2}$ .

B.  $I = 1$ .

C.  $I = -1$ .

D.  $I = 3$ .

**Câu 5: (MĐ101 – BGD&ĐT – 2022)** Nếu  $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_5^{-1} f(x) dx$  bằng

A. 5.

B. 6.

C. 4.

D. 3.

**Câu 6:** Tính

a)  $\int_1^2 x dx$

b)  $\int_{-1}^3 2x^2 dx$

c)  $\int_{-1}^1 x^{2024} dx$

d)  $\int_1^2 5 dx$

e)  $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$

f)  $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

g)  $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

h)  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

i)  $\int_0^1 e^x dx$

k)  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$

l)  $\int_0^1 2^x dx$

m)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

n)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \cos t dt$

p)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$

q)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 du}{\cos^2 u}$

## BẢNG ĐÁP ÁN

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.B | 2.B | 3.A | 4.B | 5.D |
|-----|-----|-----|-----|-----|



## **PHẦN 2: TÍCH PHÂN CỦA TỔNG**

**Câu 1: (ĐỀ MINH HỌA 2022)** Nếu  $\int_2^5 f(x)dx = 3$  và  $\int_2^5 g(x)dx = -2$  thì  $\int_2^5 [f(x) + g(x)]dx$  bằng

- A. 5                      B. -5                      C. 1                      D. 3

**Câu 2:** Giả sử  $\int_0^9 f(x)dx = 7$  và  $\int_9^0 g(x)dx = 1$ . Khi đó  $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$  bằng

- A.  $I = 11$ .                      B.  $I = 17$ .                      C.  $I = 23$ .                      D.  $I = 8$ .

**Câu 3:** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$ .

- A.  $I = \frac{17}{2}$                       B.  $I = \frac{5}{2}$                       C.  $I = \frac{7}{2}$                       D.  $I = \frac{11}{2}$

**Câu 4:** Nếu  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$  thì  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin x + f(x)]dx$  bằng

- A. 4                      B. 8                      C. 6                      D. 7

**Câu 5: (MĐ101 – BGD&ĐT – 2022)** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2}f(x) + 2 \right]dx$  bằng

- A. 6.                      B. 8.                      C. 4.                      D. 2.

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_0^2 [f(x) + 3x^2]dx = 10$ . Tính  $\int_0^2 f(x)dx$

- A. -2                      B. -18                      C. 18                      D. 2

**Câu 7:**

a)  $\int_0^1 (x^6 - 4x^3 + 3x^2)dx$                       b)  $\int_0^3 (3x - 1)^2 dx$                       c)  $\int_1^4 \left( 2^x - \frac{3}{x^2} \right) dx$

d)  $\int_1^2 \left( e^x - \frac{3}{x} \right) dx$                       e)  $\int_0^1 (e^{2x} + 3x^2) dx$

f) Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - \sin x) dx = a\pi + b$ , tìm  $a$  và  $b$

g)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

h)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$

### **BẢNG ĐÁP ÁN**

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.C | 2.A | 3.A | 4.C | 5.A | 6.D |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|



### **PHẦN 3: CÔNG THỨC NỐI CẬN**

**Câu 1:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ ,  $\int_1^2 f(x)dx = 4$ , khi đó  $\int_0^2 f(x)dx = ?$

- A. 2.                      B. 6.                      C. 3.                      D. 1.

**Câu 2: (MĐ101 – BGD&ĐT – 2023)** Nếu  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_1^3 f(x)dx = 5$  thì  $\int_0^3 f(x)dx$  bằng

- A. 10.                      B. 3.                      C. 7.                      D. -3.

**Câu 3:** Nếu  $\int_1^5 f(x)dx = 7$  và  $\int_4^5 f(x)dx = 4$  thì  $\int_1^4 f(x)dx$  bằng

- A. 3.                      B. 11.                      C. 28.                      D. -3.

**Câu 4:** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = -1$  và  $\int_0^3 f(x)dx = 5$ . Tính  $I = \int_1^3 f(x)dx$

- A.  $I = 1$                       B.  $I = 6$                       C.  $I = 4$                       D.  $I = 5$

**Câu 5:** Cho  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0;10]$  thỏa mãn  $\int_0^{10} f(x)dx = 2017$ ;  $\int_2^6 f(x)dx = 2016$ . Khi đó giá trị

của  $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$  là:

- A. 1                      B. -1                      C. 3                      D. 2

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ . Tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$  bằng

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{5}{3}$ .                      C. 3.                      D.  $\frac{13}{3}$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_0^2 f(x)dx$ .

- A.  $\frac{7}{2}$ .                      B. 1.                      C.  $\frac{5}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{khi } x < 0 \\ \sin x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ . Tính tích phân  $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$

- A.  $\frac{13}{6}$ .                      B.  $\frac{5}{6}$ .                      C.  $-\frac{5}{6}$ .                      D.  $\frac{19}{6}$ .

**Câu 9:** Tính  $I = \int_0^2 |2x-2|dx$ .

- A. 0.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 3.

**Câu 10:** Tính  $\int_{-1}^2 |2x+1|dx$

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B. 2.                      C.  $\frac{5}{2}$ .                      D.  $\frac{13}{2}$ .

**Câu 11:** Tính tích phân  $\int_0^8 |x^2 - 6x|dx$ .

- A.  $\frac{152}{3}$ .                      B.  $\frac{64}{3}$ .                      C.  $-\frac{64}{3}$ .                      D.  $-\frac{152}{3}$ .



**Câu 12:** Biết  $I = \int_{-1}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \frac{a}{b}$ , với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{a}{b}$  tối giản. Tính  $T = a - b$ .

A. 12.

B. 14.

C. 11.

D. 4.

**Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  thỏa mãn:  $\int_0^m |3x^2 - 2x| dx = m - 10$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

### BẢNG ĐÁP ÁN

|      |      |      |     |     |     |     |     |     |      |
|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1.B  | 2.C  | 3.A  | 4.B | 5.A | 6.D | 7.A | 8.D | 9.B | 10.D |
| 11.A | 12.B | 13.A |     |     |     |     |     |     |      |

THANHVIENTHAIHOC.NET  
ZALO:0778335643



THANHVIENTHAIHOC.NET  
ZALO:0778335643



## **PHẦN 4: TÍCH PHÂN HỮU TỈ**

**Câu 1:** Biết  $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$ , với  $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ . Tính tổng  $S = a + b + c$ .

- A.  $S = 7$ .                      B.  $S = 5$ .                      C.  $S = 8$ .                      D.  $S = 6$ .

**Câu 2:** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $a + 2b = 0$                       B.  $a + b = 2$                       C.  $a - 2b = 0$                       D.  $a + b = -2$

**Câu 3:** Giả sử  $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln c$ . Giá trị của  $c$  là

- A. 9                      B. 3                      C. 81                      D. 8

**Câu 4:** Biết tích phân  $\int_3^5 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{a} (\ln b - \ln c)$  trong đó  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $a + b + c$ .

- A. 23.                      B. 18.                      C. 31.                      D. 19.

**Câu 5:** Kết quả của tích phân  $\int_{-1}^0 \left( x + 1 + \frac{2}{x-1} \right) dx$  được viết dưới dạng  $a + b \ln 2$ . Tính giá trị của  $a + b$

- A.  $\frac{3}{2}$                       B.  $-\frac{3}{2}$                       C.  $\frac{5}{2}$                       D.  $-\frac{5}{2}$

**Câu 6:** Biết  $\int_1^2 \frac{x-1}{x+3} dx = 1 + 4 \ln \frac{a}{b}$  thì giá trị  $2a + b$  là bao nhiêu?

- A. 0.                      B. 13.                      C. 14.                      D. -20.

**Câu 7:** Biết  $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Khi đó giá trị của  $a + 4b$  bằng

- A. 50                      B. 60                      C. 59                      D. 40

**Câu 8:** Biết  $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Tính  $S = a + 4b - c$

- A.  $S = 2$                       B.  $S = 4$                       C.  $S = 3$                       D.  $S = 5$

**Câu 9:** Biết  $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$  với  $a, b, c$  là các số nguyên. Tính  $S = a + b + c$

- A.  $S = 6$ .                      B.  $S = 2$ .                      C.  $S = -2$ .                      D.  $S = 0$

**Câu 10:** Biết  $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ . Khi đó giá trị  $a + b + c$  bằng

- A. -3.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 0.

**Câu 11:** (Xem HD giải ở cuối) Cho  $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2 + 3x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá

trị của  $a + b + c$  bằng

- A. 0.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 1.



**Câu 12:** (Xem HD giải ở cuối) Biết  $\int_0^1 \frac{4x+15}{-2x^2-x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$ .

C.  $b - a = -5$ .

D.  $b + a = 5$ .

**Câu 13:** Cho  $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$  với  $a, b, c$  là các số hữu tỷ. Biểu thức  $T = a.c - b$  bằng

A. 4.

B. 6.

C.  $\frac{-1}{2}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

### BẢNG ĐÁP ÁN

|      |      |      |     |     |     |     |     |     |      |
|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1.A  | 2.A  | 3.B  | 4.A | 5.B | 6.B | 7.C | 8.A | 9.B | 10.D |
| 11.B | 12.B | 13.B |     |     |     |     |     |     |      |

THANHVIENTHAIHOC.NET  
ZALO:0778335643



THANHVIENTHAIHOC.NET  
ZALO:0778335643

**Câu 11:** Cho  $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên. Giá trị của  $a+b+c$  bằng

A. 0.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 1.

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Xét } I &= \int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \frac{2x+4-x-1}{(x+1)(x+2)} dx \\ &= \int_1^3 \frac{2(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \frac{2(x+2)}{(x+1)(x+2)} dx - \int_1^3 \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} dx \\ &= \int_1^3 \frac{2}{x+1} dx - \int_1^3 \frac{1}{x+2} dx \\ - \text{ Xét } I_1 &= \int_1^3 \frac{2}{x+1} dx = 2 \ln|x+1| \Big|_1^3 = 2 \ln 4 - 2 \ln 2 = 4 \ln 2 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2 \\ - \text{ Xét } I_2 &= \int_1^3 \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| \Big|_1^3 = \ln 5 - \ln 3 \\ \bullet \text{ Vậy } I &= I_1 - I_2 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 2. \end{aligned}$$

**Chọn B.**

**Câu 12:** Biết  $\int_0^1 \frac{4x+15}{-2x^2-x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Mệnh đề nào đúng?

A.  $\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{a}{b} = -\frac{1}{4}$ .                      C.  $b-a = -5$ .                      D.  $b+a = 5$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } I &= \int_0^1 \frac{4x+15}{-2x^2-x+6} dx = \int_0^1 \frac{4x+15}{(3-2x)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{6x+12+3-2x}{(3-2x)(x+2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{6(x+2)+(3-2x)}{(3-2x)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{6(x+2)}{(3-2x)(x+2)} dx + \int_0^1 \frac{3-2x}{(3-2x)(x+2)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{6}{3-2x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx \\ - \text{ Xét } I_1 &= \int_0^1 \frac{6}{3-2x} dx = 6 \int_0^1 \frac{1}{3-2x} dx = 6 \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \ln|3-2x| \Big|_0^1 = -3 \ln 1 + 3 \ln 3 = 3 \ln 3 \\ - \text{ Xét } I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \\ \bullet \text{ Vậy } I &= I_1 + I_2 = 3 \ln 3 + \ln 3 - \ln 2 = 4 \ln 3 - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Chọn B.**

