

DONACION
Lic. Dr. G. J. J. J. J.

46795 597.8/8
FCEyN BIBLIOTECA

Félix Rodríguez Trelles

*TEMAS DE ELECTRICIDAD
Y MAGNETISMO*



51975
G.2

Editorial Universitaria de Buenos Aires

EDICIONES PREVIAS

C
537
Eg. 2

©1984 Dr. FELIX RODRIGUEZ TRELLES
©1984 EUDEBA SEM
Rivadavia 1573 - Buenos Aires, Argentina
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Septiembre de 1984

ISBN 950-23-0108-0

Esta obra de la colección de EDICIONES PREVIAS forma parte de los servicios adicionales de EUDEBA en apoyo a las cátedras.
EL TEXTO IMPRESO ES REPRODUCCIÓN FACSIMILAR DE LOS ORIGINALES PRESENTADOS POR EL AUTOR.

INTRODUCCION

El origen de esta edición previa han sido los apuntes de clases dictadas por el autor en 1975 en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Los apuntes, con sucesivas correcciones, fueron ampliados hasta cubrir la mayor parte de las clases teóricas de la asignatura FÍSICA III-A, destinada a alumnos de las Licenciaturas en Ciencias Físicas, Matemáticas y Meteorológicas de dicha Facultad.

El curso de FÍSICA III, ubicado al final del segundo año de la Licenciatura en Física, comprende una introducción a la teoría electromagnética clásica y a la teoría de circuitos con elementos lineales, acompañada por trabajos prácticos de laboratorio y por la resolución de una abundante cantidad de problemas.

Los objetivos explícitos de este curso son:

- la introducción del alumno a la teoría electromagnética, con vistas al curso avanzado denominado Física Teórica I (Electrodinámica Clásica, al nivel del texto de J.D.Jackson);
- la introducción a la teoría y práctica de circuitos eléctricos que, para los alumnos de Física, continuará con cursos de Electrónica e Instrumentación Digital.

Entre los objetivos no declarados pero igualmente importantes podemos destacar:

- la utilización intensiva del cálculo vectorial, con la consecuente simplificación en las demostraciones, acompañada por una presentación unificada del Electromagnetismo no relativista a nivel intermedio;
- la preparación del alumno para cursos como Mecánica I (Racional) y II (Fluidos), que requieren familiarizarse con las herramientas analíticas citadas;
- una descripción elemental de las propiedades electromagnéticas de la materia, que prepara la base para tratamientos más específicos en futuras asignaturas (Física Moderna, Física Nuclear, Mecánica Estadística, etc.).

Varios de estos objetivos son de difícil cumplimiento, ya que el carácter introductorio del curso impide utilizar herramientas como la delta de Dirac, o resolver ecuaciones en derivadas parciales

por los métodos más usuales. Por otra parte, las limitaciones de tiempo no permiten estudiar la radiación electromagnética ni profundizar en otros temas reservados al curso avanzado.

Los alumnos de sucesivos cursos fueron proponiendo agregados y simplificaciones de los apuntes iniciales, mejorando argumentos y criticando la presentación de numerosos párrafos y aun de temas enteros.

Desearé expresar mi agradecimiento a quienes han cursado la asignatura, por el aliento expresado por algunos, por la curiosidad sana y estimulante de la mayoría, y por las críticas constructivas que me fueron transmitidas. He tratado de aprovechar estas experiencias en la presente edición, con la esperanza de completar y mejorar el texto en el futuro.

Félix Rodríguez Trelles

Buenos Aires, junio de 1984.

ANÁLISIS VECTORIAL

CAMPOS VECTORIALES

El análisis vectorial es una herramienta básica para nuestros desarrollos subsecuentes. Ya estamos familiarizados con el concepto de vector y con el álgebra vectorial (para un repaso recomendamos el clásico Vectores y tensores con sus aplicaciones de L.A. Santaló, EUDÉBA, Buenos Aires, 1961; en especial sus capítulos I y III). Al final de esta introducción ofrecemos un breve apéndice que resume las notaciones y definiciones más usuales.

Nos interesa repasar el concepto analítico de vector en un espacio de tres dimensiones. Los vectores que utilizaremos representan campos cuyas propiedades intrínsecas (módulo, dirección y sentido) no dependen de la posición ni de la orientación del sistema de coordenadas que elijamos, es decir que dichas propiedades deben ser las mismas para dos sistemas de referencia (referenciales) distintos. En general, un cambio de referencial implica una rotación y una traslación.

Representaremos la posición de un punto P mediante un vector

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{x}_i = (x_1, x_2, x_3)$$

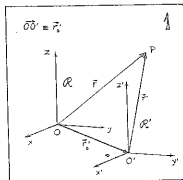
en coordenadas cartesianas ortogonales, siendo $\hat{x}_i$ los versores ($|\hat{x}_i| = 1$) de un referencial $\mathcal{R}$ correspondientes a los tres ejes coordenados.

Una traslación que lleva el origen O de coordenadas $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ al punto O' de coordenadas $\vec{r}'_0 = (x'_0, y'_0, z'_0)$ implica la transformación

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO}' \\ \implies x'_i = x_i - x'_0 \quad (i=1, 2, 3)$$

que se representa en la fig. 1, donde $\vec{r}'$ representa la posición del punto P en el referencial trasladado.

Como vemos, una traslación sólo modifica los vectores de posición. La mayor parte de las magnitudes físicas que nos interesan varían al pasar de un punto al otro del espacio, pero el cambio de referencial no afecta las



posiciones de los puntos, sino sólo sus coordenadas.

Si a una propiedad que varía con la posición la podemos representar mediante una sola función

$$\lambda = \lambda(\vec{r}) = \lambda(x, y, z)$$

decimos que la función λ representa un campo escalar. Si se requieren, como en el caso de las fuerzas o las velocidades, tres funciones de la posición que podemos agrupar simbólicamente como

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) \Rightarrow A_i = A_i(x, y, z) \quad (i=1,2,3)$$

decimos que $\vec{A}$ representa un campo vectorial.

Las traslaciones no modifican el vector que representa la separación entre dos puntos. En efecto, al pasar el origen de O a O' los vectores posición varían según las relaciones:

$$\vec{r}_a \longrightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a - \vec{OO'}; \quad \vec{r}_b \longrightarrow \vec{r}'_b = \vec{r}_b - \vec{OO'}$$

$$\implies (\vec{AB})_O = \vec{r}_b - \vec{r}_a \longrightarrow (\vec{AB})_{O'} = \vec{r}'_b - \vec{r}'_a = \vec{r}_b - \vec{r}_a = (\vec{AB})_O.$$

Veremos que la mayor parte de las magnitudes de interés físico dependen de la separación entre puntos y no de la posición de uno solo aislado, de manera que nos interesa casi siempre el comportamiento de los vectores frente a rotaciones de origen fijo.

En lo que sigue, salvo indicación en contrario, los índices tomarán los valores $i=1, 2, 3$; y los límites de las sumatorias serán 1 y 3, o sea $\sum_i \equiv \sum_{i=1}^3$.

Como sabemos, las rotaciones se representan mediante las relaciones:

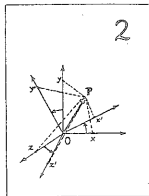
$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}': \vec{r} = \sum_i x_i \hat{x}_i \longrightarrow \vec{r}' = \sum_i x'_i \hat{x}'_i$$

$$\implies x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (1)$$

donde $\hat{x}_i$ son los versores en el referencial $\mathcal{R}$. En notación matricial la transformación se representa como $\vec{r}' = \vec{A} \vec{r}$, donde $\vec{A} = (a_{ij})_3^3$ es la matriz unitaria ($\det \vec{A} = 1$) que caracteriza a la rotación (fig. 2).

La rotación inversa ($\vec{r}' \longrightarrow \vec{r}$) está dada por las relaciones

$$x_i = \sum_j b_{ij} x'_j$$



donde $\vec{B} = (b_{ij})_3^3 = \vec{A}^{-1}$ es igual a la matriz traspuesta de $\vec{A}$, o sea que

$$x_i = \sum_j b_{ij} x'_j = \sum_j a_{ji} x'_j = \sum_j x'_j a_{ji}. \quad (2)$$

Llamando $x_{i,j}$, $x'_{i,j}$ a las componentes j -ésimas del versor $\hat{x}_i$ en los referenciales $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, respectivamente, es $y_{i,j}$, $y'_{i,j}$ a las componentes j -ésimas del $\hat{y}_i$ en $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, y aplicando (1) y (2) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} x_{i,j} &\equiv \delta_{ij} \implies x'_{i,j} = \sum_k a_{jk} x_{i,k} = \sum_k a_{jk} \delta_{ik} = a_{ji} \\ y'_{i,j} &\equiv \delta_{ij} \implies y_{i,j} = \sum_k a_{kj} y'_{i,k} = \sum_k a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

donde usamos la delta de Kronecker δ_{ij} que vale 1 si $i=j$ y 0 si $i \neq j$.

Las relaciones (3) expresan que las componentes en un referencial $\mathcal{R}$ de los versores de otro referencial $\mathcal{R}'$ son los elementos de la matriz $\vec{A}$ de la rotación $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$. La expresión de cada versor en el otro referencial, según (3), será

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_i &= \sum_j x'_{i,j} \hat{y}_j = \sum_j a_{ji} \hat{y}_j \\ \hat{y}_i &= \sum_j y_{i,j} \hat{x}_j = \sum_j a_{ij} \hat{x}_j \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

En general, un vector $\vec{c}$ se expresará como:

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = \sum_i c_i \hat{x}_i \text{ en } \mathcal{R}$$

$$\vec{c} = (c'_1, c'_2, c'_3) = \sum_i c'_i \hat{x}'_i \text{ en } \mathcal{R}'.$$

Reemplazando a $\hat{x}_i$ por su expresión (4) y redefiniendo los índices ($i \leftrightarrow j$) tenemos:

$$\vec{c} = \sum_i c_i \hat{x}_i = \sum_i c_i \sum_j a_{ji} \hat{y}_j = \sum_j c_j \sum_i a_{ij} \hat{y}_i = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} c_i \right) \hat{y}_j$$

que debe ser idéntica, componente a componente, a la expresión de $\vec{c}$ en el referencial $\mathcal{R}'$: $\vec{c} = \sum_j c'_j \hat{y}_j$. Luego,

$$c'_j = \sum_i a_{ij} c_i \quad (i=1,2,3). \quad (5)$$

Estas relaciones expresan la definición analítica de un campo vectorial: las tres funciones $c_i(\vec{r})$ son las componentes de un

vector si y sólo si en un cambio de coordenadas de origen fijo se transforman mediante las mismas relaciones (1) que transforman las coordenadas de un punto.

Los campos escalares, por su parte, no varían por un cambio de coordenadas, o sea que

$$R \rightarrow R'; \quad \lambda(F) = \lambda(F')$$

está representado por la misma función en ambos referenciales.

Las operaciones elementales entre vectores en coordenadas cartesianas ortogonales, que damos por conocidas, se representarán como sigue:

a) Suma: $(\vec{A} + \vec{B})_i = A_i + B_i$

donde el subíndice i indica la componente i -ésima de la expresión entre paréntesis.

b) Multiplicación por un escalar λ : $(\lambda \vec{A})_i = \lambda A_i$

c) Producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i$$

En particular: $\vec{A} \cdot \vec{A} = \sum_i A_i^2 = |\vec{A}|^2$ donde $A = |\vec{A}| = (\sum_i A_i^2)^{1/2}$ es el módulo del vector $\vec{A}$.

Todo vector se puede expresar como $\vec{A} = A \hat{A}$ $\Rightarrow |\hat{A}| = 1$ donde el versor (o vector unitario) $\hat{A}$ representa la dirección y el sentido de $\vec{A}$.

El ángulo entre dos vectores está dado por la relación

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(A, B) \Rightarrow \cos(A, B) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B}$$

d) Producto vectorial:

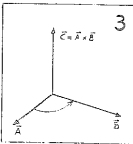
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1); \text{ o sea}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

que verifica la relación

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin(A, B).$$

La dirección de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es normal al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Su sentido es tal que la terna $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ es directa (fig. 3).



e) Producto mixto:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

que verifica las relaciones:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{A} \cdot \vec{C} \times \vec{B} = -\vec{C} \cdot \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{B} \cdot \vec{A} \times \vec{C} \quad (A.1)'$$

Observemos que el producto ABC y sus permutaciones cíclicas

$BCA \rightarrow CAB$ tienen el mismo signo, mientras que las anticíclicas $ACB \rightarrow CBA \rightarrow BAC$ tienen signo contrario al primero.

f) Doble producto vectorial:

Es fácil verificar, por la igualdad de las respectivas componentes, que se cumple la siguiente identidad muy útil:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (A.2)$$

Notemos que el producto vectorial no es asociativo, ya que

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}.$$

g) Identidad de Lagrange:

Da una expresión del producto escalar de dos productos vectoriales:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D})$$

Otra identidad útil es:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] \vec{C} - [\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})] \vec{B}$$

Otras notaciones usuales:

- Producto escalar o interno: $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B})$

- Producto vectorial o externo: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B} = [\vec{A}, \vec{B}].$

OPERADORES VECTORIALES

En los cursos de Análisis Matemático hemos considerado las propiedades de los operadores vectoriales más usuales y sus expresiones

(*) La numeración (A.n) se refiere al Apéndice de identidades vectoriales que se incluye al final de este capítulo.

en distintos sistemas de coordenadas ortogonales. Aquí nos interesa analizar sus significados físicos y geométricos intrínsecos, que son independientes del sistema de coordenadas elegido.

Partiremos de la expresión analítica de cada operador en coordenadas cartesianas, utilizando el símbolo operacional

$$\nabla = \partial_x + \partial_y + \partial_z = \sum_i \partial_i$$

llamado nabla, donde $\partial_i f = \partial f / \partial x_i$.

En todo lo que sigue supondremos que los campos poseen derivadas parciales continuas de cada componente hasta el orden requerido en las distintas expresiones. Esta condición suele cumplirse para los campos electromagnéticos que estudiaremos más adelante.

GRADIENTE

Dado un campo escalar $\lambda(\vec{r}) = \lambda(x, y, z)$ llamamos gradiente de λ al vector

$$\vec{\text{grad}} \lambda = \nabla \lambda = \partial_x \lambda \vec{x} + \partial_y \lambda \vec{y} + \partial_z \lambda \vec{z},$$

cuyas componentes son $(\nabla \lambda)_i = \partial_i \lambda$.

La interpretación geométrica del gradiente es inmediata:

- i) La variación en el escalar λ al desplazarnos de $\vec{F}$ a $\vec{F} + d\vec{F}$ está dada por:

$$d\lambda = \sum_i \partial_i \lambda dx_i = \nabla \lambda \cdot d\vec{F} \quad (6)$$

Esta variación es máxima cuando el desplazamiento $d\vec{F}$ y el vector $\nabla \lambda$ son paralelos, ya que

$$d\lambda = |\nabla \lambda| |d\vec{r}| \cos(\angle d\vec{r}, \nabla \lambda) \quad (7)$$

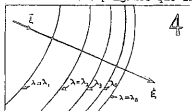
Luego, la dirección y sentido del gradiente de un escalar λ son los que definen la máxima variación de λ .

- ii) El módulo del gradiente se puede calcular si conocemos la dirección de máxima variación de un escalar. Supongamos que la máxima variación se produce en la dirección de un eje ξ (fig. 4).

Entonces,

$$(6) \implies |d\lambda| = |\nabla \lambda| |d\xi|$$

$$\implies \nabla \lambda = \frac{|d\lambda|}{|d\xi|} = \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{|\Delta \lambda|}{|\Delta \xi|}$$



Es obvio que el gradiente de un escalar es un vector, ya que vimos cómo definirlo en módulo, dirección y sentido, con independencia de cualquier sistema de coordenadas.

iii) Derivada direccional:

Dado un versor $\hat{\varphi}(\vec{r})$, la derivada direccional según ese versor de un escalar λ en el punto $\vec{r}$ es

$$\partial_{\hat{\varphi}} \lambda = \frac{d\lambda}{d\hat{\varphi}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\lambda(\vec{r} + \Delta s \hat{\varphi}) - \lambda(\vec{r})}{\Delta s} \approx \frac{\lambda(\vec{r} + d\vec{s}) - \lambda(\vec{r})}{ds}$$

con $d\vec{s} = ds \hat{\varphi}$. Luego,

$$(7) \implies d\lambda = \nabla \lambda \cdot d\vec{s} = \nabla \lambda \cdot \hat{\varphi} ds \implies \partial_{\hat{\varphi}} \lambda = \hat{\varphi} \cdot \nabla \lambda \quad (8)$$

Análogamente definimos en el punto $\vec{r}$ las derivadas direccionales de un campo vectorial

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{\varphi}} \vec{A} &\approx \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(\vec{r} + \Delta s \hat{\varphi}) - \vec{A}(\vec{r})}{\Delta s} \approx \frac{\vec{A}(\vec{r} + d\vec{s}) - \vec{A}(\vec{r})}{ds} \\ &\implies \partial_{\hat{\varphi}} \vec{A} = (\hat{\varphi} \cdot \nabla) \vec{A} = \sum_k v_k \partial_k \vec{A} \quad (9) \end{aligned}$$

que es un vector cuyas componentes son:

$$(\partial_{\hat{\varphi}} \vec{A})_i = \sum_k v_k \partial_k A_i = v_x \partial_x A_i + v_y \partial_y A_i + v_z \partial_z A_i.$$

Notemos que el operador nabla se comporta efectivamente como un vector. Así, en (9) podemos definir un operador de la forma

$$\partial_{\hat{\varphi}} = \hat{\varphi} \cdot \nabla = v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z.$$

También podemos escribir la expresión

$$(\hat{A} \cdot \nabla) \vec{B} = |\hat{A}| (\hat{A} \cdot \nabla) \vec{B} = |\hat{A}| \partial_{\hat{A}} \vec{B}, \text{ etc.}$$

iv) Derivadas total y local:

Dado un campo escalar T (p.ej. la temperatura en un punto) que puede variar en el espacio y en el tiempo, o sea

$$T = T(\vec{r}, t) = T(x, y, z)$$

podemos analizar su variación desde distintos puntos de vista.

- Si nos detenemos en un punto fijo $\vec{F}$, al cabo de un intervalo de tiempo Δt el campo T habrá variado en

$$\Delta T = \partial_t T \Delta t,$$

donde $\partial_t T \equiv (\partial T / \partial t)_{\vec{r}}$ expresa la derivada con respecto al tiempo

en un punto $\vec{F}$ fijo. El operador $\partial_t \equiv (\partial/\partial t)_{\vec{F}}$ define la derivada local de un campo.

- Si nos movemos con una velocidad $\vec{v}$, durante un intervalo dt nos habremos desplazado en $d\vec{F} = \vec{v} dt$, de modo que la variación en el campo T será

$$dT = T(\vec{F} + d\vec{F}, t + dt) - T(\vec{F}, t) \approx \partial_x T dx + \partial_y T dy + \partial_z T dz + \partial_t T dt$$

$$\implies \frac{dT}{dt} = \partial_x T \frac{dx}{dt} + \partial_y T \frac{dy}{dt} + \partial_z T \frac{dz}{dt} + \partial_t T,$$

donde las $\partial_i T \equiv (\nabla T)_i$ son las componentes del gradiente de T , y las $dx_i/dt \equiv v_i$ son las componentes de la velocidad $\vec{v}$, de modo que

$$\frac{dT}{dt} = \partial_t T + \vec{v} \cdot \nabla T \quad (10)$$

Esta es la derivada total que describe la variación de un campo vista desde un referencial que se mueve con velocidad $\vec{v}$. Como vemos, se compone de la derivada local más un término que llamaremos convectivo:

$$(8) \implies D_v T \equiv \vec{v} \cdot \nabla T + \partial_t T \quad (11)$$

En los comienzos de la Física Clásica cada tipo de expresión caracterizó una formulación diferente: el punto de vista local fue el preferido por Euler, mientras que el elemento excluyente de derivadas totales fue el camino elegido por Newton y Lagrange. Por ello hablamos de formulaciones euleriana y lagrangiana, respectivamente.

Lo anterior también vale para campos vectoriales. Dado $\vec{A}(\vec{r}, t)$ tenemos las relaciones:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{A}(\vec{F} + d\vec{F}, t + dt) - \vec{A}(\vec{F}, t)}{dt} = \partial_t \vec{A} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{A} \quad (12)$$

es decir que el operador d/dt , correspondiente a un referencial de velocidad $\vec{v} = d\vec{F}/dt$, equivale a

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla = \partial_t + v \partial_v \quad (13)$$

La interpretación de las (10) y (12) es inmediata: la variación total de un campo en un intervalo dt es la suma de la variación debida al transcurso del tiempo dt (derivada local) más la debida al desplazamiento $\vec{v} dt$ (término convectivo).

v) Superficies de nivel:

Llamamos superficies de nivel de un campo escalar $\lambda(\vec{r})$ a las formadas por puntos $\vec{F}$ que satisfacen las condiciones $\lambda(\vec{F}) = \text{const.}$ Cuando el escalar es una función potencial (como lo es el potencial gravitatorio que conocemos) las superficies de nivel se denominan equipotenciales.

Sea un desplazamiento $d\vec{s}$ sobre una superficie de nivel S (fig. 5). La variación del campo λ al pasar de $\vec{F}$ a $\vec{F} + d\vec{s}$ será tal que, según (6):

$$\lambda = \text{const.} \implies d\lambda = \nabla \lambda \cdot d\vec{s} = 0 \quad (14)$$

es decir que el gradiente de un escalar es normal a todo desplazamiento $d\vec{s}$ realizado sobre una superficie de nivel y, en consecuencia, es normal a la superficie de nivel que pasa por el punto $\vec{F}$: $\nabla \lambda \perp S$.

vi) Otras propiedades:

Si $\lambda(\vec{r})$ y $\mu(\vec{r})$ son dos campos escalares, se verifican:

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha \lambda + \beta \mu) &= \alpha \nabla \lambda + \beta \nabla \mu \quad (\alpha, \beta \text{ constantes}) \\ \nabla(\lambda \mu) &= \lambda \nabla \mu + \mu \nabla \lambda \end{aligned} \quad (A.5)$$

DIVERGENCIA

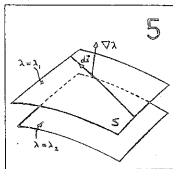
Dado un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ llamamos divergencia de $\vec{A}$ al escalar

$$\text{div } \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \equiv \sum_i \partial_i A_i.$$

Al afirmar que $\nabla \cdot \vec{A}$ es un escalar estamos diciendo que la divergencia es una cantidad invariante frente a rotaciones de origen fijo.

La interpretación física de la divergencia es inmediata para un campo de velocidades. Supongamos un líquido en movimiento cuya velocidad en el punto $\vec{F}$ es $\vec{v}(\vec{F})$ y consideremos la superficie S de un elemento de volumen con vértice P como el de la fig. 6.

La cantidad de líquido que en un intervalo de tiempo dt atraviesa la cara S_x normal al eje x será igual a



$$V_x = (dy dz) (v_x dt)$$

donde el primer factor es el área de dicha cara, y el segundo la altura de la región ocupada por todas las partículas del líquido que llegan a cruzar S_x en el intervalo dt o antes. Aquí v_x es la componente x de la velocidad en (x, y, z) .

La cantidad de líquido que cruza la cara opuesta S'_x en dt es

$$V'_x = (dy dz) (v'_x dt)$$

$$\text{con } v'_x = v_x(x+dx, y, z) \approx v_x(x, y, z) + \partial_x v_x dx.$$

Luego, la diferencia de volúmenes atravesando ambas caras será

$$V'_x - V_x = (dy dz) (v'_x - v_x) dt \approx \partial_x v_x dx dy dz dt.$$

Análogamente, las diferencias netas en los volúmenes de líquido que atraviesan las caras normales a los ejes y, z serán

$$V'_y - V_y = \partial_y v_y d\tau dt$$

$$\text{y } V'_z - V_z = \partial_z v_z d\tau dt, \text{ donde } d\tau \equiv dx dy dz.$$

La suma de estas cantidades representa el volumen neto de líquido creado en el interior de la superficie S del elemento. Si dicha suma es positiva decimos que en P hay una fente de fluido (o sea que hay creación neta), y si es negativa habrá allí un sumidero o sumidero.

El volumen neto creado por unidad de tiempo y por unidad de volumen del fluido será igual a

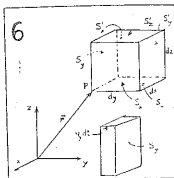
$$\frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} (V'_1 - V_1) = \sum_i \partial_i v_i = \nabla \cdot \vec{v} \quad (15)$$

es decir igual a la divergencia del campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r})$.

En particular, el gradiente de un campo escalar λ es un vector al que podemos aplicar el operador divergencia, definiendo así el operador

$$\text{div } \vec{\text{grad}} \lambda \equiv \nabla \cdot \nabla \lambda \equiv \nabla^2 \lambda \quad (16)$$

llamado Laplaciano, que a veces se simboliza como $\Delta \lambda$.



En coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 \lambda = \sum_i \partial_i (\partial_i \lambda) = \sum_i \partial_{ii}^2 \lambda$$

$$\text{donde } \partial_{ii}^2 \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_i} \quad (\text{en general usaremos la notación } \partial_{ij}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \partial_{iif}^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}, \text{ etc.})$$

Es fácil verificar la linealidad del operador divergencia:

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \nabla \cdot \vec{A} + \beta \nabla \cdot \vec{B} \quad (\alpha, \beta \text{ constantes})$$

y, en consecuencia, deducir para dos campos escalares $\lambda(\vec{r}), \mu(\vec{r})$:

$$\text{i) } \nabla^2 (\alpha \lambda + \beta \mu) = \alpha \nabla^2 \lambda + \beta \nabla^2 \mu \quad (\alpha, \beta \text{ constantes})$$

$$\text{ii) } \nabla^2 (\lambda \mu) = \lambda \nabla^2 \mu + \mu \nabla^2 \lambda + 2 \nabla \lambda \cdot \nabla \mu.$$

ROTOR

Dado un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ llamamos rotor (o rotacional) de $\vec{A}(\vec{r})$ al vector⁽⁺⁾

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{x} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{y} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{z}.$$

Aplicando directamente la definición del rotor se verifica de inmediato que para todo campo escalar λ y vectorial $\vec{A}$ valen las identidades

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0 \quad (A.3)$$

$$\nabla \times \nabla \lambda = 0 \quad (A.4)$$

Para interpretar físicamente al rotor consideraremos una circunferencia ubicada en un campo de fuerzas $\vec{F}$ como el representado

(+) Estrictamente hablando el rotor de un vector es un pseudovector, concepto que no usaremos en este curso y que puede consultarse en el texto citado de L.A. Santaló.

en la fig. 7, donde cada vector indica la fuerza que se aplicaría sobre un cuerpo muy pequeño (puntual) si se lo colocara en un punto dado.

El trabajo de estas fuerzas al recorrer la circunferencia ℓ será

$$W = \oint_{\ell} d\vec{\ell} \cdot \vec{F} = \int_0^{2\pi} dq \, r \, \hat{\ell} \cdot \vec{F}$$

donde $\hat{\ell} = -\sin q \, \hat{x} + \cos q \, \hat{y}$ es el versor tangente a ℓ en el punto P de coordenadas $x = r \cos q$, $y = r \sin q$.

Si el radio r de ℓ es muy pequeño podemos expresar cada componente de $\vec{F}(\vec{r})$ en un punto $\vec{r}$ de la circunferencia mediante un desarrollo de Taylor hasta el primer orden ($i=1, 2$):

$$F_i(\vec{r}) \approx F_i(0) + (\partial_x F_i)_0 x + (\partial_y F_i)_0 y = F_{i0} + (\partial_x F_i) r \cos q + (\partial_y F_i) r \sin q$$

$$\text{Luego } \hat{\ell} \cdot \vec{F} = \hat{\ell}_x F_x + \hat{\ell}_y F_y \implies$$

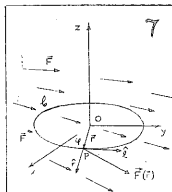
$$W = -r \int_0^{2\pi} dq (F_{x0} \sin q + r \partial_x F_x \sin q \cos q + r \partial_y F_x \sin^2 q) + \\ + r \int_0^{2\pi} dq (F_{y0} \cos q + r \partial_x F_y \cos^2 q + r \partial_y F_y \sin q \cos q)$$

$$\text{donde } \int_0^{2\pi} dq \sin q = \int_0^{2\pi} dq \cos q = \int_0^{2\pi} dq \sin q \cos q = 0; \quad \int_0^{2\pi} dq \sin^2 q = \int_0^{2\pi} dq \cos^2 q = \pi \\ \implies W = \pi r^2 (-\partial_y F_x + \partial_x F_y) = \pi r^2 (\nabla \times \vec{F})_z$$

$$\implies (\nabla \times \vec{F})_z = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{W}{\pi r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\ell} d\vec{\ell} \cdot \vec{F} \quad (17)$$

Vemos que si con centro en 0 se traza una circunferencia de radio r muy pequeño, la componente del rotor en 0 normal al plano de ℓ está dada por la expresión (17), donde el numerador $\oint_{\ell} d\vec{\ell} \cdot \vec{F}$ se denomina circulación del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva cerrada ℓ , y el denominador es el área encerrada por ℓ .

Dos ejemplos clásicos pueden servir para aclarar los conceptos. Imaginemos una ruedita como la de la fig. 8, provista de paletas que pueden moverse libremente bajo la acción de las fuerzas del



campo $\vec{F}$. La ruedita girará si sobre ella actúa una cupla neta de las fuerzas del campo.

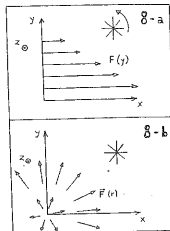
En la fig. 8-a, donde actúa un campo $\vec{F} = F_x(y) \hat{x}$ de modo que

$$(\nabla \times \vec{F})_z = -\partial_y F_x > 0,$$

la rueda girará en sentido antihorario (rotor positivo).

En la fig. 8-b, donde $\vec{F} = F(r) \hat{r}$, siendo $\hat{r}$ el versor radial, es obvio que $\nabla \times \vec{F} = 0$, de modo que la rueda no girará.

Un campo como éste, de rotor nulo, se llama irrotacional.



LAPLACIANO

Como ejemplo de la utilidad del operador nabla calculemos la expresión

$$\vec{r} \cdot \vec{r} \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \quad \text{con } \vec{A} = \vec{A}(\vec{r}),$$

observando que tiene la forma del doble producto vectorial. Luego,

$$(A.2) \implies \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (A.10)$$

donde hemos empleado la notación usada en (16) para el laplaciano de un escalar.

En coordenadas cartesianas la componente i-ésima del segundo miembro de (A.10) toma la forma

$$[\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}]_i = \partial_i \sum_j \partial_j A_j - \sum_k \partial_{kk}^2 A_i$$

La misma expresión se puede obtener calculando el primer miembro explícitamente (verificarlo).

Como vemos, el término que identificamos como

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \vec{A} = \sum_k \partial_{kk}^2 \vec{A}$$

es un vector cuyas componentes cartesianas son iguales a

$$(\nabla^2 \vec{A})_i = \nabla^2 A_i \quad (18)$$

es decir a los laplacianos de las componentes de $\vec{A}(\vec{r})$. El vector

así definido es el laplaciano del campo $\vec{A}$.

Aclaremos que en coordenadas curvilíneas la relación (18) no vale en general, pero conserva su validez la (A.10) que nos permite definir el laplaciano en curvilíneas como

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (19)$$

IDENTIDADES ÚTILES

Utilizando correctamente el operador nabla obtenemos numerosas identidades que emplearemos después. Como ejemplo del método (y de los riesgos de usarlo, incorrectamente) analicemos dos casos:

a) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

Llamemos ∇_A al operador que sólo actúa sobre $\vec{A}$, tomando al campo $\vec{B}$ como constante. Entonces tenemos

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla_A \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla_B \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Ambos términos tienen la forma del producto mixto, de modo que

$$\nabla_A \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla_A \times \vec{A}) = \vec{B} \cdot \nabla_A \times \vec{A},$$

$$\nabla_B \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot (\nabla_B \times \vec{B}) = -\vec{A} \cdot \nabla_B \times \vec{B}$$

$$\implies \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla_A \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla_B \times \vec{B} \quad (A.8)$$

b) $(\nabla \times \vec{A}) \times \vec{B}$

Si aplicamos la identidad (A.2) al doble producto vectorial obtenemos

$$(\nabla \times \vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

expresión que carece de sentido, pues en (b) nabla opera sólo sobre $\vec{A}$ y hemos obtenido una expresión donde aparece $\nabla \cdot \vec{B}$. La manera correcta de operar resulta de observar que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{A}) \times \vec{B} &= (\nabla_A \times \vec{A}) \times \vec{B} = -\vec{B} \times (\nabla_A \times \vec{A}) = -\nabla_A (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla_A) \vec{A} = \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \nabla_A (\vec{A} \cdot \vec{B}). \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene $\nabla (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \nabla_B (\vec{A} \cdot \vec{B})$.

Luego, despejando los términos $\nabla_{A,B} (\vec{A} \cdot \vec{B})$ y sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \nabla_A (\vec{A} \cdot \vec{B}) + \nabla_B (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \end{aligned} \quad (A.11)$$

Operando análogamente se obtienen las identidades:

$$\nabla \cdot (\lambda \vec{A}) = \lambda \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \lambda \quad (A.6)$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (A.7)$$

$$\nabla \times (\lambda \vec{A}) = \lambda \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \lambda \quad (A.9)$$

FÓRMULAS INTEGRALES

Consideremos una superficie S abierta ubicada en un campo de velocidades. Por ejemplo, en la fig. 9 S es una superficie oblicua en un canal donde el líquido se mueve con velocidad variable. Sea $\hat{n}$ el versor normal a S en un punto P de la superficie donde la velocidad mide $\vec{v}(P)$. En general, para una superficie arbitraria $\hat{n} = \hat{n}(P)$.

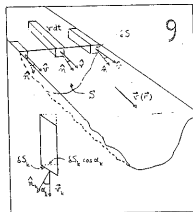
El volumen dV_S del líquido que atraviesa la superficie S en un intervalo dt será la suma de los volúmenes de prismas de base $\delta S_K \cos \alpha_K$ (fig. 9) y altura $v_K dt$, con $\cos \alpha_K = \hat{n}_K \cdot \hat{v}_K$. Luego

$$dV_S = \sum_K \delta S_K \cos \alpha_K v_K dt = dt \sum_K \delta S_K \hat{n}_K \cdot \hat{v}_K v_K = dt \sum_K \delta \vec{S}_K \cdot \vec{v}_K$$

donde $\delta S_K \hat{n}_K = \delta \vec{S}_K$ es el elemento de superficie orientada, normal a S (δS_K es el elemento de área) y, suponiendo una variación continua de la velocidad, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{v}$$

expresión que define el flujo del campo vectorial $\vec{v}$ a través de la superficie S , es decir el volumen de líquido que atraviesa S por



unidad de tiempo.

En general, el flujo de un campo $\vec{A}(\vec{r})$ cualquiera a través de S será

$$\Phi = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{A} = \iint_S dS \hat{n} \cdot \vec{A} \quad (20)$$

Para una superficie cerrada indicaremos el flujo como $\oint d\vec{S} \cdot \vec{A}$.

El teorema de Gauss-Ostrogradski expresa en forma general el razonamiento que hemos seguido para definir la divergencia de un vector (fig. 6). Establece que el flujo de un campo $\vec{A}$ a través de una superficie S cerrada es igual a la integral de la divergencia de $\vec{A}$ sobre el volumen $V(S)$ encerrado por S:

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot \vec{A} \quad (A.12)$$

(En lo que sigue abreviaremos $\int d\tau = \iiint d\tau$, definiendo el tipo de integral por el diferencial que acompaña al signo $\int$).

Este teorema fundamental permite deducir numerosos resultados que utilizaremos:

i) Sea $\vec{A} = \vec{a} \lambda(\vec{r})$, siendo $\vec{a}$ un vector constante arbitrario; luego, según (A.6)

$$\nabla \cdot (\vec{a} \lambda) = \vec{a} \cdot \nabla \lambda$$

$$y \quad (A.12) \implies \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{a} \lambda = \vec{a} \cdot \oint_S d\vec{S} \lambda = \int_{V(S)} d\tau \vec{a} \cdot \nabla \lambda = \vec{a} \cdot \int_{V(S)} d\tau \nabla \lambda$$

Esta relación vale para todo $\vec{a}$, lo que sólo es posible si

$$\oint_S d\vec{S} \lambda = \int_{V(S)} d\tau \nabla \lambda \quad (A.13)$$

ii) Sea $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{a}$, con $\vec{a}$ = vector const. arbitrario; luego, según (A.8) y (A.1) tenemos

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{A} \quad y \quad d\vec{S} \cdot \vec{A} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot d\vec{S} \times \vec{A}$$

$$\text{Aplicando (A.12) resulta } \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{A} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot \oint_S d\vec{S} \times \vec{A} =$$

$$= \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot \vec{B} = \int_{V(S)} d\tau \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{A} = \vec{a} \cdot \int_{V(S)} d\tau \nabla \times \vec{A},$$

relación que vale para todo $\vec{a}$ si y solamente si

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{A} = \int_{V(S)} d\tau \nabla \times \vec{A} \quad (A.14)$$

$$(11) \quad \oint_S d\vec{S} = \int_{V(S)} d\tau \nabla(1) = 0.$$

Esta integral representa la superficie orientada neta, que para una superficie abierta no se anula, mientras que para S cerrada a cada contribución de un sentido le corresponde otra contribución de sentido opuesto (antípoda), de modo que ambas se cancelan.

iv) Fórmulas de Green:

Sean $\lambda(\vec{r})$ y $\mu(\vec{r})$ dos campos escalares, S una superficie cerrada que contiene una región $V = V(S)$. Valen las siguientes relaciones:

$$1^a) \quad \oint_S d\vec{S} \cdot (\mu \nabla \lambda) = \int_V d\tau \mu \nabla^2 \lambda + \int_V d\tau \nabla \lambda \cdot \nabla \mu \quad (22)$$

$$2^a) \quad \oint_S d\vec{S} \cdot (\mu \nabla \lambda - \lambda \nabla \mu) = \int_V d\tau (\mu \nabla^2 \lambda - \lambda \nabla^2 \mu) \quad (23)$$

3^a) Sean los vectores de posición $\vec{r} = (x', y', z')$ fijo y $\vec{r} = (x, y, z)$ variable, ambos interiores a una superficie S con los cuales definimos el escalar R como

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = [\sum_1 (x_1 - x'_1)^2]^{1/2}.$$

Este escalar, igual a la distancia entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, tiene la importante propiedad siguiente

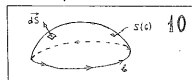
$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

(Verificarla para x'_i fijas, siendo $\nabla^2 = \sum_k \partial^2 / \partial x_k^2$)

Entonces se cumple la relación

$$4\pi \lambda(\vec{r}) = \iint_S d\vec{S} \cdot \left[\frac{\nabla \lambda}{R} - \lambda \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right] - \int_V d\tau \frac{\nabla^2 \lambda}{R} \quad (24)$$

Sea una superficie abierta S cuyo contorno es la curva cerrada ℓ (fig. 10). Dado un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ vale el



siguiente teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{dl} \cdot \vec{A} = \iint_{S(t)} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{A} \quad (A.17)$$

donde el primer miembro es la circulación de $\vec{A}$ a lo largo de la curva C , y el segundo es el flujo del rotor de $\vec{A}$ a través de la superficie encerrada. La interpretación dada en (17) y en la fig. 7 es un caso particular de este importante teorema.

Del mismo deduciremos fácilmente los siguientes resultados útiles:

i) Sea $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{a}$, con $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ y $\vec{a} = \text{const. arbitrario}$. Luego

$$(A.1) \Rightarrow d\vec{l} \cdot \vec{B} = d\vec{l} \cdot \vec{A} \times \vec{a} = \vec{a} \cdot d\vec{l} \times \vec{A}$$

$$(A.7) \Rightarrow d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B} = d\vec{S} \cdot \nabla \times (\vec{A} \times \vec{a}) = d\vec{S} \cdot [(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{a} (\nabla \cdot \vec{A})] = \\ = \vec{a} \cdot \nabla_A (d\vec{S} \cdot \vec{A}) - \vec{a} \cdot d\vec{S} (\nabla \cdot \vec{A}) = \vec{a} \cdot [\nabla_A (d\vec{S} \cdot \vec{A}) - d\vec{S} (\nabla \cdot \vec{A})]$$

donde con ∇_A operamos sólo sobre $\vec{A}(\vec{r})$ y no sobre $d\vec{S}$. Sobreentendiendo esto, la expresión (A.17) para $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{a}$ toma la forma

$$\vec{a} \cdot \oint_C d\vec{l} \times \vec{A} = \vec{a} \cdot \left[\iint_{S(t)} \nabla (d\vec{S} \cdot \vec{A}) - \iint_{S(t)} d\vec{S} \nabla \cdot \vec{A} \right]$$

que vale para todo $\vec{a}$ si y sólo si

$$\oint_C d\vec{l} \times \vec{A} = \iint_{S(t)} \nabla (d\vec{S} \cdot \vec{A}) - \iint_{S(t)} d\vec{S} \nabla \cdot \vec{A} \quad (A.15)$$

donde $\nabla (d\vec{S} \cdot \vec{A}) = \nabla_A (d\vec{S} \cdot \vec{A})$.

ii) Sea $\vec{B} = \lambda \vec{a}$ con $\lambda = \lambda(\vec{r})$ y $\vec{a} = \text{const. arbitrario}$. Luego

$$(A.9) \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \lambda \vec{a} = -\vec{a} \times \nabla \lambda$$

$$(A.1) \Rightarrow -d\vec{S} \cdot \vec{a} \times \nabla \lambda = +\vec{a} \cdot d\vec{S} \times \nabla \lambda.$$

Entonces, la (A.17) para $\vec{B} = \lambda \vec{a}$ toma la forma

$$\oint_C d\vec{l} \cdot (\lambda \vec{a}) = \vec{a} \cdot \oint_C d\vec{l} \lambda = \vec{a} \cdot \iint_{S(t)} d\vec{S} \times \nabla \lambda$$

válida para todo $\vec{a}$ si y sólo si

$$\oint_C d\vec{l} \lambda = \iint_{S(t)} d\vec{S} \times \nabla \lambda \quad (A.16)$$

DEFINICIONES INTRINSECAS

Los primeros miembros de las expresiones (A.12), (A.13) y (A.14) son independientes del sistema de coordenadas o del referencial elegido, por serlo sus integrandos. En efecto, el producto $d\vec{S} \cdot \vec{A}$ es un invariante frente a cambios de referencial, y otro tanto ocurre con el escalar λ y con el producto $d\vec{S} \times \vec{A}$, que se transformará según el criterio dado en (5).

Esta invariancia permite definir los operadores diferenciales en forma intrínseca, es decir independiente del referencial.

Sea un elemento de volumen $\Delta\tau$ encerrado por una superficie ΔS . Luego

$$(A.12) \Rightarrow \oint_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int_{\Delta\tau} d\tau \nabla \cdot \vec{A} \approx \Delta\tau \nabla \cdot \vec{A} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{A} \quad (25)$$

o sea que la $\text{div} \vec{A}$ en un punto $\vec{r}$ es un invariante igual al cociente entre el flujo del campo $\vec{A}$ a través de la superficie que encierra al elemento y el volumen encerrado (flujo por unidad de volumen).

Un campo vectorial sólo tendrá divergencia neta en un punto si allí hay una fuente (o sumidero) que genere el flujo a través de ΔS .

Análogamente, las definiciones intrínsecas del gradiente y del rotor se obtienen, para el mismo elemento $\Delta\tau$, de:

$$(A.13) \Rightarrow \nabla \lambda = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \lambda \quad (26)$$

$$(A.14) \Rightarrow \nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_{\Delta S} d\vec{S} \times \vec{A} \quad (27)$$

La justificación de las expresiones (26) y (27) es completamente similar a la dada para (25) y se basa en tomar el integrando como una cantidad constante e igual a su valor en el centro del elemento de volumen, lo que es lícito para $\Delta\tau$ suficientemente pequeño.

Podemos emplear estas definiciones para calcular fácilmente los distintos operadores en casos extremos como los siguientes:

1) Gradiente:

Para $\lambda(\vec{r}) = a = \text{const.}$ tomemos una superficie ΔS cúbica

como en la fig. 11-a:

$\oint d\vec{s} \cdot \vec{\lambda} = \oint d\vec{s} \cdot \vec{0} = 0$, como ya vimos en (21). Luego (26) $\Rightarrow \nabla \lambda = 0$.

Análogamente, dado

$\mu(\vec{r}) = b r = b(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$
elegimos una porción ΔS de cáscara esférica de radio r (fig. 11-b) y tenemos:

$$\oint_{\text{curva } \Delta S} d\vec{s}_\theta = \oint_{\text{curva } \Delta S} d\vec{s}_\theta = 0;$$

$$\oint_{\text{curva } \Delta S} d\vec{s}_r = \oint_{\text{curva } \Delta S} r = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

(verificarlo) con

$\Delta \tau = (r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi) \, dr$. Luego, aplicando (26) obtenemos

$$\nabla \mu = b \hat{r}.$$

ii) Divergencia:

Sea el caso de una fuente de fluido (fig. 12-a), tal que

$$\vec{v}(\vec{r}) = c r^{-2} \hat{r}.$$

Tomando una ΔS esférica de radio r , cuya normal $\hat{n} = \hat{r}$:

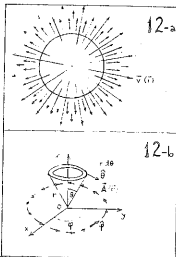
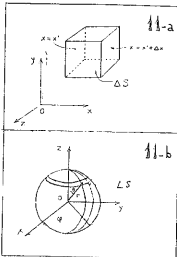
$$\oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{s} = (\hat{r} \cdot d\vec{s}) \cdot (c r^{-2} \hat{r}) = c r^{-2} dS$$

$$\Rightarrow \oint_{\Delta S} d\vec{s} \cdot \vec{v} = \oint_{\Delta S} dS v = 4 \pi c$$

con $\Delta \tau = (4/3) \pi r^3$. Luego (25)

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{4 \pi c}{(4/3) \pi r^3} = \frac{3}{r^3} c \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$$

como es de esperar, ya que la divergencia mide la densidad de fuentes, que es infinita si ocupan un volumen $\Delta \tau = 0$.



Si, en cambio, suponemos que la fuente de fluido es finita (no puntual) y tiene una densidad $\rho \geq c \equiv \rho \Delta \tau$,

$$(25) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \frac{4 \pi c}{\Delta \tau} = 4 \pi \rho \quad (28)$$

Para un campo rotacional $\vec{A} = a r \hat{\phi}$ (fig. 12-b) es obvio que $\vec{A} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow d\vec{s} \cdot \vec{A} = 0 \forall \vec{r}$ sobre una esfera con centro en el origen, de modo que

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

iii) Rotor:

Aplicando la (27) a los casos recién analizados es obvio que para una superficie esférica ΔS se verifica:

$$d\vec{s} \times \vec{v} = (d\vec{s} \hat{r}) \times \left(\frac{c}{r^2} \hat{r} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{v} = 0 \quad (\text{fig. 12-a})$$

$$d\vec{s} \times \vec{A} = (d\vec{s} \hat{r}) \times (A \hat{\phi}) = -dS A \hat{\theta}.$$

Considerando anillos sobre la esfera de radio r (como el indicado en la fig. 12-b) cuya área es $dS = (2 \pi r \sin \theta) (r d\theta)$, las contribuciones a la integral de $d\vec{s} \times \vec{A}$ normales al eje z se cancelan, siendo $\theta_z = \hat{\theta} \cdot \hat{z} = -\sin \theta$. Luego $\vec{A} = a r \hat{\phi} \Rightarrow$

$$\oint_{\Delta S} d\vec{s} \times \vec{A} = \hat{z} \cdot 2 \pi r^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta = a \pi^2 r^3 \hat{z}; \quad \Delta \tau = \frac{4 \pi}{3} r^3$$

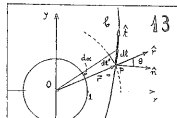
ya que la integral sobre θ vale $\pi/2$. Luego (27) $\Rightarrow$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{3 \pi a}{4} \hat{z}$$

o sea que el rotor es normal al plano de circulación de $\vec{A}$.

ANGULO SOLIDO

Sea una curva ℓ en el plano (fig. 13). Un elemento de longitud dl en un punto P subtende el ángulo $d\alpha$ visto desde el origen O . El versor tangente a la curva ℓ en el punto P es $\hat{t}$, y la normal a la curva está definida por el versor $\hat{n}$.



Mientras que $\hat{t}$ tiene el mismo sentido que ℓ , $\hat{n}$ se elige de modo que apunte hacia la derecha de la curva (esta es la convención de sentidos más usual). (+)

El ángulo orientado $d\alpha$ se define como la longitud del arco proyectado sobre la circunferencia de radio unidad correspondientes al elemento $d\ell$, con signo (-) si $\vec{OP} = \vec{F}$ apunta hacia la izquierda de la curva ℓ , y con signo (+) si $\vec{F}$ apunta hacia la derecha. En la fig. 13 vemos que valen las relaciones

$$\frac{d\alpha}{1} = \frac{d\ell'}{r} = \frac{d\ell \cos \theta}{r} = \frac{d\ell \hat{n} \cdot \hat{F}}{r}$$

donde: $d\ell' = d\ell \cos \theta =$ proyección de $d\ell$ sobre una circunferencia de centro O y radio r ;

$r = |\vec{F}| = |\vec{OP}| =$ distancia de P al origen O ;

$\theta =$ ángulo entre $\hat{n}$ y $\hat{F} = \vec{F}/|\vec{F}|$.

Los versores $\hat{n}$ y $\hat{F}$ permiten definir los elementos de longitud orientados:

$d\vec{\ell} = d\ell \hat{F} =$ elemento tangencial (++)

$d\vec{\ell}_n = d\ell \hat{n} =$ elemento normal.

Con esta notación el ángulo orientado se expresa como

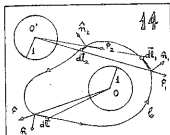
$$d\alpha = \frac{d\vec{\ell}_n \cdot \vec{F}}{r^2}$$

(29)

A partir de (29) podemos obtener por integración el ángulo total proyectado por una curva cerrada ℓ . Desde un punto interior a la curva, como el O (fig. 14):

$$\alpha = \oint_{\ell} d\alpha = 2\pi$$

pues las contribuciones de todos los elementos tienen el mismo signo, ya que $\hat{n} \cdot \hat{F} > 0 \forall d\vec{\ell}$. En cambio, desde el punto O' exterior a ℓ a cada elemento como $d\vec{\ell}_1$ (tal que $\hat{n}_1 \cdot \hat{F}_1 > 0$)



(+) Un tercer versor, necesario para completar la descripción diferencial de la curva ℓ en P , es el binormal $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$. Los tres forman el llamado triédro principal (de Frenet).

(++) Cuando hablamos de "elemento de longitud" (sin agregados) nos referimos siempre al elemento tangencial.

le corresponde otro elemento $d\vec{\ell}_2$ (tal que $\hat{n}_2 \cdot \vec{F}_2 < 0$), ambos con igual proyección $|d\alpha_1| = |d\alpha_2|$. En consecuencia, el ángulo total proyectado por ℓ desde O' vale

$$\alpha = \oint_{\ell} d\alpha = 0.$$

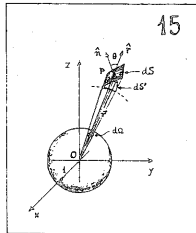
El ángulo sólido $d\Omega$ de un elemento de superficie dS se define análogamente como la proyección del elemento sobre la esfera de radio unidad (fig. 15), de modo que valen las relaciones:

$$\frac{d\Omega}{1} = \frac{dS'}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{F}}{r^2}$$

donde $\vec{F} = r \hat{F}$; $\hat{n} = \frac{d\vec{S}}{dS}$ = normal

exterior a la superficie S en el punto P . Luego

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{F}}{r^3} \quad (30)$$



Con el mismo razonamiento que desarrollamos en la fig. 14 comprobamos de inmediato que el ángulo subtendido por una superficie

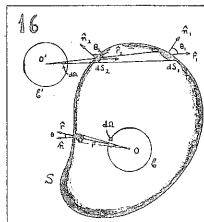
S cerrada vale (fig. 16):

$$\Omega = \oint_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{para } O \text{ interior a } S \\ 0 & \text{para } O' \text{ exterior a } S \end{cases} \quad (31)$$

ya que las proyecciones sobre la esfera unitaria $\hat{\ell}$ de centro O son de igual signo, y el área total de $\hat{\ell}$ mide

$$4\pi r_{\hat{\ell}}^2 = 4\pi \cdot 1 = 4\pi.$$

Para O' exterior a S las proyecciones orientadas de elementos homólogos (como $d\vec{S}_1$ y



$d\vec{s}_2$ en la fig. 16) tienen signo contrario e igual módulo, de modo que sus contribuciones se cancelan.

La superficie S puede tener concavidades, en cuyo caso una semirrecta desde O cortará a S en un número de puntos que puede ser mayor que 2 (verificarlo). Si el punto O desde el cual medimos el ángulo es exterior a S ese número será par y, por lo tanto, $\Omega = 0$. Si O es interior, toda semirrecta desde ese punto debe cortar a S en un número impar de puntos, de manera que $\Omega \neq 0$.

El vértice del ángulo puede ser cualquier punto del espacio, en lugar del origen de coordenadas. Si la posición del vértice está dada por el vector $\vec{F}'$, es fácil ver que las expresiones (29) y (30) toman las respectivas formas:

$$d\alpha = \frac{d\vec{r}_n \cdot \vec{R}}{R^2}; \quad d\Omega = \frac{d\vec{s}_n \cdot \vec{R}}{R^3} \quad (32)$$

donde hemos reemplazado $\vec{r}$ por $\vec{R} = \vec{r} - \vec{F}'$, como corresponde a una traslación del origen a la posición $\vec{F}'$.

CAMPOS IRROTACIONALES Y SOLENOIDALES

Un campo vectorial cuyo rotor es nulo se llama irrotacional. El gradiente de un campo escalar, como ya vimos en (A.4), es obviamente irrotacional. Recíprocamente, dado un campo irrotacional $\vec{A}$, existe un campo escalar, definido a menos de una constante, del cual $\vec{A}$ es el gradiente, es decir que

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \implies \exists \lambda(\vec{r}) \ni \vec{A} = \nabla \lambda \quad (33)$$

Es evidente que todo escalar de la forma $\lambda'(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) + k$, con $k = \text{const.}$, verifica la condición (33), pues $\nabla k = 0$.

Un campo vectorial cuya divergencia es nula se llama solenoidal. El rotor de un campo vectorial es claramente solenoidal, según vimos en (A.3). Recíprocamente, dado un campo solenoidal $\vec{B}$ existe un campo vectorial $\vec{A}$, definido a menos del gradiente de un campo escalar, del cual $\vec{B}$ es el rotor:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \implies \exists \lambda(\vec{r}) \ni \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (34)$$

Si $\mu(\vec{r})$ es un campo escalar, es obvio que $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \mu$ verifica la condición (34), pues $\nabla \times \nabla \mu = 0$ según (A.4).

Helmholtz enunció un teorema fundamental para la teoría electromagnética: si se conocen la divergencia y el rotor de un campo vectorial, éste queda unívocamente determinado. Es decir que si conocemos

$$\nabla \cdot \vec{A} = \rho(\vec{r}) \quad \text{y} \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{I}(\vec{r})$$

en una región acotada V , entonces $\vec{A} = -\nabla \phi + \nabla \times \vec{F} \quad (35)$

$$\text{donde} \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{y} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{I}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (36)$$

Veremos que varias propiedades importantes de los campos electromagnéticos son simples casos particulares de este teorema.

COORDENADAS CURVILINEAS

A continuación damos algunas expresiones útiles en los sistemas de coordenadas ortogonales más usuales. En general indicaremos:

$d\vec{r}_i$ = elemento de longitud paralelo al versor i -ésimo;

$d\vec{s}_i$ = elemento de superficie normal al versor i -ésimo.

a) Cartesianas (fig. 17)

Coordenadas: $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

$$\implies r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Versores: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

Elementos de longitud: dx, dy, dz

Elementos de superficie:

$$dS_x = dy dz; dS_y = dz dx; dS_z = dx dy.$$

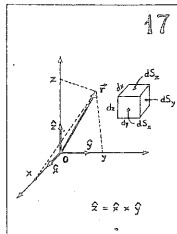
Elemento de volumen: $dV = dx dy dz$.

Gradiente:

$$\nabla \lambda = \hat{x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

Divergencias:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$



Rotor:

$$\nabla \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{x} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{y} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{z}$$

Laplaciano: $\nabla^2 \lambda = \nabla \cdot \nabla \lambda = \sum_i \partial_{ii}^2 \lambda = \partial_{xx}^2 \lambda + \partial_{yy}^2 \lambda + \partial_{zz}^2 \lambda$

b) Cilíndricas (fig. 18)

Coordenadas: $\vec{r} = R \cos \varphi \hat{x} + R \sin \varphi \hat{y} + z \hat{z}$

$$\Rightarrow R = (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad r = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{x}{R} = \arcsen \frac{y}{R} = \arctg \frac{y}{x}$$

Vectores: $\hat{R} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{z} \text{ (id. cartesianas)}$$

Elementos de longitud:

$$d\ell_R = dR; \quad d\ell_\varphi = R d\varphi; \quad d\ell_z = dz$$

Elementos de superficie (se obtienen como: $dS_R = d\ell_\varphi d\ell_z = R d\varphi dz$, etc.):

$$dS_R = R d\varphi dz; \quad dS_\varphi = dR dz; \quad dS_z = R d\varphi dR$$

Elemento de volumen: $dV = R dR d\varphi dz$

Gradiente: $\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \hat{z}$

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rotor:

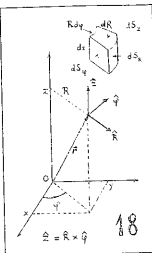
$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{R} + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi) - \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right] \hat{z}$$

Laplaciano: $\nabla^2 \lambda = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \lambda}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}$

c) Esféricas (fig. 19)

Coordenadas: $\vec{r} = r (\sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z})$

$$\Rightarrow r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}; \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$



Vectores:

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

Elementos de longitud:

$$d\ell_r = dr; \quad d\ell_\theta = r d\theta; \quad d\ell_\varphi = r \sin \theta d\varphi$$

Elementos de superficie (se obtienen como $dS_\theta = d\ell_r d\ell_\varphi = r \sin \theta dr d\varphi$, etc.):

$$dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$$

$$dS_\varphi = r dr d\theta$$

Elemento de volumen: $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

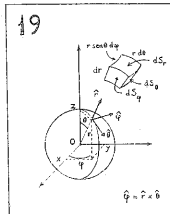
Gradiente: $\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \hat{\varphi}$

Divergencia: $\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Rotor: $\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}$

Laplaciano:

$$\nabla^2 \lambda = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \lambda}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \varphi^2} \right]$$



APENDICE: IDENTIDADES VECTORIALES

En las identidades que contienen integrales V indica que se integra sobre la región del espacio encerrada por la superficie S . $\oint$ indica la curva que rodea a una superficie S abierta.

$$(A.1) \quad \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{C} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (\text{cíclica})$$

$$(A.2) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{BACa menos CABallo, sic})$$

$$(A.3) \quad \text{div} \, \vec{r} \vec{A} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$$

$$(A.4) \quad \text{rot} \, \vec{\nabla} \lambda = \nabla \times \nabla \lambda = 0$$

$$(A.5) \quad \nabla (\lambda \mu) = \lambda \nabla \mu + \mu \nabla \lambda$$

$$(A.6) \quad \nabla \cdot (\lambda \vec{A}) = \lambda \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \lambda$$

$$(A.7) \quad \nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\nabla \cdot \vec{A})$$

$$(A.8) \quad \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$$

$$(A.9) \quad \nabla \times (\lambda \vec{A}) = \lambda \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \lambda$$

$$(A.10) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$(A.11) \quad \nabla (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

$$(A.12) \quad \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int_V d\tau \nabla \cdot \vec{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{teorema de Gauss de la divergencia} \\ \text{definición intrínseca de } \text{div} \vec{A} \end{array} \right.$$

$$(A.13) \quad \oint_C d\vec{s} \cdot \vec{\lambda} = \int_V d\tau \nabla \lambda \quad (\text{definición intrínseca del } \vec{\nabla} \lambda)$$

$$(A.14) \quad \oint_S d\vec{S} \times \vec{A} = \int_V d\tau \nabla \times \vec{A} \quad (\text{definición intrínseca del } \vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$(A.15) \quad \oint_C d\vec{\ell} \times \vec{A} = \iint_S \nabla (\vec{A} \cdot \vec{\ell}) \cdot \vec{A} - \iint_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{A}$$

$$(A.16) \quad \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{\lambda} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla \lambda$$

$$(A.17) \quad \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{A} = \iint_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{A} \quad (\text{teorema de Stokes del rotor})$$

$$(A.18) \quad \iint_S (d\vec{S} \cdot \vec{A}) \vec{B} = \int_V d\tau (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + \int_V d\tau (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$$

CAPITULO I

ELECTROSTATICA

INTRODUCCION

Los fenómenos eléctricos y magnéticos se conocen desde la Antigüedad. Hacia el año - 600 Tales describía cómo un pedazo de ámbar, después de frotado, atraía pequeños trozos de lana. Esta propiedad del ámbar, que le permite mover cuerpos pesados a distancia (propiedad ponderomotriz) se denominó electricidad, por poseerla el ámbar (elektron, en griego).

Gilbert (1600) publicó una lista de materiales que muestran la misma propiedad. DuFay (1733) descubrió que el frotamiento de tales sustancias puede dar lugar tanto a la atracción como a la repulsión. Dividió a estos materiales en dos clases: vitreos (vidrio, lana) y resinosos (ámbar, seda). Postuló que los cuerpos de la misma clase se repelen, y los de clases opuestas se atraen.

Franklin (1747) supuso que, en la electrización por frotamiento de dos materiales de clases opuestas, la sustancia vítrea recibe electricidad o "carga eléctrica" (la llamó "fuego" eléctrico), mientras que la resinosa cede dicha carga. Como resultado, la primera quedaba cargada positiva y la segunda, negativamente. Implícitamente Franklin aceptaba la existencia de una cantidad q cuya variación era $\Delta q_v = \Delta q_+$ para el cuerpo vítreo y $\Delta q_r = \Delta q_-$ para el cuerpo resinoso, tales que

$$\Delta q_+ + \Delta q_- = 0$$

que expresa la conservación de la carga en la electrización.

La asignación de todos estos nombres y signos fue completamente arbitraria, pero subsiste hasta la actualidad. Canton (1750) definió una extensa serie triboeléctrica que parte de la sustancia más positiva y llega a la más negativa, de manera que frotando un cuerpo de esta serie con otro que está ubicado después, el primero se carga positivamente y el segundo, negativamente:

(+) piel de conejo / vidrio / lana / piel de gato / seda /
/ algodón / ámbar / azufre (-)

La acumulación de resultados experimentales y la importancia de los mismos fue creciendo entre 1750 y 1800, con la medición de

las fuerzas entre cuerpos cargados; entre 1800 y 1860, con la observación de numerosos efectos eléctricos y magnéticos, así como de la conexión intrínseca entre ambos tipos de fenómenos (Gauss, Faraday, Maxwell). A partir de entonces, los descubrimientos sobre la estructura del átomo (J.J. Thomson, Bohr, Millikan) llevaron hacia 1920 a la formulación de una teoría que describe con buena aproximación las propiedades eléctricas de la mayoría de los materiales de uso cotidiano. En la próxima sección daremos una versión muy simplificada de dicha teoría.

La inclusión de los efectos relativistas y cuánticos, conocidos en este siglo, tiene gran importancia para explicar los fenómenos que llamaremos microscópicos (que tienen lugar en regiones del tamaño del átomo: $r \sim 10^{-10}$ m) o para analizar los campos en referenciales móviles, pero no es indispensable para estudiar los aspectos macroscópicos (en regiones que contienen muchos átomos), ni para distancias entre partículas mucho mayores que los diámetros de las mismas.

En la actualidad reconocemos en la naturaleza cuatro fuerzas fundamentales: gravitatoria, electromagnética, nuclear débil y nuclear fuerte. Estas dos últimas clases de fuerza son despreciables a distancias del orden que nos interesa, aunque no lo son sus efectos: la nuclear débil actúa en el neutrón (es comparativamente la más pequeña de todas), y la nuclear fuerte actúa entre protones y neutrones, manteniendo la cohesión del núcleo atómico (es la más intensa de todas las fuerzas conocidas). El núcleo tiene dimensiones menores que 10^{-14} m, y en lo que sigue nos ocuparemos de regiones con dimensiones mucho mayores que 10^{-10} m, de modo que no tendremos en cuenta las fuerzas nucleares.

CUERPOS CARGADOS

Para las interacciones a distancias mucho mayores que el alcance o rango de las fuerzas nucleares podemos resumir los resultados experimentales diciendo que un cuerpo cargado es aquel que puede ser sometido a fuerzas electromagnéticas, es decir a fuerzas atractivas o repulsivas no gravitatorias.

Para medir la fuerza total que actúa sobre un cuerpo podemos analizar las interacciones del mismo en vacío con otros cuerpos (el estiramiento del resorte de un dinamómetro, el contrapeso que lo equilibra

en una balanza, etc.) si está en reposo, o bien conociendo su masa podemos medir su aceleración cuando está en movimiento. Así habremos medido una fuerza neta $\vec{F}_t$ de la que podemos descontar la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$; la diferencia obtenida será la contribución $\vec{F}_{em}$ de las fuerzas electromagnéticas, que sólo actúan sobre cuerpos cargados:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_g + \vec{F}_{em}$$

Existen solamente dos clases de carga, convencionalmente definidas como positiva y negativa. Los cuerpos con igual tipo de carga se repelen y los de tipo contrario se atraen.

Imaginemos un cuerpo cargado muy pequeño, cuya dimensión máxima d es mucho menor (+) que las distancias r_i a otros cuerpos ($d \ll r_i \forall i$), cuerpo al que denominaremos carga de prueba. Ubicando un cuerpo cargado (1) a una distancia r de la carga de prueba mediremos una fuerza $\vec{F}_1$ sobre dicha carga. Si luego reemplazamos el cuerpo (1) por otro (2) a la misma distancia del de prueba y la fuerza que medimos sobre éste resulta ser igual a la anterior ($\vec{F}_1 = \vec{F}_2$), decimos que los cuerpos (1) y (2) tienen la misma carga eléctrica. En estas experiencias, y en el resto de este Capítulo, supondremos que todos los cuerpos están en reposo y en equilibrio estático (sumas de fuerzas y de momentos sobre cada uno iguales o cero).

La carga eléctrica satisface el principio de conservación, de modo que la carga total de un cuerpo o sistema es la suma algebraica de las cargas de sus componentes. Asignemos el signo (+) ó (-) a una carga según sea repelida o atraída por una sustancia vítrea cargada, respectivamente. A partir del principio de conservación y de la definición dada de igualdad de cargas, definimos múltiplos (y submúltiplos) de una carga dada. En particular, la unidad de carga se define arbitrariamente por sus efectos sobre otra carga igual, ambas puntuales, ubicadas a una cierta distancia.

La inexistencia de un tercer tipo de carga se puede comprender a partir de que

"Nunca se ha observado la atracción mutua de tres cuerpos cargados".

(+) Por "mucho menor" entendemos que $d/r \ll \epsilon$, = error relativo en la mejor determinación de la distancia que podemos lograr, es decir que el concepto de $\epsilon \ll 1$ depende de la calidad de nuestros instrumentos de medición.

En efecto, si A, B y C son tres cuerpos y suponemos que la fuerza F_{AB} entre los dos primeros es atractiva, y que también lo es la F_{AC} , ello implica que A tiene carga distinta de la de B y distinta de la de C. Pero la fuerza de interacción restante, F_{BC} , resulta ser repulsiva en todas las experiencias realizadas. Es decir que B y C tienen el único tipo de carga distinto del que tiene A.

Por otra parte, si bien la asignación del signo (+) a la carga de tipo vítreo es arbitraria, de ninguna manera lo es el asignar signos opuestos a las dos clases existentes. Esta convención refleja el hecho de que si un cuerpo puntual A, colocado a una cierta distancia r de una carga de prueba, ejerce sobre ésta una fuerza $\vec{F}$, y otro cuerpo puntual B, colocado en la misma posición, ejerce una fuerza contraria, cuando colocamos ambos cuerpos en esa posición, la fuerza neta sobre la carga de prueba es nula. Este hecho experimental es una evidencia de la validez de los principios de conservación de la carga y de superposición de las fuerzas.

Más específicamente, la carga total de un sistema aislado no varía nunca, de manera que representa una de las constantes del sistema. Estos principios de conservación son la base de las experiencias que condujeron a formular las diversas leyes que iremos enunciando.

Para las distancias características de los procesos macroscópicos ($r \gg 10^{-10}$ m) la carga mínima detectada en un cuerpo es la del electrón, cuya magnitud indicaremos con la letra e y cuyo signo es negativo ($q_e = -e < 0$).

Las sustancias que encontramos en la naturaleza son generalmente neutras, lo que resulta de la existencia en la mayor parte de los cuerpos de números iguales de cargas negativas (en los electrones) y positivas. Estas últimas están localizadas en los núcleos atómicos, en partículas llamadas protones (~1836 veces más pesados que un electrón). La configuración natural más sencilla es el átomo de hidrógeno que consta de un solo protón y un electrón.

En algunas sustancias las cargas se manifiestan por electrización (p.ej. por frotamiento). Estas cargas quedan localizadas en ciertas regiones del material, es decir que no se desplazan por el cuerpo. Tales sustancias se llaman aisladores o dieléctricos. En los cuerpos metálicos, por el contrario, las cargas se mueven por el cuerpo y alcanzan un equilibrio cuando se ubican exclusivamente sobre la superficie. Estos materiales se denominan conductores.

Se comprueba experimentalmente que las cargas móviles en los metales son las de los electrones (portadores). Los átomos desprovistos de uno o varios electrones constituyen lo que llamamos iones positivos; en un metal los iones forman una configuración con una simetría específica para cada material, llamada red cristalina. Hay otros tipos de conductores, como las soluciones acuosas de las sales, donde las cargas móviles suelen ser iones de los dos signos (p.ej. los iones Cl^- y Na^+ para la solución de sal común).

Hay un tercer tipo de materiales llamados semiconductores, en los cuales las cargas pueden moverse, aunque de una manera mucho más limitada que en los conductores. Cuando analicemos la conductividad en los distintos medios (Cap. II) veremos que las propiedades de los semiconductores son, en cierto sentido, intermedias entre las de conductores y aisladores. La justificación fundada de esas propiedades requiere conocimientos de Teoría de Sólidos, fuera del alcance de nuestro curso.

LEY DE COULOMB

Como dijimos, supondremos que todas las cargas en todos los cuerpos que consideremos están en reposo y en equilibrio estático. Toda vez que se aplique una fuerza adicional (externa), las cargas se redistribuirán en cada cuerpo hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio. Solamente estudiaremos el comportamiento de sistemas en tal estado, en condiciones que llamamos electrostáticas.

Comenzaremos por analizar cargas puntuales separadas por el vacío o por un medio muy tenue, como el aire seco. Por puntuales entendemos que sus dimensiones son mucho menores que las distancias entre ellas, en el sentido ya precisado.

Friestley (1767) y Cavendish (1772) fueron los primeros en investigar las fuerzas entre estas cargas. Cavendish supuso que la fuerza $\vec{F}_{12} = \vec{F}(q_1, q_2)$ entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 era similar a la fuerza gravitatoria entre masas puntuales, es decir inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambas. De cumplirse esta hipótesis, es fácil demostrar que la fuerza en el interior de un conductor esférico hueco debe ser nula. Si la hipótesis sobre la variación de la fuerza eléctrica con la distancia no se cumple, observando dos esferas metálicas concéntricas, a las que conectamos entre sí por un cable, al acercar una carga al sistema se debe medir

algún flujo neto de carga Δq hacia la esfera interior.

En ninguna de las experiencias realizadas se ha medido flujo neto de carga. La precisión fue creciendo en sucesivos experimentos, de modo que si expresamos la dependencia con la distancia de la fuerza entre cargas como $F_{12} \sim r^{-2+\delta}$, los resultados sucesivos prueban que

$$|\delta| < \begin{cases} 0,02 \text{ (Cavendish, 1772)} \\ 5 \times 10^{-5} \text{ (Maxwell, 1870)} \\ 2 \times 10^{-9} \text{ (Plimpton y Lawton, 1936)} \\ 3 \times 10^{-16} \text{ (Williams, Faller, Hill, 1971).} \end{cases}$$

Resumiendo, podemos afirmar con gran precisión que $F_{12} \sim r^{-2}$.

Coulomb (1785) empleó una balanza de torsión para medir en forma directa la fuerza entre las cargas puntuales q_1 y q_2 , confirmando los resultados de Cavendish

a) $F_{12} = |\vec{F}_{12}| \sim r_{12}^{-2}$

y además estableciendo que (fig. 1):

b) $F_{12} \sim q_1 q_2$

(la fuerza es proporcional a cada una de las cargas y, por lo tanto, al producto de ambas);

c) $\hat{F}_{12} \sim \hat{r}_1 - \hat{r}_2$ (+)

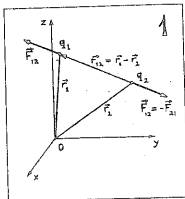
(la fuerza actúa según la recta que une las posiciones de las cargas).

d) La fuerza depende del medio material donde las cargas se encuentran inmersas, y siempre es menor que la fuerza que se mide en vacío.

Los resultados (a,b,c) se pueden resumir en una sola expresión para la fuerza sobre la carga q_1 cuando ésta interactúa con la carga q_2 (fig. 1):

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (1.1)$$

(+) Recordar que dos vectores paralelos son proporcionales.



donde $\frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \hat{r}_{12} \Rightarrow \vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$.

Podemos expresar de inmediato la fuerza sobre q_2 debida a q_1 (basta con intercambiar los índices $1 \leftrightarrow 2$ en la ec. 1.1):

$$\vec{F}_{21} = k q_2 q_1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -k q_1 q_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (1.2)$$

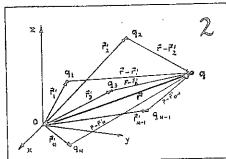
Es decir que las fuerzas electrostáticas (llamadas coulombianas) satisfacen el principio de acción y reacción.

El principio de superposición nos permite calcular la fuerza neta sobre una carga puntual q ubicada en $\vec{r}$ en presencia de N cargas puntuales q_i ubicadas en los puntos $\vec{r}_i$. Dicha fuerza será la suma de las fuerzas que sobre q ejerce cada una de las cargas q_i por separado, es decir en ausencia de las demás cargas (fig. 2):

$$\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N k q q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (1.3)$$

Esta expresión de la ley de Coulomb permite describir la fuerza neta sobre una carga debida a cualquier configuración de cargas puntuales. Desde el punto de vista de q , la fuerza se origina en las demás cargas, que son las fuentes de $\vec{F}$. En general, asignaremos coordenadas primadas $\vec{r}'_i = x'_i \hat{x}'_i + y'_i \hat{y}'_i + z'_i \hat{z}'_i$ a las cargas "fuentes" y reservaremos el vector $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ para el punto donde ubicamos una carga de prueba, que denominaremos "punto campo".

Cuando el medio que contiene las cargas es un aislador tenue (p.ej. la mayoría de los gases a presión normal), la fuerza entre dos cargas puntuales varía según la ley (1.1), donde debemos



reemplazar la constante de proporcionalidad k por k' , cuya razón

$$k/k' = K \quad (1.4)$$

es un valor específico de cada material llamado coeficiente dieléctrico. Si el medio es uniforme u homogéneo (es decir que sus propiedades son idénticas en todo punto), $K = \text{const.}$ recibe el nombre de constante dieléctrica. Según vimos en (d) siempre se mide $K \geq 1$.

SISTEMAS DE UNIDADES

Sabiendo que existe una carga mínima, la manera natural de definir la unidad de carga sería tomar dicha unidad igual a la carga mínima, de modo que la cantidad de carga eléctrica q de un cuerpo es simplemente el número neto de cargas elementales del cuerpo multiplicado por el valor de dicha carga elemental, o sea

$$q = \sum_{i=1}^N q_i = N_+ e - N_- e = (N_+ - N_-) e \quad (1.5)$$

donde N_+ = número de cargas elementales positivas (cada una = $+e$)
 N_- = número de cargas elementales negativas (cada una = $-e$)
 $e = |q_e|$ = módulo de la carga del electrón ($q_e = -e$).

En el sistema de unidades que emplearemos, llamado Sistema Internacional (S.I.) se elige como unidad un múltiplo arbitrario de e , llamado coulombio = C , tal que

$$e = 1,60219 \times 10^{-19} C. \quad (1.6)$$

La definición precisa de esta unidad, que daremos en el Cap. III, se basa en las propiedades magnéticas de las corrientes eléctricas.

Para definir mejor su significado podemos medir la fuerza entre dos cargas puntuales iguales a $1C$, separadas por 1 metro de distancia. Según (1.1), la fuerza $\vec{F}$ entre ellas, expresada en Newtons, será numéricamente igual a la constante k : $F = |\vec{F}| = k (N)$.

Al medirla encontramos el valor

$$k = 8,9875 \times 10^9 \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (1.7)$$

cuyas unidades se derivan directamente de (1.1):

$$[k] = [F] [r]^2 [q]^{-2} = \text{N m}^2 \text{ C}^{-2}.$$

En el S.I. expresamos la constante k en función de otra constante ϵ_0 llamada permitividad del vacío, tal que

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}. \quad (1.8)$$

Cuando todavía no se conocía la relación intrínseca entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, la unidad de carga fue definida fijando arbitrariamente la constante $k = 1$ y utilizando el sistema c.g.s. con el cm (longitud), el g (masa) y el s (tiempo) como unidades primitivas. Todas las demás cantidades de dicho sistema son derivadas; en particular lo es la unidad electrostática de carga:

$$\text{ues} (q) = \text{stC} = f$$

también llamada stat-Coulomb (stC) o Franklin (f).

La fuerza electrostática entre dos cargas iguales a $1f$, separadas por 1 cm , al haberse elegido $k = 1$, debe ser igual a 1 dina (d). Luego

$$1 d = 1 \frac{f^2}{\text{cm}^2} \Rightarrow 1 f = d^{1/2} \text{ cm} = \left(\frac{g \text{ cm}}{\text{s}^2}\right)^{1/2} \text{ cm} = g^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}.$$

La conversión de un sistema al otro es inmediata, pues conocemos el valor de k en el S.I. La fuerza entre dos cargas de $1C$ separadas por 1 m según (1.7) es aproximadamente igual a $9 \times 10^9 \text{ N}$. La expresión de esa misma fuerza en el sistema c.g.s.e. (donde $k = 1$), es

$$F = q^2 r^{-2} \Rightarrow q = r \sqrt{F}$$

con

$$\begin{aligned} q &= (1 C \text{ expresado en Franklins}) \\ F &= 9 \times 10^9 \text{ N} = 9 \times 10^9 \times 10^5 = 9 \times 10^{14} \text{ dinas} \\ r &= 1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Luego

$$(1 C)_{\text{S.I.}} \approx 10^2 \sqrt{9 \times 10^{14}} = 3 \times 10^9 f \quad (1.9)$$

donde hemos escrito 3 en lugar del valor más exacto $2,99793$.

En particular, la carga del electrón en el sistema c.g.s.e. vale

$$e = 1,60219 \times 10^{-19} \times 2,99793 \times 10^9 = 4,80325 \times 10^{-10} f.$$

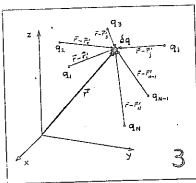
Las unidades electrostáticas (ues ó c.g.s.e.) se definieron de manera independiente de las que miden los fenómenos magnéticos (electromagnéticas: uem ó c.g.s.m.). Veremos en el Cap. III que existe una relación esencial entre ambas clases de unidades, como consecuencia de la cual el valor de la constante k en el S.I. está relacionado

con la velocidad de la luz en el vacío c . Numéricamente, resulta la expresión exacta $k = 10^{-7} \text{ c}^2$ (con las dimensiones correspondientes).

En lo que sigue emplearemos casi exclusivamente el S.I. Sólo nos referiremos al otro sistema cuando aparezca alguna unidad de uso frecuente, como el Gauss, el cm, etc.

CAMPO ELECTRICO

Supongamos N cargas puntuales ubicadas en los puntos $\vec{r}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) y una carga de prueba δq en el punto $\vec{r}$ (fig. 3). La



Según vimos en (1.3) la fuerza sobre δq es

$$\vec{F} = k \delta q \sum_{j=1}^N q_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3},$$

donde la sumatoria es una cantidad que no depende del valor de la carga δq , aunque sí depende de la posición de esta carga. En otras palabras, esta suma mide una propiedad del punto $\vec{r}$ en presencia de las cargas fuentes ubicadas en sus posiciones de equilibrio. El campo vectorial

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{\delta q} = k \sum_{j=1}^N q_j \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (1.10)$$

llamado campo eléctrico en el punto $\vec{r}$, nos permite obtener la fuerza sobre cualquier carga puntual q colocada en $\vec{r}$:

$$\vec{F}_q = q \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.11)$$

La relación (1.10) suele expresarse como el límite para $\delta q \rightarrow 0$ del cociente $\vec{F}/\delta q$. Este "límite" es una manera de expresar un

proceso ideal: disminuimos la carga δq y observamos que la relación $\vec{F}/\delta q$ se acerca a un valor constante que solamente depende del punto $\vec{r}$ y de las cargas (fuentes) y sus posiciones relativas con respecto a este punto.

Para distribuciones continuas de carga, como cables, chapas o volúmenes cargados, definimos densidades de carga mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} \delta q(\vec{r}') &= \lambda(\vec{r}') \delta \ell' \quad (\text{distribución lineal}) \\ \delta q(\vec{r}') &= \sigma(\vec{r}') \delta S' \quad (\text{distribución superficial}) \\ \delta q(\vec{r}') &= \rho(\vec{r}') \delta V' \quad (\text{distribución en volumen}) \end{aligned}$$

donde $\delta \ell'$, $\delta S'$, $\delta V'$ son los elementos de longitud, de área y de volumen de las respectivas distribuciones. Las longitudes

$$\delta \ell', (\delta S')^{1/2}, (\delta V')^{1/3}$$

deben ser despreciables en comparación con las dimensiones de los cuerpos y las distancias entre éstos.

El campo eléctrico generado por una distribución continua se obtiene haciendo $q_j \rightarrow \delta q_j(\vec{r}') = \delta q(\vec{r}_j')$ en (1.10):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_j \delta q(\vec{r}_j') \frac{(\vec{r} - \vec{r}_j')}{|\vec{r} - \vec{r}_j'|^3} \rightarrow k \int dq(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.12)$$

donde la integral tendrá la forma (curvilínea, de superficie o de volumen) que corresponda a la distribución de fuentes. En general, el campo $\vec{E}$ será una suma de varios términos de la forma (1.12), correspondientes a cuerpos extensos, más otros del tipo (1.10), provenientes de cuerpos muy pequeños o muy alejados (cargas puntuales).

Al calcular una fuerza mediante la expresión (1.11) debemos obrar cuidadosamente, recordando la propiedad esencial de los conductores: en ellos las cargas se desplazan bajo la acción de las fuerzas eléctricas. Si introducimos una carga q puntual pero de magnitud apreciable, el campo que ella genera provocará una redistribución de las cargas sobre todo conductor próximo. En un tiempo muy breve se alcanza una nueva configuración de equilibrio, generalmente distinta de la que teníamos antes de acercar la carga q .

Para comprender mejor la importancia de este efecto consideremos un conductor inicialmente neutro. Si introducimos una carga puntual $q > 0$ (fig. 4) los electrones libres del conductor serán atraídos por q , dejando "huecos" de carga positiva en las zonas del conductor más

alejadas de la carga q , como se ve en la figura. Esta separación de cargas producida en un conductor neutro es un ejemplo de redistribución provocada por un campo exterior, proceso conocido como inducción electrostática.

Es evidente que el campo que actúa sobre una carga q apreciable no es el mismo que genera una $\oint q$ de magnitud mucho menor y, en consecuencia, las distribuciones de carga en equilibrio serán muy distintas en ambos casos. De allí la necesidad de precisar que las densidades en (1.12) son las que existen en el equilibrio electrostático, que se alcanza cuando todos los desplazamientos han cesado.

Unidades: Las densidades de carga tienen:

$$[\lambda] = \text{Cm}^{-1} ; [\sigma] = \text{Cm}^{-2} ; [\rho] = \text{Cm}^{-3}.$$

El campo eléctrico, según (1.11), tiene $[\mathbf{E}] = [\mathbf{F}]/[q] = \text{Nm}^{-1}$ pero, en la práctica, se utiliza otra relación derivada de la definición del potencial electrostático.

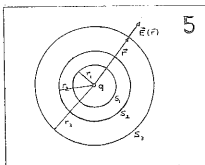
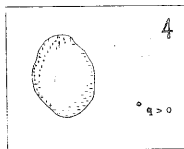
TEOREMA DE GAUSS: EXPRESION INTEGRAL

Gauss (1831) analizó el flujo a través de una superficie cerrada del campo eléctrico creado por una carga puntual. Supongamos la carga q y las superficies esféricas S_i ($i = 1, 2, \dots$) con centro en la carga (fig. 5). El flujo Φ_i de $\vec{E}$ a través de la superficie S_i es

$$\Phi_i = \oint_{S_i} d\vec{s} \cdot \vec{E} = kq \oint_{S_i} \frac{d\vec{s} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

donde $d\vec{s} = dS \hat{r} \Rightarrow \frac{d\vec{s} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{dS}{r^2}$

con $r = r_i =$ radio de S_i .



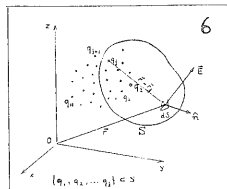
Luego
$$\Phi_i = \frac{kq}{r_i^2} \oint_{S_i} dS = \frac{kq}{r_i^2} (4\pi r_i^2) = 4\pi kq.$$

En particular, en el S.I. $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \Rightarrow \Phi_i = q/\epsilon_0, \forall i$. Es decir que el flujo del campo eléctrico es el mismo a través de todas las superficies esféricas con centro en la carga q , y además es proporcional a la carga.

Este resultado vale para cualquier configuración electrostática y para cualquier superficie cerrada. Supongamos una distribución de cargas puntuales q_i ($i=1, 2, \dots, N$) ubicadas en posiciones $\vec{r}_i$ e imaginemos una superficie cerrada S (fig. 6) que contiene a un número j de esas cargas. Ordenemos los índices de las q_i de modo que las j primeras sean las interiores, y las restantes exteriores a la superficie S .

El campo eléctrico generado por estas cargas en un punto $\vec{r}$ es

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$



El flujo de este campo a través de S será

$$\Phi = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{E} = k \sum_{i=1}^N q_i \oint_S \frac{d\vec{s} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

Como vimos al definir ángulo sólido (ecs. 30 y 31)* cada una de las integrales en esta sumatoria representa el ángulo sólido subtendido por toda la superficie S desde el vértice $\vec{r}_i$:

$$\Omega_i = \oint_S \frac{d\vec{s} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Luego, según (31):
$$\oint_S \frac{d\vec{s} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \oint_S \Omega_i = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \vec{r}_i \text{ interior a } S \\ 0 & \text{si } \vec{r}_i \text{ exterior a } S \end{cases}$$

(*) Cuando citamos expresiones sin indicar Capítulo, como aquí, nos referimos a la Introducción (Análisis Vectorial).

Por lo tanto:
$$\Phi = k \left(\sum_{i=1}^j q_i \cdot 4\pi + \sum_{i=j+1}^N q_i \cdot 0 \right) = \frac{4}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^j q_i = \frac{q(S)}{\epsilon_0},$$

donde hemos llamado $q(S) \equiv \sum_{i=1}^j q_i$ a la carga total encerrada por la superficie S .

En resumen, el teorema de Gauss expresa que

$$\Phi = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{E} = \frac{q(S)}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

Este teorema describe una propiedad global o integral del campo eléctrico. Así formulado no permite hallar directamente el campo $\vec{E}$ en un punto. Sin embargo, es muy útil cuando la configuración de cargas presenta cierto grado de simetría.

Si la distribución es tan simétrica que nos permite conocer la dirección y el sentido del campo $\vec{E}$ (p.ej. en la fig. 5: $\vec{E} \parallel \hat{n}$), nos conviene elegir una superficie S normal a $\vec{E}$ donde, además, el módulo E del campo sea constante. Para una superficie tal valen las relaciones:

$$\Phi = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{E} = \oint_S dS E = E \oint_S dS = EA = \frac{q(S)}{\epsilon_0},$$

donde A es el área total de S . Luego $E = q/(E_0 A) \implies$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q(S)}{\epsilon_0 A} \hat{n} \quad (1.14)$$

donde $\hat{n}$ es el versor normal a S en el punto campo (cuya orientación deducimos directamente a partir de la simetría de las cargas) y $q(S)$ es nuevamente la carga encerrada por S . Una superficie que satisface ambas condiciones ($\vec{E} \parallel \hat{n}$; $E = \text{const. sobre } S$) se denomina frecuentemente gaussiana.

Como veremos, también podemos obtener información sobre el campo en un punto utilizando superficies cilíndricas cuyas laterales sean perpendiculares al campo $\vec{E}$, en cuyo caso el flujo neto Φ sólo incluye las contribuciones de las bases, pues $d\vec{s} \cdot \vec{E} = 0$ sobre la superficie lateral.

FORMA LOCAL DEL TEOREMA DE GAUSS

Para una distribución de cargas en volumen de densidad $\rho(\vec{r})$, la carga encerrada en una superficie S es

$$q(S) = \int_{V(S)} d\tau \rho(\vec{r})$$

donde $V(S)$ indica la región interior a S .

El teorema de la divergencia (A.12) nos permite expresar el flujo de $\vec{E}$ a través de S como

$$\Phi = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{E} = \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot \vec{E}$$

el cual, por el teorema de Gauss, es igual a $q(S)/\epsilon_0$. Luego:

$$\int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot \vec{E} = \int_{V(S)} d\tau \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \int_{V(S)} d\tau \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$

para toda superficie S . Esto sólo es posible si en cada punto interior a S se anula el integrando, es decir que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

que es la expresión local del teorema de Gauss, donde $\rho(\vec{r})$ representa la densidad total de carga en el mismo punto $\vec{r}$ donde medimos la divergencia del campo $\vec{E}$.

En general, la carga eléctrica puede encontrarse libre (es decir que reside en un cuerpo que puede moverse libremente, como un electrón en un conductor) y también puede hallarse ligada. Ejemplos de esta última condición son: la carga de un ion en la red cristalina de un metal, la carga neta de polarización en la superficie de un aislador, etc. La densidad $\rho(\vec{r})$ en (1.15) es la densidad total, o sea la suma de las densidades locales de cargas libres y ligadas.

El concepto de divergencia, expresado en la ecuación (25) nos permite interpretar la (1.15) de inmediato: las cargas puntuales positivas son las fuentes del campo eléctrico ($\text{div} \vec{E} > 0$), mientras que las negativas son los sumideros del mismo ($\text{div} \vec{E} < 0$).

Es obvio que el teorema de Gauss en la forma global (1.13) se deduce inmediatamente a partir de la (1.15), por integración directa de ambos miembros, con lo cual se establece una completa equivalencia entre ambas expresiones. Sin embargo, experimentalmente se comprueba que la (1.15) sigue siendo válida fuera del equilibrio, aun para

condiciones que varían en el tiempo. En cambio, la ley de Coulomb, de la cual hemos deducido el teorema de Gauss, deja de valer para cargas en movimiento como expresión de la fuerza electromagnética total entre cargas. Por esta razón, en todo tratamiento sistemático de la teoría electromagnética clásica se parte de la forma local (1.15), como expresión general de los resultados experimentales, y de esa ecuación se deduce la ley de Coulomb para el caso particular de condiciones electrostáticas. Maxwell eligió la (1.15) como una de las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica.

FUERZAS SOBRE CUERPOS CARGADOS

Calcularemos la fuerza sobre todo un cuerpo que tiene cargas eléctricas distribuidas en elementos $dq = dq(\vec{r})$ y que se encuentra en equilibrio en una región de campo eléctrico inhomogéneo $\vec{E}(\vec{r})$. La fuerza total sobre el cuerpo será

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dq(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.16)$$

donde, en equilibrio electrostático, $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo en $\vec{r}$ debido a todas las fuentes exteriores al cuerpo. Es obvio que, si bien sobre un elemento de carga dq en $\vec{r}$ actúan fuerzas de interacción $\vec{F}(dq, dq')$ con las cargas dq' del mismo cuerpo, la suma de todas estas fuerzas sobre todos los elementos dq es de la forma $\sum \vec{F}(dq, dq')$, que debe ser nula pues contiene simultáneamente a $\vec{F}(dq, dq')$ y a $\vec{F}(dq', dq)$, tales que $\vec{F}(dq, dq') + \vec{F}(dq', dq) = 0$, según vimos en (1.2). En realidad, la suposición de que las fuerzas totales de fuentes propias, de la forma $\vec{F}_{11}$, son siempre nulas, está implícita en todo análisis de interacciones.

En general, la distribución de cargas en el equilibrio puede ser difícil de calcular, y su conocimiento implica la resolución completa del problema electrostático.

Sin embargo, hay muchos casos donde la simetría permite la existencia de distribuciones sencillas de cargas. P.ej. dos cables conductores paralelos indefinidos pueden tener densidades de carga constantes (λ_1, λ_2) , pero si están alabeados (es decir que forman un ángulo sin cortarse) habrá un punto P en el cable 1 donde la distancia al cable 2 es mínima. Si las densidades de carga tienen igual signo $(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$, las cargas cercanas a P serán repelidas por las cargas del

cable 2, con más fuerza que las más alejadas de éste. Como consecuencia, en el equilibrio resultará $\lambda_1 = \lambda_1(\vec{r}) \neq \text{const.}$, y lo mismo ocurrirá con $\lambda_2 = \lambda_2(\vec{r})$, de modo que ambas serán inhomogéneas. Se puede demostrar, como lo haremos para densidades superficiales de carga, que conocer $\lambda(\vec{r})$ en todo punto de ambos cables es equivalente a conocer el campo eléctrico en todo el espacio.

Si los cuerpos que interactúan son dieléctricos (aisladores) las cargas inducidas por polarización introducen una complicación adicional, como veremos al discutir este efecto. La simple presencia de regiones dieléctricas modifica el campo que se mide en el vacío, y lo hace de un modo tanto más apreciable cuanto mayor sea el coeficiente dieléctrico K.

En casos muy sencillos, de fuerte simetría, podemos tratar la interacción entre dos cuerpos 1 y 2 calculando primero, p.ej., el campo generado por todo el cuerpo 2 en un punto cualquiera $\vec{r}$:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k \int_{V_2(\vec{r})} dq_2(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

y luego, integrando las fuerzas sobre todas las cargas $dq_1(\vec{r})$ del cuerpo 1, como en (1.16), obtenemos:

$$\vec{F}_{12} = \int_{V_1(\vec{r})} dq_1(\vec{r}) \vec{E}_2(\vec{r}) \sim \vec{F}_{12} = \int dq_1 \vec{E}_2$$

que expresa la fuerza total sobre el cuerpo 1 generada por el cuerpo 2.

Es obvio que la fuerza $\vec{F}_{21}$ sobre el cuerpo 2, generada por el 1, satisface el principio de acción y reacción: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ (verificarlo escribiendo explícitamente ambas expresiones).

Ejercicio: Verificar que la fuerza por unidad de longitud entre dos cables paralelos indefinidos cargados con densidades $\lambda_1 = 0.1 \text{ C/m}$ y $\lambda_2 = -0.03 \text{ C/m}$, separados por una distancia $d = 2 \text{ cm}$ es atractiva, normal a ambos cables y de magnitud $2.7 \times 10^3 \text{ N/m}$. Calcular el campo $\vec{E}_1(\vec{r}_2)$ aplicando el teorema de Gauss.

POTENCIAL ELECTROSTATICO

Veremos que el campo eléctrico generado por una distribución estática de cargas puede calcularse inmediatamente a partir de una función llamada potencial electrostático, cuyo gradiente es $-\vec{E}(\vec{r})$.

Primero comprobaremos esta afirmación para el campo generado en el punto $\vec{r}$ por una sola carga q ubicada en el punto $\vec{r}'$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kq(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$$

Veremos que existe una función de $\vec{r}$ y de $\vec{r}'$

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = kq/|\vec{r} - \vec{r}'| + \text{const.} \quad (1.17)$$

tal que $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V$.

Para demostrarlo calcularemos el gradiente con respecto a las coordenadas del punto campo (no primadas) de

$$V(\vec{r}) = kq/|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = kq \left[\sum_j (x_j - x'_j)^2 \right]^{-1/2} = kq \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$\implies (\nabla V)_i = \partial_i V = kq \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\sum_j (x_j - x'_j)^2 \right]^{-3/2} \partial_i \sum_j (x_j - x'_j)^2$$

$$\text{donde } \partial_i x_j = \delta_{ij}; \partial_i x'_j = 0 \implies \partial_i \sum_j (x_j - x'_j)^2 = 2 \sum_j (x_j - x'_j) \delta_{ij} = 2(x_i - x'_i); \left[\sum_j (x_j - x'_j)^2 \right]^{-3/2} = |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} \implies$$

$$\partial_i V = kq \left(-\frac{1}{2}\right) |\vec{r} - \vec{r}'|^{-3} 2(x_i - x'_i) = -kq \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -E_i(\vec{r})$$

que es la componente i -ésima del campo eléctrico en el punto $\vec{r}$.

Luego, la función $V(\vec{r}, \vec{r}')$ dada por (1.17) satisface la condición

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V \quad (1.18)$$

Se ve de inmediato que el campo generado por un número cualquiera de cargas q_i ubicadas en posiciones $\vec{r}'_i$ se obtiene análogamente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_i q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} = -\nabla V \quad \text{donde } V(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} + c \quad (1.19)$$

donde hemos llamado c a la constante que puede agregarse al potencial sin afectar el valor del campo eléctrico.

Aplicando la identidad (A.3) al gradiente de V resulta la condición:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.20)$$

Según vimos en las ecs. (35) y (36), al conocer simultáneamente la divergencia y el rotor del campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0; \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

el teorema de Helmholtz nos da la expresión más general de este campo en función de un potencial escalar:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \text{tal que} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

Es decir que los resultados discutidos en esta sección son sólo un caso particular del teorema de Helmholtz.

Para distribuciones continuas de carga vale la extensión natural de (1.19):

$$V(\vec{r}) = k \sum_i \frac{dq_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} + c \longrightarrow k \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + c \quad (1.21)$$

donde la forma de dq , que contiene a la densidad correspondiente, depende del tipo de distribución (lineal, superficial, etc.) y la región de integración debe ser finita.

Ejercicio: Para probar (1.18) hemos demostrado la utilísima identidad

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.22)$$

donde el gradiente se calcula con respecto a las coordenadas de campo (no primadas). Verificar, aprovechando la simetría, que el gradiente con respecto a las coordenadas de fuentes (primadas) vale

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = +\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.23)$$

CAMPOS CONSERVATIVOS. CONDICION ELECTROSTATICA

Un campo vectorial $\vec{A}$ independiente del tiempo es conservativo cuando se deriva de un campo escalar $\phi(\vec{r})$ denominado potencial de $\vec{A}$, es decir que existe una función $\phi(\vec{r})$ tal que

$$\vec{A} = -\nabla \phi \quad (1.24)$$

Cuando se cumple esta condición resulta que

$$d\phi(\vec{r}) = -\sum_i \partial_i \phi dx_i = -\nabla \phi \cdot d\vec{r} = -\vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (1.25)$$

es un diferencial exacto.

En particular, si $\vec{F} = -\nabla U$ representa un campo de fuerzas, el trabajo mecánico necesario para trasladar una partícula puntual entre las posiciones A y B será igual en magnitud pero contrario al trabajo realizado por el campo $\vec{F}$. Es decir que el trabajo de la partícula (o del agente que la impulsa) vale

$$W_{AB} = - \int_{P(A)}^{P(B)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{U(A)}^{U(B)} dU = U(B) - U(A) \equiv \Delta U \quad (1.26)$$

donde, según (1.25), $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$. En este caso $U(\vec{r})$ es la energía potencial de la partícula en el campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$. Naturalmente, el trabajo del campo será $-\Delta U$. Si el camino entre A y B es cerrado ($A = B$) resulta

$$W_{AA} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1.27)$$

Las condiciones (1.24) y (1.27) pueden emplearse indistintamente para definir el carácter conservativo de un campo, pero a menudo resulta muy útil la condición alternativa

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.20)$$

que resulta de aplicar la identidad (A.3) a un campo cualquiera que deriva de un potencial. Por el teorema de Stokes, las (1.20) y (1.27) expresadas para un mismo campo son equivalentes, ya que para un camino cerrado $\mathcal{C}$ se verifica:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{E} = 0 \quad \forall S \iff \nabla \times \vec{E} = 0.$$

El significado físico de estas condiciones equivalentes se comprende fácilmente considerando una masa puntual m sometida a un campo de fuerzas $\vec{F} = -\nabla U$ donde admitiremos por ahora que el potencial pueda variar en el tiempo, o sea que $U = U(\vec{r}, t)$.

Multiplicando escalarmente por la velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ de la partícula ambos miembros de la ecuación de Newton, tenemos:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \equiv \frac{dT}{dt},$$

donde T es la energía cinética de la masa m , cuya variación temporal representa la potencia P entregada a m por el campo $\vec{F}$:

$$P = dT/dt = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (1.28)$$

$$\text{Luego,} \quad \frac{dT}{dt} = -\nabla U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.29)$$

Como ya vimos al comparar las derivadas total, local y convectiva (ec. 10):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \partial_t U + \sum_i \partial_i U \frac{dx_i}{dt} = \partial_t U + \nabla U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \implies -\nabla U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= \partial_t U - \frac{dU}{dt}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Iguando (1.29) y (1.30) resulta:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (T+U) = \partial_t (T+U) \quad (1.31)$$

donde $(T+U)$ es la energía total de la masa m . (Notemos que la energía total resulta ser la suma de T más U porque definimos el campo escalar U de modo que $\vec{F} = -\nabla U$ en lugar de $\vec{F} = +\nabla U$).

La derivada de la energía total sólo se anula si $\partial_t (T+U) = 0$, es decir que la energía total se conserva cuando $\vec{F}$ es independiente del tiempo, además de cumplir la condición (1.24) ó sus equivalentes. Como vimos al definir la derivada total de un escalar, la conservación de la energía significa que esta cantidad es la misma en todos los puntos de la trayectoria de la partícula, o sea que es una constante del movimiento.

Estas condiciones de conservación se cumplen para las fuerzas coulombianas, ya que sobre una carga q ubicada en un campo $\vec{E}(\vec{r})$ actúa una fuerza

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}) = -q \nabla V = -\nabla U,$$

de modo que la energía potencial electrostática de la carga q en el campo $\vec{E} = -\nabla V$ es

$$U = q V \quad (1.32)$$

definido, como ocurre con el potencial V , a menos de una constante. En general nos interesa calcular diferencias de energía potencial entre dos estados de un sistema, o bien se fija la energía de referencia $U=0$ mediante condiciones apropiadas (p.ej. $U=0$ en el infinito: $U=0$ en una superficie conductora S_0 , etc.).

Ya vimos que el campo eléctrico satisface la condición

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.20)$$

y sus equivalentes $\vec{E} = -\nabla V$; $\oint d\vec{r} \cdot \vec{E} = 0$. (1.33)

Estas ecuaciones son tan características del campo coulombiano que, a menudo, llamamos condición electrostática a la (1.20) a pesar de que existen sistemas con cargas en movimiento donde se cumple esta misma condición, como p.ej. un conductor pasivo por el cual circula una corriente eléctrica continua (Cap. II).

Unidades: De (1.32) resulta la unidad de potencial electrostático:

$$[V] = [U] / [q] = J C^{-1} = V = \text{Voltio},$$

y de (1.18) se obtiene la unidad más usual del campo eléctrico:

$$[E] = [-\nabla V] = [V] / [L] = V/m.$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL

El potencial V de un punto $\vec{r}$ es arbitrario y no podemos definirlo unívocamente. Lo que sí podemos medir es la diferencia de potencial ΔV entre dos puntos. Esta cantidad está completamente definida y es independiente de la elección que hagamos de la constante c en la expresión (1.19).

En efecto, llamando $\phi(\vec{r})$ a la sumatoria (o a la integral equivalente) en (1.21), resulta la siguiente expresión para la diferencia de potencial entre los puntos A y B :

$$\Delta V_{AB} = V(B) - V(A) = [\phi(\vec{r}_B) + c] - [\phi(\vec{r}_A) + c] = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_A),$$

que es independiente de la constante c .

Para una distribución de cargas de extensión finita (limitada en el espacio) podemos calcular el potencial V para puntos indefinidamente alejados mediante

$$V(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + c = c,$$

pues $\lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-1} = 0 \quad \forall i$. Es decir que la constante c que figura en la definición del potencial expresa "el potencial en el infinito" de una configuración finita de cargas. En general elegimos $c = 0$ para este tipo de distribución, pero si la configuración se extiende hasta el infinito esta elección particular no es posible.

Para verlo consideremos p.ej. un cable rectilíneo indefinido cargado con densidad lineal $\lambda = \text{const.}$ El potencial en un punto $\vec{r}$ no se puede obtener por integración directa, ya que la expresión (1.21), que sólo es válida para una región finita, diverge en nuestro caso. Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro de radio R se obtiene directamente

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R}, \text{ siendo } \vec{r} = R\hat{R} + z\hat{z}$$

(expresamos las cantidades en coordenadas cilíndricas con eje en el cable). Luego, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B , ubicados a distancias respectivas a y b del cable, será:

$$\Delta V = V_B - V_A = \int_{V(A)}^{V(B)} dV = - \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{E} = + \int_b^a d\vec{r} \cdot \vec{E}$$

$$\text{donde } d\vec{r} \cdot \vec{E} = (dR\hat{R} + dz\hat{z}) \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{dR}{R}$$

$$\implies \Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dR}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right). \quad (1.34)$$

Si tomamos $a \rightarrow \infty$ y elegimos arbitrariamente $V_A = 0$, como en una distribución finita, resulta

$$V_B = \lim_{a \rightarrow \infty} \Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \infty$$

para todo punto B ubicado a distancia finita del cable. Esta incongruencia aparente se debe a la presencia de cargas en el infinito (en los "puntos" $z = \pm \infty$). La dificultad se supera fácilmente eligiendo como referencia el potencial a una distancia finita. P.ej. podemos fijar como $V = 0$ el potencial en A , y expresar el potencial en un punto $\vec{r}$ cualquiera como

$$(1.34) \quad V(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_A) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln a - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R,$$

que es de la forma $V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln R + c$, siendo $\vec{r} = R\hat{R} + z\hat{z}$. La constante c resulta ser igual a $(\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln a$, y es obvio que verifica la condición $V(\vec{r}_A) = 0$.

El cuerpo que elegimos arbitrariamente para el cero del potencial se denomina tierra. En un equipo eléctrico se suele elegir como referencia ($V = 0$) el chasis metálico. Que un punto del equipo esté a $+3V$ significa que la diferencia de potencial entre ese punto y el chasis (que por ser conductor es un equipotencial, según veremos) es de $3V$. Si hubiéramos elegido como tierra a ese punto particular, el chasis

estaría a un potencial de $-3V$. Cuando hablamos del "potencial de un punto" siempre nos referimos a la diferencia de potencial entre dicho punto y otro de referencia o tierra.

Para analizar el significado físico de la diferencia de potencial entre dos puntos A y B consideremos una carga de prueba δq que se mueve entre esos puntos. Si la velocidad de la carga es apreciable la fuerza sobre ella debida a otros cuerpos cargados no es, en general, coulombiana (se deben agregar términos magnéticos), y la energía cinética debe tenerse en cuenta en el cálculo que sigue. Para simplificar supondremos que el movimiento de δq es infinitamente lento.

En estas condiciones el trabajo de la carga, como en (1.26), resulta ser

$$\delta W_{AB} = \delta U(B) - \delta U(A) = \delta q [V(B) - V(A)] = \delta q \Delta V,$$

o sea que la diferencia de potencial

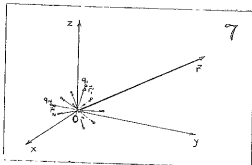
$$\Delta V = \left(\frac{\delta W_{AB}}{\delta q} \right)_{\delta q} = - \left(\frac{\delta W_{AB}}{\delta q} \right)_E = \frac{\delta U_{AB}}{\delta q}$$

es el trabajo por unidad de carga realizado por δq para pasar de A a B, opuesto al que debe realizar el campo eléctrico, e igual a la variación de la energía potencial por unidad de carga entre esos puntos. Con el mismo criterio ya comentado, solemos referirnos a la "energía potencial de un punto", entendiendo por ésta a la diferencia de energía potencial entre ese punto y el que elegimos como referencia, tal que $U_{ref} = q V_{ref} = 0$.

MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCIÓN FINITA DE CARGAS

Consideremos N cargas puntuales q_m distribuidas en posiciones $\vec{r}'_m$ (fig. 7). Elegiremos un origen de coordenadas O cerca del centro geométrico de la distribución.

Nos proponemos calcular el potencial $V(\vec{r})$ en un punto muy alejado de las cargas, tal que



$$|\vec{r} - \vec{r}'_m| \approx r \gg r'_m \quad \forall m.$$

La expresión exacta de este potencial está dada por (1.19), donde elegimos $c=0$ porque la distribución de cargas es finita:

$$V(\vec{r}) = k \sum_{m=1}^N \frac{q_m}{r_m} |\vec{r} - \vec{r}'_m|^{-1}$$

$$\text{donde } |\vec{r} - \vec{r}'_m|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'_m + r'^2_m)^{-1/2} = r^{-1} \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} + \frac{r'^2_m}{r^2} \right)^{-1/2}$$

$$\text{con } \left| \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} \right| < \frac{r'_m}{r} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{r'^2_m}{r^2} \ll \frac{r'_m}{r} \ll 1. \quad (1.35)$$

Si despreciamos este último término (infinitésimo de segundo orden) y retenemos el segundo en (1.35), podemos desarrollar esa expresión en serie de Taylor hasta el primer orden; para ello empleamos la aproximación

$$(1 - \epsilon)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{con} \quad \epsilon \equiv 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} \ll 1.$$

$$\text{Luego } |\vec{r} - \vec{r}'_m|^{-1} \approx r^{-1} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} \right)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) \approx k \sum_m \frac{q_m}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'_m}{r^2} \right) = k \sum_m \frac{q_m}{r} + k \sum_m q_m \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}'_m$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) \approx \frac{k}{r} \sum_m q_m + k \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \left(\sum_m q_m \vec{r}'_m \right) \quad (1.36)$$

En esta expresión aparecen dos factores que describen importantes propiedades de la distribución de cargas:

$$\sum_{m=1}^N q_m = Q \quad \text{es la carga total de la configuración;}$$

$$\sum_{m=1}^N q_m \vec{r}'_m = \vec{p} \quad \text{es su momento dipolar eléctrico.}$$

Para interpretar físicamente el significado del momento dipolar $\vec{p}$ consideremos por separado las cargas positivas y negativas de la distribución. Sean

$$\vec{r}_+ \equiv \frac{\sum_{(+) } q_m \vec{r}'_m}{\sum_{(+) } q_m} \quad \text{y} \quad \vec{r}_- \equiv \frac{\sum_{(-) } q_m \vec{r}'_m}{\sum_{(-) } q_m} = \frac{\sum_{(-) } |q_m| \vec{r}'_m}{\sum_{(-) } |q_m|},$$

dos vectores que definen las posiciones de los centros de carga positiva y negativa, respectivamente. Los signos (+) y (-) en las sumatorias indican que sumamos solamente las cargas de un mismo signo.

Esta definición es la misma que empleamos para el centro de masa de un sistema de partículas.

Las magnitudes de la carga positiva y negativa son, respectivamente,

$$Q_+ = \sum_{(i)} |q_m| = \sum_{(i)} q_m \quad \text{y} \quad Q_- \equiv \sum_{(j)} |q_m| = - \sum_{(j)} q_m$$

de modo que $\sum_{(i)} q_m \vec{r}_m = Q_+ \vec{R}_+$; $\sum_{(j)} q_m \vec{r}_m = - Q_- \vec{R}_-$

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum_{(i)} q_m \vec{r}_m' + \sum_{(j)} q_m \vec{r}_m' = Q_+ \vec{R}_+ - Q_- \vec{R}_- \quad (1.37)$$

es decir que el momento dipolar va del centro de carga negativa al centro positivo, y es una medida (ponderada por las cargas) de la separación entre las cargas netas de los distintos signos.

La expresión (1.36) toma la forma, válida hasta primer orden:

$$V(\vec{r}) = k \frac{Q}{r} + k \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (1.38)$$

Para una configuración no neutra, como p.ej. un ion u otro cuerpo cargado, con $Q = Q_+ - Q_- \neq 0$, el primer término domina la expresión (1.38) para puntos muy alejados, pues

$$\left| \frac{k \vec{P} \cdot \vec{r}}{Q r} \right| = \left| \frac{P \cos \theta / r^2}{Q/r} \right| = \left| \frac{P \cos \theta}{Q r} \right| \leq \left| \frac{P}{Q r} \right| = \frac{|Q_+ \vec{R}_+ - Q_- \vec{R}_-|}{Q r} < \\ < \frac{|Q_+ \vec{R}_+|}{Q r} + \frac{|Q_- \vec{R}_-|}{Q r} = \frac{Q_+}{Q} \frac{|\vec{R}_+|}{r} + \frac{Q_-}{Q} \frac{|\vec{R}_-|}{r} \ll 1.$$

Luego $V(\vec{r}) \approx kQ/r$, que es el potencial de una carga puntual de valor Q , ubicada en el origen.

Para una configuración neutra ($Q = 0$) la (1.38) da:

$$V_d(\vec{r}) = k \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (1.39)$$

donde el subíndice (d) se debe a la calificación de dipolar que se da a este tipo de distribución que, vista desde una distancia muy grande, se comporta como un par de cargas puntuales opuestas ($Q_+ = Q_-$) cuyo momento dipolar

$$\vec{P} = Q_+ (\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = Q_+ \Delta \vec{R} \quad (1.40)$$

es un vector que parte del centro $\vec{R}_-$ y termina en el centro $\vec{R}_+$.

Si la configuración finita de cargas no se encuentra cerca del origen O , sino que está localizada en las inmediaciones de un punto $\vec{F}'$, el potencial dipolar (1.39) toma la forma

$$V_d(\vec{r}) = k \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{F}')}{|\vec{r} - \vec{F}'|^3} \quad (1.41)$$

que se obtiene simplemente reemplazando $(\vec{r} - \vec{F}_0) = \vec{r}$ por $(\vec{r} - \vec{F}')$.

Si hubiéramos retenido sistemáticamente los términos de segundo orden $(\vec{r}_m/r)^2$ en el desarrollo de (1.35), el potencial en $\vec{r}$ contendría un tercer término que varía como r^{-3} . Este término, despreciable para distribuciones unipolares (con carga neta $Q \neq 0$) y para configuraciones dipolares (con $Q = 0$ pero $\vec{P} \neq 0$), puede dominar la expresión del potencial cuando simultáneamente $Q = \vec{P} = 0$. Este caso corresponde a una distribución de cargas cuyos momentos dipolares tienen dos orientaciones opuestas, o sea que

$$\vec{P} = \sum_{(i)} \vec{P}_1 + \sum_{(j)} \vec{P}_1 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \quad \text{con} \quad \vec{P}_1 \parallel -\vec{P}_2$$

y se denomina cuadrupolar, pues el mínimo número de cargas necesarias para crearla es cuatro (dos formando un dipolo de momento $\vec{P}_1$ y las otras dos formando un dipolo opuesto).

El desarrollo completo del potencial $V(\vec{r})$, llamado multipolar, contiene infinitos términos, naturalmente. En la práctica son suficientes unos pocos para describir adecuadamente el comportamiento de una configuración finita vista desde una gran distancia. Estos términos corresponden a agrupamientos de las cargas en potencias de 2 (de a dos, de a cuatro, etc.), cuya contribución al potencial $V(\vec{r})$ varía como r^{-n} , según el siguiente esquema:

n	2 ⁿ	Grupo	Variación con r	Cantidad característica
0	1	unipolo	r ⁻¹	Q (escalar)
1	2	dipolo	r ⁻²	$\vec{P}$ (vector)
2	4	cuadrupolo	r ⁻³	$\vec{Q}$ (tensor)
3	8	octupolo	r ⁻⁴	

DIPOLLO ELECTRICO

Un dipolo es un par de cargas de igual magnitud y de signos contrarios separadas por una distancia finita. El potencial que genera en cualquier punto $\vec{r}$ del espacio es (fig. 8):

$$V(\vec{r}) = -kq|\vec{r} - \vec{r}_1|^{-1} + kq|\vec{r} - \vec{r}_2|^{-1} \quad (1.42)$$

expresión que para $\vec{r}_1 = -\vec{\ell}/2$; $\vec{r}_2 = +\vec{\ell}/2$ toma la forma

$$V(\vec{r}) = kq(|\vec{r} - \vec{\ell}/2|^{-1} - |\vec{r} + \vec{\ell}/2|^{-1}).$$

Visto desde un punto muy alejado, tal que $|\vec{r}| \gg |\vec{\ell}|$, el par de cargas constituye lo que llamamos un dipolo puntual de momento dipolar $\vec{p} = q\vec{\ell}$ y potencial $V_d(\vec{r})$ dado por la expresión (1.39). Vemos que la elección de $\vec{\ell}$ orientado desde la carga negativa hacia la positiva corresponde a la definición de $\Delta \vec{R}$ en (1.40).

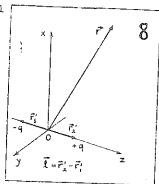
En los átomos y moléculas reales la cantidad $\vec{p}$ es medible. La fuerza entre las cargas positiva y negativa en estas configuraciones dipolares es enorme, ya que las distancias involucradas son muy pequeñas y cada contribución de un par de cargas puntuales varía como r^{-2} (siendo r la distancia entre ellas). La distancia entre los centros de carga positiva y negativa es muy pequeña en ausencia de campo eléctrico. Desde el punto de vista electrostático podemos considerar a todo átomo o molécula neutra como un dipolo puntual, ya que las distancias a otros átomos son mucho mayores que las dimensiones características del sistema.

A partir del potencial (1.39) podemos calcular el campo $\vec{E}_d(\vec{r})$ en un punto muy alejado del dipolo ($r \gg \ell$). La componente i -ésima de $\vec{E}_d$ vale

$$E_i = -\partial_i V_d = -\partial_i (k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}) = -k r^{-3} \partial_i (\vec{p} \cdot \vec{r}) - k (\vec{p} \cdot \vec{r}) \partial_i r^{-3}$$

$$\text{donde } \partial_i (\vec{p} \cdot \vec{r}) = \partial_i \sum_k p_k x_k = \sum_k p_k \partial_i x_k = \sum_k p_k \delta_{ik} = p_i$$

$$y \quad \partial_i r^{-3} = \partial_i (\sum_j x_j^2)^{-3/2} = -\frac{3}{2} (\sum_j x_j^2)^{-5/2} (\sum_j 2 x_j \partial_i x_j) = -\frac{3}{2} r^{-5} 2 (\sum_j x_j \delta_{ij}) = -3 r^{-5} x_i.$$



Luego,

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - k \frac{\vec{p}}{r^3} = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \quad (1.43)$$

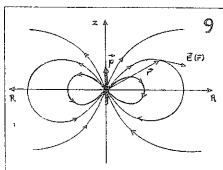
Eligiendo coordenadas cilíndricas con el eje según $\vec{\ell}$ (fig. 9) tenemos:

$$\vec{p} = p \hat{z}; \quad \vec{r} = R \hat{R} + z \hat{z} \\ \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{r} = pz; \quad r^2 = R^2 + z^2.$$

Luego (verificarlo):

$$\vec{E}_R = (k/r^5) (3pz \hat{R}) \\ E_\phi = 0 \quad (\text{axisimétrico}) \\ E_z = (k/r^5) (2pz^2 - R^2).$$

En la fig. 9 se grafican las líneas de campo (tangentes a $\vec{E}$ en cada punto) correspondientes.

FUERZAS Y MOMENTOS SOBRE UN DIPOLLO EN UN CAMPO EXTERIOR

Sea un dipolo cuyas cargas son $-q$ en $\vec{r}$ y $+q$ en $(\vec{r} + \delta \vec{r})$, ubicado en una región donde actúa un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$ generado por fuentes lejanas.

El campo en el punto $(\vec{r} + \delta \vec{r})$ se puede estimar fácilmente a partir del valor de $\vec{E}$ en $\vec{r}$, cuando $|\delta \vec{r}| \ll |\vec{r}|$. Para cada componente E_i hacemos un desarrollo de Taylor:

$$E_i(\vec{r} + \delta \vec{r}) = E_i(\vec{r}) + \partial_x E_i \delta x + \partial_y E_i \delta y + \partial_z E_i \delta z + o(\delta r^2),$$

donde las $\partial_j E_i$ son las componentes del gradiente de E_i , o sea que

$$E_i(\vec{r} + \delta \vec{r}) = E_i(\vec{r}) + \delta \vec{r} \cdot \nabla E_i \quad (i=1, 2, 3)$$

expresión que resumimos como $\vec{E}(\vec{r} + \delta \vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E}$. (1.44)

El momento dipolar del sistema es $\vec{p} = q \delta \vec{r}$ y la fuerza total sobre el dipolo es

$$\vec{F}_d = -q \vec{E}(\vec{r}) + q \vec{E}(\vec{r} + \delta \vec{r}).$$

Luego (1.44) $\Rightarrow$

$$\vec{F}_d = -q \vec{E}(\vec{r}) + q \vec{E}(\vec{r}) + q (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (1.45)$$

Esta fuerza se anula para un campo homogéneo (independiente de la posición $\vec{r}$), y sólo actúa cuando existe una diferencia neta entre las fuerzas sobre la carga positiva y la negativa. Se puede reexpresar recordando el concepto de derivada direccional (ec. 9):

$$\vec{F} = p \hat{p} \implies \vec{F}_d = p (\hat{p} \cdot \nabla) \vec{E} = p \partial_p \vec{E} \quad (1.46)$$

P.ej., la fuerza debida a un campo $\vec{E}$ sobre un dipolo paralelo al eje y (tal que $\vec{p} = p \hat{y}$) sólo será significativa si alguna de las derivadas ∂_{y_i} es distinta de cero.

Ejercicio: Aplicando (1.46) verificar que la fuerza sobre un dipolo puntual de momento $\vec{p} = p \hat{y}$ ubicado en $\vec{r} = x \hat{x}$, ejercida por una carga q ubicada en el origen, es igual a $(k p q x^{-3}) \hat{y}$. Comparar el resultado hallado con la fuerza del dipolo sobre la carga, que se calcula mediante (1.43).

El momento de las fuerzas eléctricas que actúan sobre un conjunto de partículas localizadas en los puntos $\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, N$), medido respecto del origen, es

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i \times \vec{E}(\vec{r}_i)$$

Para el dipolo puntual con $-q$ en $\vec{r}$ y $+q$ en $(\vec{r} + \delta \vec{r})$ el momento de las fuerzas del campo $\vec{E}(\vec{r})$ es

$$\vec{M}_d = -q \vec{r} \times \vec{E}(\vec{r}) + q (\vec{r} + \delta \vec{r}) \times \vec{E}(\vec{r} + \delta \vec{r})$$

con $\vec{E}(\vec{r} + \delta \vec{r})$ dado por (1.44); llamando $\vec{E} \approx \vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{M}_d &= -q \vec{r} \times \vec{E} + q (\vec{r} + \delta \vec{r}) \times (\vec{E} + \delta \vec{r} \cdot \nabla \vec{E}) = \\ &= -q \vec{r} \times \vec{E} + q \vec{r} \times \vec{E} + q \vec{r} \times (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} + q \delta \vec{r} \times \vec{E} + q \delta \vec{r} \times (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} = \\ &= \vec{r} \times (q \delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} + (q \delta \vec{r}) \times \vec{E} + (q \delta \vec{r}) \times (\delta \vec{r} \cdot \nabla) \vec{E} \end{aligned}$$

donde $q \delta \vec{r} = \vec{p}$, y el último término es de segundo orden pues contiene a $|\delta \vec{r}|^2$, así que para un dipolo puntual lo despreciamos como hicimos al obtener el desarrollo aproximado (1.44). Por otra parte, el primer término es $\vec{r} \times \vec{F}_d$, según (1.45).

Luego,

$$\vec{M}_d = \vec{r} \times \vec{F}_d + \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.47)$$

cuyo primer término es obviamente el momento de $\vec{F}_d$ con respecto al origen elegido (centro de momentos) y varía al cambiar la posición

de éste. En cambio, el segundo término es la cupla que tiende a alinear al dipolo con el campo exterior, y es claramente independiente del centro de momentos elegido.

Las condiciones de equilibrio para un dipolo puntual en un campo exterior $\vec{E}(\vec{r})$, según (1.45) y (1.47), serán entonces:

$$\vec{F}_d = p \partial_p \vec{E} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{p} \times \vec{E} = 0 \quad (1.48)$$

La primera se cumple cuando se anulan las derivadas direccionales $\partial_p \vec{E}$ (en particular esto se cumple para un campo uniforme), y la segunda se verifica cuando el momento dipolar $\vec{p}$ es paralelo al campo $\vec{E}$. Para discutir adecuadamente el problema del equilibrio nos conviene analizar la energía potencial del dipolo.

ENERGÍA POTENCIAL DE UN DIPOLO

La energía potencial de dos cargas puntuales ($-q$ en $\vec{r}$ y $+q$ en $\vec{r} + \delta \vec{r}$) ubicadas en una región donde el potencial electrostático debido a fuentes exteriores varía como $V(\vec{r})$ es, según (1.32):

$$U_d = -q V(\vec{r}) + q V(\vec{r} + \delta \vec{r})$$

Para un dipolo puntual con $\vec{p} = q \delta \vec{r}$ podemos aproximar:

$$V(\vec{r} + \delta \vec{r}) \approx V(\vec{r}) + \delta \vec{r} \cdot \nabla V$$

despreciando los términos de segundo orden en el correspondiente desarrollo de Taylor. Aquí $\nabla V = -\vec{E}(\vec{r})$, de modo que

$$U_d \approx -q V(\vec{r}) + q V(\vec{r}) - q \delta \vec{r} \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.49)$$

Esta expresión representa sólo la energía potencial de interacción del dipolo con el campo exterior y no incluye la energía electrostática propia de la configuración (asociada a la fuerza entre $-q$ y $+q$), que analizaremos más adelante.

Como verificación, a partir de la (1.49) podemos recalculer la fuerza exterior sobre el dipolo:

$$\vec{F}_d = -\nabla U_d = \nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (1.50)$$

Esta expresión, más general que la (1.45), se puede transformar empleando la identidad (A.11):

$$\nabla (\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{p} + \vec{p} \times (\nabla \times \vec{E}) + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{p})$$

donde en general $\vec{p}$ no depende de la posición $\vec{r}$, de modo que el segundo y el cuarto términos son nulos y resulta

$$\vec{F}_d = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \vec{p} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (1.51)$$

cuyo primer término es la fuerza $\vec{F}_d$ recién calculada. Según vimos en (1.20) el segundo término se anula en condiciones electrostáticas (pues $\nabla \times \vec{E} = 0$), de manera que recuperamos la expresión (1.45) para $\vec{F}_d$. Cuando el campo eléctrico varía en el tiempo, su rotor no es nulo y el segundo término subsiste en la expresión general de la fuerza sobre el dipolo.

Podemos utilizar la (1.49) para analizar el equilibrio de un dipolo en un campo exterior. Llamando θ al ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{E}$ tenemos

$$U_d = -pE \cos \theta \quad (-\pi < \theta \leq \pi)$$

cuyo máximo se alcanza para $\theta = \pi$ (cuando $\vec{p}$ es antiparalelo a $\vec{E}$: equilibrio inestable) y cuyo mínimo se obtiene para $\theta = 0$ ($\vec{p}$ y $\vec{E}$ paralelos: equilibrio estable).

ECUACIONES DE POISSON Y DE LAPLACE

Si conocemos el potencial $V(\vec{r})$ en toda una región del espacio, el problema electrostático allí está completamente resuelto, ya que del potencial se deriva inmediatamente el campo $\vec{E}$, que es lo que necesitamos para conocer las fuerzas sobre cualquier carga puntual.

En la forma local del teorema de Gauss (1.15) podemos reemplazar $\vec{E} = -\nabla V$ y obtenemos

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

Esta relación se conoce como ecuación de Poisson cuando la densidad de cargas $\rho \neq 0$. En los puntos donde no hay carga eléctrica ($\rho = 0$) tenemos el caso particular

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.53)$$

llamada ecuación de Laplace.

La resolución de estas ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden requiere conocer condiciones de contorno adecuadas, en cuyo caso la solución que encontremos será única. Aunque no lo haremos, es posible demostrar que existe un único potencial $V(\vec{r})$ que

satisface la (1.52) o la (1.53), según el caso, y que al mismo tiempo cumple un conjunto de condiciones del tipo siguiente:

- Condición de Dirichlet: se conoce $V(\vec{r})$ en todo punto de una superficie cerrada S .
- Condición de Neumann: se conoce $E_n = -\vec{n} \cdot \nabla V$ en todo punto de una S cerrada.
- Condiciones mixtas: en una parte de S cerrada se conoce el potencial V , y en el resto se conoce la componente E_n del campo eléctrico.

Una parte de la superficie S puede estar en el infinito. Lo esencial para que encontremos una solución única de la ecuación de Poisson es que S encierre completamente (aun por el infinito) a la región donde calculamos el potencial. En ese caso, se puede demostrar que basta con conocer $V(\vec{r})$ (o E_n en el caso b) en todo punto de la superficie S y también la densidad $\rho(\vec{r})$ en todo punto interior, para poder hallar $V(\vec{r})$. Los métodos de resolución de la ecuación (1.53) son el núcleo de la teoría del potencial, un tema central de la Física Matemática. En muy pocos casos, cuando existe una simetría muy pronunciada, se puede expresar la solución de este problema con condiciones de contorno como alguna combinación de funciones elementales. En general debemos recurrir a métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas mediante computadora.

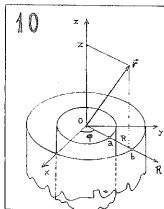
Como ejemplo sencillo calcularemos el potencial en la región limitada por dos cilindros indefinidos de radios a y b , es decir para $a < R < b$ (fig. 10). Como datos, conocemos los potenciales en los dos cilindros conductores que encierran la región:

$$V(R=a) = V_a = \text{const.}; V(R=b) = V_b = \text{const.}$$

Partimos de la expresión del laplaciano en las coordenadas más apropiadas (cilíndricas):

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

donde, por simetría, $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, o sea que $V = V(R)$.



Luego $\nabla^2 V = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R \frac{dV}{dR}) = 0$ para $a < R < b$, donde $\rho = 0$.

Como en esta región $R \neq 0$, podemos integrar una vez con respecto a R :

$$\frac{d}{dR} (R \frac{dV}{dR}) = 0 \implies R \frac{dV}{dR} = c_1 = \text{const.} \implies dV = c_1 \frac{dR}{R}.$$

Integrando ambos miembros de esta última ecuación resulta

$$V(R) = c_1 \ln R + c_2 \quad (1.54)$$

donde figuran dos constantes indeterminadas. Para calcularlas empleamos las condiciones de contorno:

$$V(a) = c_1 \ln a + c_2 = V_a; \quad V(b) = c_1 \ln b + c_2 = V_b.$$

Resolvemos este par de ecuaciones lineales en las incógnitas c_1, c_2 y, reemplazando en (1.54), obtenemos (verificarlo):

$$V(R) = \frac{V_a \ln(R/b) - V_b \ln(R/a)}{\ln(a/b)}.$$

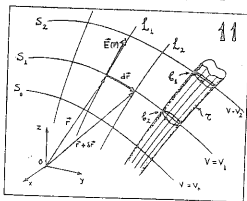
Es fácil ver que sustituyendo $R=a, b$ en $V(R)$ se cumplen las condiciones de contorno.

LÍNEAS DE CAMPO Y SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Las propiedades geométricas del campo eléctrico permiten estimar el comportamiento del mismo sin calcularlo exactamente en todo punto.

Las líneas de campo (o de fuerza) son curvas en el espacio tangentes en todo punto al campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r})$, como las L_1 y L_2 en la fig. 11. Las superficies que unen puntos de igual potencial se llaman equipotenciales (un ejemplo lo dan las S_1 y S_2 en la fig. 11). Estas son las superficies de nivel de la función $V(\vec{r})$.

Si dos puntos tienen distintos potenciales, las superficies equipotenciales que pasan por ellos deben que sean distintas, ya que si tuvieran un punto común, el



potencial en ese punto tendría dos valores diferentes.

Sea S_1 la superficie equipotencial correspondiente a un potencial constante V_1 (fig. 11). Luego, a todo desplazamiento $d\vec{r}$ sobre la superficie S_1 le corresponde una variación nula en el potencial $V(\vec{r})$, o sea

$$(dV)_{S_1} = \nabla V \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \implies \vec{E} \perp d\vec{r}.$$

Es decir que el campo $\vec{E}$ es normal a toda superficie equipotencial, lo que ya habíamos demostrado para el gradiente de una función escalar y las superficies de nivel de esta función (ec. 14).

Las ecuaciones que describen las líneas de campo se deducen inmediatamente de su definición, ya que todo elemento de longitud $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ sobre una línea debe ser paralelo al vector $\vec{E}$ en cada punto de la misma, o sea que en cada $\vec{r}$ debe existir un escalar α tal que

$$d\vec{r} = \alpha \vec{E} \implies dx_i = \alpha E_i \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\implies \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.55)$$

Estas ecuaciones diferenciales permiten construir numéricamente las líneas de campo si conocemos las componentes E_i . En efecto, p.e.j. en el plano (x, y) a un desplazamiento Δx muy pequeño a partir de un punto inicial (x_0, y_0) le corresponde una variación según y:

$$\Delta y \approx \left(\frac{E_y}{E_x} \right)_{(x_0, y_0)} \Delta x \quad \text{que lleva al punto} \begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \approx y_0 + \left(\frac{E_y}{E_x} \right) \Delta x. \end{cases}$$

Por el mismo procedimiento obtenemos las coordenadas de (x_n, y_n) a partir de (x_{n-1}, y_{n-1}) : $x_n = x_{n-1} + \Delta x$; $y_n = y_{n-1} + \left(\frac{E_y}{E_x} \right)_{n-1} \Delta x$. Así habremos obtenido una sucesión de puntos que, unidos, nos permiten graficar la línea en el plano (x, y) . El procedimiento se repite para cualquier par de coordenadas, siempre que las líneas de campo tengan tangente definida en cada punto y que el paso de integración Δx_i sea suficientemente pequeño.

Por definición, las líneas de fuerza coinciden con el campo en dirección y sentido pero, además, permiten estimar la magnitud de $\vec{E}$. En efecto, consideremos las líneas de campo que cortan a la curva cerrada ℓ_1 (fig. 11). Vemos que forman una superficie tubular llamada tubo de flujo. Aplicando el teorema de Gauss (1.13) a la superficie

cerrada formada por las tapas $S(\ell_1)$, $S(\ell_2)$ y por la porción τ de tubo entre ellas tenemos:

$$\iint_{S(\ell_1)} \vec{E} \cdot \vec{n} + \iint_{S(\ell_2)} \vec{E} \cdot \vec{n} = 0$$

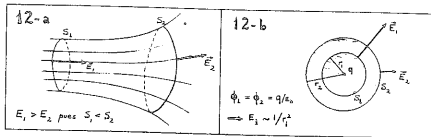
pues en las paredes del tubo $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ en todo punto, y suponemos que en esta porción no hay carga encerrada. Si las secciones $S(\ell_1)$ y $S(\ell_2)$ son muy pequeñas, resulta:

$$d\vec{S}_1 \cdot \vec{E}_1 + d\vec{S}_2 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{dS_2}{dS_1} = \frac{dN/dS_1}{dN/dS_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (1.56)$$

donde dN es el número de líneas de campo en el interior del tubo, que es idéntico para ambas secciones, y $n \equiv dN/dS$ es la densidad superficial de líneas de campo. La relación (1.56) contiene la definición clásica de la magnitud del campo eléctrico, que resulta ser directamente proporcional a la densidad superficial de líneas de fuerza e inversamente proporcional a la sección del tubo de flujo en cada punto.

Es obvio que el flujo del campo eléctrico es constante a través de toda superficie que corte al tubo: $\Phi_1 = \Phi_2 = \text{const.}$ De allí proviene su nombre ya que, para un fluido, el tubo transporta flujo de una superficie equipotencial a otra. La invariancia del flujo permite estimar fácilmente el comportamiento del campo (fig. 12).



1897) se propusieron modelos del átomo que suponían que las fuerzas puramente electrostáticas entre las cargas positivas y negativas son suficientes para mantener al átomo unido, en equilibrio estable. El teorema de Earnshaw establece que ello no es posible y que, en general, una carga aislada no puede permanecer en equilibrio estable bajo la acción exclusiva de campos electrostáticos.

En efecto, sea una carga q en equilibrio en un potencial $V(\vec{r})$. La energía potencial de esta carga en su posición $\vec{r}_0$ es $U = qV(\vec{r}_0)$, donde $V(\vec{r}_0)$ es el potencial debido a las fuentes ubicadas fuera del punto $\vec{r}_0$.

Por estar en equilibrio, la fuerza sobre la carga debe ser nula, o sea que $\vec{F}_i = (\partial_i U)_{\vec{r}_0} = 0$ ($i=1, 2, 3$). Si suponemos que se encuentra en equilibrio estable, la energía potencial debe ser mínima en $\vec{r}_0$ y, en consecuencia:

$$(\partial_{ii}^2 U)_{\vec{r}_0} > 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Por lo tanto, en ese punto el laplaciano de la energía potencial $U = qV$ satisface la condición

$$q \nabla^2 V = \nabla^2 U = \sum_{k=1}^3 (\partial_{kk}^2 U)_{\vec{r}_0} > 0 \Rightarrow \nabla^2 V \neq 0.$$

Este resultado contradice la ecuación de Laplace (1.53), que las fuentes del potencial V satisfacen en ese punto, ya que son exteriores a $\vec{r}_0$.

Esta contradicción proviene de suponer que el equilibrio de la carga q en $\vec{r}_0$ es estable, lo que naturalmente es posible, pero para lograrlo deben existir otras fuerzas de naturaleza no electrostática. En los sistemas macroscópicos estas fuerzas suelen ser mecánicas (en última instancia debidas a las fuerzas que mantienen cohesionados a los cuerpos); en los sistemas atómicos y nucleares, además de haber fuerzas no electromagnéticas (p.ej. nucleares), las cargas están en movimiento, y la condición electrostática deja de cumplirse.

ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS

Supongamos que en una región del espacio el campo eléctrico es nulo en todo punto debido a que no hay cargas cercanas, aunque sí las haya a distancias tan grandes que el campo que las mismas crean en la región que nos interesa es despreciable (es decir que no es

TEORÍA DE EARNSHAW

Las moléculas y los átomos neutros son, en general, configuraciones de cargas estables. Cuando se descubrió el electrón (J.J. Thomson,

medible con nuestros instrumentos). Decimos entonces que las cargas están "en el infinito". Si traemos desde un punto muy alejado una carga q_1 hasta la posición $\vec{r}_1$ de la región próxima, el trabajo realizado en esta región será nulo.

Debemos subrayar dos aspectos para todo lo que sigue: el movimiento de las cargas es infinitamente lento (para que se realice en condiciones cuasiestáticas) y lo que deseamos calcular es el trabajo necesario para agrupar un conjunto de cargas, en contra de las energías de interacción entre ellas, sin tener en cuenta el trabajo realizado por las fuerzas entre cada carga del conjunto en la interacción de ésta con el resto del universo. Este trabajo, por la forma como definimos el proceso, es nulo en la región donde agrupamos las cargas. Consistentemente elegimos el potencial en el infinito como referencia: $V(\infty) = 0$.

Si ahora traemos una segunda carga q_2 a la posición $\vec{r}_2$ (fig. 13) el trabajo W_2 requerido para trasladarla será contrario al que hace el campo $\vec{E}_1 = -\nabla V_1$ debido a la presencia de la carga q_1 en $\vec{r}_1$:

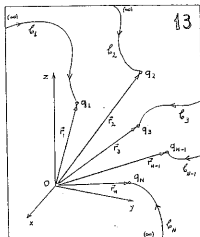
$$W_2 = -q_2 \int_{\infty}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{E}_1 = +q_2 \int_{\infty}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \nabla V_1 = \\ = q_2 \int_{V_1(\infty)}^{V_1(\vec{r}_2)} dV_1 = q_2 V_1(\vec{r}_2).$$

Luego, este trabajo resulta ser igual a la energía electrostática de q_2 en el potencial creado por q_1 en $\vec{r}_2$, según vimos en (1.32):

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) = q_2 \frac{k q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = U_{21}.$$

Si hubiéramos traído primero q_2 a $\vec{r}_2$ y después q_1 a $\vec{r}_1$, el resultado habría sido el mismo, pues

$$U_{12} = q_1 V_2(\vec{r}_1) = q_1 \frac{k q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = U_{21}.$$



La cantidad $U_{12} = U_{21}$ representa la energía de interacción entre las cargas q_1 y q_2 . Es el trabajo realizado para traer a una cualquiera de ellas en contra del campo eléctrico creado por la otra. Notemos que, por la simetría, no depende del orden de llegada y, por ser $V(\vec{r})$ una función potencial, tampoco depende del camino recorrido por cada carga desde el infinito.

El trabajo adicional requerido para traer una tercera carga q_3 desde el infinito hasta la posición $\vec{r}_3$ será (verificarlo):

$$W_3 = q_3 V_1(\vec{r}_3) + q_3 V_2(\vec{r}_3) = U_{31} + U_{32},$$

que es la suma de los trabajos realizados en contra de los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$, igual a la suma de las energías U_{31} de interacción entre q_3 y las cargas que la precedieron.

Por lo tanto, el trabajo total para colocar las tres cargas q_i en sus posiciones $\vec{r}_i$, que representa la energía potencial total de esta configuración, es

$$U_t = W_2 + W_3 = U_{21} + (U_{31} + U_{32}),$$

donde no figuran términos de la forma U_{nn} . Este tipo de término representaría la energía necesaria para reunir las cargas elementales que totalizan el valor q_n de la carga nésima del cuerpo n-ésimo. Esa energía depende de la estructura particular del cuerpo, que nosotros suponemos que ha sido "armado" en el infinito. Por otra parte, al suponer que todas las cargas q_i son puntuales estamos ignorando por completo cualquier efecto debido a sus estructuras.

Para cuatro cargas será

$$W_4 = q_4 V_1(\vec{r}_4) + q_4 V_2(\vec{r}_4) + q_4 V_3(\vec{r}_4) = U_{41} + U_{42} + U_{43} \\ \Rightarrow U_t = W_2 + W_3 + W_4 = U_{21} + (U_{31} + U_{32}) + (U_{41} + U_{42} + U_{43}).$$

Es fácil ver que la energía potencial de N cargas es

$$U_t = \sum_{n=2}^N \left(\sum_{n_1=1}^{n-1} U_{nn_1} \right) = \sum_{n=2}^N \sum_{n_1=1}^{n-1} q_n V_{n_1}(\vec{r}_n) = \sum_{n=2}^N q_n \sum_{n_1=1}^{n-1} V_{n_1}(\vec{r}_n),$$

expresión que podemos reescribir incluyendo todas las variaciones de pares de subíndices, dividiendo por 2 para no contar dos veces un mismo término (ya que $U_{mn} = U_{nm}$) y excluyendo los términos con $m=n$. Por ejemplo, para $N=4$ tenemos:

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_{mn} = \frac{1}{2} \left[(U_{12} + U_{13} + U_{14}) + (U_{21} + U_{23} + U_{24}) + \right. \\ \left. + (U_{31} + U_{32} + U_{34}) + (U_{41} + U_{42} + U_{43}) \right] = U_{21} + (U_{31} + U_{32}) + (U_{41} + U_{42} + U_{43})$$

que es la misma expresión que habíamos obtenido.

En general, podemos expresar la energía total de interacción de N cargas como

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m \sum_{n=1}^N V_n(\vec{r}_m) \quad (1.57)$$

En esta expresión aparece $\sum_{n=1}^N V_n(\vec{r}_m) = V(\vec{r}_m) = V_m$ ($n \neq m$), que es el potencial en la posición de la carga q_m debido a todas las otras cargas de la configuración.

Resumiendo, podemos expresar la (1.57) en cualquiera de las siguientes formas alternativas:

$$U_t = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N U_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N q_m V_m = \frac{k}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{q_m q_n}{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|} \quad (1.58)$$

DENSIDAD DE ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

De las tres expresiones (1.58) la más útil es la segunda, que podemos aplicar a una distribución continua de cargas que ocupan una región finita $V(S)$ en el vacío, con una densidad tal que $dq = \rho d\tau$:

$$U = \frac{1}{2} \sum_m \delta q_m V(\vec{r}_m) \longrightarrow \frac{1}{2} \int_V d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r}). \quad (1.59)$$

Esta integral se puede extender a todo el espacio ya que $\rho = 0$ fuera de $V(S)$, de manera que tal extensión implica sólo sumar una integral nula, $\int dt \rho v = 0$, que representa la contribución a U debida a la región exterior a la superficie S . Luego,

$$U = \frac{1}{2} \int_V d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (1.60)$$

Por el teorema de Gauss sabemos que $\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ (1.15). Podemos reescribir el integrando en (1.59) empleando la identidad (A.6) y la relación (1.18): $\nabla \cdot (V \vec{E}) = V \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{E} - E^2$.

Luego: $V \nabla \cdot \vec{E} = E^2 + \nabla \cdot (V \vec{E})$ y la energía total toma la forma

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V(S)} d\tau E^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot (V \vec{E}),$$

cuyo segundo término se puede reexpresar aplicando el teorema de la divergencia (A.12):

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V(S)} d\tau E^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S d\vec{S} \cdot (V \vec{E}) \quad (1.61)$$

Esta expresión es general y equivale a la (1.59), válida para cualquier superficie cerrada S finita. Si conocemos $\vec{E}(\vec{r})$ en todo el espacio podemos extender las integrales en (1.61) como hicimos al obtener (1.60). Para una superficie esférica de radio infinito, centrada en el interior de la configuración, el módulo de la segunda integral toma la forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \oint_S d\Omega r^2 (\hat{r} \cdot \vec{E}) V \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \oint_S d\Omega r^2 \frac{kQ}{r^2} \frac{kQ}{r} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi k^2 Q^2}{r} = 0$$

donde hemos expresado a $dS = r^2 d\Omega$ en función del ángulo sólido $d\Omega$ y hemos aproximado a $E_r = \hat{r} \cdot \vec{E} \approx kQ/r^2$, $V \approx kQ/r$ conservando sólo los términos dominantes del desarrollo multipolar correspondiente a una configuración finita de carga total $Q \neq 0$, vista desde un punto de la superficie esférica, indefinidamente alejado. Según vimos en (1.38) la distribución finita se comporta como una carga puntual colocada en el origen (si $Q=0$ entonces $V \sim r^{-2}$, $E_r \sim r^{-3}$, y el módulo de la integral se anula como r^{-2} para $r \rightarrow \infty$).

En resumen,

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d\tau E^2 \quad (1.62)$$

Esta integral opera sobre todo el espacio. Para regiones limitadas debemos emplear la expresión (1.61).

En condiciones electrostáticas podemos usar las formas alternativas (1.59-60) o bien las (1.61-62), ya que el campo eléctrico y sus fuentes (las cargas) se implican mutuamente. Para condiciones variables en el tiempo, cuando debemos tener en cuenta la radiación, que entraña transporte de energía en el vacío con velocidad finita, podemos considerar una región V que no contiene fuentes pero sí campos. En esa región $\rho = 0$ aunque, en general, $\vec{E} \neq 0$.

Faraday y después Maxwell, definieron una densidad de energía

$$\eta_e = \frac{\delta U}{\delta \tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (1.63)$$

para el vacío, tal que cada región $\mathcal{R}$ (con o sin cargas) contribuye con una energía parcial

$$U_{\mathcal{R}} = \int_{\mathcal{R}} d\tau \eta_e \quad \text{a la energía total debida}$$

a una configuración de fuentes dada. Este punto de vista, que no requiere conocer la densidad de carga $\rho(\vec{r})$, es el más útil para calcular la energía de una configuración.

CONDUCTORES IDEALES

En los átomos de los elementos metálicos algunos electrones están fuertemente ligados al núcleo (los más próximos), mientras que los más alejados pueden extraerse con facilidad, ya que sobre un electrón que se mueve en una órbita exterior actúa el campo eléctrico combinado del núcleo positivo y de los electrones interiores. Estos producen una fuerza repulsiva, de modo que el campo efectivo que actúa sobre un electrón de una órbita exterior es mucho menos intenso que el que actúa sobre otro próximo al núcleo.

El número de estos electrones débilmente ligados suele ser del orden de uno o dos electrones por átomo del metal. Estos electrones, llamados libres o de conducción, se mueven con una velocidad media nula, cuyo módulo medio es del orden de 2×10^5 m/s. En ausencia de campo eléctrico en el interior del metal, las direcciones de estos movimientos fluctúan al azar, y los electrones se desplazan a distancias del orden de 5×10^{-8} m (es decir unos 1000 radios atómicos).

El resto del átomo constituye un ion positivo formado por el núcleo y los electrones próximos (ligados), que también se mueve, aunque lo hace con una amplitud mucho menor. Supondremos que los iones están prácticamente quietos, en posiciones de equilibrio ordenadas formando lo que llamamos red cristalina.

Si el campo eléctrico en el interior del metal no es nulo, los electrones se mueven con cierta libertad a través de dicha red. Este movimiento está completamente restringido al alcanzar la superficie exterior del metal, que retiene a los electrones como si fuera una caja hermética.

Todo material que posee cargas libres (no necesariamente negativas), capaces de moverse bajo la acción de un campo eléctrico dentro de ciertas restricciones impuestas por la geometría, la estructura y la composición del material, se llama conductor. Además de los metales, muchos otros materiales son buenos conductores. En las soluciones líquidas de sales existen iones positivos y negativos que se mueven desordenadamente en ausencia de campo eléctrico. Al aplicar un campo estas cargas se mueven preferentemente a lo largo de las líneas de campo, dando lugar a la descomposición o electrólisis del material. Otros conductores no metálicos son los plasmas (gases ionizados a muy alta temperatura) donde los portadores de carga también son los iones y los electrones.

Como veremos, la temperatura es una medida de la energía cinética media de las partículas de un sistema. En un plasma esta energía supera a la energía coulombiana que mantiene a los electrones ligados a sus núcleos. Las colisiones provocan el desprendimiento de esos electrones y, si la temperatura es suficientemente elevada, la ionización de los átomos puede llegar a ser total.

En general utilizamos los electrolitos y los plasmas fuera del equilibrio, con sus cargas en movimiento. En condiciones electrostáticas sólo nos referiremos a conductores ideales con sus cargas en equilibrio y en reposo, un estado que se alcanza muy aproximadamente en los metales a temperatura normal.

CAMPO ELECTRICO EN CONDUCTORES EN EQUILIBRIO

Aquí reseñaremos brevemente algunas propiedades importantes de los conductores ideales en equilibrio electrostático, la mayor parte de las cuales son consecuencias inmediatas del teorema de Gauss (1.13) válidas para un cuerpo de superficie exterior S .

I) El campo $\vec{E}$ en el interior de un conductor es nulo.

Si el campo eléctrico en el interior no es nulo, los electrones libres del conductor se moverán hasta ocupar nuevas posiciones de equilibrio. El campo neto sobre un electrón libre, en esta nueva condición, es la superposición del campo inicial no nulo más el campo generado por todas las cargas del conductor, que incluye el campo debido a los electrones en sus nuevas posiciones. Para todo electrón interior, que podemos considerar como una carga de prueba, el estado

de equilibrio implica que $\delta \vec{F} = \delta q \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = 0$. Como consecuencia, el interior del conductor es un volumen equipotencial.

II) $\vec{E}$ es normal a la superficie S del conductor.

En efecto, un electrón sobre S sólo puede moverse a lo largo de esta superficie, y lo hará hasta alcanzar una posición de equilibrio en la cual sea nula la componente del campo tangencial a S, o sea que en el equilibrio $\vec{E}_t = 0$. Luego, sólo puede subsistir la componente normal y resulta

$$\vec{E}(\vec{r}) = E \hat{n} \quad \forall \vec{r} \in S,$$

siendo $\hat{n}$ el versor normal a la superficie exterior S.

III) La superficie de un conductor es un equipotencial.

En efecto, $\vec{E}_t = 0 \implies \hat{t} \cdot \nabla V = \partial_t V = 0$, siendo $\hat{t}$ cualquier versor tangente a S. Luego, para todo desplazamiento $d\vec{r} = dr \hat{t}$ sobre S vale

$$dV = d\vec{r} \cdot \nabla V = dr \hat{t} \cdot \nabla V = 0 \implies V = \text{const.}(S)$$

IV) En todo punto exterior muy próximo a S el campo eléctrico vale

$$\vec{E} = E/\epsilon_0 \hat{n} \quad (1.64)$$

donde E es la densidad superficial de carga sobre S. Aplicando el teorema de Gauss a un cilindro de altura despreciable cuyo eje es normal a S, una de cuyas bases está adentro y la otra afuera del conductor, resulta (fig. 14):

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = A_1 \hat{n} \cdot \vec{E} + A_2 \cdot (-\hat{n}) \cdot 0 = A_1 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\implies E = E/\epsilon_0,$$

cuya dirección y sentido fueron hallados en (II).

V) Toda la carga neta está en la superficie exterior S.

Aplicando el teorema de Gauss (1.13) a una superficie cerrada arbitraria S' totalmente interior, la carga encerrada por ésta debe ser

$$q(S') = \epsilon_0 \oint d\vec{S} \cdot \vec{E} = 0 \quad \forall S' \subset S, \text{ pues } \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \in S'.$$

Es decir que la carga neta en cualquier volumen totalmente ocupado

por el conductor es nula y toda la carga está distribuida por la superficie exterior S, donde podemos definir una densidad E_0 .

Si el conductor es hueco (fig. 15) y no hay cargas en la cavidad encerrada, sólo habrá carga en la superficie exterior S. La carga y el campo $\vec{E}$ en todo punto interior serán nulos, independientemente de las cargas exteriores (en esto se basa el blindaje electrostático, que trataremos enseguida).

Si en la cavidad hay una carga neta $q \neq 0$, debe inducirse una densidad E_1 en la superficie interior S_1 tal que el flujo eléctrico a través de toda superficie S' (fig. 15) resulte nulo, o sea:

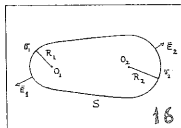
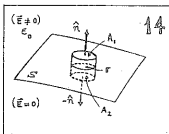
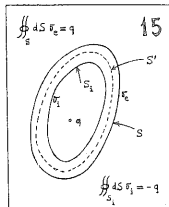
$$\oint_{S'} d\vec{S} \cdot \vec{E} = q + \oint_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 0 \implies \oint_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{E} = -q.$$

Si el conductor hueco estaba inicialmente aislado, al inducirse E_1 sobre la superficie interior S_1 , debe inducirse una densidad E_0 sobre la superficie exterior S, y la carga total allí debe aumentar en $+q$. Vemos que una chapa conductora aisla al interior de ella con respecto a los campos de fuentes exteriores, pero no aísla al exterior de los efectos de una carga interior.

VI) Efecto de puntas.

El campo eléctrico es más intenso en las regiones de mayor curvatura de un conductor (puntas). Consideremos un conductor con la

forma dada en la fig. 16. En primera aproximación, el potencial $V(\vec{r})$ en puntos muy próximos a la superficie S no debe diferir prácticamente del potencial generado por un casquete esférico de radio igual al radio R_1 de curvatura de la superficie cerca del punto F_1 ($i=1, 2$), ya que la contribución dominante a este potencial



proviene de las cargas más próximas a cada punto campo.

Así, en $\vec{r}_1$ muy próximo a la región de radio R_1 las fuentes más cercanas tienen una densidad superficial de carga σ_1 y ocupan un área efectiva $\Delta S_1 = R_1^2 \Delta \Omega_1$ ($\Delta \Omega_1$ es el ángulo sólido del área efectiva vista desde el centro de curvatura O_1 , fig. 16). Análogamente, en $\vec{r}_2$ las fuentes del potencial tienen una densidad σ_2 y están localizadas en un área efectiva $\Delta S_2 = R_2^2 \Delta \Omega_2$.

Luego, los potenciales respectivos valen

$$V(\vec{r}_1) \approx k \frac{\sigma_1 \Delta S_1}{R_1} = k \Delta \Omega_1 \sigma_1 R_1; \quad V(\vec{r}_2) \approx k \Delta \Omega_2 \sigma_2 R_2,$$

con $\Delta \Omega_1 \approx \Delta \Omega_2$. Pero $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ están muy cerca de S , que es una superficie equipotencial, como vimos, de modo que

$$V(\vec{r}_1) \approx V(\vec{r}_2) \implies \sigma_1 R_1 \approx \sigma_2 R_2$$

y, teniendo en cuenta la relación (1.64), resulta $R_1/R_2 = \sigma_1/\sigma_2$

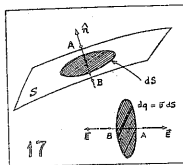
$$\implies \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx \frac{R_2}{R_1} \gg 1.$$

Si el radio de curvatura R en una región de la superficie del conductor es muy pequeño, como ocurre en una punta, el campo $\vec{E}$ cerca de esa región es muy intenso. Ello nos provee un método para producir campos eléctricos muy elevados.

TENSION ELECTROSTATICA

Las cargas macroscópicas (netas) de regiones muy próximas sobre la superficie S de un conductor tienen igual signo y, por lo tanto, las fuerzas entre ellas son repulsivas. En particular, un elemento dS no sólo interactúa con las fuentes exteriores al conductor, sino que también lo hace con el resto del mismo. Para estimar las fuerzas de interacción aplicaremos el principio de superposición y calcularemos el campo eléctrico $\vec{E}$ en el centro de un elemento de superficie dS .

Sean dos puntos A y B muy próximos al elemento dS , uno adentro y el otro afuera del conductor (fig. 17). Según (1.64), el campo en A es igual a $(\sigma/\epsilon_0)\hat{n}$. Por otra parte, como B es interior, el campo allí es nulo, de modo que podemos expresar:



$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_A) &= \vec{E}_C(\vec{r}_A) + d\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \\ \vec{E}(\vec{r}_B) &= \vec{E}_C(\vec{r}_B) + d\vec{E}(\vec{r}_B) = 0 \end{aligned} \quad (1.65)$$

siendo $d\vec{E}(\vec{r})$ la contribución al campo $\vec{E}(\vec{r})$ debida a la carga en el elemento dS , y $\vec{E}_C$ la contribución del resto del conductor.

Por otra parte, es fácil ver (fig. 17) que el campo a ambos lados de un disco cargado sólo difiere

en el signo, o sea que

$$d\vec{E}(\vec{r}_A) = -d\vec{E}(\vec{r}_B).$$

Luego, de (1.65) resulta

$$\vec{E}_C = d\vec{E} = \frac{1}{2} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.66)$$

relaciones que expresan: el campo sobre un elemento de superficie cargado, el campo generado por este elemento y la mitad del campo en un punto exterior, respectivamente.

Entonces, la fuerza que ejerce el resto del conductor sobre la carga $dq = \sigma dS$ será

$$d\vec{F} = dq \vec{E}_C = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S},$$

y la fuerza total sobre la superficie del conductor vale

$$\vec{F} = \frac{1}{2\epsilon_0} \iint_S d\vec{S} \sigma^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \iint_S d\vec{S} E^2.$$

Esta fuerza equivale a una tensión normal sobre la superficie

$$p = \frac{\hat{n} \cdot d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.67)$$

METODO DE IMAGENES

Conocer las superficies equipotenciales nos ayuda a resolver un problema electrostático. Como vimos, la superficie de un conductor en equilibrio es precisamente equipotencial, de manera que conocer su potencial equivale a cumplir la condición de Dirichlet para resolver la ecuación de Poisson. Veremos cómo utilizar esta propiedad

de los conductores para calcular el potencial $V(\vec{r})$.

Sea una carga puntual q y un conductor plano indefinido Π conectado a tierra (fig. 18), de modo que $V(\Pi) = 0$. En el semiespacio ubicado a la derecha del plano conocemos el potencial ($V=0$) en todo punto de una superficie cerrada S que incluye al plano Π y se cierra por el infinito (podemos imaginar esta superficie como una esfera de radio R ubicada a cierta distancia de la carga q ; si hacemos tender R a infinito manteniendo fija esa distancia, la región de S próxima a q se convierte en el plano Π).

Además conocemos $\rho(\vec{r})$ en todo punto interior a la superficie S :

$\rho(\vec{r}) \begin{cases} = 0 & \text{si } \vec{r} = \vec{r}_+ \\ \neq 0 & \text{en } \vec{r}_+, \text{ siendo } \int d\tau \rho = q \text{ cuando integramos sobre cualquier región que contenga a la carga puntual.} \end{cases}$

En consecuencia, el potencial $V(\vec{r})$ será una solución única de la ecuación de Poisson (1.52) en el interior de la superficie cerrada S , pues satisface la condición de Dirichlet sobre esta superficie.

Ahora nos plantearemos un problema diferente: calcular el potencial $V'(\vec{r})$ generado por dos cargas puntuales: una de valor $+q$ en $\vec{r}_+$ y otra contraria $-q$ ubicada en $\vec{r}_-$, en una posición simétrica con respecto al plano Π , donde ahora suponemos que no hay ningún conductor (fig. 18). El potencial V' se calcula fácilmente:

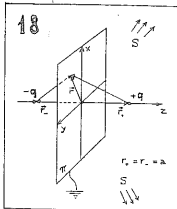
$$V'(\vec{r}) = kq \left(|\vec{r} - \vec{r}_+|^{-1} - |\vec{r} - \vec{r}_-|^{-1} \right). \quad (1.68)$$

Es evidente que V' se anula en todo punto del plano Π , pues allí

$$|\vec{r} - \vec{r}_+| = |\vec{r} - \vec{r}_-| \implies V'(\Pi) = 0,$$

y lo mismo sucede en el infinito, de modo que $V'(\vec{r}) = 0 \forall \vec{r} \in S$.

La unicidad de la solución de la ec. de Poisson nos garantiza que en el interior de S (en el semiespacio que contiene a q , donde las densidades de carga de los dos problemas, con y sin conductor, son idénticas en todo punto) debe verificarse que $V(\vec{r}) = V'(\vec{r})$. Luego, el potencial buscado está dado por la expresión (1.68).



Por supuesto que con estos datos no podemos decir nada sobre el potencial $V(\vec{r})$ en el semiespacio a la izquierda del plano Π .

Según vimos en (V) la carga total inducida en el plano Π por la presencia de la carga puntual q frente a él, debe ser igual a $-q$. Para verlo proponemos el siguiente:

Ejercicio: Calcular por derivación directa el campo $\vec{E} = -\nabla V$ en todo punto del plano Π y, aplicando la relación (1.64), expresar la densidad superficial $V(\vec{r})$ en el plano. Verificar que, en coordenadas cilíndricas con $\vec{r}_+ = -\vec{r}_- = a\hat{z}$:

$$\vec{E} = \vec{E}(R) = \frac{-q}{2\pi} \frac{a}{(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

y que la carga total sobre el plano es $q_{\Pi} = \iint_{\Pi} dS \vec{E} \cdot \hat{n} = -q$. Luego, verificar que la fuerza de atracción entre la carga q y el plano Π resulta ser la misma que habría entre $+q$ en $\vec{r}_+$ y $-q$ en $\vec{r}_-$: $F = -kq^2/4a^2$.

La carga $-q$ se llama imagen de q con respecto al plano Π . El método se puede extender a numerosas distribuciones de cargas, siempre que podamos separar a éstas en dos grupos: las exteriores a una superficie cerrada y las interiores a la misma.

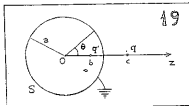
Por ejemplo, si tenemos un conjunto de cargas q_i ubicadas en los puntos $\vec{r}_i$ ($i=1,2,\dots,N$), tales que el potencial que ellas generan toma el valor constante V_0 sobre una superficie S que contiene a algunas de dichas cargas, entonces el potencial en todo punto interior a una chapa conductora con la forma de S conectada a un potencial V_0 , está dado por la expresión

$$V(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N q_i |\vec{r} - \vec{r}_i|^{-1} \quad \forall \vec{r} \in S.$$

Las cargas exteriores forman un sistema de imágenes de las interiores con respecto a la superficie S , y viceversa. Como vemos en este ejemplo, no es necesario que $V=0$ sobre la superficie cerrada.

Ejercicio: Verificar que la imagen de una carga q situada

a una distancia c del centro O de una esfera conductora S de radio a conectada a tierra (fig. 19), es la carga $q' = -(a/c)q$ ubicada a una distancia $b = a^2/c$ del centro.



Para ello comprobar que:

- i) $V = 0$ sobre S .
 ii) $\vec{D}$ = densidad de cargas imágenes = $-\frac{q}{4\pi a} \frac{(c^2 - a^2)}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta)^{3/2}}$
 iii) $\vec{F}$ = fuerza entre q y la esfera = $-kacq^2(c^2 - a^2)^{-2}$.

CONDUCTORES EXTENSOS: RELACION ENTRE POTENCIALES Y CARGAS

Consideremos un conjunto de M conductores cargados extensos (fig. 20). Supondremos que la redistribución de cargas se ha completado en cada uno de ellos, de modo que se ha alcanzado un equilibrio electrostático donde la densidad superficial del conductor ℓ -ésimo es $\vec{V}_\ell$ y su potencial constante es V_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, M$).

Dividiremos las M superficies en un total de N elementos $\{S_i\}$ cuyas cargas llamaremos $q_i = \int_{S_i} \vec{V}_i$ con $i = 1, 2, \dots, N \gg M$.

El potencial en la posición $\vec{F}_i$ de la carga q_i , generado por las $(N-1)$ cargas restantes es

$$V(\vec{F}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{k q_j}{|\vec{F}_i - \vec{F}_j|} = \sum_{j=1}^N p_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.69)$$

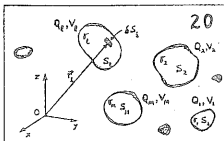
donde los coeficientes $p_{ij} = k |\vec{F}_i - \vec{F}_j|^{-1}$ son puramente geométricos y, por definición, $p_{ii} = 0$.

Las N expresiones (1.69) se pueden interpretar como un sistema de ecuaciones lineales que dan los N potenciales en los elementos de superficie de los conductores en función de las cargas de los demás elementos de toda la configuración. Este sistema lineal puede invertirse, escribiendo las cargas en función de los potenciales:

$$q_k = \sum_{j=1}^N b_{kj} V(\vec{F}_j) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.70)$$

donde $[b_{kj}]$ es la matriz inversa de $[p_{ij}]$, ambas de $N \times N$, tales que $\sum_k b_{ik} p_{kj} = \delta_{ij}$.

La carga total del conductor ℓ -ésimo es la suma de las



cargas puntuales $q_k = \int_{S_k} \vec{V}_k$ ubicadas sobre la superficie S_k . Sumando las q_k sobre todo el conductor, con sus expresiones dadas en (1.70) obtenemos su carga total

$$Q_\ell = \sum_{k=1}^M q_k = \sum_k \sum_j b_{kj} V(\vec{F}_j). \quad (1.71)$$

Pero los únicos valores que puede tomar el potencial $V(\vec{F})$ sobre los conductores son los $V_m = V_1, V_2, \dots, V_M$. Esto significa que en el desarrollo de la expresión (1.71) aparecerán términos que tendrán como factor común a V_1, V_2 , etc. Agrupando todos los términos que contienen al potencial V_1 , llamamos $C_{1\ell}$ al factor de V_1 ; análogamente todos los términos que contienen a V_2 se pueden reunir en un único término $C_{2\ell} V_2$; los que tienen a V_3 dan un término $C_{3\ell} V_3$; etc. Es decir que podemos expresar la carga Q_ℓ como una combinación lineal de sólo M términos, cada uno conteniendo a un potencial V_m :

$$Q_\ell = \sum_{m=1}^M C_{\ell m} V_m \quad (\ell = 1, 2, \dots, M) \quad (1.72)$$

Estas M ecuaciones lineales relacionan cada una de las cargas totales de los conductores con los M potenciales. Podemos formar un vector columna $\vec{Q}$ con las M cargas y otro vector $\vec{V}$ con los M potenciales, que resultarán relacionados por la matriz de coeficientes $\vec{C} = [C_{ij}]$, de $M \times M$:

$$\vec{Q} = \vec{C} \vec{V}.$$

Llamando $\vec{A} = \vec{C}^{-1}$ a la matriz inversa de $\vec{C}$ vale la relación

$$\vec{V} = \vec{A} \vec{Q} \implies V_\ell = \sum_{m=1}^M A_{\ell m} Q_m \quad (\ell = 1, 2, \dots, M) \quad (1.73)$$

que expresa a cada potencial como combinación lineal de las cargas.

Cualquiera de los sistemas lineales (1.72-73) es igualmente útil para describir un sistema de conductores extensos en condiciones electrostáticas. Las propiedades más interesantes de los coeficientes en estas ecuaciones son las siguientes:

a) Los coeficientes $C_{\ell m}$ no dependen de las cargas totales Q_m ni de las densidades $\vec{V}_m$ de los conductores, sino sólo de la geometría del sistema. Ello es así porque los coeficientes p_{ij} en (1.69) - y por lo tanto los b_{kj} en (1.70) - sólo contienen información sobre las distancias relativas $|\vec{F}_i - \vec{F}_j|$ entre los elementos de carga en todos los conductores. Si no variamos estas distancias, es decir que no modificamos la geometría de la distribución, los coeficientes

C_{lm} serán los mismos para un conjunto de valores de las cargas totales $\{Q_l\}$ que para otro conjunto muy distinto $\{Q'_l\}$. Esto tiene consecuencias importantes, como veremos.

b) Si los conductores están inmersos en un medio aislante tenue, para el cual se cumple la ley de Coulomb en la forma (1.3) con una permitividad $\epsilon = K\epsilon_0$, es fácil ver que los coeficientes hallados son proporcionales a ϵ , pues

$$P_{lj} \sim k = (4\pi\epsilon)^{-1} \sim \epsilon^{-1} \quad \text{en (1.69)}$$

$\Rightarrow b_{kj} \sim \epsilon$ en (1.70). En consecuencia, como los coeficientes C_{lm} son simplemente sumas algebraicas de los b_{kj} en (1.71), resulta

$$C_{lm} \sim \epsilon \quad (1.74)$$

Esta proporcionalidad se deduce inmediatamente de la ley de Coulomb para el caso de un solo conductor ($M=1$), ya que

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{S_1} dS' \frac{\sigma_1(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = V_1 = \frac{Q_1}{C_{11}} \Rightarrow C_{11} \sim \epsilon,$$

lo que fue demostrado experimentalmente por Cavendish y por Faraday. Es decir que los coeficientes C_{lm} también dependen del medio que rodea a los conductores.

Los coeficientes con dos índices iguales se indican como $C_{mm} \equiv C_m$ y se llaman coeficientes de capacidad. Los C_{lm} con $l \neq m$ se denominan coeficientes de inducción.

SIMETRÍA DE LOS COEFICIENTES DE INDUCCIÓN

El potencial en el punto $\vec{r}$ del conductor j -ésimo, generado por todas las cargas de una distribución se puede expresar como en (1.69), agrupando todas las contribuciones de un mismo cuerpo en una integral:

$$V_j = V_j(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^M \iint_{S_i} dS(\vec{r}') \frac{\sigma_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde S_i es la superficie del conductor i -ésimo, cuya densidad de cargas es $\sigma_i(\vec{r}')$. La sumatoria incluye la contribución de las cargas de la misma superficie S_j donde se encuentra el punto campo $\vec{r}$. El potencial toma el mismo valor V_j sobre toda esta superficie.

Empleando esta misma notación expresamos la carga total de S_j :

$$Q_j = \iint_{S_j} dS(\vec{r}) \sigma_j(\vec{r})$$

Consideremos un cambio en la distribución de las cargas y en sus valores totales conservando la geometría de la configuración, es decir sin modificar las superficies ni sus posiciones relativas. Supongamos que la nueva distribución tiene cargas totales $\bar{Q}_j$, densidades $\bar{\sigma}_j$ y potenciales $\bar{V}_j$ dados por:

$$\bar{V}_j = \bar{V}_j(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^M \iint_{S_i} dS(\vec{r}') \frac{\bar{\sigma}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad \bar{Q}_j = \iint_{S_j} dS(\vec{r}) \bar{\sigma}_j(\vec{r}).$$

Multiplicando $\bar{Q}_j$ (de la segunda configuración) por V_j (de la primera) tenemos:

$$\bar{Q}_j V_j = k \sum_{i=1}^M \iint_{S_i} dS(\vec{r}) \iint_{S_i} dS(\vec{r}') \frac{\bar{\sigma}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma_j(\vec{r}) \quad (1.75)$$

donde podemos intercambiar libremente el orden de integración, ya que

$$V_j \iint_{S_j} dS(\vec{r}) = \iint_{S_j} dS(\vec{r}) V_j, \quad \text{pues } V_j(\vec{r}) = \text{const. } \forall \vec{r} \in S_j.$$

Sumando las (1.75) sobre $j = 1, 2, \dots, M$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^M \bar{Q}_j V_j = k \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \iint_{S_i} dS(\vec{r}) \iint_{S_j} dS(\vec{r}') \frac{\bar{\sigma}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma_j(\vec{r}). \quad (1.76)$$

Análogamente, podemos formar los productos de las cargas Q_j (de la primera configuración) por los potenciales $\bar{V}_j$ (de la segunda) y sumarlos, obteniendo una expresión cuyo segundo miembro es idéntico al de (1.76), ya que las variables de integración ($\vec{r}, \vec{r}'$) pueden intercambiarse libremente (verificarlo). En consecuencia, hemos demostrado que

$$\sum_{j=1}^M \bar{Q}_j V_j = \sum_{j=1}^M Q_j \bar{V}_j \quad (1.77)$$

Este teorema de reciprocidad (debido a Green) permite deducir fácilmente la simetría de los coeficientes de inducción C_{lm} . Para verlo partimos del sistema lineal

$$V_l = \sum_{m=1}^M A_{lm} Q_m \quad (l=1, 2, \dots, M) \quad (1.73)$$

Imaginemos ahora dos distribuciones recíprocas de cargas, es

decir que tengan la misma geometría y, por lo tanto, los mismos coeficientes. En la primera distribución supondremos que todos los conductores tienen carga total nula excepto el ℓ -ésimo, cuya carga es Q_ℓ , de modo que

$$Q_n = \delta_{n\ell} Q.$$

Luego, según (1.73) los potenciales valen

$$V_p = \sum_n A_{pn} Q_n = \sum_n A_{pn} \delta_{n\ell} Q = A_{p\ell} Q,$$

ya que el único término no nulo de la suma es el que tiene $n = \ell$.

En la segunda distribución supondremos que la única carga no nula es la del conductor m -ésimo, o sea que

$$\bar{Q}_r = \delta_{rm} \bar{Q} \implies \bar{V}_s = \sum_r A_{sr} \bar{Q}_r = \sum_r A_{sr} \delta_{rm} \bar{Q} = A_{sm} \bar{Q}.$$

Para estas dos configuraciones las sumatorias en (1.77) dan:

$$\sum_{j=1}^m \bar{Q}_j V_j = \sum_j (\delta_{jm} \bar{Q}) (A_{j\ell} Q) = A_{m\ell} Q \bar{Q}$$

$$\text{y} \quad \sum_{j=1}^m Q_j \bar{V}_j = \sum_j (\delta_{jm} Q) (A_{jm} \bar{Q}) = A_{\ell m} Q \bar{Q}$$

las cuales, por el teorema de reciprocidad, son iguales. Luego

$$A_{\ell m} = A_{m\ell}$$

Y, como $\bar{C}$ es la matriz inversa de $\bar{A}$, la matriz de los coeficientes de inducción también debe ser simétrica:

$$\boxed{C_{\ell m} = C_{m\ell}} \quad (1.78)$$

COEFICIENTES DE CAPACIDAD Y DE INDUCCIÓN

Para apreciar la importancia de estos coeficientes para describir las propiedades de los conductores extensos veremos algunos ejemplos, comenzando por $M=1$ y aumentando sucesivamente el número de conductores.

M=1) Un único conductor con $Q_1 = C_1 V_1$.

Si $Q_1 > 0$, entonces $V_1 > 0 \implies C_1 > 0$. En general $C_{\ell\ell} = C_\ell > 0$, es decir que los coeficientes de capacidad son positivos.

M=2) Supongamos que uno de los conductores está conectado

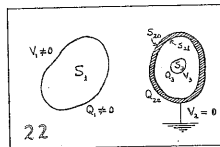
a tierra, es decir a otro conductor que tiene un número indefinidamente grande de cargas libres, cuyo potencial elegimos como 0, de modo que $V_2 = 0$ (fig. 21) y el otro conductor está aislado y tiene una carga total $Q_1 > 0$. Entonces se inducirá en S_2 una carga de signo contrario $Q_2 < 0$, o sea que

$$Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 = C_{21} V_1 < 0$$

$\implies \underline{C_{21} < 0}$ (los coeficientes de inducción pueden ser negativos).

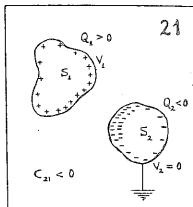
M=3) Supongamos que S_1 está aislado, y que S_2 es hueco y está conectado a tierra, conteniendo en su interior a un tercer conductor S_3 (fig. 22). Inicialmente tomemos $Q_3 = 0$ de modo que, como ya hemos visto en el caso (V), fig. 15, se verifica:

$V_3 = V_2 = 0$ y las ecuaciones (1.72) toman la forma:



$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 \\ Q_2 = C_{21} V_1 \\ Q_3 = C_{31} V_1 = 0, \text{ donde} \end{cases} \quad V_1 \neq 0 \implies \underline{C_{13} = C_{31} = 0}.$$

Veamos que el coeficiente de inducción entre dos conductores blindados entre sí por una superficie conductora conectada a tierra es nulo. Así se logra el blindaje electrostático de una región, en este caso el interior del conductor hueco S_2 . En este principio se basan las jaulas de Faraday empleadas en los laboratorios, que son cámaras cerradas construidas con una malla metálica de trama compacta, que impiden que los campos eléctricos generados en el exterior penetren al interior de las mismas.



Ahora supongamos que $Q_3 \neq 0$. Entonces, según vimos en la fig. 15, $Q_2 = Q_{2e} + Q_{2i}$, donde la carga en la superficie interior S_{2i} es $Q_{2i} = -Q_3$, y Q_{2e} es la carga en la superficie exterior S_{2e} . Ahora las relaciones (1.72) se expresan como:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 \\ Q_2 = C_{12} V_1 + C_{23} V_2 \\ Q_3 = C_{33} V_3 \end{cases} \text{ En ésta hemos tenido en cuenta que } C_{13} = 0$$

como lo probamos más arriba. El coeficiente sigue siendo nulo porque su valor no varió al cambiar Q_3 , ya que la geometría del sistema no ha cambiado.

Por otra parte, es evidente que $Q_{2i} = C_{23} V_3$ y $Q_{2e} = C_{12} V_1$. Para comprobarlo basta con conectar a tierra por separado el conductor S_1 (con $V_3 \neq 0$), o bien el S_3 (con $V_1 \neq 0$). Teniendo en cuenta estas expresiones (verificarlas) resulta:

$$Q_{2i} + Q_3 = (C_{23} + C_{33}) V_3 = 0$$

de donde obtenemos:

$$C_{23} = -C_{33} \quad (1.79)$$

Unidades: De (1.72) resulta $[C] = [Q]/[V] = C \cdot V^{-1} = \text{Faradio} = F$,

de donde $[C] = [Q^2]/[L^2 F] = [Q^2]/[L^2 (Q/V/L)] = [Q/V/L] = [C/L] = F/m$.

CONDENSADOR

Un sistema de conductores como el par 2/3 recién analizado, donde uno rodea totalmente al otro (fig. 23), de manera que vale la relación (1.79):

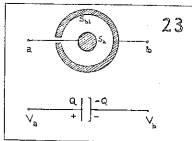
$$C_{aa} = -C_{ab}$$

se denomina condensador o capacitor. Se lo representa como se indica al pie de la fig. 23.

La carga Q y la capacidad C del condensador son las del conductor o placa interior, siendo

$$Q_a + Q_{bi} = 0.$$

Para este par de conductores las relaciones (1.72) toman la forma



$$Q = Q_a = -Q_b = C_{aa} V_a + C_{ab} V_b + \sum_n C_{an} V_n$$

donde, si el efecto de blindaje es eficiente, $C_{an} = 0$ $\forall$ conductor S_n exterior. El tercer término también se anula cuando los demás conductores cargados se encuentran suficientemente alejados; en caso contrario, si debemos retener este término, el comportamiento del condensador es más complicado que el que se describe aquí.

Definiendo $C = C_{aa} = -C_{ab}$ resulta

$$Q = C(V_a - V_b) = C \Delta V \quad (1.80)$$

La energía del condensador se calcula como en (1.58):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} (V_a \sum_{i=1}^n q_i + V_b \sum_{i=1}^n q_i) = \frac{1}{2} (Q_a V_a + Q_b V_b),$$

$$\text{donde } Q_a = -Q_b = Q \implies U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (1.81)$$

La fuerza entre las placas de un condensador cargado, naturalmente atractiva, puede hallarse directamente a partir de (1.67):

$$\vec{F} = \iint_{S_a} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \iint_{S_a} d\vec{S} \cdot E^2 \quad \text{donde } E = U/\epsilon_0 \text{ es el campo}$$

en un punto ubicado entre las placas, muy próximo a una de ellas. En casos de cierta simetría, como el de un condensador de placas paralelas indefinidas separadas por una distancia d , podemos calcular la fuerza entre las placas fácilmente, ya que

$$\Delta V = E d \implies F = \frac{\epsilon_0 \Delta V^2}{2 d^2} A, \quad (1.82)$$

siendo $A \gg d^2$ el área de cada placa. Esto permite construir un voltímetro primitivo, ya que si medimos la fuerza F podemos conocer

$$\Delta V = d \sqrt{2 F / \epsilon_0 A} \quad (\text{principio del electrómetro absoluto de Kelvin})$$

ENERGÍA Y FUERZAS EN UN CONDENSADOR: VOLTÍMETROS ELECTROSTÁTICOS

La expresión (1.82) es un caso muy particular de la fuerza entre conductores cargados. Hay dos tipos interesantes de conexión de las placas de un condensador para los que calcularemos la fuerza entre ellas.

a) Procesos a carga constante: Son los que tienen lugar cuando las placas del condensador están aisladas de todo conductor externo, de modo que sus cargas no varían.

Imaginemos que una de las placas realiza un pequeño desplazamiento virtual $\delta \vec{r}$ de componentes δx_1 . Este dará lugar a una variación δU en la energía electrostática, que podemos expresar mediante la tercera expresión (1.81):

$$U = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{1}{2} Q^2 \left(-\frac{1}{C^2} \delta C \right) = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \delta C.$$

Luego, la componente i -ésima de la fuerza entre las placas será

$$F_i = -\frac{\delta U}{\delta x_i} \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x_i}. \quad (1.83)$$

b) Conexión a potencial constante: Se realiza conectando las placas del condensador a los terminales de una fuerza externa de energía (tal como una pila o una batería) que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas, independientemente de lo que conectemos entre ellas. La fuente externa provee la carga adicional que se requiere para mantener $\Delta V = \text{const.}$ cuando se desplazan las placas, alterando la geometría del sistema.

En efecto, un desplazamiento $\delta \vec{r}$ produce una variación δC en la capacidad del condensador. Según (1.80) $\Delta V = \text{const.} \implies \delta Q \neq 0$. Al producirse este desplazamiento, empleando la primera expresión (1.81) vemos que la energía potencial del condensador debe variar en

$$\delta U_C = \frac{1}{2} \delta Q \Delta V \quad (1.84)$$

Pero la fuente externa debe entregar una carga δQ a un potencial ΔV , lo que significa ceder una energía

$$\delta U_{\text{ext}} = -\delta Q \Delta V.$$

Se ve que (1.84) representa la mitad de la energía cedida por la fuente externa que se destina a aumentar la energía electrostática del condensador. El resto de la energía externa se emplea en el trabajo mecánico realizado al mover las cargas. La variación neta de la energía total U_t es

$$\delta U_t = \delta U_C + \delta U_{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \delta Q \Delta V = -\delta U_C$$

y la componente F_i de la fuerza entre las placas resulta ser

$$F_i = -\frac{\partial U_t}{\partial x_i} = +\frac{\partial U_C}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \Delta V = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial x_i} \Delta V^2. \quad (1.85)$$

Es evidente que las expresiones (1.83) y (1.85) de la fuerza F_i entre las placas del condensador coinciden, como era de esperar, ya que representan la misma cantidad física en condiciones electrostáticas, en las que a igual potencial la carga Q está unívocamente determinada por la relación (1.80). Notemos que siempre vale la relación entre la fuerza y la energía total de un sistema aislado ($F_i = -\partial_i U_t$), pero al considerar sólo una parte del sistema, como hicimos con el condensador en el caso (b), se obtiene la relación $F_i = +\partial_i U_C$, que es característica de los procesos realizados a potencial constante (ver, p.ej., el Cap. III).

Ejercicio: Verificar (1.82) empleando la (1.83) ó la (1.85).

El voltímetro electrostático se parece a un condensador variable (fig. 24). La placa móvil P_1 lleva una aguja indicadora adosada y está soldada a una espiral elástica cuyo momento (cupla recuperadora) con respecto al punto O es

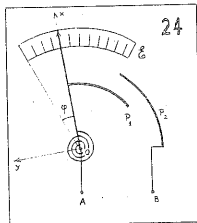
$$M_e = -\tau \varphi. \quad (1.86)$$

Dada la simetría del sistema es fácil ver que no puede haber movimientos según R (radiales) ni normales al plano de la escala (según z), de modo que en coordenadas cilíndricas la energía sólo puede depender del ángulo φ de deflexión de la aguja:

$$U = U(\varphi).$$

Es fácil ver que la fuerza de atracción entre las placas tenderá a mover a P_1 (P_2 está fija) en la dirección de φ creciente. Para calcular la cupla respectiva desarrollemos el diferencial de la energía teniendo en cuenta que $\partial x / \partial \varphi = -R \sin \varphi = -y$; $\partial y / \partial \varphi = R \cos \varphi = x$. Luego, $\vec{F} = -\nabla U =$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) d\varphi = (-F_x)(-y) + (-F_y)(x) d\varphi$$



$$\Rightarrow dU = (y F_x - x F_y) d\varphi = -(x F_y - y F_x) d\varphi = -M_z d\varphi$$

donde $M_z = x F_y - y F_x$ es la componente normal al plano (x, y) del momento de la fuerza eléctrica $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ respecto del origen O .

Podemos expresar la energía total del sistema en función de la energía electrostática del voltímetro, que llamaremos nuevamente U_c , en dos formas distintas que corresponden a las dos conexiones posibles del instrumento. Ya vimos que a un desplazamiento relativo de las placas corresponde una variación $\delta U_c = \pm \delta U$, con el signo (+) para un desplazamiento a carga constante y el (-) cuando las placas se mueven a potencial constante. Luego, vale la relación general

$$M_z = \mp dU_c / d\varphi. \quad (1.87)$$

Normalmente al medir, una de las placas del instrumento, p.ej. la A , está conectada al potencial de referencia (a tierra o a un terminal de una fuente de potencial). Si se conecta la otra placa a un conductor cuyo potencial queremos medir, haciendo un contacto breve y retirándolo, de modo que el movimiento subsiguiente de las placas se realice a carga constante, actuará una cupla

$$M_z = -dU_c / d\varphi = (Q^2 / 2C^2) dC / d\varphi,$$

que para la deflexión de equilibrio será compensada por la cupla elástica (1.86), de modo que allí resulta

$$\varphi_e = (Q^2 / 2C^2) dC / d\varphi = (1/2\tau) (dC/d\varphi) \Delta V^2. \quad (1.88)$$

Los factores que acompañan al potencial ΔV sólo incluyen constantes del instrumento que, en general, no se calculan sino que se calibra la escala $\mathcal{C}$ empleando potenciales conocidos. Notemos que la deflexión φ_e tiene el mismo sentido para potenciales ΔV de cualquier signo, pues $\varphi \sim \Delta V^2$, lo cual permite medir potenciales alternos (que cambian de signo periódicamente).

Si conectamos la placa B al conductor y mantenemos el potencial constante, la cupla (1.87) vale

$$M_z = + dU_c / d\varphi = \frac{1}{2} (dC/d\varphi) \Delta V^2.$$

En el equilibrio resulta la misma deflexión obtenida en (1.88), como puede verificarse de inmediato. Como era de esperar, la cupla sobre la placa P_1 es independiente de cómo se construye la configuración de cargas.

CONEXIONES SIMPLES DE CONDENSADORES

Hay formas sencillas de conectar entre sí varios condensadores de modo de obtener diversos valores de la capacidad con unos pocos pares de conductores. Entre las conexiones más útiles figuran las siguientes:

a) Conexión en serie (fig. 25)

Imaginemos $N+1$ placas formando N condensadores, de modo que sólo esté cargado el conductor más interior de la configuración, o sea:

$$Q_1 = Q; Q_2 = \dots = Q_{N+1} = 0.$$

Luego, las cargas interiores de los conductores serán todas iguales a $-Q$, y las cargas sobre las superficies exteriores valdrán Q , como vimos en la fig. 15.

Para cada condensador, formado por la superficie exterior del conductor S_i y la interior del S_{i+1} , vale la relación (1.80):

$$Q = C_i \Delta V = C_i (V_i - V_{i+1}) \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N.$$

El condensador formado por el conductor más interior y la superficie interior del conductor más exterior S_{N+1} tendrá una diferencia de potencial entre placas:

$$\Delta V = V_1 - V_{N+1} = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_{N-1} - V_N) + (V_N - V_{N+1})$$

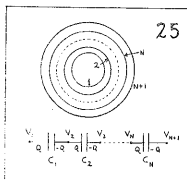
donde cada uno de los paréntesis es igual a Q/C_i , según vimos. Luego, la capacidad equivalente de este condensador será el cociente entre la carga Q en su conductor interior y la ΔV recién calculada:

$$C_x = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\sum_i (Q/C_i)} = \frac{1}{\sum_i C_i^{-1}} \Rightarrow \frac{1}{C_x} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (1.89)$$

El valor C_x se denomina capacidad equivalente serie. Es fácil verificar que $C_x < C_1 \forall i$.

b) Conexión en paralelo (fig. 26)

Supongamos N condensadores conectados entre los dos conductores a y b , con $\Delta V = V_a - V_b$. Cada par de placas tendrá una carga



Q_i que dependerá de su capacidad C_i , pero todos tendrán la misma diferencia de potencial ΔV . Luego, la carga total será la suma de las $Q_i = C_i \Delta V$ ($i=1, 2, \dots, N$):

$$Q_t = \sum_{i=1}^N C_i \Delta V = \Delta V \sum_{i=1}^N C_i.$$

El condensador formado por los conductores a y b tendrá una capacidad equivalente $C_H = Q_t / \Delta V = \sum_{i=1}^N C_i$

$$C_H = \sum_{i=1}^N C_i > C_i \quad \forall i \quad (1.90)$$

c) Equivalencia estrella-triángulo (fig. 27)

La conexión superior de la fig. 27 se denomina triángulo y la inferior, estrella. La diferencia de potencial es la misma para cada par de terminales de ambas conexiones (p.ej. $\Delta V_{12}^t = \Delta V_{12}^e$) y las cargas totales de los conductores numerados son respectivamente iguales si se verifican las siguientes relaciones de equivalencia:

$$C_1^t = (C_2 C_3)^e / (C_1 + C_2 + C_3)^e$$

$$C_2^t = (C_3 C_1)^e / (C_1 + C_2 + C_3)^e$$

$$C_3^t = (C_1 C_2)^e / (C_1 + C_2 + C_3)^e$$

o sus inversas:

$$C_1^e = (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1)^t / C_1^t$$

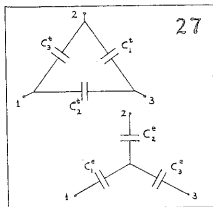
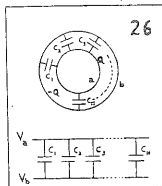
$$C_2^e = (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1)^t / C_2^t$$

$$C_3^e = (C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1)^t / C_3^t$$

(1.91)

En estas relaciones (t) indica todos los valores que corresponden a la conexión triángulo, (e) corresponde a las capacidades de la conexión estrella.

Ejercicio: Demostrar las relaciones de equivalencia (1.91).



DIELECTRICOS

Cuando todos los electrones de un material están fuertemente ligados a sus núcleos, de modo que no hay movimiento de cargas libres en presencia de un campo $\vec{E}$, se dice que el material es un aislador o dieléctrico. La carga neta que aparece en un elemento dS de la superficie de un dieléctrico sólido al frotarlo, no se distribuye sobre el cuerpo (como ocurriría en un conductor), sino que permanece localizada en el mismo dS .

Si aplicamos un campo eléctrico $\vec{E}$, las cargas positivas (en los núcleos de los átomos) y las negativas (en los electrones) de un dieléctrico, mutuamente ligadas en cada átomo o molécula, se desplazan en sentidos opuestos a partir de sus posiciones de equilibrio, convirtiendo a cada molécula en un dipolo. Este efecto se llama polarización: cada elemento de volumen dV , que contiene un número enorme de estos dipolos microscópicos, tendrá un momento dipolar neta $d\vec{P} = \sum \vec{P}_d$, donde $\vec{P}_d$ es el momento dipolar de cada una de las moléculas del elemento. Como consecuencia de la existencia de un momento neta no nulo, el campo eléctrico en el interior del aislador, $\vec{E}$, difiere del campo $\vec{E}_0$ que existiría en vacío (en ausencia del material) para el mismo conjunto de fuentes.

La polarización es un fenómeno complejo que ofrece muchas variantes. El medio dieléctrico puede ser isótropo o anisótropo. En el primer caso el campo $\vec{E}$ en el dieléctrico tiene la misma dirección que tendría $\vec{E}_0$ en el vacío, siempre que las fuentes sean las mismas con y sin dieléctrico. En un medio anisótropo el ángulo entre $\vec{E}_0$ y $\vec{E}$ depende de la dirección del campo: el medio exhibe direcciones privilegiadas. Estas suelen coincidir con los ejes principales de la estructura cristalina en los dieléctricos sólidos.

Cada dipolo puede tener un momento $\vec{P}_d$ más o menos intenso. Si en ausencia de campo exterior los momentos dipolares individuales $\vec{P}_d$ son despreciables, de modo que sólo aparecen cuando se aplica un campo eléctrico, el dipolo es inducido. Este tipo de dipolo es característico de las moléculas más simétricas (como las de los gases raros, p.ej.). Si, por el contrario, el momento dipolar $\vec{P}_d$ de cada molécula es apreciable aun cuando el campo aplicado sea nulo, el dipolo es permanente. Las moléculas con momento dipolar permanente se denominan polaras: son fuertemente asimétricas (p.ej.: ClH , H_2O , etc.).

Cuando se observa un dieléctrico de este tipo en ausencia de campo eléctrico, el momento dipolar neto en un elemento de volumen resulta ser nulo. Ello es consecuencia de la distribución aleatoria de las direcciones y sentidos de los momentos individuales $\vec{p}_d$. Esta condición aleatoria se puede deber a las colisiones (en los gases), a las vibraciones (en los sólidos), etc.

Definimos una cantidad llamada polarización, igual a la densidad de momento dipolar neto por unidad de volumen:

$$\vec{P}_V = \frac{\sum \vec{p}_d(\vec{F})}{\delta V} \quad (1.92)$$

donde $\sum \vec{p}_d(\vec{F})$ es el momento dipolar eléctrico neto definido más arriba, medido para un elemento de volumen δV ubicado en la posición $\vec{F}$. La variación de $\vec{P}_V$ con la posición está definida, en general, por la intensidad del campo eléctrico en cada punto.

Para ver que el campo $\vec{E}$ en el dieléctrico es menos intenso que el que habría en vacío ($\vec{E}_0$), recordemos que sobre un dipolo (fig. 28) actúa una cupla

$$\vec{M}_d = \vec{p}_d \times \vec{E} \quad (\text{ver 1.47})$$

que tiende a alinearlo con $\vec{E}$. La componente del campo $\vec{E}_d$ creado por los dipolos en la dirección del campo aplicado es antiparalela a éste (tiene sentido opuesto, como se ve en las fig. 9 y 28). Las otras componentes se cancelan con las contribuciones de los dipolos vecinos añadidos en el mismo elemento de volumen, de modo que para el campo total se verifica

$$|\vec{E}_t| = |\vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_d| < |\vec{E}_{\text{ext}}| = |\vec{E}_0| \quad (1.93)$$

La relación entre el campo $\vec{E}_0$ "en vacío" y el campo $\vec{E}$ con dieléctrico se puede medir fácilmente. En efecto, aplicando la relación (1.74) a un condensador cuya capacidad es C_0 en vacío y C cuando se coloca el dieléctrico a medir entre sus placas, resulta

$$C/C_0 = \epsilon/\epsilon_0 = K = E_0/E \quad (1.94)$$

que es el coeficiente dieléctrico del material, inversamente

proporcional al cociente entre las fuerzas coulombianas con y sin dieléctrico.

De esta manera, midiendo las capacidades diferentes que resultan con distintos aislantes entre las placas de un mismo condensador, se obtienen los coeficientes K , algunos de cuyos valores típicos se dan en la tabla siguiente:

MEDIO	aire	agua pura	mica	poli-etileno	aceites, papel	cerámico de TiO_2	titanato de bario
K	1,0006	≈ 80	7 a 8	3,3	2,2	15 a 200	500 a 6000

RIGIDEZ DIELECTRICA

Los gases a temperatura ordinaria se comportan como materiales dieléctricos casi ideales. En ellos la proporción de partículas cargadas libres es prácticamente despreciable, de modo que en presencia de un campo eléctrico no suelen observarse movimientos macroscópicos de cargas (corrientes eléctricas).

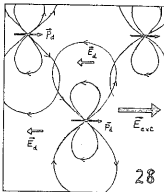
Sin embargo, para campos muy elevados estos materiales pierden sus propiedades como aisladores y se convierten, parcialmente, en conductores. La intensidad máxima de campo eléctrico que puede soportar un aislador sin convertirse en conductor se llama rigidez dieléctrica. Cuando se aumenta el campo hasta alcanzar ese valor se produce la ruptura del material, es decir la ionización en una región localizada, generalmente cerca de las puntas de un conductor inmerso en el dieléctrico.

Para el aire seco a presión y temperatura normales, la rigidez dieléctrica es del orden de $E_m = 3 \times 10^6$ V/m. Para aislantes sólidos la rigidez suele ser varias veces mayor.

Es interesante conocer la densidad superficial máxima q_m que puede soportar un conductor inmerso en aire. Según (1.64) este valor se obtiene como

$$q_m = \epsilon_0 E_m \approx 2,7 \times 10^{-5} \text{ C m}^{-2}.$$

Luego, una esfera metálica de radio $a = 10$ cm podrá cargarse hasta totalizar un valor máximo del orden de



$$q_m = 4\pi a^2 \epsilon_m = 3,3 \times 10^{-6} \text{ C} = 3,3 \mu\text{C}.$$

Este valor nos permite tener una idea de lo enorme del coulombio como unidad de carga, así como del escaso número de cargas que pueden llegar a localizarse en la superficie de un conductor, en comparación con el número de electrones libres disponibles. En efecto, a razón de un electrón libre por átomo del metal, el número total de electrones libres en la esfera, supuesta maciza, será del orden del número de Avogadro ($\approx 6 \times 10^{23}$), mientras que la carga máxima equivale a

$$\frac{q_m}{e} = \frac{3,3 \times 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19}} \approx 2 \times 10^{12} \text{ electrones}.$$

DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE DIPOLOS PUNTALES

Describiremos un modelo aproximado que explica adecuadamente el comportamiento de los dieléctricos en condiciones electrostáticas. Supondremos que el dieléctrico, que ocupa totalmente el interior de una superficie S (fig. 29), consiste en una distribución continua de dipolos puntuales cuya densidad está dada por (1.92).

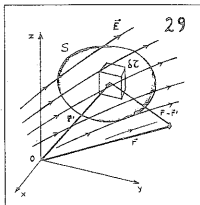
Calculemos el potencial δV_d en un punto $\vec{F}$, generado por el momento dipolar neto contenido en un elemento de volumen $\delta\tau'$ ubicado en la posición $\vec{F}'$. Según vimos en (1.41) este potencial vale

$$\delta V_d(\vec{F}) = k \delta\tau' \frac{(\vec{F} - \vec{F}') \cdot \vec{P}_V(\vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|^3} = k \delta\tau' \frac{\vec{P}_V(\vec{F}') \cdot (\vec{F} - \vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|^3}.$$

Integrando sobre todas las fuentes dentro de la región $V(S)$ obtenemos el potencial debido a todas las cargas de polarización (ligadas) en el dieléctrico:

$$V_d(\vec{F}) = k \int_{V(S)} \frac{\vec{P}_V(\vec{F}') \cdot (\vec{F} - \vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|^3} d\tau'$$

donde, según vimos en (1.23):



$$(\vec{F} - \vec{F}') / |\vec{F} - \vec{F}'|^3 = -\nabla' / |\vec{F} - \vec{F}'|.$$

Una vez hecha esta transformación, podemos aplicar al integrando la identidad (A.6), obteniendo:

$$\vec{P}_V \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \right) = \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}_V(\vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \nabla' \cdot \vec{P}_V.$$

Luego,

$$V_d(\vec{F}) = k \int_V d\tau' \vec{P}_V \cdot \nabla' (1/|\vec{F} - \vec{F}'|) = k \int_V d\tau' \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}_V(\vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \right] - k \int_V d\tau' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}_V}{|\vec{F} - \vec{F}'|}$$

a cuyo primer término aplicamos el teorema de la divergencia (A.12) y resulta, con $d\vec{S}' = d\vec{S} \hat{n}$:

$$V_d(\vec{F}) = k \oint_S d\vec{S}' \cdot \frac{\hat{n} \cdot \vec{P}_V}{|\vec{F} - \vec{F}'|} + k \int_{V(S)} d\tau' \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}_V}{|\vec{F} - \vec{F}'|} \quad (1.95)$$

La expresión del potencial obtenida tiene la misma forma que el potencial creado en $\vec{F}$ por una configuración de cargas que ocupan la región $V(S)$ con densidad $\rho(\vec{F}')$ y también la superficie S que encierra a esa región, con densidad $\sigma(\vec{F}')$:

$$V(\vec{F}) = k \oint_S d\vec{S}' \cdot \frac{\sigma(\vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|} + k \int_{V(S)} d\tau' \frac{\rho(\vec{F}')}{|\vec{F} - \vec{F}'|}. \quad (1.96)$$

Comparando las (1.95) y (1.96) definimos las densidades equivalentes de carga

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \hat{n} \cdot \vec{P}_V \\ \rho_d &= -\nabla \cdot \vec{P}_V \end{aligned} \quad (1.97)$$

La carga total contenida en estas densidades equivalentes debe ser nula, ya que los números de cargas elementales positivas y negativas contenidos en la totalidad de los dipolos deben ser iguales. Para verificarlo, calculemos:

$$Q_e = \oint_S dS \sigma_d + \int_V d\tau \rho_d = \oint_S dS \hat{n} \cdot \vec{P}_V + \int_V d\tau (-\nabla \cdot \vec{P}_V) = 0,$$

después de aplicar el teorema de la divergencia (A.12).

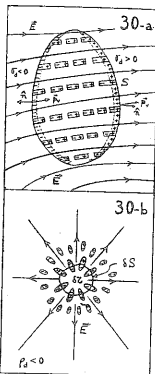
El significado físico de estas densidades se aclara cuando

consideramos una distribución de dipolos muy simple, como la de la fig. 30-a, donde los dipolos en equilibrio están alineados con el campo eléctrico. Las cargas adyacentes de elementos de volumen contiguos se cancelan, pero esto no sucede con las cargas ubicadas sobre la superficie exterior $\bar{S}$, que tienen una densidad superficial neta $\bar{\rho}_d$.

Para interpretar la densidad en volumen $\bar{\rho}_d$ consideremos un elemento de volumen $\delta\tau$ en una región en equilibrio donde la polarización $\bar{P}_v$ y el campo $\bar{E}$ están alineados, de modo que $\bar{P}_v = \alpha \bar{E}$ (con $\alpha > 0$) en $\delta\tau$. Supongamos que en el interior de este elemento hay una carga puntual positiva. Luego, según (1.15):

$$\nabla \cdot \bar{P}_v = \alpha \nabla \cdot \bar{E} > 0.$$

Eligiendo $\delta\tau$ suficientemente pequeño, como el encerrado por la superficie δS (fig. 30-b), vemos que a una divergencia positiva de la polarización le corresponde una carga ligada neta negativa en el interior de $\delta\tau$.



TEOREMA DE GAUSS: EL DESPLAZAMIENTO ELECTRICICO

Supongamos que en un volumen $V(S)$ hay una distribución de cargas libres con densidad ρ_l además de una distribución de dipolos con densidad ρ_d . Calculemos el flujo del campo eléctrico $\bar{E}$ a través de la superficie S aplicando el teorema de Gauss (1.13) a la carga encerrada por S , empleando la expresión (1.97) para ρ_d :

$$\oint_S d\bar{S} \cdot \bar{E} = \frac{1}{\epsilon_0} q_t(S) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\tau (\rho_l + \rho_d) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\tau \rho_l - \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d\tau \nabla \cdot \bar{P}_v$$

donde $\int_V d\tau \rho_l$ es la carga libre encerrada q_l . Luego, aplicando el teorema de la divergencia a la última integral y agrupando las integrales de superficie en el primer miembro, resulta

$$\oint_S d\bar{S} \cdot (\bar{E} + \bar{P}_v/\epsilon_0) = \frac{1}{\epsilon_0} q_l. \quad (1.98)$$

Definimos un campo vectorial

$$\bar{D}(\bar{r}) = \epsilon_0 \bar{E}(\bar{r}) + \bar{P}_v(\bar{r}) \quad (1.99)$$

que llamamos desplazamiento eléctrico y que tiene la misma relación integral con respecto a las cargas libres encerradas por S , que la que existe entre $(\epsilon_0 \bar{E})$ y las cargas totales $q_t = q_l + q_d$.

En efecto, utilizando $\bar{D}$ la (1.98) toma la forma

$$\oint_S d\bar{S} \cdot \bar{D} = q_l(S) \quad (1.100)$$

que es una forma especialmente útil del teorema de Gauss.

La utilidad de (1.100) se aprecia cuando se trata de calcular el campo $\bar{E}$ conociendo la densidad de cargas libres ρ_l y las propiedades del material dieléctrico en el interior de una superficie. En ese caso podemos expresar

$$\oint_S d\bar{S} \cdot \bar{D} = \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot \bar{D} = \int_{V(S)} d\tau \rho_l = q_l(S)$$

de donde, análogamente a (1.15), obtenemos la forma local del teorema de Gauss:

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_l \quad (1.101)$$

La aplicación directa de la forma global (1.100) para resolver un problema electrostático es inmediata cuando la distribución de cargas presenta cierto grado de simetría. El procedimiento es idéntico al descrito en (1.14), cuando definimos una superficie gaussiana. Para calcular el campo eléctrico necesitamos conocer la relación entre $\bar{D}$ y $\bar{E}$, que analizaremos a continuación.

DIELECTRICOS ISOTROPICOS Y ANISOTROPICOS: SUSCEPTIBILIDAD ELECTERICA

En la mayoría de los dieléctricos que encontramos cotidianamente, la alineación de los dipolos con un campo eléctrico aplicado $\bar{E}$ resulta en una polarización $\bar{P}_v$ paralela a $\bar{E}$, de modo que la relación entre ambos vectores es un escalar que convendremos en expresar como el producto $\epsilon_0 \chi$, donde χ es un escalar adimensional característico del medio, llamado susceptibilidad eléctrica, y ϵ_0 tiene

las unidades requeridas para que en un medio isótropo:

$$\vec{D}_v = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.102)$$

Luego, (1.99) toma la forma

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{D}_v = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}$$

donde $\chi = 0$ en vacío (en ausencia de dieléctrico), en cuyo caso $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0$. Generalizando esta relación definimos la permitividad del medio

$$\epsilon = (1 + \chi) \epsilon_0 = K \epsilon_0$$

de modo que

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.103)$$

Vemos que, a menos de la constante ϵ_0 , $\vec{D}$ exprese el campo $\vec{E}_0$ que habría en vacío con las mismas cargas libres en las mismas posiciones en que medimos el campo $\vec{E}$ con dieléctrico. En realidad, la simple presencia del aislador provoca cambios en la distribución de las cargas libres, de modo que las configuraciones de equilibrio con y sin dieléctrico suelen ser distintas, a pesar de lo cual siempre podemos descomponer el campo total en

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d$$

donde $\vec{E}_0 = \vec{D}_0/\epsilon_0$ y $\vec{E}_d$ es la contribución de las cargas ligadas. Esta última resulta ser igual a

$$\vec{E}_d = \vec{E} - \vec{E}_0 = \vec{E} - \vec{D}/\epsilon_0 = \vec{E} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \vec{E} = (1 - K) \vec{E},$$

pero todos los dieléctricos tienen coeficientes $K > 1$, de modo que $1 - K < 0 \Rightarrow \vec{E}_d$ es antiparalelo a $\vec{E}$, como anticipamos en (1.93). De este hecho proviene el nombre de MI-eléctrico, que significa que el campo debido al medio se opone al campo debido a las fuentes libres.

En resumen, podemos expresar los distintos campos en función del campo eléctrico total $\vec{E}$:

$$\vec{D}_v = \epsilon_0 \chi \vec{E}; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{E}_0 = K \vec{E}; \quad \vec{E}_d = (1 - K) \vec{E} = -\chi \vec{E}.$$

Los gases, los líquidos y los sólidos amorfos son isótropos, aun cuando los observamos en cantidades microscópicas. En cambio, para los sólidos cristalinos y los plasmas la relación entre las componentes del desplazamiento $\vec{D}$ y del campo $\vec{E}$ está dada por una matriz o tensor de permitividad $\vec{\epsilon}$, tal que

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}, \quad \text{o sea} \quad D_\ell = \sum_{m=1}^3 \epsilon_{\ell m} E_m \quad (\ell=1, 2, 3).$$

Si el medio es, además, inhomogéneo las componentes de $\vec{\epsilon}$ son funciones de la posición, es decir $\epsilon_{\ell m} = \epsilon_{\ell m}(\vec{r})$.

En la mayoría de los cuerpos sólidos los microcristales anisótropos están orientados en direcciones aleatoriamente distribuidas, de modo que, a escala macroscópica, se puede definir una matriz escalar $\epsilon_{\ell m} \approx \delta_{\ell m}$, en cuyo caso vale nuevamente la relación (1.102) y los vectores $\vec{E}$, $\vec{D}$ y $\vec{D}_v$ resultan ser paralelos.

ENERGIA ELECTROSTATICA EN DIELECTRICOS

Recordemos la expresión de la energía electrostática de una distribución continua de cargas:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad (1.59)$$

donde, como hicimos para cargas en vacío, podemos extender la integral a todo el espacio cuando la distribución de cargas es finita (si no lo es, igualmente el dominio de integración se restringe a la región V que contiene todas las cargas). En (1.59) sólo interviene la densidad de cargas libres $\rho = \rho_\ell$, pero el potencial $V(\vec{r})$ incluye las contribuciones de todas las cargas, libres y ligadas.

Empleando (1.101) tenemos $\rho_\ell = \nabla \cdot \vec{D}$, de modo que (1.59) toma la forma

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \nabla \cdot \vec{D} \cdot \vec{D}, \quad \text{donde vale la identidad (A.6):}$$

$$\nabla \cdot (\vec{D} \vec{D}) = \nabla \cdot \vec{D} \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} \cdot \vec{D} - \vec{D} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \nabla \cdot (\vec{D} \vec{D}) + \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \oint_{S_R} d\vec{S} \cdot (\vec{D} \vec{D}) + \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \vec{D} \cdot \vec{E},$$

siendo S_R una superficie esférica de radio infinito que encierra a todo el espacio. De manera exactamente análoga a la demostración de (1.62) podemos ver que la primera integral del último miembro se anula (verificarlo) y resulta

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_F} d\tau \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (1.104)$$

donde nuevamente definimos una densidad de energía

$$\eta_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (1.105)$$

de la cual (1.63) es un caso particular. Para un medio isotrópico $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, y la ecuación toma la forma

$$\eta_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad (1.106)$$

Las expresiones para la energía del tipo (1.59) son útiles cuando conocemos la densidad de carga libre $\rho_l(\vec{r})$ en cada punto. Si sólo disponemos del campo $\vec{E}(\vec{r})$ conviene utilizar las expresiones (1.62) y (1.104).

Las dos formas (1.106) pueden usarse para calcular la variación de energía potencial producida al cambiar el dieléctrico que ocupa una región $\delta\tau$ por otro de distinta permitividad, conservando la geometría del sistema. Son interesantes dos casos típicos:

a) Procesos que conservan la carga libre (sistemas aislados):

Aquí $\rho_l = \text{const.} \Rightarrow \vec{D} = \text{const.}$, así que conviene emplear la segunda expresión (1.106): $\eta_e = D^2/2\epsilon$.

Si el dieléctrico inicial en $\delta\tau$ tenía permitividad ϵ_1 y el que lo reemplaza tiene ϵ_2 resulta ($D_1 = D_2 = D$):

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{D^2/2 \epsilon_1}{D^2/2 \epsilon_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Por ejemplo, un aumento en la permitividad: $\epsilon_2 > \epsilon_1$, implica una disminución en la energía.

b) Procesos a potencial constante (empleando una fuente externa):

Ahora $V = \text{const.} \Rightarrow \vec{E} = \text{const.}$, así que conviene emplear la primera (1.106): $\eta_e = \epsilon E^2/2$.

Si comenzamos con ϵ_1 en $\delta\tau$ y lo reemplazamos por ϵ_2 vale:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\epsilon_1 E^2/2}{\epsilon_2 E^2/2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

de modo que un aumento en la permitividad implica un aumento en la energía.

En ambos casos la Variación en la energía es el trabajo necesario para reorientar los dipolos del medio, es decir que representa la energía de polarización.

CONDENSADOR CON DIELECTRICO

La capacidad de un condensador varía si se introduce un dieléctrico entre sus placas. Ya vimos en (1.94) que

$$C/C_0 = \epsilon/\epsilon_0 = K,$$

donde C es la capacidad con dieléctrico entre las placas y C_0 es la capacidad en vacío. Dentro de ciertos límites esto se comprueba experimentalmente, independientemente de la forma y del tamaño del condensador. Es una propiedad importante, pues permite variar los valores de capacidad disponibles para un conjunto dado de conductores.

Para un condensador aislado con una carga libre Q en su placa interior, podemos calcular la relación entre los potenciales de las placas empleando (1.80):

$$\frac{C}{C_0} = \frac{Q/\Delta V}{Q/\Delta V_0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V} = K, \text{ pues } Q_0 = Q.$$

Como vimos, la variación de la energía electrostática al introducir un dieléctrico depende de las condiciones en las cuales se realiza el proceso. Así, para un condensador aislado ($Q = \text{const.}$):

$$\frac{U}{U_0} = \frac{Q \Delta V/2}{Q \Delta V_0/2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \frac{1}{K} < 1 \quad \text{con una variación}$$

$$\Delta U = U - U_0 = U - KU = U(1-K) = -\chi U = \frac{-\chi}{1+\chi} U_0 < 0.$$

En cambio, para un condensador conectado a una batería ($\Delta V = \Delta V_0$):

$$\frac{U}{U_0} = \frac{C \Delta V/2}{C_0 \Delta V/2} = \frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K > 1 \quad \text{con una variación}$$

$$\Delta U = U - U_0 = KU_0 - U_0 = (K-1)U_0 = \chi U_0 > 0.$$

En todos los casos la diferencia ΔU representa la energía de polarización.

CONDICIONES DE CONTORNO EN LA SUPERFICIE QUE SEPARA DOS DIELECTRICOS

Siendo S la superficie que separa a dos medios dieléctricos de permitividades ϵ_1 y ϵ_2 , nos proponemos hallar las relaciones que vinculan a las componentes de los campos eléctrico y desplazamiento, medidas a ambos lados de la superficie en puntos muy próximos a S donde $\hat{n}$ es el versor normal que apunta hacia el medio (1).

a) Componentes normales (fig. 31)

Supongamos que S está cargada con una densidad superficial σ_t de cargas libres. Aplicando el teorema de Gauss al cilindro de la fig. 31, de altura δr despreciable, resulta

$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \oint \vec{D} \cdot \vec{n} = [\vec{D}_1 \cdot \hat{n} + \vec{D}_2 \cdot (-\hat{n})] \delta S = \sigma_t \delta S$$

$$\Rightarrow D_{1n} - D_{2n} = D_1 \cos \alpha_1 - D_2 \cos \alpha_2 = \sigma_t \quad (1.107)$$

En particular, si no hay cargas libres sobre la superficie de separación, o sea que $\sigma_t = 0$, resulta $D_{1n} = D_{2n}$ (es decir que la componente normal del desplazamiento eléctrico se conserva al pasar de un medio dieléctrico a otro).

Si los dos medios son isótropos y vale la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ en ambos, tenemos:

$$\epsilon_1 E_1 \cos \alpha_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \alpha_2 \quad (1.108)$$

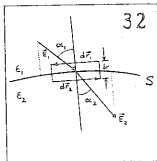
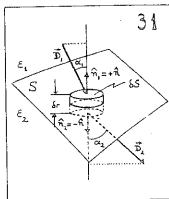
b) Componentes tangenciales (fig. 32)

Aplicando la condición electrostática (1.33) al rectángulo de altura δr despreciable de la fig. 32 resulta

$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} - \vec{E}_2 \cdot \vec{dl} = 0, \text{ pues}$$

$$d\vec{r}_1 = -d\vec{r}_2 = d\vec{l}. \text{ En esta expresión figura}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_t dl, \text{ donde } E_t \text{ es la componente del campo eléctrico tangente a la superficie de separación según el versor } d\vec{l}.$$



Luego, $E_{1t} = E_{2t}$, o sea $E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$,

es decir que al pasar de un medio al otro la componente tangencial del campo eléctrico $\vec{E}$ se conserva.

Si ambos medios son isótropos esta condición equivale a:

$$(D_1/\epsilon_1) \sin \alpha_1 = (D_2/\epsilon_2) \sin \alpha_2.$$

En ausencia de cargas libres sobre la superficie S podemos dividir miembro a miembro la penúltima ecuación y la (1.108), obteniendo la relación

$$\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2 \quad (1.109)$$

semejante a la ley de Snell de la refracción de rayos luminosos. Las relaciones obtenidas describen la refracción de las líneas del campo electrostático que se produce al pasar de un dieléctrico al otro.

La utilidad de estas expresiones reside en la posibilidad de extender la solución de un problema electrostático, conocida en un medio (1), a una región adyacente localizada en un medio (2) de diferente permitividad.

Un caso distinto es aquel en que la superficie S es conductora. Aquí debe ser $V_1 = V_2$ igual al potencial único del conductor, y los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ deben ser normales a S a ambos lados de la superficie, con valores dados como en (1.64) por

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = \sigma_1 \hat{n}; \quad \vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = \sigma_2 \hat{n} \quad (\alpha_1 = \alpha_2 = 0),$$

donde σ_1 y σ_2 son las densidades superficiales sobre las caras del conductor adyacentes a los dieléctricos (1) y (2), respectivamente.

CAMPO INTERIOR EN UN DIELECTRICO

Un dieléctrico no es continuo, sino discreto: sus átomos o moléculas están separados entre sí. Calcularemos el campo eléctrico efectivo que actúa sobre una molécula dada del dieléctrico.

Para simplificar supondremos que dicha molécula está ubicada en el centro de una cavidad esférica $\mathcal{C}$ tan pequeña que podemos aceptar que el campo eléctrico, la polarización $\vec{P}$, y el desplazamiento $\vec{D}$ son allí prácticamente constantes. Supondremos además que los

otros dipolos que puedan llegar a compartir la cavidad no contribuyen, en conjunto, al campo eléctrico total. Esta suposición resulta ser válida para dieléctricos sólidos con estructura cristalina cúbica, y también para gases y soluciones líquidas diluidas, pero no se cumple en sólidos con otras simetrías ni en líquidos fuertemente polares.

El campo eléctrico en el centro O de la cavidad es la suma de dos contribuciones:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_e + \vec{E}_s \quad (1.110)$$

donde $\vec{E}_e$ es el campo generado por fuentes exteriores a la cavidad $\mathcal{C}$ y $\vec{E}_s$ es el campo que crean los dipolos ubicados sobre la superficie $S(\mathcal{C})$. $\vec{E}_1$ se denomina campo interior.

Para calcularlo elegimos un sistema de coordenadas esféricas con origen en O y eje z paralelo al campo exterior $\vec{E}_e$ (fig. 33). Según (1.97) la densidad superficial de carga debida a los dipolos ubicados en la superficie $S(\mathcal{C})$ vale

$$\vec{E}_s(\theta) = \vec{P}_V \cdot \hat{n} = P_V \cos \theta$$

ya que, en equilibrio electrostático, la polarización $\vec{P}_V$ es paralela al campo $\vec{E}_e$ en un medio isotrópico, según (1.102).

Luego, el campo que genera esta distribución superficial $\vec{E}_s$ en el centro O vale

$$\vec{E}_s(\vec{r}=0) = k \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{E}_s(\vec{r}') \frac{(-\vec{r}')}{|\vec{r}'|^3} = E_s \hat{e}_z \quad (1.111)$$

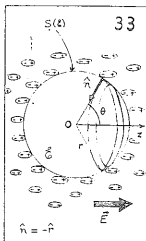
ya que $E_x = E_y = 0$, debido a la simetría de la distribución de carga. En las coordenadas elegidas tenemos (verificarlo):

$$dS' = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi : (-z)/|\vec{r}'|^3 = -\cos \theta / r^2, \text{ con } r = |\vec{r}'|$$

Luego

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi (-\cos \theta) (\cos \theta) d\varphi = P_V / 3\epsilon_0$$

donde $\vec{P}_V = P_V \hat{e}_z$, de modo que $\vec{E}_s = \vec{P}_V / 3\epsilon_0$, y resulta



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_e + \vec{P}_V / 3\epsilon_0$$

(1.112)

En la discusión anterior hemos supuesto que tanto el campo $\vec{E}_e$ como la polarización $\vec{P}_V$ son homogéneos, lo cual se justifica ampliamente, ya que la cavidad tiene dimensiones del mismo orden de magnitud que las distancias intermoleculares, las cuales son despreciables en comparación con la dimensión característica de variación de los campos. Por definición, éstos no varían sobre distancias típicas de un elemento de volumen y en un dieléctrico un elemento contiene un número enorme de moléculas.

POLARIZABILIDAD MOLECULAR: RELACION DE CLAUSIUS-MOSSOTTI

El campo interior $\vec{E}_1$ es el campo eléctrico promedio que actúa sobre una molécula polarizándola y alineando su momento dipolar $\vec{P}_m$ con $\vec{E}_1$, según lo requiere la condición de equilibrio (1.48).

Luego, podemos definir una constante α tal que

$$\vec{P}_m = \alpha \vec{E}_1$$

Esta constante, llamada polarizabilidad molecular, tiene un valor característico para cada material dieléctrico.

Si $n = \delta N / \delta \mathcal{V}$ es la densidad numérica de moléculas (número de éstas por unidad de volumen, expresada en m^{-3}), la polarización definida en (1.92) se puede expresar como

$$\vec{P}_V = \frac{\delta \vec{P}}{\delta \mathcal{V}} = \frac{\delta N \vec{P}_m}{\delta \mathcal{V}} = n \vec{P}_m = n \alpha \vec{E}_1$$

donde reemplazamos el campo interior por su expresión (1.112):

$$\vec{P}_V = n \alpha (\vec{E}_e + \vec{P}_V / 3\epsilon_0) \implies \vec{P}_V (1 - n\alpha / 3\epsilon_0) = n\alpha \vec{E}_e \quad (1.113)$$

Por otra parte, la (1.102) nos da otra expresión de la polarización en función del campo exterior:

$$\vec{P}_V = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_e = \epsilon_0 (K - 1) \vec{E}_e \quad (1.114)$$

Eliminando $\vec{P}_V$ y $\vec{E}_e$ entre las ecuaciones (1.113-114) resulta:

$$\frac{P_V}{E_e} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha / 3\epsilon_0} = \epsilon_0 (K - 1) \implies K = 1 + \frac{n\alpha}{\epsilon_0 - n\alpha / 3} > 1$$

De esta última relación podemos despejar $n\alpha$, obteniendo la ecuación de Clausius-Mossotti (verificarla):

$$\frac{n\alpha}{3} = \epsilon_0 \left(\frac{K-1}{K+2} \right) \quad (1.115)$$

que expresa la polarizabilidad (propiedad microscópica) en función del coeficiente dieléctrico K (macroscópico, inmediatamente medible).

En general, como dijimos, el momento dipolar $\vec{P}_m$ puede descomponerse en dos términos:

$$\vec{P}_m = \vec{P}_p + \vec{P}_i,$$

el primero es la componente permanente del momento, y el segundo es la componente inducida, que es nula en ausencia de campo exterior. Análogamente, podemos considerar dos componentes de la polarizabilidad molecular:

$$\alpha = \alpha_p + \alpha_i.$$

En equilibrio térmico se puede demostrar que la polarizabilidad permanente α_p es inversamente proporcional a la temperatura T . Ello se debe a que la orientación de los dipolos paralelamente al campo bajo la acción de la dupla $\vec{P}_m \times \vec{E}_1$ es un proceso que (p.ej. en los gases) tiene lugar entre las colisiones, es decir entre dos choques consecutivos, pero la frecuencia de estas colisiones aumenta al aumentar la temperatura del material. Al final de cada choque la molécula queda "desorientada", es decir que su momento $\vec{P}_m$ está orientado al azar con respecto a la dirección del campo. La siguiente colisión, para temperatura elevada, no le da tiempo a alinearse completamente con $\vec{E}_1$, y el valor medio de $\vec{P}_p = \alpha_p \vec{E}_1$ resulta ser muy pequeño. A bajas temperaturas el tiempo entre choques es muy grande y permite la alineación, con el consecuente aumento en α_p .

Si medimos el coeficiente dieléctrico de un material para distintos valores de la temperatura, podemos estimar el peso relativo de cada componente de la polarizabilidad: una fuerte dependencia de la temperatura significa un momento permanente dominante, es decir una molécula muy asimétrica (p.ej. H_2O , NH_3 , ClH); en cambio, una polarizabilidad constante indica una gran simetría en la molécula (Ar , CCl_4).

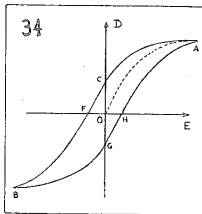
Como vemos, la relación (1.115) permite extraer conclusiones sobre la estructura geométrica de las moléculas del dieléctrico, con sólo medir el coeficiente $K(T)$.

ELECTRETOS Y FERROELECTRICOS

Un electreto es una sustancia que puede adquirir una polarización permanente. Un ejemplo típico es la cera de carnaúba (o de caranday): si la derretimos y encendemos un campo eléctrico intenso que permanece encendido mientras la enfriamos, al solidificarse su polarización subsiste después de apagar el campo eléctrico. Sucede que en el estado líquido las moléculas se han alineado con el campo eléctrico, y retienen la orientación de sus momentos dipolares en el estado sólido. Si se corta un electreto en bloques, cada uno retiene la polaridad del bloque original, como sucede en un imán ("magnet").

La ferroelectricidad es una propiedad que presentan materiales cristalinos como la sal de Rochelle, el titanato de bario, algunos fosfatos, etc. Bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$ el material se polariza de modo permanente, según se describe en la fig. 34. Si partimos del estado 0 (en el cual $E = D = 0$) y aumentamos E , observamos que P_v y D crecen en forma no lineal, rápidamente al principio hasta que P_v alcanza un valor máximo, llamado polarización de saturación. Al llegar a ese estado (A), todos los dipolos se han reorientado y son paralelos al campo eléctrico aplicado. Puede verse que para $E \gg E(A)$ el desplazamiento sólo puede crecer con $\Delta D / \Delta E = \epsilon_0$ (demostrarlo).

Si reducimos el campo E , el desplazamiento varía siguiendo la curva AC, de modo que cuando E ha descendido a 0, aún subsiste un valor de $D(C) \equiv D_r \neq 0$, llamado "campo remanente". Para eliminar este campo debemos aplicar un campo eléctrico $E(P)$ de sentido opuesto al inicial, denominado fuerza coercitiva. Si el campo opuesto sigue creciendo en magnitud podemos llegar al estado B, desde donde alcanzamos los estados G y H, sucesivamente (simétricos de C y F si en B llegamos a la saturación). A partir de C, hasta llegar nuevamente a la saturación en A, el sentido del campo eléctrico coincide con



el del campo inicial. La curva cerrada de la fig. 34 se denomina ciclo de histéresis.

Por encima de una cierta temperatura T_c (llamada de Curie), las propiedades ferroeléctricas desaparecen. Esta temperatura crítica es de 120°C para el titanato de bario, y de sólo 24°C para la sal de Rochelle.

PIEZOELECTRICIDAD Y PIROELECTRICIDAD

Quando se ejerce presión mecánica sobre un material piezoeléctrico se produce una separación de cargas, de modo que una parte de su superficie se carga positivamente, y otra negativamente. Esto ocurre en el cuarzo, en la sal de Rochelle, en la turmalina y en otras sustancias cristalinas. La densidad superficial de carga libre resulta ser proporcional a la presión ejercida normalmente al eje de simetría del cristal (si la compresión o expansión es paralela al eje, el efecto piezoeléctrico es despreciable).

El efecto piezoeléctrico inverso consiste en la compresión o expansión del cristal cuando se lo somete a un campo eléctrico. Un cristal de cuarzo que vibra (con una frecuencia natural que depende de sus dimensiones y de sus vínculos) genera una diferencia de potencial de frecuencia muy estable (éste es el principio de los "relojes de cuarzo"). El efecto inverso se usa para generar ultrasonidos: aplicando una tensión variable a las caras del cristal piezoeléctrico, si la frecuencia de dicha tensión coincide con la frecuencia natural de vibración del cristal, éste vibra intensamente y genera ondas ultrasónicas. Actúa así como un transductor: es un sistema que transforma energía eléctrica en mecánica.

Quando se calienta (o enfría) un material piezoeléctrico, también se distorsiona su superficie, por la expansión o contracción térmica, y aparecen cargas en ella. Este caso particular del efecto piezoeléctrico se llama pireoeléctrico.

Estos efectos difieren de la electrostricción, que es la distorsión que sufre todo dieléctrico (cristalino o no) sometido a un campo eléctrico: la dimensión paralela a $\vec{E}$ aumenta, por la separación de cargas que el campo induce. En cambio, en el efecto piezoeléctrico inverso dicha dimensión aumenta para un sentido de $\vec{E}$, y disminuye para $\vec{E}$ de sentido opuesto.

CAPÍTULO II

CORRIENTE ELÉCTRICA

CORRIENTE Y DENSIDAD DE CORRIENTE

Hasta aquí hemos considerado que todas las cargas (fuentes) están quietas y, como consecuencia de la ley de Coulomb, el campo eléctrico es conservativo (1.20). En lo que sigue estudiaremos el proceso de conducción eléctrica en cualquier medio, para luego analizar el movimiento de cargas en el interior de buenos conductores, con especial interés en los metales.

Las cargas móviles pueden ser electrones o iones de ambos signos que se mueven en el vacío, en una solución electrolítica, en un gas ionizado, etc. En los metales los electrones son los portadores de carga, que no pueden atravesar la superficie límite del conductor (decimos que los movimientos posibles de los portadores están restringidos por la geometría del conductor).

Las velocidades individuales de las partículas portadoras toman valores aleatorios (pero no completamente arbitrarios) en ausencia de un campo eléctrico, y su promedio $\vec{U}$ debe ser cero, o sea

$$\vec{U} = \langle \vec{v} \rangle = \sum_{iN} \vec{v}_i / \delta N \approx 0,$$

donde δN es el número de portadores libres de carga en un elemento de volumen δV de la región conductora. El número total de cargas allí puede ser mucho mayor, pero sólo consideraremos las cargas en movimiento, no ligadas a centros fijos (como lo están los iones positivos en una red cristalina).

En presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ las cargas comenzarán a moverse con velocidades $\vec{v}_i$ cuyo promedio $\vec{U}$ ya no será nulo y tenderá, en general, a alinearse con $\vec{E}$ (salvo en casos de fuerte anisotropía que comentaremos más adelante). La velocidad media $\vec{U}$, que varía con la posición $\vec{r}$ y con el tiempo t , es un campo vectorial definido para un punto $\vec{r}$ y un instante t dados:

$$\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t),$$

mientras que $\vec{v}_i$ es la velocidad de cada portador que en t pasa por el elemento δV centrado en $\vec{r}$. Las curvas tangentes a $\vec{U}$ en cada punto se denominan líneas de corriente (fig.1). Si trazamos todas las líneas de corriente que atraviesan una curva cerrada $\mathcal{C}$ queda formada una super-

ficie tubular que se llama tubo de corriente o tubo de flujo.

Si elegimos una porción δL de este tubo de sección δS normal a $\vec{u}$ de modo que contenga a todas las cargas que atravessarán δS en un intervalo de tiempo δt (fig.1), la longitud de la porción debe ser $\delta l = u \delta t$, y su volumen

$$\delta V = u \delta t \delta S.$$

Si la densidad numérica de portadores allí vale

$$n = \frac{\delta N}{\delta V}, \text{ entonces } \rho = q n,$$

siendo ρ la densidad de carga y q la carga de cada portador (supondremos al principio una sola especie de cargas en movimiento). Resulta

$$\delta q = \rho \delta V = \rho u \delta S \delta t$$

y la carga que atraviesa δS por unidad de tiempo vale

$$\delta I = \left(\frac{\delta q}{\delta t} \right)_{\delta S} = \rho u \delta S$$

La cantidad δI es la corriente (o intensidad de corriente) a través de δS . En general, para una sección cuya normal es $\hat{n}$, se ve fácilmente que $\delta I = \vec{u} \cdot \hat{n} \delta S$ (fig.2)

$$\Rightarrow \delta L = \vec{u} \cdot \hat{n} \delta t \Rightarrow$$

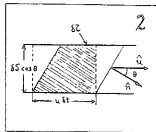
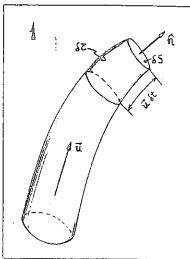
$$\boxed{\delta I = \rho \vec{u} \cdot \hat{n} \delta S}$$

(2.1)

Vemos en (2.1) que la corriente δI , que representa el movimiento neto de cargas a través de una superficie δS , es proporcional al área normal ($\vec{u} \cdot \hat{n} \delta S$) atravesada. Conviene definir una magnitud que no dependa de la superficie elegida, sino que describa las cargas en su movimiento colectivo. Esta magnitud es la densidad de corriente, que para una sola especie toma la forma

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{u}}$$

(2.2)



tal que $\delta I = \vec{J} \cdot \hat{n} \delta S$. Para una superficie extensa S (de área $A \gg \delta S$) atravesada por una corriente de densidad $\vec{J}$, tenemos una intensidad de corriente total

$$\boxed{I = \iint_S dI = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = \iint_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS} \quad (2.3)$$

que representa la cantidad de carga que atraviesa S por unidad de tiempo. En general, $\vec{J}$ variará con $\vec{r}$ y con t según lo hagan $\rho(\vec{r}, t)$ y $\vec{u}(\vec{r}, t)$, mientras que I dependerá de t y de la superficie S . Si J_n es constante sobre toda la S resulta $I = J_n A$.

Si hay varias especies de portadores, cada una con carga q_k , densidad numérica n_k , densidad de carga ρ_k y velocidad $\vec{u}_k$, cada especie contribuirá a la corriente total δI a través de δS con una intensidad

$$\delta I_k = q_k n_k \vec{u}_k \cdot \hat{n} \delta S = \rho_k \vec{u}_k \cdot \hat{n} \delta S = \vec{J}_k \cdot \hat{n} \delta S$$

$$\Rightarrow \delta I = \sum_k \delta I_k = \sum_k \vec{J}_k \cdot \hat{n} \delta S = \vec{J} \cdot \hat{n} \delta S,$$

de modo que la densidad de corriente total vale

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_k \vec{J}_k(\vec{r}, t) = \sum_k q_k n_k \vec{u}_k.$$

Ejercicio: verificar que, bajo la acción de un campo $\vec{E} = E \hat{x}$ en un medio isotrópico, las contribuciones $\vec{J}_k$ de dos especies de cargas opuestas (+q) y (-q) con $|\vec{u}_+| = |\vec{u}_-|$ igual densidad n , son idénticas y calcular la densidad total de corrientes.

Observemos que el signo de I está definido por el de las cargas y por el sentido en que éstas se mueven de modo que $I > 0$ para cargas positivas que se desplazan con $u > 0$, pero también lo es para cargas negativas con $u < 0$. Así, los electrones que se mueven según $\hat{x}$ generan una corriente $\vec{J} = -|j|\hat{x}$ de sentido opuesto. Por ello en los metales, donde los electrones son los portadores, se suele definir a I como la "corriente convencional" (opuesta a la "corriente de portadores, paralela a $\vec{u}$ ").

Unidades:

$$\text{En el S.I.: } [I] = \frac{[q]}{[t]} = \frac{C}{s} = A = \text{Amperio}$$

es la unidad fundamental de las magnitudes eléctricas (todas las demás son derivadas) y se define a partir de la ley de Ampère (Cap.III).

En el sistema gaussiano se emplea el

$$[I] = \text{u.e.m. (i)} = \frac{\text{abA}}{1 \text{ s}} = \frac{1 \text{ u.e.m. (q)}}{1 \text{ s}} = 10 \text{ A}$$

(Amperio absoluto ó unidad electromagnética de corriente).

La unidad electrostática (en desuso) se deriva del Franklin:

$$[I] = \text{u.e.s. (i)} = \frac{1 \text{ u.e.s. (q)}}{1 \text{ s}} = \frac{1 \text{ f}}{\text{s}} = 1 \text{ stA}$$

y como $10 \approx 3 \times 10^9 \text{ f} \Rightarrow 1 \text{ A} \approx 3 \times 10^9 \text{ stA}$.

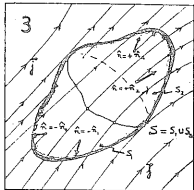
Luego

$$\frac{1 \text{ u.e.m. (i)}}{1 \text{ u.e.s. (i)}} = \frac{\text{abA}}{\text{stA}} \approx 3 \times 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = c \quad (2.4)$$

que es la velocidad de la luz en el vacío. Este es un resultado experimental que permite construir el sistema gaussiano de unidades. Queda por ver cómo se definen las unidades de corrientes usuales (A y abA) a partir de la ley de Ampère (Cap. III).

CONSERVACION DE LA CARGA: ECUACION DE CONTINUIDAD

Sea S una superficie cerrada fija (fig. 3) en una región donde hay cargas en movimiento. Partiendo de la imposibilidad de crear o destruir carga en un sistema aislado veremos qué relación hay entre la densidad de carga $\rho(\vec{r}, t)$ y la densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r}, t)$ en la misma posición $\vec{r}$ y en el mismo instante t . Para ello calculemos la variación que puede sufrir la carga Q encerrada por S en un intervalo breve de tiempo Δt :



$$Q = \int_V \rho \Rightarrow \left(\frac{\delta Q}{\delta t} \right)_S = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

donde $\partial \rho / \partial t$ representa la variación temporal de ρ en cada elemento fijo dV .

También podemos calcular la misma variación $(\delta Q / \delta t)_S$ teniendo en cuenta que Q sólo puede aumentar cuando

entra una corriente, o disminuir cuando una corriente sale, es decir

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta t} \right)_S = I_{\text{entrante}} - I_{\text{saliente}} = I_e - I_s \quad (2.6)$$

en la fig. 3 entra $I_e \neq 0$ a través de la porción S_1 , mientras que sale $I_s \neq 0$ a través de S_2 . Allí se ve que:

$$\text{en } S_1: dI_e = - \oint_{S_1} \vec{dS} \cdot \vec{J} \Rightarrow I_e = - \iint_{S_1} \vec{dS} \cdot \vec{J},$$

$$\text{en } S_2: dI_s = + \oint_{S_2} \vec{dS} \cdot \vec{J} \Rightarrow I_s = + \iint_{S_2} \vec{dS} \cdot \vec{J},$$

ya que elegimos siempre $\vec{dS} = \hat{n} dS$ con $\hat{n}$ saliente $\forall S$ cerrada.

Luego, (2.6) se puede reescribir como

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta t} \right)_S = - \iint_{S_1} \vec{dS} \cdot \vec{J} - \iint_{S_2} \vec{dS} \cdot \vec{J} = - \iint_S \vec{dS} \cdot \vec{J} \quad (2.7)$$

ya que $S_1 \cup S_2 = S$ y $\|S_1 \cap S_2\| = 0$. Aplicando el teorema de la divergencia a (2.7) e igualando los segundos miembros de (2.5) y (2.7) obtenemos

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V \nabla \cdot \vec{J} \quad \forall V$$

lo cual sólo es posible si

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0} \quad (2.8)$$

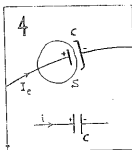
Esta consecuencia de la conservación de la carga es una ecuación local, válida para ρ y $\vec{J}$ medidas en los mismos $\vec{r}$ y t , y se denomina ecuación de continuidad de la carga eléctrica.

Un caso particular de (2.6) se utiliza con frecuencia: cuando a una superficie cerrada entra carga positiva (o sale negativa, lo que es equivalente), como sucede cuando a través de un cable se carga un condensador, tenemos

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta t} \right)_S = I_e$$

lo cual se esquematiza como en la fig. 4 y se expresa como

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = i \equiv I_{\text{entrante}}} \quad (2.9)$$



FUERZA ELECTROMOTRIZ

El movimiento neto de cargas implica una energía cinética que ha sido impartida a dichas cargas por alguna fuente externa. En particular en los conductores metálicos las cargas libres se mueven de manera de eliminar las diferencias de potencial (es decir que se mueven bajo la acción de las fuerzas $q\vec{E}$), transformando energía electrostática en energía cinética. En sus colisiones con la red cristalina del metal, las cargas pierden dicha energía cinética y la corriente decrecerá a menos que el sistema reciba energía eléctrica de un agente exterior. Hay diversas maneras de entregar esta energía eléctrica al conductor, o de "generar electricidad" (es decir, transformar energía de otra forma en energía eléctrica):

- Inducción electromagnética: el generador rotante inventado por Faraday (Cap. III) transforma energía mecánica de rotación en energía eléctrica. A menudo la primera se obtiene a partir de la energía térmica en una turbina, la que a su vez se obtiene a partir de la energía química (reacciones de combustión), nuclear (reactores), solar (colectores), hidráulica (gravitación), etc.
- Métodos voltaicos: las pilas y las baterías producen energía eléctrica a partir de energía química por diferencia entre potenciales de ionización o procesos equivalentes.
- Métodos electrostáticos: las máquinas de fricción (ya conocidas por Coulomb) utilizan energía mecánica, si bien casi no se usan en la actualidad, con excepción del generador de Van de Graaff, utilizado para producir potenciales elevados y acelerar partículas.
- Otros métodos: en ciertas soldaduras o en juntas (e.g. cobre con bismuto) la diferencia de temperaturas genera una corriente, convirtiendo energía térmica en eléctrica (efecto Peltier); en los dispositivos fotoeléctricos los fotones extraen electrones de un conductor o semiconductor y transforman energía radiante en eléctrica; en los materiales piezoeléctricos la compresión genera diferencias de potencial en ciertas direcciones, etc.

Un sistema como los mencionados genera un campo eléctrico no conservativo, ya que transforma en energía eléctrica la disponible bajo otras formas (mecánicas, químicas, nucleares, etc.). El campo total en una región donde hay conducción eléctrica será entonces

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{\mathcal{E}} \quad (2.10)$$

donde $\vec{E}$ es la componente conservativa (cuyas fuentes son las cargas quietas, de la red cristalina, p.ej.) que verifica (1.20)

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{o sea} \quad \vec{E} = -\nabla V,$$

mientras que $\vec{\mathcal{E}}$ es la componente no conservativa originada en algún proceso de transformación del tipo de los arriba mencionados (a-d).

Sean A y B dos puntos de esta región: el trabajo realizado por el campo sobre una carga de prueba δq que se mueve desde A hasta B es

$$\begin{aligned} \delta W_{AB} &= \delta q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = \delta q \int_A^B \vec{E}' \cdot d\vec{r} + \delta q \int_A^B \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = \\ &= \delta q \int_A^B (-\nabla V) \cdot d\vec{r} + \delta q \int_A^B \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = -\delta q \int_A^B dV + \delta q \int_A^B \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta W_{AB} = -\delta q \Delta V_{AB} + \delta q \mathcal{E}_{AB} = \delta q (\mathcal{E}_{AB} - \Delta V) \quad (2.11)$$

donde $\Delta V_{AB} = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$ es la diferencia de potencial entre A y B, mientras que

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_A^B \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} \quad (2.12)$$

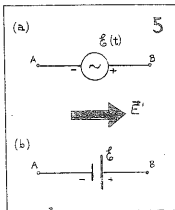
es el trabajo por unidad de carga realizado por las fuerzas no conservativas, que llamaremos fuerza electromotriz ó f.e.m. Esta f.e.m. depende del dispositivo (generador) encontrado a lo largo del camino elegido para ir de A a B, a diferencia de ΔV que no depende del camino recorrido entre A y B.

Si A coincide con B (camino cerrado), $\Delta V = 0$ y (2.11) se reduce a

$$\oint \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = \mathcal{E} = \oint \vec{\mathcal{E}}_j$$

donde $\mathcal{E}_j$ es la contribución de cada tramo del camino donde existen fuentes no conservativas (tramos activo; los tramos con $\mathcal{E}_j = 0$ se denominan pasivos).

El camino cerrado se llama circuito eléctrico. La representación convencional de una f.e.m. se ve en la fig. 5, donde (a) muestra una f.e.m. arbitraria, generalmente variable como $\mathcal{E}(t)$, y (b) una f.e.m. continua. Las polaridades indicadas corresponden al signo



definido por (2.12).

Es obvio que las unidades de $\vec{E}$ y ΔV coinciden (voltios).

POTENCIA: LEY DE JOULE

Cuando una carga δq se mueve con velocidad $\vec{u}$ en un campo exterior $\vec{E}$, la potencia entregada por el campo es:

$$\delta P = \frac{dW}{dt} = \frac{\delta \vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta q \vec{E} \cdot \vec{u} dt}{dt} = \delta q \vec{u} \cdot \vec{E}.$$

En particular, en una región donde la distribución de cargas es continua: $\delta q = \rho \delta \tau$ y la potencia entregada por $\vec{E}$ en $\delta \tau$ vale

$$\delta P = \delta \tau \rho \vec{u} \cdot \vec{E} = \delta \tau \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (2.13)$$

lo que permite definir una densidad de potencia

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{en Watt/m}^3).$$

La energía cedida por $\vec{E}$ se transforma en energía cinética de las cargas, que las transfieren a otras cargas durante las colisiones que tienen lugar en una región conductora de alta densidad n. En un conductor las transferencias más frecuentes se producen desde los electrones a los iones de la red cristalina cuya energía cinética de vibración es proporcional a una magnitud escalar que denominamos temperatura (+). Esto se puede expresar mediante la relación

$$\frac{1}{2} k T_1 = \frac{1}{2} m_1 \langle v_1^2 \rangle \quad (2.14)$$

donde m_1 es la masa de un ion, $\langle v_1^2 \rangle$ es el valor medio del cuadrado de la velocidad de los iones y T_1 es la temperatura iónica absoluta (en $^{\circ}K$ = grados Kelvin); k es la constante de Boltzmann, de valor

$$k = 1.38066 \times 10^{-23} \text{ J/}^{\circ}K.$$

Hay relaciones similares a (2.14) que expresan la energía de traslación de las moléculas de un gas, de los electrones en un conductor, etc.

El aumento de temperatura de la red da lugar a un flujo saliente de calor (radiación), de modo que la energía del campo eléctrico termina calentando al metal y éste emite casi toda la energía en forma de radiación. La potencia irradiada por un tramo AB del conductor será, según

(+) Principio de la equipartición de la energía.

(2.13):

$$P_{AB} = \int_A^B dP = \int_A^B d\tau \vec{j} \cdot \vec{E},$$

resultado conocido como ley de Joule, quien lo obtuvo en la forma (2.26) que veremos más adelante.

En un tubo de corriente cerrado la ley de Joule toma la forma

$$P = \oint d\tau \vec{j} \cdot \vec{E} + \oint d\tau \vec{j} \cdot \vec{E}' \quad (2.15)$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{E}'$ fueron definidos en (2.10). Si no hay acumulación de cargas, o sea que $\partial \rho / \partial t = 0$ en (2.8) como sucede para una corriente continua, podemos elegir un elemento del tubo de sección $dS = d\tau / dl$

$$\therefore \vec{j} d\tau = \vec{j} dS dl = (j | \hat{n} | dS) dl = (j dS)(dl \hat{n}) = I d\vec{l}. \quad (2.16)$$

Las expresiones $\vec{j} d\tau$ e $I d\vec{l}$ en (2.16) representan lo que denominamos un elemento de corriente, concepto útil para estudiar el movimiento de cargas en cables conductores delgados, donde $I = j dS = \text{const.}$ sobre todo el cable. La condición más general

$$I = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{j} = \text{const.} \quad \forall \text{ sección } S$$

es válida para todo tubo de corriente siempre que $\partial \vec{j} / \partial t = 0$, ya que no puede haber flujo a través de las paredes laterales del tubo (por definición, allí $d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0$). Por ello un tubo de corriente también se llama tubo de flujo pues el flujo de $\vec{j}$ se conserva a lo largo del mismo (+).

Entonces, para un cable de sección pequeña, empleando (2.16) podemos expresar (2.15) como

$$P = I \oint d\vec{l} \cdot \vec{E} + I \oint d\vec{l} \cdot \vec{E}' = 0 + I \mathcal{E}. \quad (2.17)$$

Esto significa que en un circuito cerrado la potencia total entregada por las f.e.m. es el producto de la corriente que circula, por la f.e.m. total $\mathcal{E} = \sum \mathcal{E}_i$. El signo de P viene dado por la relación (2.12), de modo que la f.e.m. entrega potencia al circuito cuando I sale del terminal positivo de $\mathcal{E}$ (fig. 5).

Si tenemos un conductor de sección grande por el que circula una

(+) Esta propiedad es muy útil para la descripción de campos magnéticos (Cap. III).

corriente I , podemos descomponer al conductor en un gran número de tubos de corriente delgados, cada uno con una corriente

$$\delta I_k \approx \sum_k \delta I_k = I.$$

Un elemento de volumen del tubo medirá

$$d\tau = \sum_k d\mathbf{r}_k dS_k$$

y (2.15) tomará la forma

$$P = \sum_k \oint d\mathbf{r}_k \iint dS_k \vec{r}_k \cdot [\vec{E}(\vec{r}_k) + \vec{E}'(\vec{r}_k)]$$

donde $d\mathbf{r}_k dS_k = d\mathbf{r}_k \delta I_k$ como en (2.16). Luego,

$$P = \sum_k \delta I_k \left(\oint d\mathbf{r}_k \cdot \vec{E} + \oint d\mathbf{r}_k \cdot \vec{E}' \right) = \sum_k \delta I_k \mathcal{E} = I \mathcal{E},$$

resultado idéntico a (2.17), donde hemos supuesto que $\oint d\mathbf{r}_k \cdot \vec{E}' = \mathcal{E} \forall k$, es decir que el contacto entre el cable y la f.e.m. es muy eficaz.

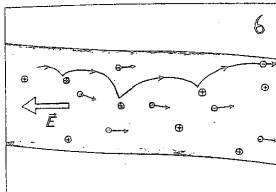
Unidades:

$$(2.17) \implies [P] = [I] \cdot [\mathcal{E}] \implies W = A \cdot V.$$

LEY DE OHM: MODELO ELEMENTAL

Experimentalmente se encuentra una sencilla relación (Ohm, 1826) entre la corriente que circula en un conductor y la diferencia de potencial entre sus extremos. Describiremos un modelo elemental que permite justificar esta importante propiedad de los conductores.

Consideraremos un tramo pequeño de un conductor isotrópico (fig. 6) en cuyo interior el campo eléctrico es $\vec{E}_T$. Supondremos que los portadores de carga son los electrones, pero el resultado será independiente del signo de los portadores, cuya carga llamaremos q . Un electrón es acelerado por el campo $\vec{E}_T$ y avanza describiendo una trayectoria curvilínea hasta acercarse a un ion de la red cristalina, que por ahora supondremos quieto. La fuerza de atracción coulombiana curvará la trayectoria tanto más cuanto más se acerque el electrón a un ion (unos pocos electrones avanzarán en el sentido de $\vec{E}$). Una desviación fuerte (p.e.j. de más de 90° con respecto a la dirección de incidencia) constituye lo que denominamos una colisión próxima, de la cual el electrón emerge con una velocidad $\vec{v}$ cuya di-



rección es prácticamente aleatoria. Como consecuencia de este tipo de procesos podemos caracterizar el movimiento de los portadores como sigue:

- el promedio de las velocidades después de colisiones próximas es aproximadamente nulo;
- el promedio de las componentes normales a

$\vec{E}$ de las velocidades es, en todo instante, aproximadamente nulo;

c) podemos definir los siguientes parámetros:

$\delta t_c =$ tiempo medio entre colisiones próximas;

$\nu_c =$ frecuencia de colisiones,

$\lambda_c =$ camino libre medio entre colisiones,

$\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle =$ velocidad media de los portadores (la misma de (2.1)),

Estas cantidades verifican la relación evidente:

$$\delta t_c = \frac{1}{\nu_c} = \frac{\lambda_c}{u}$$

donde $\vec{u} \parallel \vec{E}$ según (b).

Para estimar la velocidad media entre colisiones aplicamos la ley de Newton a estas cantidades medias con $\vec{u}(\text{inicial}) \approx 0$ y $\vec{F} = q \vec{E}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{m} \delta t_c = \frac{q \vec{E}}{m \nu_c}.$$

Luego,

$$\vec{j} = \rho \vec{u} = (qn) \frac{q \vec{E}}{m \nu_c} = \frac{q^2 n}{m \nu_c} \vec{E} \quad (2.18)$$

donde el coeficiente de $\vec{E}$ es independiente del signo de los portadores y es proporcional a la densidad n de éstos. Esta cantidad se llama conductividad eléctrica y se representa por σ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.19)$$

σ varía de un material a otro; su inversa se denomina resistividad y la

representaremos como η (*), o sea

$$\eta = \vec{v}^{-1} \Rightarrow \vec{E} = \eta \vec{J} \quad (2.20)$$

La expresión (2.19) es la forma local de la ley de Ohm, válida para un elemento de volumen (el mismo para $\vec{J}$ y $\vec{E}$) en un conductor isótropo. En general, para medios anisótropos se pueden calcular o medir las componentes locales de $\vec{J}$ y $\vec{E}$ para la conducción eléctrica. La relación entre ellas toma la forma generalizada:

$$\vec{J} = \vec{\sigma} \vec{E}, \text{ o sea } J_k = \sum_{\ell=1}^3 \sigma_{k\ell} E_\ell \quad (k=1,2,3)$$

donde $\vec{\sigma}$ es el tensor (o matriz) de conductividad. El caso isótropo corresponde a $\sigma_{k\ell} = \sigma \delta_{k\ell}$ ($\delta_{k\ell}$ es la delta de Kronecker). La ley de Ohm generalizada describe la conducción en sistemas tales como los plasmas (gases ionizados), sólidos anisótropos, etc.

A partir de la forma local es muy fácil obtener las fórmulas originales de Ohm, válidas para cables delgados. Sea el tramo AB de un cable por el que circula una corriente I . Empleando (2.20) resulta

$$\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{E}_T = \int_A^B d\vec{r} \cdot \eta \vec{J} = \int_A^B d\vec{r} \cdot \eta \frac{I}{S} \hat{s} = I \int_A^B \frac{d\vec{r}}{S} \cdot \eta = I R_{AB} \quad (2.21)$$

pues $d\vec{r} \cdot \vec{J} = dr I/S$, donde S es la sección normal del cable. El coeficiente R_{AB} de I en (2.21) es independiente de la corriente y se llama resistencia del tramo AB del conductor. Si η es constante en ese tramo tenemos

$$R_{AB} = \int_A^B \frac{d\vec{r}}{S} \cdot \eta = \eta \int_A^B \frac{d\vec{r}}{S} = \eta \frac{L}{S} \quad (2.22)$$

donde L es la longitud del tramo AB.

En (2.11) vimos que la energía por unidad de carga que el campo total $\vec{E}_T$ entrega entre A y B es

$$\left(\frac{\delta W}{\delta q} \right)_{AB} = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{E}_T = (\mathcal{E} - \Delta V)_{AB} \quad (2.23)$$

Igualando (2.21) y (2.23) obtenemos la expresión global de la ley de Ohm:

$$\Delta V = V(B) - V(A) = \mathcal{E}_{AB} - R_{AB} I \quad (2.24)$$

que se representa gráficamente como en la fig. 7-a donde hemos elegido

(*) La notación usual de $\vec{v}^{-1}$ es ρ , que nosotros empleamos para designar la densidad de carga.

una corriente I cuya densidad es paralela a $\vec{E}_T$, y vemos que la polaridad de la f.e.m. (que da el sentido de $\vec{E}_T$, fig. 5) determina esta elección particular del sentido de I . Para circuitos más complicados el sentido de la corriente se elige arbitrariamente, y con él se fijan las polaridades (+ y -) en las terminales de cada resistencia (*). El esquema de la fig. 7-b se utiliza para simbolizar elementos pasivos (f.e.m. = 0) en un circuito.

En la fig. 7-b hemos indicado la caída de tensión (o de voltagia) sobre R como

$$V_R = Ri \quad (2.25)$$

donde i es una corriente elegida arbitrariamente. Si a partir del cálculo o de la medición resulta $i < 0$, las polaridades serán opuestas a las indicadas, que sirven de referencia. Con esta convención (2.24) toma la forma

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ri = \mathcal{E} - V_R.$$

En particular, para un circuito cerrado tenemos:

$$A = B \Rightarrow \Delta V = \mathcal{E} - Ri = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = Ri}$$

y para un elemento pasivo ($\mathcal{E} = 0$):

$$\Delta V = - V_R = - Ri \text{ (caída)}.$$

Empleando (2.20) podemos expresar la potencia entregada por la fem (ver 2.15) como

$$P = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{J} \cdot \vec{E}_T = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{J} \cdot \eta \vec{J} = \int_A^B d\vec{r} \cdot \eta \vec{J}^2$$

que para un cable delgado ($j = I/S$) toma la forma

(*) Notemos que una polaridad es redundante, ya que fijada la de una terminal la otra debe tener la opuesta.

$$P = \int_A S \cdot \eta \, I^2 / S^2 = I^2 \int_A \frac{dr \, \eta}{S} = I^2 R_{AB}, \quad (2.20)$$

expresión descubierta experimentalmente por Joule. En un circuito cerrado vale (2.17), de manera que

$$P = I^2 R = I^2 R$$

donde $I^2 R$ expresa la potencia entregada por la f.e.m. E , la potencia disipada en la resistencia.

La relación (2.25) se suele expresar como

$$i = G V \quad \Rightarrow \quad V = R^{-1} i \quad (2.27)$$

donde G se llama conductancia. La relación (2.27) se utiliza con frecuencia para resolver circuitos.

Unidades: sólo se utilizan las del S.I.:

$$(2.25) \Rightarrow [R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm.}$$

$$(2.22) \Rightarrow [\eta] = \frac{[R][\omega]}{[L]} = \Omega \cdot m$$

$$(2.27) \Rightarrow [G] = [R]^{-1} = \Omega^{-1} = \text{Mho} \quad (!)$$

$$(2.10) \Rightarrow [\sigma] = [\eta]^{-1} = \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$$

Ejercicio: Verificar que la velocidad media u de los electrones en un conductor es muy pequeña. Para ello calcular u en un cable de cobre donde

$$j = 500 \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2} \quad \text{y} \quad n_e = 10^{23} \text{ electrones/cm}^3.$$

VALORES DE LA RESISTIVIDAD

En los buenos conductores (σ alta) la conductividad es independiente del campo eléctrico para un rango muy amplio de valores del campo. Esto no es válido para campos muy elevados. En los conductores ello se debe a que campos grandes implican corrientes grandes y, en consecuencia, una gran disipación de potencia según (2.26), y veremos que la resistencia varía fuertemente con la temperatura del material. En los dieléctricos (que son aisladores para valores bajos del campo eléctrico aplicado) hay una variación brusca de la conductividad cerca del campo de ruptura: σ cambia en muchos órdenes de magnitud ante una pequeña variación en el campo.

En los medios anisótropos es frecuente observar que la relación entre $\vec{j}$ y $\vec{E}$ es sólo aparentemente lineal, ya que las componentes del tensor de conductividad varían según la intensidad del campo eléctrico. En realidad todos los microcristales que forman un metal presentan una cierta anisotropía, de modo que la resistencia al flujo de electrones es mayor para ciertas direcciones del movimiento. Sin embargo, como un conductor real está formado por una multitud de microcristales orientados de manera aleatoria, la conductividad macroscópica resulta ser la misma para todas las direcciones.

El factor más importante que afecta la conductividad es la temperatura T . En la sección siguiente daremos una justificación cualitativa de esta propiedad esencial de los conductores. La dependencia de $\eta(T)$ puede expresarse mediante un desarrollo de Taylor a partir de la resistencia $\eta_0 \equiv \eta(T_0)$ medida para una temperatura T_0 de referencia:

$$\eta(T) = \eta_0 [1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots] \quad (2.28)$$

Esta forma de η , debida a Ohm, permite expresar la dependencia con la temperatura empleando los mismos coeficientes α, β , etc. para T expresada en la escala absoluta ($^{\circ}\text{K}$) o en la escala centígrada ($^{\circ}\text{C}$), ya que

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(^{\circ}\text{K}) - 273,2^{\circ}\text{K} \Rightarrow T - T_0 = t - t_0$$

$$\Rightarrow \eta(t) = \eta_0 [1 + \alpha(t - t_0) + \beta(t - t_0)^2 + \dots]$$

donde $t_0 = T_0 - 273,2^{\circ}\text{K}$ es la temperatura de referencia expresada en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$).

El valor de α (que depende de T_0 , como sucede en general con cualquier desarrollo de Taylor) se denomina coeficiente térmico de la resistividad. Para intervalos en T del orden de algunos cientos de grados el primer término de (2.28) es suficiente para estimar correctamente el valor de $\eta(T)$.

En la tabla siguiente damos algunos valores de η y de α para conductores, y de η para dieléctricos, medidos a 20°C . Observemos que los valores característicos de η (en $\Omega \cdot m$) difieren en casi 20 órdenes de magnitud entre un buen conductor y un buen aislante:

TABLA DE RESISTIVIDADES Y DE COEFICIENTES TERMICOS PARA
CONDUCTORES Y DIELECTRICOS TÍPICOS (*)

CONDUCTOR	Ag	Cu	Al	W/Zn	Pt/Ir	Pb	Hg	acero (Si)	Micromo	Constantán
η ($10^{-10}\Omega\cdot m$)	1,6	1,7	2,8	5,5	10	22	96	60	90-100	50
α ($10^{-3}^{\circ}C^{-1}$)	3,8	4,27	4,3	4,5/4,02	3,67/5,0	4,11	0,89	4,2	0,11	≈ 0
DIELECTRICOS	Mica	S	TiO ₂	Polietileno	Papel	Vidrio	Quarzo			
η ($10^{12}\Omega\cdot m$)	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	Las variaciones dependen de la humedad relativa.

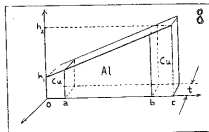
(*) Multiplicar los valores de la Tabla por las unidades indicadas. P.ej.:

$\eta(\text{Cu}) = 1.7 \times 10^{-10} \Omega \cdot m$.

Ejercicio: Calcular la resistencia total del conductor de la fig. 8, formado por 3 tramos metálicos soldados cuyas dimensiones se indican:

(espesor) $t = 0.1 \text{ mm}$;
 $a = 1 \text{ cm}$; $b = 49.5 \text{ cm}$; $c = 50 \text{ cm}$;
 $h_1 = 5 \text{ cm}$; $h_2 = 15 \text{ cm}$.

Respuesta: $R = 1.51 \text{ m}\Omega$.



VARIACION TERMICA DE LA RESISTIVIDAD

Dijimos que en un rango amplio de temperaturas es suficiente con retener sólo el término de primer orden en el desarrollo (2.28), o sea que

$$\eta(T) \approx \eta(T_0) + \alpha \eta(T_0) \cdot (T - T_0) \quad (2.29)$$

Para temperaturas muy bajas (de unos pocos $^\circ\text{K}$, o sea cerca del cero absoluto) la resistividad sufre una disminución en varios órdenes de magnitud, fenómeno conocido como superconductividad. Este complejo fenómeno se debe a cambios en la estructura electrónica y no puede analizarse desde el punto de vista clásico. Existe una temperatura crítica T_c , llamada de transición, por debajo de la cual η desciende según un factor 10^{-11} a 10^{-10} ; típicamente T_c varía entre $\sim 0.4 \text{ } ^\circ\text{K}$ (Ti, Ru) y $23 \text{ } ^\circ\text{K}$ (Nb₃Ge).

Hasta el descubrimiento de la superconductividad se supuso que la resistividad debía ser estrictamente proporcional a la temperatura, o sea

$$\eta = a \cdot T, \quad (2.30)$$

lo cual es suficiente para justificar la expresión (2.29) y tiene otras consecuencias importantes.

Al discutir el modelo elemental de la conducción en un metal llegamos a la expresión (2.18) que implica

$$\eta = \frac{m \cdot v_d}{q^2 n}$$

donde n varía muy poco con T , mientras que la frecuencia de colisiones ν depende fuertemente de la temperatura. En efecto, una nube de electrones que avanza con velocidad media $\bar{v}$ atraviesa en un intervalo Δt muy pequeño una sección S donde los "blancos" (los iones con los que choca-

rán los electrones) se mueven en torno de sus posiciones de equilibrio y presentan un "área de blancos" (sección eficaz de colisiones) que será

$$A_0 = N_1 \pi r_{ef}^2 \sim S$$

donde N_1 = número aparente de iones (los que ha de cruzar la nube),
 r_{ef} = radio efectivo (rango) de desplazamiento de un ion.
 Es fácil ver que $\mu_e \approx A_0/S \sim r_{ef}^2$. Pero este radio r_{ef} está relacionado con la velocidad media de las vibraciones: dentro de cierto rango de temperaturas será $r_{ef} \sim \sqrt{v_1}$, siendo $\sqrt{v_1} \approx \sqrt{\langle v_1^2 \rangle}$ la velocidad cuadrática media del ion en su movimiento vibratorio. Luego,

$$(2.14) \Rightarrow r_{ef}^2 \sim \langle v_1^2 \rangle = \frac{K}{m_1} T$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta \sim \mu_e \sim r_{ef}^2 \sim T},$$

que es lo que expresa la relación (2.30).

A partir de esta relación podemos reconstruir las expresiones de Ohm p.ej. escribiendo la (2.29) para $T_0 = 273,2^\circ K = 0^\circ C$ y $\eta_0 = \eta(T_0)$:

$$\eta(t) = \eta_0 + \alpha \eta_0 t = \eta_0 (1 + \alpha t) \quad (2.31)$$

pero (2.30) $\Rightarrow \eta(t) = aT = aT_0 + a(T - T_0) = aT_0 + \alpha t$. Igualando ambas expresiones obtenemos

$$\eta_0 + \alpha \eta_0 t = aT_0 + \alpha t \quad \forall t \Rightarrow \boxed{\alpha T_0 = 1} \quad (2.32)$$

La relación (2.31) nos da un método para determinar α , ya que para un buen conductor con $S = \text{const.}$ y $\eta = \text{const.}$:

$$(2.31) \Rightarrow R(t) = R_0(1 + \alpha t) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{R(t) - R_0}{R_0 t}}$$

(esta expresión vale $\forall T_0$, siempre que $t = T - T_0$ no sea muy grande).

Pero además (2.32) nos da una forma indirecta de determinar el α cero absoluto, ya que debería ser

$$T_0 = \frac{1}{\alpha_1} \approx 273,2^\circ K \Rightarrow \alpha_1 \approx 3,66 \times 10^{-6} (K^{-1})$$

En la tabla de η vemos que :

a) los metales puros tienen coeficientes térmicos muy próximos al ideal α_1 ; en particular el del platino difiere en un 0,2%, lo que permite utilizarlo en termómetros;

b) las aleaciones tienen un α muy distinto del teórico; ello se debe a la existencia de imperfecciones, impurezas y dislocaciones que hacen que η sea mucho mayor que la de los metales puros, al mismo tiempo que superan el efecto de las vibraciones sobre μ_e .

Las aleaciones con $\alpha \ll \alpha_1$; se emplean para construir patrones de resistencia, cuyos valores varían muy poco con T dentro de un rango amplio de temperaturas.

FUENTES DE TENSION CONTINUA

En lo que sigue nos referiremos exclusivamente a circuitos de corriente continua, es decir que

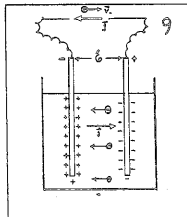
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial t} = 0.$$

Para suministrar una corriente continua a un circuito se utilizan generalmente dos clases de dispositivos:

a) Generadores (e.g. alternos) rectificados: la tensión variable $\mathcal{E}(t)$ entre los terminales de la f.e.m. (fig.5-a) se conecta a un dispositivo rectificador - que puede ser un sistema mecánico o un circuito electrónico - a cuya salida se obtiene una tensión $\mathcal{E}'(t) = \mathcal{E}_0 + \delta \mathcal{E}(t)$ tal que $\mathcal{E}_0 = \text{const.}$ y $|\delta \mathcal{E}(t)| \ll |\mathcal{E}_0|$.

b) Pilas voltaicas: una pila o batería consiste en un par de electrodos sumergidos en un electrolito, elegidos de modo tal que entre sus electrodos se genere una tensión constante $\mathcal{E}$ (fig.9).

Las fuerzas que originan dicha tensión son esencialmente no eléctricas: la fuente de energía es el denominado calor de reacción químico (energía interna de la pila, que se libera durante las reacciones que tienen lugar en los electrodos y en la solución electrolítica). Hay diversos mo-



delos que explican este proceso de transformación de energía química en eléctrica: modelo de Nernst (de la presión de solución), modelo termodinámico (de la energía libre), etc. No nos ocuparemos de ellos, sino que consideramos a la pila real como una caja cerrada de dos terminales cuya diferencia de potencial viene dada experimentalmente por (fig.10)

$$\Delta V = \mathcal{E} - ri, \quad (2.33)$$

donde $\mathcal{E}$ es la f.e.m. de la pila, igual a la tensión ΔV a circuito abierto, es decir cuando no circula corriente ($i = 0$). El término ri expresa el hecho de que la tensión varía linealmente con la corriente que se extrae de la pila, lo que es válido con muy buena aproximación dentro de un cierto rango de valores de i . El

valor de r se denomina resistencia interna de la pila.

Los diversos modelos que explican la relación (2.33) conducen a una generalización de la ley de Ohm para el interior de la pila, en la forma

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{N}) \quad (2.34)$$

donde $\vec{J}$ es la densidad de corriente en la pila, $\vec{E}$ es el campo eléctrico y $\vec{N}$ representa

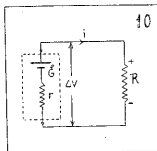
la resultante de las fuerzas no eléctricas por unidad de carga que mueven los iones en la solución. La (2.34) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \vec{E} + \vec{N} &= \eta \vec{J} \implies -\vec{E} = \vec{N} - \eta \vec{J} \\ \implies \Delta V &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b d\vec{r} \cdot \vec{N} - \int_a^b d\vec{r} \cdot \eta \vec{J} = \mathcal{E} - ri, \end{aligned}$$

donde el segundo término se obtiene como un (2.21).

Las pilas químicas pueden clasificarse en:

- i) Primarias: la acción química es irreversible y no se pueden invertir los procesos que generan la f.e.m. haciendo pasar una corriente de sentido inverso a la generada por la pila. Esto implica la necesidad de renovar los materiales. La fuente primaria más utilizada es la pila seca, cuya f.e.m. $\mathcal{E} = 1.53$ V. La pila de Weston tiene una f.e.m. que varía con la temperatura según (2.29) con $\mathcal{E}_0 = (1.0191 \pm 0.0006)$ V y $\alpha \approx -4 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. La constancia de su f.e.m. con el tiempo ($|\Delta \mathcal{E}| < 50$



mV/año), la reproducibilidad en su fabricación, su bajo coeficiente térmico y su escasa resistencia interna la hacen adecuada como se-

- ii) Secundarias: la acción química es reversible hasta tal punto que estas pilas (comúnmente llamadas baterías o acumuladores) se cargan haciendo pasar por ellas una corriente en sentido opuesto al de la f.e.m. que generan. Estrictamente no existen procesos de reconversión de energía eléctrica en química sin pérdidas pues, al menos, el efecto Joule estará presente con una pérdida de potencia $\Delta P \geq i^2 r$. Pero en las pilas secundarias o recargables los procesos de transferencia de potencia lineales en i son dominantes y el desgaste de materiales (por precipitación en solución, por desprendimiento de gas, etc.) es muy pequeño. La más común de estas pilas es la batería de plomo que se construye con varios electrodos con forma de placas en paralelo, con el objeto de disminuir la resistencia interna y aumentar la carga acumulable. La f.e.m. de cada juego de electrodos es de 2,05V y la capacidad de carga Q se suele medir en Amperios-hora:

$$[Q] = 1 \text{ A.h} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3600 \text{ C}.$$

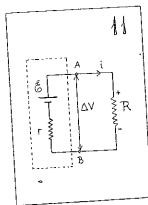
Los valores típicos de Q varían entre 20 y 2000 A.h.

POTENCIA: CONDICION DE MAXIMA TRANSFERENCIA

Consideremos un circuito simple con una fuente real de tensión de f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r , conectada a una resistencia exterior R (fig.11). La totalidad de los elementos pasivos (en este caso resistencias) que se conectan a una fuente se denominan la carga del circuito, que no debe confundirse con la carga eléctrica que circula por el mismo.

La diferencia de potencial (2.33) entre A y B a la salida de la fuente debe ser igual a la caída de tensión sobre R , dada por (2.25), o sea

$$\Delta V = \mathcal{E} - ri = Ri \implies i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$



Luego, la potencia total (disipada en la fuente y en la carga) es la potencia entregada por la f.e.m. según (2.17):

$$P = i^2 r + i^2 R = i^2 (r + R) = i_0^2 \frac{R^2}{(R + r)^2}$$

de la cual el segundo término representa la potencia efectivamente disipada por la carga

$$P_R = Ri^2 = \frac{R^2 i_0^2}{(R + r)^2}$$

A menudo interesa diseñar un circuito de manera que, para una fuente de resistencia interna r conocida, la potencia transferida a la carga sea máxima. Considerando a P_R como función de R podemos hallar el valor $\tilde{R}$ de la carga que hace máxima la función:

$$f(R) = \frac{P_R}{R^2} = \frac{R}{(R + r)^2}$$

el valor de $\tilde{R}$ se obtiene de

$$\frac{df}{dR} = \frac{1}{(R + r)^2} - \frac{2R}{(R + r)^3} = \frac{R + r - 2R}{(R + r)^3} = \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R = r}$$

(2.35)

que es la condición de máxima transferencia de potencia. Si un instrumento de resistencia R emplea la corriente para desviar una aguja inductora, su máxima sensibilidad se obtendrá cuando el circuito exterior activo (representado por la caja a trazos en la fig.11) tenga una resistencia equivalente $r = R$. Veremos más adelante que todo circuito activo puede reemplazarse por una f.e.m. equivalente en serie con una resistencia (teorema de Thévenin).

LEYES DE KIRCHHOFF

La ley de Ohm en la forma (2.24) nos permite calcular cualquiera de las cantidades que intervienen en un circuito con una sola corriente en función de las demás. En circuitos más complicados que contienen varias f.e.m., es preciso realizar un análisis sistemático de las relaciones generales entre corrientes y tensiones. Kirchhoff (1845) enunció dos leyes muy sencillas que permiten resolver el problema en todos los casos posibles.

Definiremos:

a) Rama: todo conjunto de elementos conectados en serie (extremo con extremo) de modo que la corriente a través de todos ellos es la misma.

b) Nudo: la intersección de tres o más ramas.

c) Malla: un recorrido cerrado sobre ramas de un circuito.

En la fig.12 hay cuatro nudos (A, B, C, D), 6 ramas (AB, AC, AD, BC, BD, CD) y numerosas mallas posibles (p.ej.: ABDA, ABCA, ABDC, ACDA, BCDE, etc.).

Es conveniente elegir diversas referencias en cada circuito:

i) Las polaridades de los elementos, que vienen definidas por los sentidos de las corrientes de ramas, según vimos en las fig.5 y 7.

ii) El sentido de recorrido en cada malla.

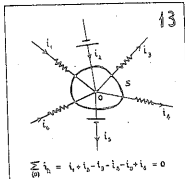
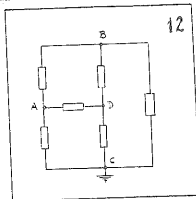
iii) El nudo de referencia, donde tomamos $V = 0$ (lo indicamos conectándolo a tierra, como C en la fig.12). Sea un nudo cualquiera, como el de la fig.13. La carga encerrada por la superficie S no puede variar ya que en 0 no hay elementos que la puedan suministrar ni almacenar. Luego, la corriente total que entra en 0 debe ser igual a la corriente total que sale de 0, como consecuencia de la conservación de la carga dentro de S . Asignando un mismo signo a las i_k que entran y el opuesto a las que salen de 0, tenemos

$$\sum_{(i)} i_k = \sum_{(s)} i_k = 0 \quad (2.36)$$

que expresa la ley de Kirchhoff de las corrientes. Puede escribirse como la

igualdad entre la corriente total que entra y la corriente total que sale de 0:

$$\sum_{(i)} i_g = \sum_{(s)} i_g$$



Sea una malla cualquiera, como la de la fig.14. Según (2.24) la diferencia de potencial entre los extremos de la rama j -ésima es

$$\Delta V_j = \mathcal{E}_j - R_j i_j \quad (2.37)$$

donde $\Delta V_j = V_j - V_{j-1} \equiv V(A_j) - V(A_{j-1})$, habiendo elegido los subíndices según el sentido de recorrido de la malla indicado en la figura. $\mathcal{E}_j$ y R_j son la f.e.m. y la resistencia totales en la rama j , cuya corriente es i_j (notemos aquí que los sentidos de las i_j coinciden con el sentido de recorrido elegido).

Si sumamos miembro a miembro las (2.37) obtenemos

$$\sum_{j=1}^{K_j} \Delta V_j = \sum_{j=1}^{K_j} \mathcal{E}_j - \sum_{j=1}^{K_j} R_j i_j$$

(K_j es el número de ramas de la malla elegida), cuyo primer miembro es nulo pues $A_K = A_0$ ($k \equiv K_j$).

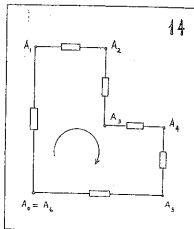
$$\therefore \oint dV = V_1 - V_0 + V_2 - V_1 + \dots + V_K - V_{K-1} = V_K - V_0 = 0.$$

$$\text{Luego } \sum_j \mathcal{E}_j = \sum_j R_j i_j \equiv \sum_j V_{R_j} \quad (2.38)$$

que expresa la ley de Kirchhoff de las tensiones que se encuentran al recorrer una malla. El primer miembro representa la suma de las f.e.m. con sus signos definidos en (2.37), donde $V_j > V_{j-1}$ si $\mathcal{E}_j > 0$ (con $R_j = 0$), lo que equivale a tomar $\mathcal{E}_j$ con signo + si tiende a generar corriente en el sentido de recorrido (ver también la fig. 7). Análogamente, las corrientes i_j irán precedidas por el signo - si su sentido no coincide con el elegido para recorrer la rama. El segundo miembro de (2.38) es la suma de las caídas de tensión, de modo que la ley expresa la igualdad entre la suma de las f.e.m. y la suma de las caídas al recorrer un circuito cerrado.

FUENTES DE CORRIENTE

Algunos dispositivos electrónicos como el transistor, varias válvu-



las, células fotoeléctricas, etc. pueden describirse aproximadamente como elementos activos que, conectados a un circuito, entregan una corriente $i(t)$ que es independiente del resto del circuito y, por lo tanto, de la tensión que pueda existir entre sus terminales. Un elemento de estas características constituye una fente ideal de corriente y se representa como en la fig.15-a, donde $\mathcal{J} = i(t)$ toma un valor fijo en cada instante, que no depende de V_{AB} . En particular $\mathcal{J} = 0$ equivale a un circuito abierto (así como $V_{AB} = 0$ equivale a un corto circuito).

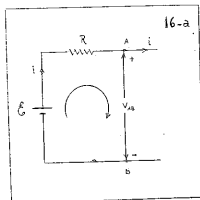
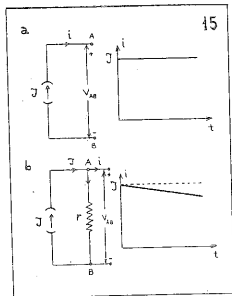
Las fuentes reales de corriente pueden aproximarse como se indica en la fig.15-b, conectando una resistencia en paralelo con una fuente ideal (los terminales de ambos elementos coinciden). Aplicando (2.36) en A tenemos

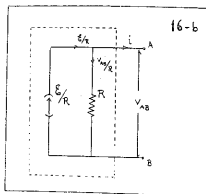
$$\sum_k i_k = \mathcal{J} - \frac{V_{AB}}{r} - i = 0 \Rightarrow i = \mathcal{J} - \frac{V_{AB}}{r} \quad (2.39)$$

que se representa como en la fig.15-b si se indica $-1/r$ la pendiente de la curva $i = i(V)$.

Toda fuente real de tensión de dos terminales puede representarse como una fuente equivalente de corriente, y viceversa. Para verlo analicemos el circuito de la fig.16-a entre los puntos A y B. Aplicando (2.37) a la malla indicada es

$$\mathcal{E} = Ri + V_{AB}$$





$$\Rightarrow i = \frac{E}{R} - \frac{V_{AB}}{R}$$

que es la corriente de salida al circuito exterior (ubicado a la derecha de AB) de una fuente de corriente real como la descripta en (2.39). Ambas serán equivalentes con sólo tomar

$$J = E/R,$$

pero esta equivalencia vale solamente para el circuito exterior, desde el cual podemos considerar la porción a la izquierda de AB como una

caja cerrada (fig. 16-b).

Además de estas fuentes de dos terminales existen dispositivos más complicados como las fuentes controladas, que se estudian en la Electrónica y la teoría de Control.

CONEXIONES SIMPLES DE RESISTENCIAS

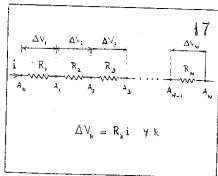
a) Serie (fig.17): Supongamos N resistencias en una misma rama, entre $N+1$ nudos y sea i la única corriente que circula. Luego (2.25) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V(A_{k-1}) - V(A_k) &= R_k i \quad (\forall k = 1, 2, \dots, N) \Rightarrow \\ V(A_0) - V(A_N) &= [V(A_0) - V(A_1)] + [V(A_1) - V(A_2)] + \dots + [V(A_{N-1}) - V(A_N)] \\ &= \sum_{k=1}^N [V(A_{k-1}) - V(A_k)] = \sum_{k=1}^N R_k i = i \sum_{k=1}^N R_k \end{aligned}$$

y definimos una resistencia equivalente R_Z entre A_0 y A_N como

$$R_Z = \frac{V(A_0) - V(A_N)}{i} = \sum_{k=1}^N R_k$$

(2.40)



Expresando la (2.40) en función de las respectivas conductancias

$$G_k \text{ tenemos } G_Z^{-1} = \sum_{k=1}^N G_k^{-1}$$

(2.41)

que es la expresión dual de la capacidad equivalente en serie (1.89).

b) Paralelo (fig.18): Supongamos N resistencias conectadas entre sólo dos terminales A y B con

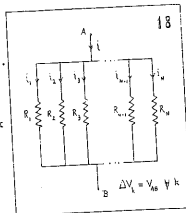
$$V_{AB} = V_A - V_B = R_k i_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, N.$$

Luego, (2.30) en el nudo A $\Rightarrow$

$$i = \sum_{k=1}^N i_k = \sum_{k=1}^N V/R_k = \sum_{k=1}^N C_k V = V \sum_{k=1}^N G_k$$

y definimos una conductancia equivalente G_H entre A y B como

$$G_H = \frac{i}{V_{AB}} = \sum_{k=1}^N G_k \quad (2.42)$$



que es la expresión dual de la capacidad equivalente en paralelo (1.90). En función de las resistencias respectivas (2.42) equivale a

$$R_H^{-1} = \sum_{k=1}^N R_k^{-1} \quad (2.43)$$

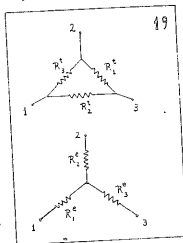
o, para $N=2$:

$$R_H = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \triangleq R_{1,2}$$

c) Equivalencia estrella-triángulo

(fig.19):

La conexión superior es un triángulo y la inferior se llama estrella. Por ser los circuitos duales de las respectivas conexiones entre condensadores (fig.27 del Cap.I) valen las mismas relaciones (1.91) con la trans-



formación

$$C_k^{e,t} \rightarrow G_k^{e,t}$$

Teniendo en cuenta su utilidad expresaremos dichas relaciones en función de las resistencias:

$$\left. \begin{aligned} R_k^e &= \frac{D^e}{R_k^e} \\ R_k^e &= \frac{\Pi^t}{R_k^e \sum^t} \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, 3) \quad (2.44)$$

$$\text{siendo } D^e = R_1^e R_2^e + R_2^e R_3^e + R_3^e R_1^e,$$

$$\sum^t = R_1^t + R_2^t + R_3^t; \quad \Pi^t = R_1^t R_2^t R_3^t.$$

Ejercicio: a) demostrar las (2.44).

b) expresar las (1.91) de manera análoga a (2.44).

RESOLUCION DE CIRCUITOS: METODO GENERAL

Generalmente-ya sea para su diseño u optimización, para calcular el consumo de potencia en un elemento, etc.- el problema que se nos presenta consiste en expresar una o varias cantidades entre las que describen físicamente a un circuito (resistencias, corrientes, tensiones), en función de las restantes. Para ello disponemos de N ecuaciones (2.36) y de L ecuaciones (2.38), siendo N el número de nudos y L el de mallas en el circuito dado. Sin embargo, como vimos en la fig.12, el número L puede ser muy grande aun para circuitos sencillos sin que para resolver un circuito resulte necesario escribir todas las posibles ecuaciones (2.38). Otro tanto sucede para los nudos.

Las ecuaciones (2.36) y (2.38) son lineales en las tensiones y en las corrientes, y comúnmente el problema consiste en expresar las corrientes en función de las tensiones o viceversa. Parece evidente que el número de ecuaciones a resolver deberá ser mayor o igual al número de incógnitas del problema. Sin embargo puede ocurrir que un número pequeño de ecuaciones resulte suficiente para un problema específico. Un objetivo natural es elegir las ecuaciones y las variables que permitan resolver

el problema con el menor esfuerzo numérico posible.

Consideremos un circuito con N nudos y M ramas. Tenemos N ecuaciones (2.36), que son las más sencillas (pues los coeficientes de las corrientes i_k valen 0 ó ± 1), de las cuales sólo $(N-1)$ son independientes. Para verlo basta con escribir las ecuaciones (2.36) para $(N-1)$ nudos. Todas las corrientes i_j que llegan al nudo restante se pueden despejar de dichas ecuaciones, de modo que la suma algebraica $\sum i_j$ correspondiente al nudo N -ésimo se anula automáticamente y, por lo tanto, es consecuencia de las anteriores. Luego, el número mínimo de ecuaciones del tipo (2.38) que conviene elegir será

$$K = N - (N-1) = N - N + 1. \quad (2.45)$$

Si lo que interesa es calcular las corrientes de ramas se pueden usar las $(N-1)$ ecuaciones del tipo (2.36) para expresar las corrientes

$$\{i_j\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{N-1}\}$$

en función de las restantes $\{i_N, \dots, i_M\}$, y luego emplear K ecuaciones (2.38) en la forma

$$\sum_{k=N}^M R_k i_k = \sum_{n=A(B)} \mathcal{E}_j = \mathcal{E}_i \quad (i = N, N+1, \dots, M)$$

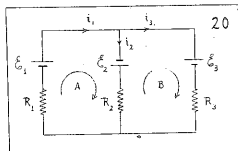
para K mallas distintas, elegidas de manera que cada rama (k) participe por lo menos en una malla. Quedan así formadas M ecuaciones lineales independientes cuyas incógnitas son las M corrientes de ramas. Este sistema lineal se puede resolver por cualquier método algebraico.

Como ejemplo consideremos el circuito sencillo de la fig.20, con sólo 2 nudos y 3 ramas. La única ecuación (2.36), pues $N-1 = 1$, será:

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\Rightarrow i_1 = i_2 + i_3$$

y necesitamos $K = 3 - 2 + 1 = 2$ ecuaciones del tipo (2.38) en las incógnitas i_2 e i_3 . Las mallas más sencillas son las A y



b, con los sentidos de recorrido indicados en la fig. 20. Las (2.38) toman la forma

$$\begin{aligned}(R_1 + R_2) i_2 + R_1 i_3 &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ -R_2 i_2 + R_3 i_3 &= -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2,\end{aligned}$$

que se resuelven fácilmente:

$$i_2 = [R_1(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + R_3(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)] / D;$$

$$i_3 = [R_2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - R_1(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)] / D$$

$$\Rightarrow i_1 = i_2 + i_3 = [R_2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + R_3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)] / D$$

$$\text{con } D = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1.$$

Ejercicio: con $R_1 = R_3 = 1 \Omega$; $R_2 = 2 \Omega$; $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$; $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ V}$ calcular las corrientes i_1 , i_2 , i_3 ; las caídas de tensión sobre las 3 resistencias y la potencia disipada por cada una de ellas.

CONEXIONES SIMPLES ENTRE FUENTES

Ya hemos visto cómo transformar una fuente de tensión $\mathcal{E}$ en una de corriente $\mathcal{J}$, y viceversa, con sólo tomar $\mathcal{J} = \mathcal{E}/R$. Además es posible desplazar las fuentes dentro de un circuito para simplificarlo y así evitar cálculos redundantes o innecesarios.

En la fig. 21-a vemos dos fuentes de tensión ideales $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ conectadas en serie, equivalentes a una sola fuente ideal

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

En la fig. 21-b se muestra la única conexión práctica de fuentes de tensión en paralelo, cuando

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2.$$

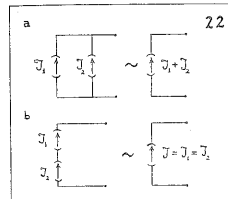
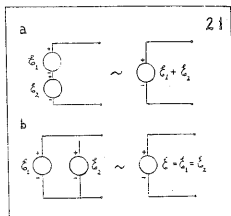
Si conectamos en paralelo varios generadores cuyas tensiones no son idénticas (en sentido, en forma $\mathcal{E}(t)$ y en amplitud $\mathcal{E}_0 = \max |\mathcal{E}(t)|$) tendremos corrientes grandes e inútiles entre las fuentes, con daños probables para los equipos.

Sin embargo, como dijimos al describir las baterías, la conexión de la fig. 21-b es muy útil para aumentar la carga disponible y reducir las

pérdidas de potencia disminuyen-
do la resistencia interna del
conjunto (según r/N , si hay N
fuentes de r internas iguales).

En la fig. 22-a se muestran
dos fuentes de corriente en pa-
ralelo con corrientes $\mathcal{J}_1$ y $\mathcal{J}_2$ y
una fuente equivalente con
 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$. En la fig. 22-b ve-
mos la única conexión útil de
fuentes de corriente en serie con
 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$.

En la fig. 23 vemos dos co-
nexiones posibles y sus equiva-



lentes. En la fig. 23-a la corrien-
te por R sólo depende de $\mathcal{E}$ (su-
puesta ideal) y la tensión $\mathcal{E}$ es
la única que ve el circuito a la
derecha de AB. Análogamente, en
la fig. 23-b la corriente $i = \mathcal{J}$
es independiente del valor de R .
En ambos casos las resistencias
 R pueden omitirse al resolver el
circuito, empleando las equiva-
lencias que se muestran.

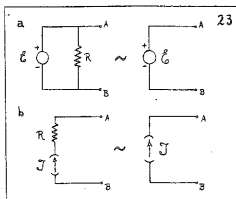
Las equivalencias de la fig.
21 y 22 pueden usarse en ambos
sentidos. Como ejemplo considere-

mos la descomposición de una fuente (fig. 24) y su desplazamiento a tra-
vés del punto P. Los circuitos a, b, c y d son equivalentes (verificarlo).

Ejercicio: justificar cada uno de los pasos de las transformaciones que
se muestran en la fig. 25, donde $[\mathcal{E}] = \text{V}$; $[\mathcal{J}] = \text{A}$;

$$[R] = \Omega.$$

Emplear la equivalencia $\mathcal{J} = \mathcal{E}/r$ (fig. 16) y las rela-

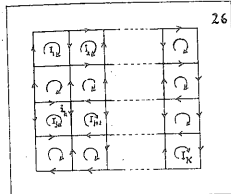
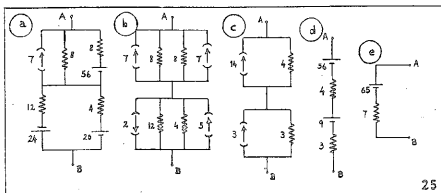
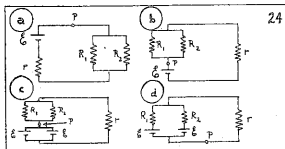


ciones dadas en esta sección. El circuito de la fig. 25-a es el equivalente del 25-a desde la derecha de AB.

Estas transformaciones elementales deben realizarse antes de plantear las ecuaciones que indican las leyes de Kirchhoff. Su aplicación permite preparar el circuito (simplificarlo) para su análisis.

METODO DE LAS MALLAS

El método general descrito permite resolver cualquier tipo de circuito después de un proceso de preparación del mismo y de selección de las ecuaciones que conducen a la solución



dremos que hemos preparado al circuito seleccionando las mallas como se ve en el esquema de la fig. 26, donde las flechas indican los sentidos de recorrido elegidos para las mallas. Las mallas indicadas están distribuidas como los cuadrados de un tablero, de manera que cada rama pertenece a lo sumo a dos mallas (el método es mucho más general y las ecuaciones son válidas para cualquier elección: una rama puede pertenecer a más de dos mallas.).

Definiremos la corriente de malla I_j con su sentido elegido de modo que p.ej. en la rama k (común a las mallas j y $j+1$, fig. 26) sea

$$i_k = I_j - I_{j+1} \quad (2.46)$$

Es decir que cada corriente de rama es la suma algebraica de las corrientes de malla que pasan por esa rama, tomando con signo (+) las I_j cuyos sentidos coinciden con el de i_k , y con signo (-) las que circulan en sentido contrario.

Llamaremos resistencia total de la malla j a $R_{jj} = \sum_{k \in j} R_k$, donde cada término R_k es la resistencia total (calculada como serie) de cada una de las ramas que encontramos al recorrer la malla. Análogamente

$R_{jk} = - \sum_{l \in jk} R_l$ será la resistencia total de la rama común a las mallas j -ésima y k -ésima, cambiada de signo para poder obtener una relación general más sencilla (la 2.48 que veremos enseguida). De igual modo la f.e.m. total de la malla j será $\mathcal{E}_j = \sum_{m \in j} \mathcal{E}_m$, donde cada $\mathcal{E}_m$ tiene un signo (+) si tiende a generar corriente en

el sentido de recorrido de la malla, y (-) en caso contrario.

Con estas convenciones la ecuación (2.38) para la j -ésima malla toma la forma

$$\mathcal{E}_j = \sum_{(j)} R_{jk} I_k = R_{jj} I_j - \sum_{j \neq k} |R_{jk}| I_k \quad (2.47)$$

que en forma abreviada equivale a

$$\mathcal{E}_j = \sum_{k=1}^K R_{jk} I_k \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (2.48)$$

donde, según vemos en el tercer miembro de (2.47), cundo todos los recorridos tienen el mismo sentido (p.ej. horario en la fig.26):

$$R_{jj} > 0, \quad R_{jk} \leq 0 \quad \forall \quad j, k.$$

Los coeficientes R_{jk} en (2.48) se pueden calcular directamente: R_{jj} es la suma de las resistencias halladas al recorrer la malla j y R_{jk} es igual a la resistencia de la rama común a las mallas j y k , con signo (-). El valor de K en (2.48) es el que dimos en (2.45).

El sistema hallado se puede expresar en forma abreviada como

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{R} \vec{I} \quad (2.49)$$

donde $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{I}$ son vectores columnas de K componentes y la matriz de resistencias $\vec{R} = [R_{jk}]$ es cuadrada y de orden K . Es obvio que $\vec{R}$ es simétrica, ya que R_{jk} y R_{kj} representan la misma resistencia de la rama común a las mallas j/k (llamada resistencia de transferencia entre esas mallas).

Por haber elegido mallas independientes, según los criterios dados al enunciar el método general de resolución, $\vec{R}$ es invertible (no singular) y existe la solución de (2.49) en la forma

$$\vec{I} = \vec{R}^{-1} \vec{\mathcal{E}} \quad \text{o sea} \quad I_j = \sum_{k=1}^K \frac{A_{jk}}{D} \mathcal{E}_k \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (2.50)$$

donde $(\vec{R}^{-1})_{jk} = A_{jk}/D$, siendo A_{jk} el determinante adjunto del elemento d_{jk} de la matriz $\vec{R}$:

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \text{ menor } (R_{jk}) \quad (4)$$

y D es el determinante de $\vec{R}$: $D = \det \vec{R}$.

El método de determinantes (regla de Cramer) da una forma analítica de las soluciones que es útil para analizar propiedades importantes de los circuitos. En la práctica se puede resolver el sistema (2.48) por cualquier método numérico.

Finalmente, las ecuaciones del tipo (2.46) nos dan las corrientes de rama buscadas. Si alguna resulta negativa, ello significa que el sentido de circulación asignado al definirla es contrario al verdadero.

Como ejemplo volvamos al circuito de la fig.20, donde las (2.46) toman la forma

$$i_1 = I_1; \quad i_2 = I_1 - I_2; \quad i_3 = I_2$$

$$\begin{aligned} \text{y las (2.48) son:} \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 &= (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 \\ -\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 &= -R_2 I_1 + (R_2 + R_3) I_2. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$i_1 = I_1 = [R_2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) + R_3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)]/D;$$

$$i_3 = I_2 = [R_2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) - R_1(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)]/D$$

con $D = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 = \det \vec{R}$, de modo que

$$i_2 = I_1 - I_2 = [R_1(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) + R_3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)]/D,$$

que coinciden con el resultado ya obtenido.

METODO DE LOS NUDOS

El método de las tensiones de nudos permite calcular todas las tensiones (o voltajes) en un circuito cuando se conocen todas las fuentes de corriente y las conductancias en todas las ramas. Podemos preparar el circuito ejecutando los pasos siguientes:

i) Reemplazamos cada rama activa (equivalente a una f.e.m. total $\mathcal{E}$ en serie con una resistencia total $R_a = R_a^{-1}$) por una fente de corrientes

(e) El menor correspondiente al elemento R_{jk} es el determinante de la matriz que se obtiene extrayendo de $\vec{R}$ la fila j y la columna k .

equivalente $\bar{J}_a = G_a \bar{E}_a$ en paralelo con una conductancia G_a , según la relación obtenida en (2.39).

ii) Elegimos un nudo cualquiera que llamaremos de referencia, al que asignamos un potencial $V = 0$. Si nos proponemos calcular la corriente en una rama determinada, conviene elegir como referencia a uno de los extremos de dicha rama. Puesto que el potencial está siempre definido a menos de una constante, vemos que si hay N nudos en el circuito, sólo tendremos que calcular $(N-1)$ tensiones.

Para un par de nudos j, k definiremos las cantidades (fig. 27):

V_k = tensión del nudo k , del cual sale i_{kj} ;

V_j = tensión del nudo j , al cual llega i_{kj} ;

i_{kj} = corriente total entre los nudos j y k ;

i'_{kj} = corriente por la conductancia G_{kj} ;

$\bar{J}_{kj}$ = corriente equivalente de todas las fuentes existentes entre los nudos j y k ;

G_{kj} = conductancia de transferencia entre los nudos j, k , igual a la suma de las conductancias de todas las ramas (en paralelo) entre esos dos nudos con signo (-); o sea que si R_k indica a cada resistencia entre j y k resulta $G_{kj} = -\sum \frac{1}{R_k} \leq 0$.

(El caso $G_{jk} = 0$ corresponde a $i'_{kj} = 0$, es decir que los nudos j y k no son adyacentes, del mismo modo que era $R_{jk} = 0$ para mallas no adyacentes).

Observemos que hemos definido $G_{kj} \leq 0$ análogamente al método de mallas, donde $R_{jk} \leq 0$ para $j \neq k$. Con estas definiciones la (2.27) toma la forma

$$i'_{kj} = -G_{kj} (V_j - V_k).$$

y tenemos

$$i_{kj} = \bar{J}_{kj} - i'_{kj} = \bar{J}_{kj} + G_{kj} (V_j - V_k). \quad (2.51)$$

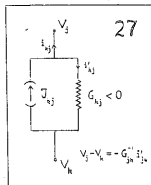
La ley de Kirchhoff (2.36) expresa la suma de las corrientes que entran a un nudo dado. Todas las que entran al j son de la forma i_{kj} . Elegiremos el signo (+) para las que entran, y el (-) para las que salen. Sumando las (2.51) obtenemos para el nudo j -ésimo:

$$\sum_k i_{kj} = \sum_k \bar{J}_{kj} + \sum_k G_{kj} (V_j - V_k) = \bar{J}_j + V_j \sum_k G_{kj} - \sum_k G_{jk} V_k = 0,$$

donde $\bar{J}_j = \sum_k \bar{J}_{kj}$ es la corriente equivalente total de las fuentes que llegan al nudo j , y es obvio que $G_{jk} = G_{kj}$. Como en el método de mallas definimos una conductancia propia del nudo j igual a la suma de las conductancias que llegan al nudo desde todos los demás, o sea: $G_{jj} = -\sum_k G_{jk} > 0$.

Con esta convención resulta:

$$\bar{J}_j = \sum_{k=1}^{N-1} G_{jk} V_k \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.52)$$



El sistema hallado se puede expresar vectorialmente como (+)

$$\bar{J} = \bar{G} \bar{V} \quad (2.53)$$

donde $\bar{J}, \bar{V}$ son vectores columnas de $(N-1)$ componentes y la matriz de conductancias $\bar{G} = [G_{jk}]$ es cuadrada y de orden $(N-1)$. Es obvio que $\bar{G}$ es simétrica, ya que $G_{jk} = G_{kj}$ es la conductancia de la rama entre los nudos j, k . $\bar{G}$ es invertible y la solución de (2.52) tiene la forma

$$\bar{V} = \bar{G}^{-1} \bar{J} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.54)$$

o sea $V_j = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\partial j_{jk}}{\partial V_k} V_k$ donde $D' = \det \bar{G}$ y la notación es la misma que empleamos en (2.50). Las corrientes de ramas se obtienen a partir de las tensiones V_j mediante las ecuaciones (2.51).

Como ejemplo volvamos al circuito de la fig. 20, que ahora se puede transformar según vemos en la fig. 28, donde reemplazamos cada rama activa por una fuente de corriente y una conductancia en paralelo, con

$$\bar{J}_1 = G_1 \bar{E}_1; \quad \bar{J}_2 = G_2 \bar{E}_2; \quad \bar{J}_3 = G_3 \bar{E}_3.$$

Las (2.51) toman la forma:

$$i_1 = \bar{J}_1 - G_1 V; \quad i_2 = \bar{J}_2 + G_2 V; \quad i_3 = -\bar{J}_3 + G_3 V.$$

Hay sólo 2 nudos y , por lo tanto, uno solo independiente. Luego (2.52) expresa

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 - \bar{J}_2 + \bar{J}_3 &= (G_1 + G_2 + G_3) V \\ \Rightarrow V &= \frac{\bar{J}_1 - \bar{J}_2 + \bar{J}_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \end{aligned}$$

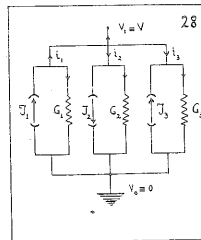
de donde se obtienen de inmediato las corrientes de ramas.

Observemos que sólo hubo que resolver una ecuación lineal, mientras que el método general y el de mallas requieren dos ecuaciones. Esto se cumple generalmente ya que siempre se verifica la relación

$$N-1 \leq K = M - N + 1,$$

excepto para $M=3$. Ello otorga cierta ventaja al método de nudos, si bien

(+) La semejanza entre los sistemas de ecuaciones (2.48) y (2.52) resulta de haber definido las cantidades de transferencia $R_{jk}, G_{jk} \leq 0$.



las relaciones finales (2.51) no son tan inmediatas como las (2.46).

Ejercicio: Verificar que aplicando los métodos de mallas y de nudos se obtienen para las corrientes de ramas los mismos valores numéricos que se hallaron en el ejercicio correspondiente a la fig.20.

TEOREMAS DE SUPERPOSICION Y DE RECIPROCIDAD

En lo que sigue demostraremos algunos teoremas útiles de la teoría general de circuitos. Emplearemos la notación del método de mallas, pero los resultados son válidos en general y pueden obtenerse mediante cualquiera de los métodos de resolución descritos.

El teorema de superposición es la interpretación física de las ecuaciones (2.50). Consideremos un circuito real con varias mallas activas y formemos los sistemas (2.50), correspondientes a circuitos con la misma matriz de resistencias pero que solamente tienen una malla activa cada uno. Así

$$\mathcal{E}_j^n = \delta_{jm} \mathcal{E}_m$$

serán las f.e.m. del circuito m -ésimo (todas nulas menos la $\mathcal{E}_m^n = \mathcal{E}_m$, que es la f.e.m. de la malla m en el circuito inicial). Según (2.50) las corrientes en este circuito serán:

$$I_j^n = \sum_{k=1}^K \frac{A_{jk}}{D} \mathcal{E}_k^n = \sum_{k=1}^K \frac{A_{jk}}{D} \delta_{km} \mathcal{E}_m = \frac{A_{jm}}{D} \mathcal{E}_m \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (2.55)$$

Vemos que cada término de la sumatoria (2.50) representa la corriente parcial debida a la malla k -ésima, es decir la corriente que circularía en la malla j si solamente la malla k fuera activa. Luego, la corriente total en cada malla del circuito real es la suma de las contribuciones parciales de las mallas activas.

Por ejemplo, si en un circuito hemos hallado las corrientes I_j^1 producidas cuando hay una f.e.m. $\mathcal{E}_1$ en la malla 1, para calcular la corriente total cuando se agrega una nueva $\mathcal{E}_2$ en la malla 2 basta con hallar las corrientes I_j^2 que produce esta f.e.m. por separado (con $\mathcal{E}_1 = 0$) y sumarlas: $I_j = I_j^1 + I_j^2$ ($j = 1, 2, \dots, K$).

El teorema de reciprocidad es consecuencia inmediata de la simetría de la matriz de resistencias y de su inversa $[A_{jk}/D]$. Imaginemos dos circuitos que contienen una sola malla activa: en el primero colo-

camos la única f.e.m. $\mathcal{E}$ en la malla j ; en el segundo ubicamos $\mathcal{E}$ en la malla k (todas las demás mallas son pasivas).

Según (2.55) en el primer circuito la corriente en la malla k vale

$$I_k^j = \frac{A_{jk}}{D} \mathcal{E}$$

y en el segundo circuito la corriente en la malla j vale

$$I_j^k = \frac{A_{kj}}{D} \mathcal{E}$$

La simetría de $[A_{jk}]$ implica que

$$I_j^k = I_k^j$$

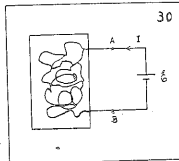
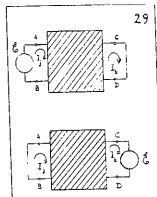
(2.56)

Es decir que si una f.e.m. colocada en una malla dada de un circuito produce una corriente I en otra malla, entonces la misma f.e.m. colocada en la segunda malla debe producir la misma corriente en la primera. En la fig.29 vemos el esquema de un circuito pasivo de cuatro terminales: los dos de la izquierda AB representan la entrada y los de la derecha CD la salida del circuito (la caja cerrada es el circuito pasivo). La reciprocidad del circuito significa la invariancia de su comportamiento ante un intercambio entre la entrada y la salida.

TEOREMAS DE THEVENIN Y DE NORTON

Cuando nos interesa conocer el comportamiento del circuito en una sola rama, el resto del circuito se puede reemplazar por una rama equivalente muy sencilla, cuya forma está dada por el teorema de Thévenin. Antes de demostrarlo definiremos algunos conceptos útiles para describir un circuito.

Supongamos que la caja de la izquierda de la fig.30 encierra un circuito completamente pasivo. Lo llamaremos resistencia de entrada (o equivalente) del circuito, vista desde el par de terminales AB, a la re-



lación

$$\bar{R} = \bar{\mathcal{E}} / I \quad (2.57)$$

que existe cuando se conecta una f.e.m. ideal $\bar{\mathcal{E}}$ entre A y B, y se mide una corriente I .

Sea un circuito (fig.31) que a la izquierda de AB tiene (N-1) mallas pasivas ($\mathcal{E}_k = 0$) y a la derecha tiene una rama activa $\mathcal{E}_N = \bar{\mathcal{E}}$ y $R_C = 0$, que forma parte de la malla N-ésima. Luego, según (2.55)

$$I_j = I_j^N = \frac{A_{jN} \bar{\mathcal{E}}}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

En particular, para la malla N-ésima vale

$$I_N = (A_{NN}/D) \bar{\mathcal{E}} \quad \text{siendo} \quad D \equiv \det \bar{R}.$$

$$\text{Luego (2.57)} \implies \bar{R} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{I_N} = \frac{D}{A_{NN}} \quad (2.58)$$

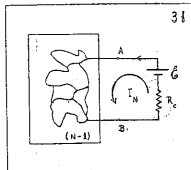
para una f.e.m. $\bar{\mathcal{E}}$ ideal. Si en la rama en cuestión hay una fuente real, (2.58) equivale a definir

$$\bar{R} = \lim_{R_C \rightarrow 0} \frac{D}{A_{NN}} = \frac{\bar{D}}{A_{NN}} \quad (2.59)$$

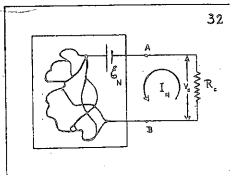
donde $\bar{D} = \lim_{R_C \rightarrow 0} D$, y A_{NN} es in-

dependiente de R_C , pues es el adjunto del elemento R_{NN} en la matriz $\bar{R}$, y R_C sólo figura en dicho elemento.

Pasemos a demostrar el teorema para un circuito como el de la fig.32, donde a la derecha de AB tenemos una resistencia de carga R_C y nos interesa hallar



31



32

un equivalente sencillo de la parte izquierda del circuito, encerrada en la caja que se indica. En general, la corriente en la malla N es:

$$I_N = \sum_{k=1}^N \frac{A_{Nk} \mathcal{E}_k}{D} \quad (2.60)$$

donde todas las mallas pueden ser activas. La caída de tensión sobre la carga vale

$$V_C = V_{AB} = R_C I_N = R_C \sum_{k=1}^N (A_{Nk}/D) \mathcal{E}_k \quad (2.61)$$

Nos interesan dos expresiones particulares de V_C e I_N :

a) La tensión V_C a circuito abierto, es decir para $R_C \rightarrow \infty$: En (2.61) los A_{Nk} son independientes de R_C , y el determinante D se puede desarrollar por el método de Laplace según la fila N-ésima:

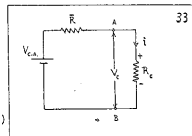
$$D = \sum_{k=1}^N R_{Nk} A_{Nk} = \sum_{k=1}^{N-1} R_{Nk} A_{Nk} + (R_{NN} - R_C) A_{NN} + R_C A_{NN}.$$

donde descomponemos el último término de la sumatoria en dos partes. Es evidente que para $R_C \rightarrow \infty$ el tercer término domina la expresión (ya que los otros no contienen a R_C), o sea que la tensión a circuito abierto según (2.61) vale

$$\begin{aligned} V_{C.A.} &= \lim_{R_C \rightarrow \infty} V_C = \lim_{R_C \rightarrow \infty} \left(\frac{R_C \sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathcal{E}_k}{D} \right) = \lim_{R_C \rightarrow \infty} \left(\frac{R_C \sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathcal{E}_k}{R_C A_{NN}} \right) \\ &\implies V_{C.A.} = \frac{\sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathcal{E}_k}{A_{NN}} \quad (2.62) \end{aligned}$$

b) La corriente I_N de cortocircuito, calculada para $R_C \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} (2.60) \implies I_{C.C.} &= \lim_{R_C \rightarrow 0} I_N = \\ &= \lim_{R_C \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathcal{E}_k}{D} \right) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^N A_{Nk} \mathcal{E}_k}{\bar{D}} \quad (2.63) \end{aligned}$$



33

ya que $\bar{E} = \lim_{R_C \rightarrow 0} D$.

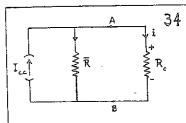
Luego, dividiendo miembro a miembro las (2.62) y (2.63) obtenemos la expresión (2.59):

$$\frac{-V_{C.A.}}{I_{C.C.}} = \frac{\bar{E}}{A_{NN}} = \bar{R}, \quad (2.64)$$

lo que implica que entre A y B hay una fuente cuya f.e.m. es $V_{C.A.}$ y cuya resistencia interna en serie es $\bar{R}$. El circuito equivalente se ve en la fig. 33 que nos permite expresar la corriente $I_N = i$ para una carga cualquiera:

$$V_{C.A.} = i(R_C + \bar{R}) \quad (2.65)$$

El teorema de Norton es un corolario inmediato de este resultado ya que, según vimos en (2.39), el circuito a la izquierda de AB en la fig. 33 es también equivalente al de la fig. 34, siempre que tomemos



$$I = \frac{V_{C.A.}}{\bar{R}} = I_{C.C.} \quad (2.66)$$

como intensidad de la fuente de corriente.

En resumen, el equivalente de Thévenin de un circuito cualquiera consta de una f.e.m. ideal igual a la tensión $V_{C.A.}$ (que se mide entre A y B a circuito

abierto) en serie con una resistencia $\bar{R} = V_{C.A.}/I_{C.C.}$. El equivalente de Norton consta de una fuente de corriente ideal que genera $I_{C.C.}$ en paralelo con la misma resistencia $\bar{R}$.

Como, según vimos en (2.59), la resistencia equivalente no depende de las f.e.m. del circuito, a menudo conviene calcular la $\bar{R}$ para un circuito pasivo que se obtiene cortocircuitando todas las f.e.m. (pero no sus resistencias internas!), el cual tiene la misma matriz de resistencias $\bar{R}$. Así, obtenemos $\bar{R}$ y sólo resta calcular una cantidad ($V_{C.A.}$ ó $I_{C.C.}$) que elegiremos según la geometría del circuito.

CAPÍTULO III

MAGNETISMO

A) MAGNETOSTÁTICA

INTRODUCCION

La propiedad de atraer o repeler cuerpos que no poseen cargas eléctricas macroscópicas (llamada magnetomotricidad) se fue conociendo en etapas sucesivas, separadas por muchos siglos. La magnetita y otros materiales (e.g. hierro) la poseen.

Gilbert (c. 1580) enunció el principio bipolar, análogo al descrito en Electrostática. Sin embargo, todavía no se ha logrado aislar un polo magnético, lo que podemos enunciar diciendo que:

"todo polo positivo (así definido cuando tiende a ser atraído por el polo Norte magnético de nuestro planeta) en un cuerpo está inevitablemente asociado a un polo negativo de igual intensidad, ubicado en el mismo cuerpo".

Coulomb empleó su balanza de torsión con barras magnetizadas muy largas (cuyos polos magnéticos estaban muy separados) y sus experimentos se pueden sintetizar en la expresión

$$\vec{F}_{12} = \kappa \frac{p_1 p_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.1)$$

que describe la fuerza sobre el polo p_1 ubicado en $\vec{r}_1$, en presencia del polo p_2 (en $\vec{r}_2$). Esta ley es análoga a la ley de Coulomb que describe la interacción electrostática entre cargas. A las cantidades p_i se las suele denominar cargas magnéticas (obviamente sus efectos son sumables, los de cargas opuestas se cancelan, etc., de modo que la definición de esta magnitud tiene sentido y, por lo tanto, vale un principio de superposición con todas las consecuencias ya discutidas en Electrostática).

A partir de (3.1) podemos definir unidades de carga magnética, y también un campo magnético

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \kappa p_2 \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_1 = p_1 \vec{B}_2(\vec{r}_1), \text{ etc.}$$

Oersted (1819) descubrió el efecto magnetomotriz de una corriente

eléctrica, que fue sistemáticamente medido y descripto minuciosamente por Ampère. En lo que sigue, por su importancia, elegiremos el tratamiento clásico de Ampère que atribuye a las corrientes el origen del campo magnético.

En realidad, veremos que la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es la superposición de una fuerza independiente de la velocidad (que está presente aun en reposo si el campo eléctrico no es nulo, o sea $q\vec{E}$) más otro término que depende de $\vec{v}$ y que pasamos enseguida a describir, limitándonos sólo al caso de $\vec{v} = \text{const.}$, de modo que todas las corrientes y fuerzas varíen muy lentamente y que la radiación emitida sea despreciable (las cargas aceleradas emiten radiación).

Si bien las mediciones de Ampère se hicieron empleando espiras conductoras, podemos expresar sus resultados en función de la carga que se mueve en un elemento de volumen (fig. 1).

Consideremos un tubo de corriente (cuyas paredes son paralelas a la velocidad media $\langle \vec{v} \rangle$ de las cargas en cada punto), tal que

$$\Rightarrow I d\vec{\ell} = \frac{dq}{dt} d\vec{\ell} = dq \frac{d\vec{\ell}}{dt} = dq \vec{v},$$

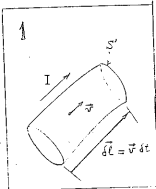
relación que define un elemento de corriente, siendo dq la carga que atraviesa la sección S' en el tiempo dt .

A partir de esta equivalencia podemos sintetizar las numerosas experiencias de Ampère definiendo un campo magnético como sigue.

FUERZAS SOBRE CARGAS EN MOVIMIENTO: DEFINICION DEL CAMPO MAGNETICO

Cuando estamos en presencia de un campo magnético la fuerza que se observa actuando sobre una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en ausencia de campo eléctrico, tiene las siguientes propiedades:

1) $\vec{F} = q \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ es perpendicular a $\vec{v}$;



- 2) $|\vec{F}| \sim \sin(\vec{v}, \hat{B})$ donde $\hat{B}$ indica una dirección privilegiada del espacio que definimos como la dirección y sentido del campo magnético. Es decir que, p.ej., $|\vec{F}| = 0$ si $\vec{B} // \vec{v}$, y $|\vec{F}|$ es máximo si $\vec{B} \perp \vec{v}$.

- 3) $|\vec{F}| \sim |q \vec{v}|$, es decir que es proporcional a los módulos de la carga y de la velocidad.

- 4) $\hat{B}$ es perpendicular al plano formado por la velocidad y la máxima fuerza medible (la que corresponde a $\vec{v} \perp \hat{B}$).

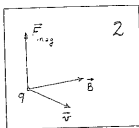
Todo esto se resume en la fig. 2.

La forma analítica más sencilla para resumir todos los resultados anteriores se debe a Lorentz:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

(3.2)

y describe la dinámica de la carga en ausencia de campo eléctrico.



PRINCIPIO DE SUPERPOSICION E INVARIANCIA DE LA FUERZA DE LORENTZ

Cuando sobre una carga puntual q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ actúan simultáneamente un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ el principio de superposición establece que la fuerza total sobre q será

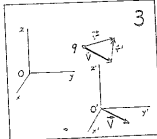
$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

Esta expresión de la fuerza de Lorentz tiene gran interés cuando se analiza el movimiento de la carga q en dos referenciales inerciales distintos.

Supongamos que un referencial $\mathcal{R}'$ de origen O' se mueve con velocidad $\vec{v} = \text{const.}$ con respecto a otro $\mathcal{R}$ fijo cuyo origen es O (fig. 3). Entonces los campos eléctricos y magnéticos, y las velocidades de q serán

$$\vec{E}, \vec{B}, \vec{v} \text{ en } \mathcal{R}$$

$$\vec{E}', \vec{B}', \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v} \text{ en } \mathcal{R}'.$$



Si $V \ll c$ (donde c es la velocidad de la luz medida en el vacío) la fuerza de Lorentz es invariante frente a la transformación $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$, es decir que es la misma en ambos sistemas inerciales. Experimentalmente se ha encontrado que la carga q también es invariante y por lo tanto

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}' = \frac{\vec{F}'}{q}$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + (\vec{v} - \vec{V}) \times \vec{B}' = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' + \vec{v} \times \vec{B}'.$$

Esta relación se puede interpretar como un sistema lineal de ecuaciones cuyas variables independientes son las componentes de $\vec{V}$. Entonces podemos igualar por separado:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B}' &= \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B} \\ \vec{E} &= \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

El campo electromagnético efectivo, definido por la relación

$$\vec{C} \equiv \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{C}_e(\vec{r}, t) + \vec{C}_m(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (3.5)$$

tiene una componente eléctrica $\vec{C}_e = \vec{E}(\vec{r}, t)$ y una componente magnética $\vec{C}_m = \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$. Ambas varían al pasar de un referencial al otro, pero el campo electromagnético total permanece invariante si las velocidades involucradas ($\vec{v}$, $\vec{V}$) son mucho menores que la de la luz, c .

Si el campo eléctrico es conservativo, podemos escribir la fuerza total como

$$\vec{F} = q(-\nabla V + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (V = \text{potencial})$$

y la potencia disipada en el movimiento de la carga será

$$\vec{v} \cdot \vec{F} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \text{en. cinética.}$$

$$\text{Por otra parte, } \vec{v} \cdot \nabla V = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla V = \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{dV}{dt}.$$

$$\text{y, obviamente, } \vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0. \quad (3.6)$$

La identidad (3.6) refleja una propiedad fundamental de las fuerzas magnéticas que, por ser perpendiculares a la dirección del movimiento, no realizan trabajo mecánico. Esto vale cuando el movimiento se debe exclusivamente a la acción del campo magnético, más

un eventual campo eléctrico o de otro tipo, pero conservativo.

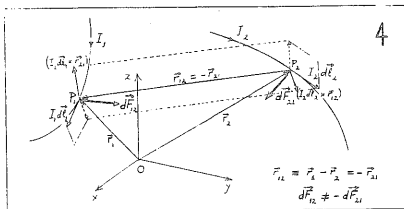
Iguando las dos expresiones de $\vec{v} \cdot \vec{F}$ resulta:

$$\frac{dT}{dt} = -q \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (T + qV) = 0 \quad (3.7)$$

relación que expresa la conservación de la energía total $U = T + qV$ de una carga q que se mueve bajo la acción de un campo magnético y de un campo eléctrico conservativo.

LEY DE AMPÈRE

Si bien hemos resumido las propiedades del campo magnético $\vec{B}$ y su efecto sobre una carga en movimiento, hace falta describir cómo se genera dicho campo. Las experiencias de Ampère pueden resumirse en el experimento ideal descrito en la fig. 4, donde vemos dos elementos de corrientes: $I_1 d\vec{r}_1$ (en $\vec{r}_1$) e $I_2 d\vec{r}_2$ (en $\vec{r}_2$).



La fuerza $d\vec{F}_{21}$, ejercida por el elemento $I_1 d\vec{r}_1$ sobre el otro elemento $I_2 d\vec{r}_2$, en el vacío, vale

$$d\vec{F}_{21} = K \frac{I_2 d\vec{r}_2 \times [I_1 d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (3.8)$$

donde K es la misma constante que aparece en (3.1). En medios

tenues (gases, p.ej.) vale la misma relación (3.8), pero la constante K varía muy levemente.

Si intercambiamos los subíndices en (3.8) obtenemos la fuerza sobre el elemento $I_1 d\vec{r}_1$:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{I_1 d\vec{r}_1 \times [I_2 d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \neq \vec{F}_{21}.$$

Podemos expresar (3.8) en la forma más práctica

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times \left[K I' d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right] \quad (3.9)$$

que describe la fuerza sobre un elemento de corriente $I d\vec{r}$ ubicado en un punto $\vec{r}$ (punto campo), originada en su interacción con un elemento de corriente fuente $I' d\vec{r}'$, ubicado en $\vec{r}'$. Se observa (fig. 4) que $d\vec{F}$ es normal a $(I d\vec{r})$ y al producto vectorial $I' d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$. La cantidad entre corchetes reúne todas las propiedades del campo magnético, de modo que definimos la contribución al campo $\vec{B}$ debida a un elemento $I' d\vec{r}'$ mediante la expresión:

$$d\vec{B} = K I' d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (3.10)$$

De esta manera se verifica la relación

$$d\vec{F} = I d\vec{r} \times d\vec{B}. \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta la relación entre un elemento de corriente y la carga que transporta ($I d\vec{r} = dq \vec{v}$) podemos calcular la fuerza que ejerce un elemento fuente $I' d\vec{r}'$ sobre una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$:

$$d\vec{F} = q \vec{v} \times d\vec{B} \quad (3.12)$$

de donde se obtiene la (3.2) integrando (sumando) sobre las fuentes.

Ejercicio: demostrar que la fuerza total entre dos espiras cerradas C_1 y C_2 por las que circulan corrientes I_1 e I_2 es

$$\vec{F}_{12} = -K \oint_{C_1} \oint_{C_2} (I_1 d\vec{r}_1) \cdot (I_2 d\vec{r}_2) \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.13)$$

de modo que se verifica el teorema de acción y reacción: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$.

Para ello definir las integrales $\vec{J}_{12}$ e $\vec{J}_{21}$ de la forma

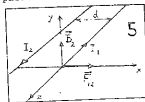
$$\vec{J}_{12} = \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \oint_{C_2} d\vec{r}_2 \times \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \text{ siendo } \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ (fig. 4). Recordar que } d\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_{12} / r_{12}^3 = -d\vec{r}_1 \cdot \nabla_1 (r_{12}^{-1}) \equiv -d_1 (r_{12}^{-1}), \text{ como en (1.22).}$$

La relación (3.13) se parece a la ley de Coulomb, pero sólo en esta forma integral. Por otra parte, el signo (-) indica que la fuerza es atractiva para espiras del mismo sentido, y repulsiva en caso contrario, por oposición a lo que se espera por analogía con las fuerzas entre cargas.

La ventaja de la forma (3.8) de la ley de Ampère (llamada forma de Laplace) radica en la posibilidad cierta de factorar el campo magnético $d\vec{B}(\vec{r})$ producido por fuentes del tipo $I' d\vec{r}'$, lo que no es posible a partir de la forma (3.13).

Ejercicio: empleando la ley (3.13) demostrar que la fuerza por unidad de longitud entre dos cables paralelos rectilíneos e indefinidos, separados por una distancia d , que conducen corrientes I_1 e I_2 es

$$\vec{F}_{12} / \ell = -2K \frac{I_1 I_2}{d} \hat{x} \quad (3.14)$$



DEFINICIÓN DEL AMPERIO. UNIDADES INTERNACIONALES Y GAUSSIANAS

La constante K que aparece en la ley de Ampère se define arbitrariamente. En el sistema internacional que adoptamos (SI) definimos

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad (3.15)$$

con lo cual resulta que hemos definido arbitrariamente el valor del amperio (A).

En efecto, como vimos en (3.14), la fuerza por unidad de longitud entre dos cables indefinidos separados por una distancia d , por los cuales circula una misma corriente I , mide

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}.$$

Si la corriente I es igual a la unidad del SI (o sea $I = 1 \text{ A}$), debe cumplirse la siguiente relación entre los valores medidos de la distancia y la fuerza por unidad de longitud:

$$d \mathcal{F} / \ell = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \quad (3.16)$$

La unidad de campo magnético está definida por la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow [B] = [F][I]^{-1} [L]^{-1} = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{T} = \text{Tesla}.$$

La constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ se denomina permeabilidad magnética del medio. Los valores de K y μ_0 definidos en (3.15) corresponden a interacciones en vacío. En medios materiales tenue vale muy aproximadamente la ley de Ampère (3.13) sustituyendo $\mu_0/4\pi$ por $\mu/4\pi$ con $\mu \approx \mu_0$.

En el sistema gaussiano la unidad de corriente se define de tal manera que

$$I = \text{u.e.m.}(I) = \text{ab A} = 10 \text{ A},$$

es decir que la fuerza entre dos cables indefinidos verifica la relación del tipo (2.16) con

$$d \mathcal{F} / \ell = 2 \times 10^{-7} \times 10^2 \times 10^5 = 2 \text{ dinas (g)}$$

ya que $I^2 = 10^2 \text{ A}^2$ y $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dinas}$.

En este sistema, la unidad del campo magnético, que se emplea con más frecuencia que el tesla (muy grande), se llama gauss:

$$B = \text{gauss} = G.$$

A partir de (3.14) obtenemos de inmediato el campo B a una distancia d de un hilo indefinido que conduce una corriente I :

$$B = 2K I / d.$$

En el sistema gaussiano $K \equiv 1$, de modo que si $I = 1 \text{ ab A} = 10 \text{ A}$, $d = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow B = 2 \text{ G}$, mientras que en el SI:

$$B = 2 \times 10^{-7} \times 10 / 0,01 = 2 \times 10^{-4} \text{ T}, \text{ de donde resulta la relación}$$

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}.$$

Observemos que en el sistema gaussiano ambas constantes, k y K , se definen numéricamente iguales a 1. Las unidades de carga son:

(a) Podemos decir que esta experiencia ideal define el amperio absoluto (ab A).

$$1 \text{ u.e.s.}(q) = 1 \text{ f} \quad (\text{unidad electrostática})$$

$$1 \text{ u.e.m.}(q) = 1 \text{ abC} = 1 \text{ abA} \times 1 \text{ s} \quad (\text{unidad electromagnética}).$$

Como ya señalamos en (2.4), Weber y Kohlrausch (1856) midieron la relación entre los valores de ambas, obteniendo

$$\frac{\text{abC}}{\text{f}} = \frac{\text{u.e.m.}(q)}{\text{u.e.s.}(q)} = c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \quad (3.17)$$

que resultó ser idéntica a la velocidad c de la luz en el vacío.

En el SI, al haber definido arbitrariamente K , a partir de ésta el amperio, y de éste el coulombio ($1 \text{ C} \equiv 1 \text{ A} \times 1 \text{ s}$), resulta que la constante k en la ley de Coulomb toma un valor definido y el resultado (3.17) equivale a decir que

$$\frac{k}{K} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \approx 9 \times 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (3.18)$$

Luego, $k = c^2 K \approx 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \Rightarrow \epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Al final de este Capítulo veremos que las expresiones (3.17) y (3.18) tienen una amplia justificación teórica.

Regumen de unidades:

Magnitud	SI	u.e.s.	u.e.m.	gaussiano
q	C	(0,1 c) stC	(0,1) abC	fd. u.e.s.
I	A	(0,1 c) stA	(0,1) abA	fd. u.e.m.
E	V m^{-1}	$(10^6 \text{ c}^{-1}) \frac{\text{dina}}{\text{stC}}$	---	fd. u.t.s.
B	T	---	$(10^4) \text{ G}$	fd. u.e.m.

Notas:

- Las unidades u.e.m.(E) y u.e.s.(B) se pueden derivar fácilmente, pero no se usan en la práctica.

- El stC se denomina actualmente franklin.

- c es aquí el valor numérico de la velocidad de la luz en el vacío: $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$.

CAMPO MAGNETICO DE UNA ESPIRA: SUPERFICIE ORIENTADA Y MOMENTO MAGNETICO

Llamaremos espira a un conductor cerrado de una sola vuelta, forma arbitraria y sección despreciable. En el ejemplo detallado que sigue nos ocuparemos de una espira circular, pero muchas de las propiedades a discutir son comunes a cualquier espira.

Cuando la espira conduce una corriente I podemos calcular el campo $\vec{B}$ generado en un punto $\vec{r}$, empleando la ley de Ampère (3.10). Las integrales que resultan se pueden expresar en forma analítica cerrada solamente en algunos puntos campo, p.ej. cuando $\vec{r}$ está situado en el eje de la espira (fig. 6).

Podemos ver que las componentes de $d\vec{B}_1$ y $d\vec{B}_2$ normales al eje z se compensan, y resulta

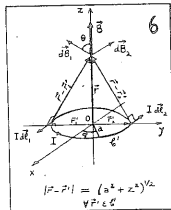
$$\vec{B} = B \hat{z}.$$

Como $d\vec{r} \perp (\vec{r} - \vec{r}')$ y $\vec{r}'$, resulta:

$$|d\vec{B}| = \frac{\kappa I d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\kappa I d\ell'}{a^2 + z^2}; \quad dB_z = dB \cos \theta$$

$$\text{donde } \cos \theta = \frac{a}{(a^2 + z^2)^{1/2}}; \quad d\ell' = a d\varphi$$

$$\Rightarrow dB_z = \kappa I a^2 \frac{d\varphi}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



Luego, integrando sobre toda la espira ℓ' resulta ($0 \leq \varphi < 2\pi$):

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.19)$$

Para puntos $\vec{r}$ muy alejados de la espira ($|\vec{r}| \gg a$) podemos reescribir (3.19) en la forma

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2} \frac{1}{r^3} \hat{z} = \kappa \frac{4\pi I a^2}{2} \hat{z} = 2\kappa \frac{I \vec{S}}{r^3} \hat{z}$$

donde $S = \pi a^2$ es el área encerrada por la espira.

Definiremos una superficie orientada paralela al campo generado en su eje: $\vec{S} = S \hat{z} \parallel \vec{B}$,

con lo cual podemos expresar el campo como

$$\vec{B} = 2\kappa \frac{I \vec{S}}{r^3} \quad (3.20)$$

Se puede ver fácilmente que la cantidad $\vec{S}$ así definida es una propiedad de la espira, y no depende de la forma de la superficie encerrada. En efecto, las superficies S_1 y S_2 , ambas encerradas por la espira ℓ tienen sus normales $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ (fig. 7), cuyos sentidos están unívocamente determinados por el sentido de circulación de la curva ℓ (regla del tirabuzón; superficie exterior a la izquierda de ℓ ; etc.).

Pero, como ya vimos al deducir la ecuación de continuidad (2.8), ambas superficies forman una superficie cerrada S cuya normal $\hat{n}$ coincide con $\hat{n}_1$ sobre S_1 pero se opone a $\hat{n}_2$ sobre S_2 ($\hat{n} = -\hat{n}_2$ sobre S_2).

Por otra parte, es obvio que $\oint_S d\vec{S} = 0$, como se muestra esquemáticamente en la fig. 7-b, o sea que

$$\oint_S d\vec{S} = \int_{S_1} \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \hat{n}_2 dS = \int_{S_1} \hat{n}_1 dS - \int_{S_2} \hat{n}_2 dS = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \int_{S_1} \hat{n}_1 dS = \int_{S_2} \hat{n}_2 dS$$

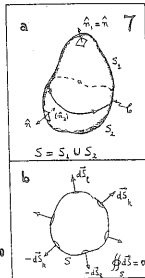
Luego $\vec{S}$ es una cantidad vectorial que toma el mismo valor para toda superficie $S_1(\ell)$, encerrada por la misma curva ℓ . En consecuencia, el producto $I \vec{S}$ es una propiedad de cada espira conductora, que denominaremos momento magnético:

$$\vec{\mu} = I \vec{S} \quad (3.21)$$

Reemplazando $\vec{\mu}$ la expresión (3.20) del campo magnético en el eje de la espira toma la forma $\vec{B} = 2\kappa \vec{\mu} z^{-3}$.

Aplicando (1.43) a un dipolo eléctrico de momento $\vec{p} = p \hat{z}$ obtenemos para un punto campo ubicado en el eje z :

$$\vec{E} = 2\kappa \vec{p} z^{-3} \quad (3.22)$$



que es semejante a la expresión recién obtenida para el campo magnético en un punto del eje de la espira puntual.

FUERZAS Y MOMENTOS SOBRE UNA ESPIRA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERIOR

Sea $\vec{B}(\vec{r})$ un campo magnético generado por fuentes exteriores a la espira $\mathcal{C}$. La fuerza $d\vec{F}$ sobre un elemento de corriente $I d\vec{\ell}$ de la espira (fig. 8) vale:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (3.11)$$

y la fuerza total sobre $\mathcal{C}$ será

$$\vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{F} = I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (3.23)$$

expresión general, válida $\forall \vec{B}(\vec{r})$.

En particular, si el campo $\vec{B}$ es uniforme podemos extraerlo de la integral:

$$\vec{F} = I \left(\oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = 0$$

Observamos que la fuerza neta se anula pues (fig. 9)

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} = 0 \quad \forall \mathcal{C}.$$

Calculemos ahora el momento de las fuerzas con respecto a un punto cualquiera, p.ej. el origen O (fig. 8). El momento de la fuerza $d\vec{F}$ que actúa sobre el elemento de corriente $I d\vec{\ell}$ es

$$d\vec{M}_O = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times (I d\vec{\ell} \times \vec{B}) = I [d\vec{\ell} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{\ell})],$$

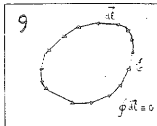
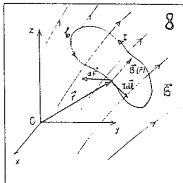
después de haber aplicado la identidad (A.2).

El momento total respecto de O será

$$\vec{M}_O = I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - I \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{\ell}). \quad (3.24)$$

Esta expresión es bien general y equivale al cálculo directo de

$$\vec{M}_O = -I \oint_{\mathcal{C}} (d\vec{\ell} \times \vec{B}) \times \vec{r}$$



El caso particular de $\vec{B}$ uniforme es interesante. Es fácil ver que $\nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$ para $\vec{B} = \text{const.}$ En efecto:

$$\partial_i \sum_{k=1}^3 x_k B_k = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} B_k = B_i, \text{ pues } \partial_i x_k = \delta_{ik} \text{ y } \partial_i B_k = 0.$$

La primera integral en (3.24) se puede calcular aplicando la identidad (A.16):

$$I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = I \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \times \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) = I \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \times \vec{B} = \vec{M} \times \vec{B},$$

donde aparece claramente el momento magnético definido en (3.21).

La segunda integral en (3.24) se anula, ya que aplicando el teorema de Stokes (A.17):

$$\vec{B} \oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \cdot \vec{r} = \vec{B} \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{r} = 0$$

pues $\nabla \times \vec{r} = 0$ (verificarlo).

Resumiendo, para $\vec{B} = \text{const.}$ el momento de las fuerzas vale

$$\vec{M}_O = \vec{M} \times \vec{B} \quad (3.25)$$

expresión que no depende de la posición de la espira respecto del centro O de momentos (ello se debe a la uniformidad de $\vec{B}$ que no permite distinguir físicamente a un punto de otro) y solamente depende de las propiedades de la espira $\mathcal{C}$. La (3.25) es análoga a la (1.47) correspondiente a un dipolo eléctrico.

Teniendo en cuenta (3.23) y (3.25), la condición de equilibrio estable para una espira conductora en un campo magnético exterior uniforme es la alineación de su momento magnético paralelamente al campo, análogamente a la situación electrostática descrita en (1.48).

TEOREMA DE GAUSS: CONSERVACION DEL FLUJO Y POTENCIAL VECTORIAL

Como sucede con $\vec{E}$ en Electroestática, podemos obtener $\vec{B}$ por derivación a partir de un cierto potencial. Sin embargo, en el caso más general, en presencia de fuentes del campo magnético (corrientes) el potencial no tiene una forma tan sencilla como la de $V(\vec{r})$. Para verlo demostraremos que dada una espira $\mathcal{C}$ que conduce una corriente I' , existe la función

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa I' \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.26)$$

tal que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.27)$$

En (3.26) $\vec{r}'$ es la posición del elemento de corriente $I' d\vec{r}'$, mientras que $\vec{r}$ es como siempre el punto campo, donde calculamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Para demostrar (3.27) tomamos el rotor del integrando de $\vec{A}(\vec{r})$ con respecto a las variables no primadas $\vec{r}'$, recordando que la integral opera sobre las variables primadas $\vec{r}'$, y que $d\vec{r}' = d\vec{r}'$. Aplicando la identidad (A.9) obtenemos:

$$\nabla \times (|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} d\vec{r}') = -d\vec{r}' \times \nabla |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

(El gradiente de $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ ya fue calculado en 1.22).

Luego,

$$\nabla \times \vec{A} = \kappa I' \oint_C d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \vec{B}(\vec{r}), \text{ o sea (3.27).}$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.28)$$

Es importante notar que dado un campo $\vec{B}(\vec{r})$, el potencial $\vec{A}(\vec{r})$ no está unívocamente determinado, ya que si se cumple

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla f,$$

es decir que $\vec{A}'$ difiere de $\vec{A}$ en el gradiente de una función escalar arbitraria $f(\vec{r})$, también vale (recordando A.4)

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}.$$

Esta componente indeterminada ∇f juega un papel semejante a la constante arbitraria que puede incluirse en la expresión general del potencial electrostático $V(\vec{r})$. En Magnetostática siempre podemos elegir $f = 0$, y así lo haremos. En casos más generales es preciso especificar $\nabla \cdot \vec{A}$, que junto con $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ determinan el vector $\vec{A}(\vec{r})$ unívocamente (teorema de Helmholtz, ccs. 33 a 36).

El flujo magnético, definido como el flujo del campo $\vec{B}$ a través de una superficie S :

$$\Phi = \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \iint_S dS \hat{n} \cdot \vec{B}$$

es una magnitud física importante para la descripción del campo $\vec{B}$.

Cuando S es una superficie cerrada el teorema de Gauss se obtiene aplicando al flujo a través de S el teorema de la divergencia y empleando la propiedad (3.28):

$$\oint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.29)$$

Empleando la misma notación de la fig. 7 podemos descomponer el flujo total de $\vec{B}$ a través de una superficie cerrada en dos partes (fig. 10-a) según que las líneas del campo $\vec{B}$ sean entrantes (superficie abierta S_1) o salientes (S_2). Definimos en cada punto dos versores normales

$$\hat{n}_1 = -\hat{n} \text{ para } P \in S_1 \quad \text{y} \\ \hat{n}_2 = +\hat{n} \text{ para } P \in S_2, \text{ donde } \hat{n}$$

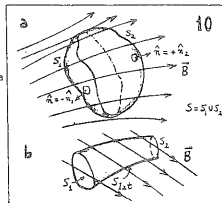
es la normal exterior de la superficie S cerrada. Entonces los flujos entrante y saliente serán

$\phi_1 = \iint_{S_1} dS \hat{n}_1 \cdot \vec{B}$; $\phi_2 = \iint_{S_2} dS \hat{n}_2 \cdot \vec{B}$, respectivamente. Obviamente, el resultado (3.29) equivale a la igualdad del flujo entrante y el saliente:

$$\oint_S dS \hat{n} \cdot \vec{B} = \iint_{S_1} dS \hat{n} \cdot \vec{B} + \iint_{S_2} dS \hat{n} \cdot \vec{B} = -\iint_{S_1} dS \hat{n}_1 \cdot \vec{B} + \iint_{S_2} dS \hat{n}_2 \cdot \vec{B} = -\phi_1 + \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2.$$

Este resultado suele interpretarse diciendo que las líneas del campo magnético son siempre cerradas, pero esto es falso en general, aun en el caso magnetostático, como puede verse en el ejemplo que se propone a continuación.

Ejercicio: Trazar las líneas del campo magnético generadas por un hilo conductor rectilíneo infinito que conduce una corriente I_1 y una espira circular de radio a situada en el plano (x, y) y centrada en el hilo (eje z), la cual conduce una corriente I_2 . Verificar que las líneas son espirales situadas en torno de la espira, que adó se cierran para ciertos valores de la relación I_1/I_2 .



En la fig. 10-b vemos una porción cerrada de un tubo, con bases S_1 y S_2 , y superficie lateral S_{lat} , para la cual vale

$$\oint \vec{dS} \cdot \vec{B} = -\phi_1 + \phi_{lat} + \phi_2 = 0 \implies \phi_{lat} = \phi_1 - \phi_2. \quad (3.30)$$

En particular, si elegimos el tubo construyendo sus paredes con líneas de campo (paralelas a $\vec{B}$ en cada punto) es obvio que $\phi_{lat} = 0$ y los flujos magnéticos a través de cualquier par de secciones transversales deben ser idénticos, es decir: $\phi_1 = \phi_2$. Precisamente, por ser constante el flujo a través de toda sección transversal un tubo formado por líneas de campo se denomina tubo de flujo. La situación es similar a la ya descrita en la fig. 1 del Cap. II cuando nos referimos a tubos de corriente. Es natural que sea así, pues la corriente eléctrica I es el flujo de la densidad $\vec{J}$ y tiene propiedades muy semejantes a las del flujo magnético, como veremos.

Así como el teorema de Gauss en su forma local (caso electrostático)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (1.15)$$

expresa el hecho que las fuentes del campo $\vec{E}$ son las cargas eléctricas de densidad ρ , la validez general de la ecuación

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.28)$$

expresa la inexistencia de cargas magnéticas (o sea $\rho_{mag} = 0$). El resultado (3.28) implica que no se han detectado en la naturaleza fuentes (ni sumideros) localizadas de campo magnético. En principio no hay razón alguna que impida la existencia de $\rho_{mag} \neq 0$. Algunos físicos teóricos sostienen que tales cargas (monopolos magnéticos) existen, pero no se dispone aún de evidencia experimental suficiente que justifique tales hipótesis. De verificarse las mismas habría que incluir un término ρ_m en (3.28) y, por supuesto, la ley de Ampère también cambiaría de forma.

Otra propiedad útil del flujo ϕ se obtiene aplicando el teorema de Stokes (A.17). Sea S una superficie abierta. Aplicando (3.27) tenemos:

$$\phi = \iint_S \vec{dS} \cdot \vec{B} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{dS} = \oint_{\partial(S)} \vec{d\vec{r}} \cdot \vec{A}, \quad (3.31)$$

que expresa la igualdad del flujo de $\vec{B}$ y la circulación de $\vec{A}$. Esta forma de ϕ suele ser más fácil de calcular que la original, cuando conocemos el potencial vectorial $\vec{A}$.

$$\text{Unidades: } [\phi] = [B][S] = T \cdot m^2 = \text{Weber} \equiv W \implies 1 T = 1 W/m^2$$

$$(3.31) \implies [A] = [\phi]/[L] = W/m = T \cdot m$$

ENERGÍA DE UNA ESPIRA CONDUCTORA EN UN CAMPO MAGNÉTICO EXTERIOR

Consideremos una espira $\mathcal{C}$ que conduce una corriente I constante, alimentada por una fuente ideal, cuyo comportamiento no nos interesará por el momento. La espira es atravesada por las líneas de un campo $\vec{B}$ (fig. 11) creado por fuentes exteriores. Supondremos que este $\vec{B}$ también se mantiene constante durante todo el proceso que sigue (NO uniforme).

Si desplazamos la espira $\mathcal{C}$ de modo que cada elemento de corriente $I d\vec{r}$ se mueva un $\delta \vec{r}$, el trabajo que realizan las fuerzas magnéticas $\delta \vec{F}$ sobre este elemento será (aplicando A.1):

$$\delta W_{mag} = \delta \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = I d\vec{r} \times \vec{B} \cdot \delta \vec{r} = I \delta \vec{r} \times d\vec{r} \cdot \vec{B}$$

y se opone al trabajo $\delta W = -\delta W_{mag}$ realizado en contra del campo para producir el desplazamiento. El trabajo total para mover la espira será

$$\delta W = -I \oint_{\mathcal{C}} \delta \vec{r} \times d\vec{r} \cdot \vec{B} = +I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \times \delta \vec{r} \cdot \vec{B}.$$

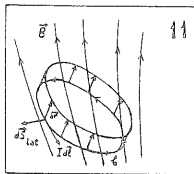
En la fig. 11 se ve que $d\vec{r} \times \delta \vec{r} = d\vec{S}_{lat}$, que es el elemento de la superficie barrida por el elemento de corriente $I d\vec{r}$ al desplazarse en $\delta \vec{r}$. Luego

$$\delta W = I \iint d\vec{S}_{lat} \cdot \vec{B} = I \delta \phi_{lat}$$

coincide con el flujo del campo $\vec{B}$ a través de la superficie barrida por $\mathcal{C}$. Pero este flujo lateral, como vimos en (3.30), vale

$$\delta \phi_{lat} = \phi_1 - \phi_2 = -\delta \phi,$$

donde ϕ_1 es el flujo a través de la superficie encerrada por la espira $\mathcal{C}$ en su posición inicial y ϕ_2 es el flujo al final del desplazamiento de la espira.



Observemos que en este movimiento no necesariamente debemos tener el mismo desplazamiento $\delta \vec{r}$ para todos los elementos de corriente (lo que hubiera representado una traslación pura), de manera que podemos calcular el trabajo necesario para llevar la espira desde una posición inicial cualquiera hasta otra final, considerando este movimiento finito como una sucesión de N pequeñísimos desplazamientos (no necesariamente paralelos), numerados con el subíndice k :

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N \delta W_k = \sum_{k=1}^N (-I \delta \phi_k) = -I \sum_{k=1}^N \delta \phi_k \quad \text{donde } \sum_{k=1}^N \delta \phi_k = (\phi_f - \phi_i) + (\phi_i - \phi_{i-1}) + \dots + (\phi_{i-1} - \phi_i) = \phi_f - \phi_i = \text{flujo final} - \text{flujo inicial}$$

$$\Rightarrow \Delta U_{\text{mag}} = \Delta W = -I \Delta \phi \quad (3.32)$$

Aquí hemos igualado el trabajo neto realizado en el movimiento con la energía magnética adquirida por la espira, de naturaleza potencial, ya que se ve claramente que el trabajo realizado no depende del camino recorrido sino sólo de las posiciones inicial y final, que son las que definen los flujos respectivos.

El flujo magnético a través de la superficie encerrada por la espira $\mathcal{C}$ se denomina flujo concatenado (o enlazado) por $\mathcal{C}$.

Como siempre, la energía potencial está definida a menos de una constante. Podemos elegir esta constante arbitrariamente, p.ej. fijando $U_{\text{mag}} = 0$ para un flujo $\phi_0 = 0$ (e.g. si $\vec{B} \perp d\vec{S}$, o bien si el campo es nulo en toda una región finita); en cuyo caso

$$U_{\text{mag}} = -I \phi \quad (3.33)$$

expresión que supone que tanto I como $\vec{B}$ se mantienen constantes en el tiempo durante todo movimiento de la espira. Para calcular la energía total involucrada falta agregar la energía necesaria para que se cumpla esta última hipótesis ($\vec{B}$ e I constantes).

En particular, si $\vec{B}$ es uniforme:

$$U_{\text{mag}} = -I \phi = -I \left(\iint d\vec{S} \right) \cdot \vec{B} = -I \vec{S} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (3.34)$$

donde $\vec{m}$ es el momento magnético de la espira. Luego, la fuerza sobre $\mathcal{C}$ en una posición dada será

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(I\phi) = I \nabla \phi \quad (3.35)$$

válida en general, que se anula para $\vec{B}$ uniforme. Para verificar, podemos reescribir la (3.35) aplicando la identidad (A.15):

$$\vec{F} = I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \times \vec{B} = I \nabla \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \vec{B} = I \nabla \phi, \quad \text{que es la misma (3.35).}$$

TEOREMA CIRCUITAL DE AMPÈRE

Consideremos una espira $\mathcal{C}'$ que conduce una corriente I , y una curva arbitraria $\mathcal{C}$, concatenada con la espira (fig. 12). Elegiremos una orientación para $\mathcal{C}$ de modo que la normal a $S(\mathcal{C})$ tenga el mismo sentido que I cuando ésta intersecta dicha superficie, o sea

$$d\vec{r}' \cdot \hat{n} > 0 \quad (3.36)$$

El campo $\vec{B}$ generado por la espira en un punto P de la curva $\mathcal{C}$ vale

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa I \oint_{\mathcal{C}'} d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

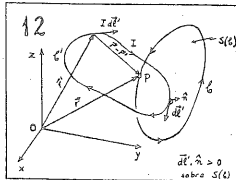
Nos proponemos calcular la circulación del campo $\vec{B}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$:

$$\gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \kappa I \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}'} d\vec{r} \cdot d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.37)$$

El cálculo de γ implica desplazar al punto campo P en sucesivos $d\vec{r}$ (variables) de modo que P recorra la curva $\mathcal{C}$, calculando en cada punto el campo $\vec{B}(\vec{r})$. Pero un desplazamiento de P en $d\vec{r}$ que deja la espira $\mathcal{C}'$ fija es físicamente equivalente a mantener fijo el punto P y desplazar al resto del universo ($\mathcal{C}'$ incluida) en $-d\vec{r}$. Bilo es así porque en la expresión de $\vec{B}$ la variación de $\vec{r}$ en $+d\vec{r}$ sólo afecta al vector $(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$, que se transforma en

$$\frac{(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{r}'}{|\vec{r} + d\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\vec{r} - (\vec{r}' - d\vec{r})}{|\vec{r} - (\vec{r}' - d\vec{r})|^3}$$

El primer miembro representa la traslación de $\vec{r}$ en $+d\vec{r}$, dejando la espira $\mathcal{C}'$ fija, mientras que el segundo representa la traslación de cada punto $\vec{r}'$ de la espira en $(-d\vec{r})$ dejando P fijo.



Elegimos la segunda traslación para calcular la circulación γ . Definimos la variable

$$\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r} = -(\vec{r} - \vec{r}')$$

que equivale a tomar a P (ahora fijo) como origen de coordenadas. En sus desplazamientos sucesivos la espira va barriendo la superficie S' que se ve en la fig. 12. El elemento de superficie lateral de S' es

$$d\vec{S}' = d\vec{r}' \times d\vec{r}$$

y en el integrando de (3.37) podemos reescribir

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \\ &= -d\vec{r} \cdot d\vec{r}' \times \vec{R} = \\ &= (d\vec{r}' \times d\vec{r}) \cdot \vec{R} = d\vec{S}' \cdot \vec{R}, \end{aligned}$$

después de haber aplicado la identidad (A.1).

Luego

$$\gamma = K I \oint d\vec{S}' \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = K I \oint d\Omega$$

donde, según vimos en las ecu. 30 y 31 (Análisis Vectorial), el integrando es el ángulo sólido $d\Omega = d\vec{S}' \cdot \vec{R}/R^3$ subtendido por el elemento $d\vec{S}'$ desde el vértice P.

Observemos que el punto P habrá quedado en el interior de la superficie barrida S' si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ estaban inicialmente concatenadas (enlazadas), y en el exterior si no lo estaban.

Entonces,

$$\oint_S d\Omega = \begin{cases} 4\pi & \text{si } \mathcal{C}, \mathcal{C}' \text{ concatenadas} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma = K I \begin{cases} 4\pi \\ 0 \end{cases} = \mu_0 I \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ según el caso.}$$

Convendremos en definir una corriente concatenada I_c igual a la suma algebraica de las corrientes enlazadas, cada una con su signo prescrito en (3.36) o nula, si no está concatenada con la curva $\mathcal{C}$:

$$\text{Signos: } \begin{cases} + & \text{cuando } d\vec{r} \cdot \vec{n} > 0 \\ - & \text{cuando } d\vec{r} \cdot \vec{n} < 0 \end{cases} \text{ sobre } S(\mathcal{C})$$

Luego,

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \mu_0 I_c$$

(3.38)

Esta expresión debida a Ampère es muy útil para calcular campos magnéticos en situaciones de simetría sencilla por un procedimiento similar al que utiliza la ley de Gauss en Electroestática. Definimos para ello una curva de Ampère $\mathcal{C}$ cuando se cumplen las condiciones

$$B = |\vec{B}| = \text{const.} \quad \text{y} \quad d\vec{r} // \vec{B} \quad \text{sobre } \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \oint_{\mathcal{C}} dr B = B \oint_{\mathcal{C}} dr = B l = \mu_0 I_c \Rightarrow B = \mu_0 I_c / l$$

donde l es el perímetro de la curva $\mathcal{C}$. El sentido de $\vec{B}$ se elige de modo que coincida con el de $\mathcal{C}$, que así resulta ser una línea de campo magnético, o sea que se verifica

$$d\vec{r} // \vec{B} \Rightarrow \frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z},$$

analogamente al caso electrostático (pero en aquel caso las líneas de campo se elegían normales a la superficie de Gauss; $\vec{n} // \vec{E}$).

El teorema de Ampère (3.38) se puede expresar fácilmente en forma local, para un punto dado. Recordando que toda corriente se puede expresar como

$$\oint d\vec{S} \cdot \vec{j} = I \quad (2.3)$$

y aplicando el teorema de Stokes (A.17) a la superficie S encerrada por la curva $\mathcal{C}$ tenemos:

$$\mu_0 I_c = \mu_0 \oint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \vec{j} = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} = \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B},$$

relaciones que valen para toda superficie S . En consecuencia deben ser iguales los integrandos:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3.39)$$

Esta forma local del teorema circuital de Ampère expresa que las fuentes del campo magnético son las densidades de corriente $\vec{j}$. Solamente tiene validez en el caso magnetostático, cuando todos los procesos son estacionarios ($I, \vec{j}, \vec{B}$, constantes en el tiempo).

En efecto, recordando la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

(2.8)

podemos ver que se verifica automáticamente para corrientes y campos estacionarios. En efecto, por una parte debe ser $\partial \rho / \partial t = 0$, y por otra:

$$(3.39) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0. \quad (3.40)$$

Esta condición, característica de las corrientes continuas, implica que las líneas de corriente deben ser cerradas. Veremos al final de este Capítulo que (3.39) deja de valer para distribuciones de cargas y corrientes que varían en el tiempo.

INDUCCIÓN MAGNÉTICA: INDUCTANCIA, TEOREMA DE NEUMANN

Sean dos espiras ℓ_j, ℓ_k de un conjunto de N espiras ℓ_n caracterizadas por:

$$I_n = |\vec{j}(\vec{r}_n)| \Delta s_n = \text{corriente por } \ell_n (\vec{r}_n \text{ es un punto genérico sobre } \ell_n \text{ y } \Delta s_n \text{ es la sección de la espira});$$

$$\vec{B}_n(\vec{r}) = \text{campo magnético generado por } I_n \text{ en un punto arbitrario } \vec{r}.$$

Las líneas de campo generadas por I_k serán parcialmente concatenadas por ℓ_j . El flujo magnético del campo $\vec{B}_k$ a través de $S_j = S(\ell_j)$ será (fig. 14):

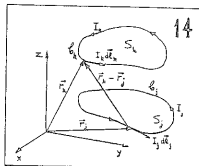
$$\phi_{jk} = \iint_{S_j} d\vec{s}_j \cdot \vec{B}_k(\vec{r})$$

donde (3.27) $\Rightarrow$

$$\vec{B}_k(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_k(\vec{r}) = \kappa I_k \nabla \times \oint_{\ell_k} \frac{d\vec{A}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|}.$$

Luego, aplicando el teorema de Stokes:

$$\phi_{jk} = \kappa I_k \iint_{S_j} d\vec{s}_j \cdot \nabla \times \oint_{\ell_k} \frac{d\vec{A}_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} = \kappa I_k \oint_{\ell_j} d\vec{s}_j \cdot \oint_{\ell_k} \frac{d\vec{A}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$



$$\Rightarrow \frac{\phi_{jk}}{I_k} = \kappa \oint_{\ell_j} \oint_{\ell_k} \frac{d\vec{s}_j \cdot d\vec{A}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \equiv M_{jk} \quad (3.41)$$

Es decir que el cociente entre el flujo del campo generado por la corriente I_k y dicha corriente sólo depende de la geometría de las espiras (y del medio que las contiene: aquí $\kappa = \mu_0/4\pi$ en vacío). Este coeficiente se denomina inductancia mutua o coeficiente de inducción mutua entre las dos espiras.

$$\text{Vemos que } M_{jk} = M_{kj}, \quad (3.42)$$

ya que la expresión (3.41) es simétrica con respecto a los subíndices, un resultado conocido como teorema de Neumann. La (3.42) implica también que

$$I_j \phi_{jk} = I_k \phi_{kj} \quad (3.43)$$

para todo par (j, k) de espiras, expresión útil para el cálculo de la energía magnética, como ya veremos. También es útil para calcular M_{jk} , ya que a menudo es más fácil calcular el flujo en un sentido (p.ej. ϕ_{jk}) que en el inverso (ϕ_{kj}).

La corriente I_j genera un campo $\vec{B}_j(\vec{r})$ que también induce un flujo a través de S_j :

$$\phi_{jj} \equiv \iint_{S_j} d\vec{s}_j \cdot \vec{B}_j(\vec{r}) = \kappa I_j \iint_{S_j} d\vec{s}_j \cdot \oint_{\ell_j} \frac{d\vec{A}_j(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \equiv M_{jj} I_j.$$

Suele emplearse la notación

$$L_j \equiv M_{jj} = \phi_{jj} / I_j \quad (3.44)$$

para el coeficiente de inducción propia, denominado autoinductancia de la espira ℓ_j .

ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO

a) Coeficiente de acoplamiento:

Sean dos solenoides cilíndricos muy largos ℓ_1 y ℓ_2 tales que:

$n_{1,2}$ = número de vueltas = $n_{1,2} \cdot \ell_{1,2}$
 (número de vueltas/unidad de longitud) $\times$ (altura del cilindro); $\ell_1 = \ell_2 = \ell$;
 $A_{1,2}$ = secciones, $A_1 < A_2$ (fig. 15).

Ejercicio: verificar que $M = M_{12} = M_{21} = \mu n_1 n_2 A_1 \ell$, y que $L_1 = \mu n_1^2 A_1 \ell$, $L_2 = \mu n_2^2 A_2 \ell$. Tener en cuenta que $B_1 = 0$ fuera de la sección A_1 .

Luego, vemos que se cumple la

relación $\frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow M = k \sqrt{L_1 L_2}$ (3.45)

donde $k = \sqrt{A_1/A_2} \leq 1$ se denomina coeficiente de acoplamiento magnético y representa la fracción del flujo magnético generado por ℓ_2 (exterior) que es concatenada por ℓ_1 . La fracción $(1-k)$ es el coeficiente de pérdidas. El caso $k = 1$ define el acoplamiento perfecto.

b) Inductancias en serie:

En la fig. 16-a se muestran dos solenoides con arrollamientos iguales conectados en serie, de modo que por ambos circula una única corriente i . Con las convenciones empleadas para definir el flujo ϕ_{jk} podemos expresar el flujo magnético ϕ_1 :

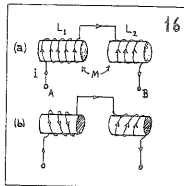
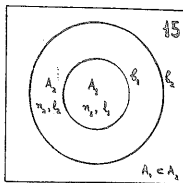
$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 i_1 + M i_2$$

y el concatenado por ℓ_2 :

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} = M i_1 + L_2 i_2, \text{ donde } M = M_{12} = M_{21}.$$

Luego, el flujo total será

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = (L_1 + L_2 + 2M) i \quad \text{ya que } i = i_1 = i_2.$$



La inductancia equivalente entre A y B será

$$L_{AB} = \phi / i = L_1 + L_2 + 2M \quad (3.46)$$

si los arrollamientos son opuestos (fig. 16-b) es obvio que

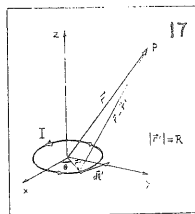
$$\phi_{12} = \phi_{21} = -M i \Rightarrow \phi = (L_1 + L_2 - 2M) i$$

y, por lo tanto $L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M. \quad (3.46a)$

MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA PUNTUAL: POTENCIAL VECTORIAL

En analogía con la discusión sobre dieléctricos del Capítulo I, prepararemos el estudio de los medios magnéticos con el cálculo del potencial vectorial de una espira o tubo cerrado de corriente de área $|S|$ muy pequeña, por la cual circula una corriente I (fig. 17).

A partir de la expresión del $\vec{A}(\vec{r})$ generado por una espira puntual se puede obtener por superposición el potencial, y a partir de éste el campo magnético $\vec{B}_m(\vec{r})$, generados por una distribución continua de espiras puntuales. Las expresiones que obtendremos se asemejan a las que resultan para dipolos puntuales en dieléctricos, razón por la que se suelen usar de manera equivalente los conceptos de espira puntual y dipolo magnético. Este modelo sencillo de los medios magnéticos permite explicar con gran aproximación muchas de sus propiedades, y se debe a Ampère, quien lo enunció para explicar el comportamiento de los imanes permanentes.



Calcularemos el potencial vectorial $\vec{A}$ en un punto P (fig. 17) ubicado en $\vec{r}$ muy alejado, tal que $|\vec{r}| = r \gg |\vec{r}'| = R$. En la fig. 17 vemos que

$$\begin{aligned} d\vec{r}' &= R d\theta (-\sin\theta, \cos\theta, 0); \\ \vec{r}' &= (x, y, z); \quad \vec{r} = R (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| &= [r^2 - 2R(x \cos\theta + y \sin\theta) + R^2]^{1/2} = \\ &= r \left[1 - \frac{2R}{r} \left(\frac{x}{r} \cos\theta + \frac{y}{r} \sin\theta \right) + \frac{R^2}{r^2} \right]^{1/2} \approx \\ &\approx r - R \left(\frac{x}{r} \cos\theta + \frac{y}{r} \sin\theta \right), \end{aligned}$$

después de haber aproximado hasta el primer grado en un desarrollo de Taylor en potencias de $R/r \ll 1$. Luego:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{Rx}{r^2} \cos\theta + \frac{Ry}{r^2} \sin\theta \right).$$

Empleando (3.26) las componentes del potencial $\vec{A}(\vec{r})$ son:

$$\begin{cases} A_x \approx \kappa I \int_0^{2\pi} d\theta \frac{R}{r} (-\sin\theta) \left(1 + \frac{Rx}{r^2} \cos\theta + \frac{Ry}{r^2} \sin\theta \right) = -\kappa I \frac{R^2 y}{r^3} \pi \\ A_y \approx \kappa I \int_0^{2\pi} d\theta \frac{R}{r} \cos\theta \left(1 + \frac{Rx}{r^2} \cos\theta + \frac{Ry}{r^2} \sin\theta \right) = +\kappa I \frac{R^2 x}{r^3} \pi \\ A_z = 0. \end{cases}$$

Como $S = \pi R^2 \Rightarrow \vec{m} = I S \hat{z}$, podemos escribir $\vec{A}$ en función del momento magnético $\vec{m}$ de la espira observando que

$$\vec{m} \times \vec{r} = (-I S y, I S x, 0) \equiv I S (-y, x, 0).$$

Entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.47)$$

expresión válida solamente para puntos muy lejanos: $r \gg R$.

Para una espira o dipolo puntual ubicada en $\vec{r}'$ el potencial se obtiene trasladando el origen, o sea haciendo $\vec{r} = \vec{r} - \vec{0} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}'$ en (3.47). Así obtenemos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa \frac{\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.48)$$

A partir de (3.48) calculamos el campo magnético:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \kappa \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m} r^2}{r^5} \quad (3.49)$$

Ejercicio: Verificar (3.49) aplicando la identidad (A.7). Definir un vector $\vec{q} = \kappa \vec{r}/r^3$ y observar que $\vec{m}$ no depende de $\vec{r}$.

Notamos que las expresiones (3.47), (3.34) y (3.49), que dan el potencial vectorial, la energía y el campo magnético de una espira puntual, son análogas a las respectivas (1.39), (1.49) y (1.43) correspondientes a un dipolo eléctrico.

DISTRIBUCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS DE CORRIENTES: DENSIDADES, POTENCIALES Y CAMPOS

Hasta aquí casi siempre hemos supuesto que las fuentes del campo magnético son distribuciones filamentarias de corriente que denominamos espiras. En la descripción de los sistemas físicos reales también conviene considerar distribuciones muy localizadas (cargas puntuales) y continuas.

El primer caso puede tratarse mediante la equivalencia (fig. 1)

$$I d\vec{r} \rightarrow dq \vec{v},$$

de modo que el potencial y el campo vendrán dados por las expresiones (3.26) y (3.10), respectivamente, en la forma:

$$\oint \vec{A}(\vec{r}) = \kappa \oint \frac{dq \vec{v}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad \oint \vec{B}(\vec{r}) = \kappa \oint \frac{dq \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.50)$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la carga dq .

En las (3.50) suponemos que $v \ll c$ (velocidad de la luz) y que las aceleraciones existentes son muy pequeñas.

Como vimos en el Cap. II, las distribuciones continuas de corrientes pueden describirse mediante la equivalencia:

$$I d\vec{r} = \vec{j} d\vec{r}. \quad (2.16)$$

El potencial $\vec{A}$ y el campo $\vec{B}$ generados en el punto $\vec{r}$ por una distribución en volumen cuya densidad de corriente es $\vec{j}(\vec{r}')$ serán, según (3.26) y (3.10):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa \int_V d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad \vec{B}(\vec{r}) = \kappa \int_V d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.51)$$

donde V es el volumen de la región que encierra las corrientes.

Una distribución continua de especial interés es la que corresponde a una superficie material, es decir a un volumen V de espesor δ despreciable en comparación con sus otras dimensiones características.

Sea ℓ una curva sobre una superficie S' (fig. 18), por donde circula una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$. La carga que atraviesa la curva ℓ por unidad de tiempo será

$$I = \iint_{S'} d\vec{S} \cdot \vec{J} = \int_{\ell} (\vec{J} \cdot d\vec{\ell}_n) \cdot \vec{J} = \int_{\ell} d\vec{\ell}_n \cdot (\vec{J} \cdot \vec{J}) = \int_{\ell} d\vec{\ell}_n \cdot \vec{g}, \text{ donde } S'' \text{ es la superficie de altura } \delta \text{ que se apoya sobre la curva } \ell \text{ (fig. 18); } d\vec{\ell}_n \equiv \hat{n} d\ell \text{ es el elemento de longitud normal a } \ell, \text{ tal que } d\vec{S} = d\vec{\ell}_n \delta \text{ y la cantidad}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \delta \quad (3.52)$$

es la densidad superficial de corrientes, definida de tal manera que

$$I = \int_{\ell} d\vec{\ell}_n \cdot \vec{g} \quad (3.53)$$

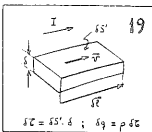
con unidades $[g] = [I]/[L] = A/m$.

Para esta distribución superficial de corriente (2.16) toma ahora la forma

$$\vec{J} d\vec{r} = (\vec{J} \cdot \vec{e}) d\vec{r} = \vec{g} ds'$$

donde aquí ds' es el área de la cara del elemento de volumen $d\vec{r}$ medida sobre la superficie S' (ver fig. 18 y 19). Luego, el potencial $\vec{A}$ y el campo magnético $\vec{B}$ toman la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa \iint_{S'} \frac{\vec{g}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad \vec{B}(\vec{r}) = \kappa \iint_{S'} \frac{\vec{g}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.54)$$



Conviene resumir las múltiples formas del elemento de corriente, cuyos parámetros se muestran en la fig. 19:

$$\delta q d\vec{r} = I \delta \vec{\ell} = \vec{g} dS = \vec{J} dV \quad (3.55)$$

DISTRIBUCION CONTINUA DE MOMENTOS MAGNETICOS PUNTALES: DENSIDADES EQUIVALENTES DE CORRIENTE

Una distribución continua de espiras conductoras puntuales describe con buena aproximación el comportamiento de un cuerpo material, formado por átomos, cada uno de los cuales tiene un momento magnético muy pequeño. Un elemento de volumen δV dentro del cuerpo tendrá un momento magnético neto $\delta \vec{m}$, y podemos definir una cantidad $\vec{m}_v$ llamada magnetización tal que

$$\delta \vec{m} = \vec{m}_v \delta V$$

que mide la densidad de momento magnético por unidad de volumen.

Sea S la superficie exterior del cuerpo en cuestión, superficie que encierra a todos los momentos $\delta \vec{m}$ (fig. 20), y supongamos que la densidad de corriente es nula ($\vec{J} = 0$).

El potencial vectorial $\vec{A}$ generado en un punto $\vec{r}$ por la distribución de momentos magnéticos será la suma de contribuciones dadas por (3.48):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_k \kappa \frac{\delta \vec{m}_k \times (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \longrightarrow \kappa \int_{V(S)} \frac{\vec{m}_v(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV(S)$$

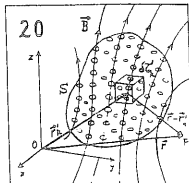
donde aparece el vector $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$, de acuerdo con

lo ya demostrado en (1.23), siendo $\nabla' = (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')$ el gradiente con respecto a las variables primadas, que señalan las posiciones de las fuentes.

Aplicando la identidad (A.9) al integrando tenemos:

$$\vec{m}_v \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla' \times \left(\frac{\vec{m}_v}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) + \frac{\nabla' \cdot \vec{m}_v}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

cuyo primer término da una contribución a $\vec{A}(\vec{r})$ de la forma



$$-\int_V d\tau' \nabla' \times \frac{\vec{m}_V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\oint_S d\vec{S}' \times \frac{\vec{m}_V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = +\oint_S d\vec{S}' \frac{\vec{m}_V \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

después de haber empleado la identidad (A.14) con $d\vec{S}' = dS' \hat{n}$.
Luego,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa \oint_S d\vec{S}' \frac{\vec{m}_V \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \kappa \int_V d\tau' \frac{\nabla' \times \vec{m}_V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.56)$$

Podemos comparar el primer término de (3.56) con la expresión (3.54), y el segundo término con la (3.51), que describen los potenciales vectoriales generados en $\vec{r}$ por una distribución superficial de corrientes (con densidad $\vec{g}_A$) y una distribución en volumen (con densidad $\vec{J}_A$), respectivamente.

Es decir que el potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dado por (3.56) es el que corresponde a una distribución de corrientes con densidades equivalentes:

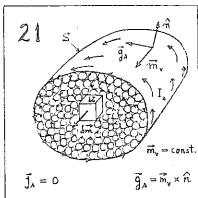
$$\text{En superficies: } \vec{g}_A = \vec{m}_V \times \hat{n} = -\hat{n} \times \vec{m}_V \quad (3.57)$$

$$\text{En volumen: } \vec{J}_A = \nabla \times \vec{m}_V. \quad (3.58)$$

donde el subíndice (A) se refiere a su denominación habitual como corrientes de Ampère (también se las llama corrientes de magnetización).

La interpretación física de las expresiones (3.57) y (3.58) es inmediata. Las densidades de corriente $\vec{g}_A$ y $\vec{J}_A$ son reales ya que, si

bien no representan transporte neto de carga, generan un potencial $\vec{A}$ y un campo magnético. En la fig. 21 vemos cómo aparece la corriente superficial neta, normal a la magnetización $\vec{m}_V$ y al vector $\hat{n}$, para el caso de magnetización uniforme. En este caso las corrientes interiores a S de espiras adyacentes se anulan (el fenómeno es análogo a la tensión superficial en líquidos y a las densidades superficiales de carga que vimos



al estudiar los dieléctricos).

Si la magnetización no es uniforme, en un elemento de volumen como $d\tau$ (fig. 21) el momento magnético neto $\oint \vec{m}$ no es cero y hay una densidad en volumen resultante $\vec{J}_A \neq 0$.

Es evidente que la suma de todas las corrientes de Ampère es nula, ya que

$$\oint_S d\vec{S} \vec{g}_A + \int_V d\tau \vec{J}_A = -\oint_S d\vec{S} \times \vec{m}_V + \int_V d\tau \nabla \times \vec{m}_V = 0 \quad (3.59)$$

como se ve aplicando las definiciones (3.57) y (3.58), además de la identidad (A.14). El resultado (3.59) es análogo al hallado para la carga total Q_t en dieléctricos (ver discusión después de 1.97).

Las corrientes microscópicas que generan la magnetización se deben a dos procesos: los movimientos orbitales de los electrones alrededor del núcleo de cada átomo, y los momentos magnéticos intrínsecos (espines) de los electrones. El espín suele asociarse a la rotación propia de cada electrón en torno de su eje. Al analizar cada tipo de medio magnético veremos qué papel juega cada uno de estos procesos microscópicos.

El campo magnético generado por estas corrientes, al que denominaremos $\vec{B}_m$, se deriva inmediatamente de (3.56). En un punto interior de una distribución continua de espiras conductoras (o dipolos puntuales) el potencial vectorial en ausencia de corrientes macroscópicas es

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \kappa \int_V d\tau' \frac{\vec{J}_A(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.60)$$

suponiendo que la superficie S está suficientemente alejada de $\vec{r}$ (los efectos de las corrientes superficiales $\vec{g}_A$ se pueden incluir en la 3.60 mediante una transformación del tipo $d\vec{S}' \vec{g}_A \rightarrow d\tau' \vec{J}_A$). El rotor de $\vec{A}_m$ sólo opera sobre el integrando, y resulta:

$$\nabla \times \frac{\vec{J}_A(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{J}_A(\vec{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = +\vec{J}_A \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

después de aplicar (A.9) y (1.22).

Luego,

$$\vec{B}_m = \nabla \times \vec{A}_m = \kappa \int_V d\tau' \vec{J}_A(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.61)$$

que es análoga a la expresión dada en (3.51) para el campo generado por una distribución de corrientes macroscópicas o verdaderas $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_v(\vec{r})$. Estas corrientes representan transporte neto de cargas no ligadas.

FUERZA MAGNETOMOTRIZ E INTENSIDAD MAGNETICA $\vec{H}$

Supongamos que en una región del espacio totalmente ocupada por un material magnético cuya magnetización es $\vec{M}_v$, hay corrientes macroscópicas de densidad $\vec{J}_v$. El potencial y el campo magnético totales serán la suma de las contribuciones de ambos tipos de fuentes:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}_v + \vec{A}_m \implies \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_v + \vec{B}_m. \quad (3.62)$$

En el caso magnetostático ($\partial_t = 0$) hemos visto que el campo $\vec{B}_v$ satisface la ecuación

$$\nabla \times \vec{B}_v = \mu_0 \vec{J}_v, \quad (3.39)$$

válida para un campo $\vec{B}_v$ generado por corrientes $\vec{J}_v$ según la expresión (3.51). En consecuencia, a partir de (3.61) se deduce inmediatamente (observando la dualidad: $\vec{B}_v \longleftrightarrow \vec{B}_m$, $\vec{J}_v \longleftrightarrow \vec{J}_A$) que

$$\nabla \times \vec{B}_m = \mu_0 \vec{J}_A, \quad (3.63)$$

que es la forma local del teorema circuital de Ampère para las corrientes de magnetización.

Luego,

$$(3.62) \implies \nabla \times \vec{B} = \nabla \times \vec{B}_v + \nabla \times \vec{B}_m = \mu_0 (\vec{J}_v + \vec{J}_A) \quad (3.64)$$

donde $\vec{J}_A = \nabla \times \vec{M}_v \implies \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}_v \right) = \vec{J}_v$.

En un medio magnético suele conocerse la relación entre la magnetización $\vec{M}_v$ y el campo total $\vec{B}$, de modo que resulta conveniente definir un campo vectorial auxiliar

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}_v \quad (3.65)$$

que, por lo tanto, satisface la condición

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v \quad (3.66)$$

Es decir que las fuentes del campo $\vec{H}$, llamado intensidad o excitación magnética, son las corrientes verdaderas.

La relación (3.65) se puede escribir en la forma

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_v) \quad (3.67)$$

El teorema circuital de Ampère, que para $\vec{B}$ toma la forma (3.38), se puede expresar para la circulación de la excitación $\vec{H}$ a lo largo de una curva ℓ como

$$\oint_{S(\ell)} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{H} = \oint_{\ell} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \iint_{S(\ell)} d\vec{S} \cdot \vec{J}_v = I_v$$

o sea

$$f_{mm} \equiv \oint_{\ell} d\vec{r} \cdot \vec{H} = I_v \quad (3.68)$$

donde hemos denominado fuerza magnetomotriz $\equiv f_{mm}$ a la circulación de $\vec{H}$, que resulta ser igual a la suma algebraica de las corrientes verdaderas concatenadas (o enlazadas) por la curva ℓ .

Unidades: de (3.65) y (3.68) resulta:

$$[\vec{M}_v] = [H] \ni [L][H] = [I] \implies [M_v] = [H] = [I]/[L] = A/m.$$

Para un solenoide de N vueltas suele usarse la unidad adimensional "vueltas", de modo que

$$f_{mm} = NI \implies [f_{mm}] = A \times \text{vueltas} \implies [H] = A \cdot v/m.$$

POTENCIAL ESCALAR MAGNETICO

En ausencia de corrientes verdaderas, la (3.66) toma la forma

$$\nabla \times \vec{H} = 0.$$

Luego, debe existir una función escalar cuyo gradiente sea igual a $\vec{H}$. Llamaremos W a este escalar que satisface la condición

$$\vec{H} = -\nabla W, \quad (3.69)$$

cantidad que se conoce como potencial escalar magnético. $W(\vec{r})$ es el análogo del potencial escalar electrostático definido en (1.10) y, como aquél, está definido a menos de una constante arbitraria, cuyo valor se determina como en el caso electrostático a partir de las

condiciones de contorno de cada problema.

La conservación del flujo magnético, expresada por la condición (3.28), implica que

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} &= \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} + \mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_V = 0 \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \vec{M}_V\end{aligned}\quad (3.70)$$

En un medio con magnetización $\vec{M}_V$ uniforme (en particular, en el vacío) la (3.70) se anula y resulta

$$-\nabla \cdot \vec{H} = \nabla^2 W = 0 \quad (3.71)$$

que es la ecuación de Laplace para el potencial escalar magnético. Naturalmente, todos los métodos empleados en Electroestática y en Mecánica para resolver esta ecuación se utilizan en este caso.

Pero debemos recordar que $W(\vec{r})$ sólo está definido en los puntos $\vec{r}$ donde no hay corrientes verdaderas: $\vec{J}_V = 0$.

Ejercicio: Demostrar, empleando (3.69), que el potencial escalar generado por una magnetización no uniforme $\vec{M}_V(\vec{r})$ es

$$W(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \cdot \vec{M}_V(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}'|^3 \quad (3.72)$$

Aplicar el teorema de Helmholtz (ec. 35 y 36) con $\rho = -\nabla \cdot \vec{M}_V$ y utilizar las identidades (A.6) y (A.12). Observar la analogía de (3.72) con su similar electrostática para $V_d(\vec{r})$.

MEDIOS MAGNETICOS: SUSCEPTIBILIDAD MAGNETICA

En general, un medio magnético puede ser anisótropo (e.g. cristales, plasmas), de modo que las componentes del campo magnético $\vec{B}$ y de la excitación $\vec{H}$ están relacionadas linealmente para cada valor de $|\vec{H}|$ por una matriz de permeabilidad $\vec{\mu}$ tal que

$$\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}$$

$$\text{o sea } B_\ell = \sum_{m=1}^3 \mu_{\ell m} H_m \quad (\ell = 1, 2, 3).$$

Si el medio es inhomogéneo: $\vec{\mu} = \vec{\mu}(\vec{r})$, análogamente al caso electrostático ($\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E}$). Notemos que, mientras en la realidad $\vec{B}$ desempeña el papel de $\vec{E}$ (ambos campos tienen por fuentes las corrientes y cargas totales, respectivamente), y que $\vec{H}$ es la contraparte magnética de $\vec{D}$ (ambos tienen por fuentes las corrientes y cargas libres), al haber

definido $E \sim k \sim 1/\epsilon_0$, mientras que $B \sim k \sim \mu_0$ (en el vacío), la dualidad algebraica toma la forma:

$$B = \mu H \longleftrightarrow D = \epsilon E. \quad (3.73)$$

Para materiales isotrópicos, como lo son la mayoría de los sólidos, líquidos y gases:

$$\mu_{\ell m} = \mu \delta_{\ell m} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}} \quad (3.74)$$

Luego, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_V = \mu \vec{H}$ según vimos en la (3.67)

$$\Rightarrow \vec{M}_V = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right) \vec{H} = (\mu/\mu_0 - 1) \vec{H} \equiv \chi_m \vec{H} \quad (3.75)$$

donde $\mu = \text{permeabilidad} = \mu_0 (1 + \chi_m)$ (3.76)

$$\chi_m = \text{susceptibilidad magnética}$$

$$\kappa_m \equiv \mu/\mu_0 = \text{coeficiente magnético (permeabilidad relativa)}.$$

En el vacío $\chi_m = 0 \Rightarrow \mu = \mu_0$, y las líneas de campo de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ coinciden en todo punto.

En general, $\vec{H}$ depende sólo de las fuentes verdaderas ($\vec{J}_V$), y $\vec{M}_V$ representa la respuesta de los dipolos magnéticos (espiras puntuales), que tienden a alinearse con el campo exterior aunque, a diferencia del caso electrostático, no siempre $\vec{M}_V \parallel \vec{B}$, como ya veremos.

Para ciertos materiales la contribución al campo total de la magnetización supera en mucho a la de la excitación, es decir que

$$\vec{M}_V \gg \vec{H}$$

para ciertos rangos de valores de H . Es el caso de los medios llamados ferromagnéticos, que se caracterizan por:

$$1) \chi_m \gg 1;$$

2) $\chi_m = \chi_m(H)$, o sea que la relación entre $\vec{B}$ y $\vec{H}$ deja de ser lineal, e incluso uniforme (a un valor de H le pueden corresponder muchos valores de B , según la historia del material). A pesar de la composición cristalina de estos medios, el gran número de cristales microscópicos que los forman, al estar orientados al azar, producen un comportamiento macroscópico isotrópico. En resumen, en estos medios no lineales (ver fig. 38):

$$3) \vec{B} \parallel \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}/H \neq \text{const.} \quad (3.77)$$

Los medios lineales se clasifican, según su susceptibilidad, en:

- paramagnéticos: $\chi_m > 0$
 - diamagnéticos: $\chi_m < 0$

En presencia de un campo exterior $\vec{B}_{ext}$, los dipolos se alinean paralelamente al campo en los primeros, y antiparalelamente a $\vec{B}_{ext}$ en los segundos.

Veremos que en campos no uniformes los paramagnéticos son atraídos por las regiones de campo más intenso, en tanto los diamagnéticos son repelidos por las mismas.

Los materiales más típicos, con sus valores de χ_m a la derecha, se indican a continuación:

a) Diamagnéticos:

	χ_m
He, H ₂ (gases)	-2,2 a -1,1 x 10 ⁻⁹
Ar (gas)	-5 x 10 ⁻⁷
H ₂ O (líquida)	-1,5 a -1 x 10 ⁻⁶
Bi (sólido)	-1,7 x 10 ⁻⁴

Los superconductores se comportan como diamagnéticos perfectos por debajo de la temperatura de transición T_c (Cap. II, ec. 2.29). En efecto, experimentalmente se observa que, al colocar una porción de material superconductor en un campo magnético $\vec{B}$ a una temperatura $T > T_c$, al bajar la temperatura por debajo de T_c el campo total en el interior del material se anula y el flujo $\oint$ en el exterior del mismo se modifica (efecto Meissner). Es decir que, según (3.75), dentro del material tenemos

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \approx 0 \Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H} \approx -\vec{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_m \approx -1} \quad \text{para } T < T_c \quad (3.78)$$

Este diamagnetismo extremo es una propiedad esencial de los superconductores, como lo prueba el hecho de que un campo magnético intenso (tal que $H > H_c$ = excitación crítica) destruye la superconductividad.

Los plasmas (gases ionizados que alcanzan ese estado a muy altas temperaturas) exhiben un diamagnetismo típico que comentaremos al discutir la ley de Lenz, más adelante.

b) Paramagnéticos:

	χ_m
O ₂ (gas)	+2 x 10 ⁻⁶
Na, Al (sólidos)	0,9 a 2,1 x 10 ⁻⁵

Pt, Pd (sólidos)	2,9 a 8,2 x 10 ⁻⁴
Gd, Sm (sólidos)	~0,5 a 1
Ho, Dy (sólidos)	~10

Notamos que ciertos metales del grupo denominado "tierras raras" (gadolinio, samario, holmio, disprosio) presentan valores altísimos de la susceptibilidad, por lo que también se los suele agrupar junto con los ferromagnéticos.

c) Ferromagnéticos:

Como la susceptibilidad $\chi_m \gg 1 \Rightarrow K_m = \mu/\mu_0 = \chi_m + 1 \approx \chi_m$.

Aquí conviene definir valores típicos del coeficiente K_m (ya que éste varía con la excitación H aplicada). Para valores muy bajos de H se define la permeabilidad inicial (K_{in}), mientras que la permeabilidad máxima (K_{max}) define el valor máximo que llega a alcanzar el cociente B/H .

Además del hierro, el cobalto y el níquel, hay numerosas aleaciones ferromagnéticas con distintas propiedades.

Material	K_{in}	K_{max}
Fe (0,2 % de impurezas)	150	5.000
Fe (0,05 % de impurezas)	10 ⁴	2 x 10 ⁵
Fe - Si (3 % de silicio)	7.000	5 x 10 ⁴
Ni (1 % de impurezas)	110	600
Permalloy 4/79 (79 % Ni, 4 % Mo)	2 x 10 ⁴	10 ⁵
Supermalloy 5/79 (79 % Ni, 5 % Mo)	10 ⁵	10 ⁶

Observemos que las impurezas disminuyen la permeabilidad. Los cristales puros tienen valores muy altos de K_m como veremos.

MOMENTO MAGNETICO ORBITAL Y ESPIN

Los electrones en un átomo giran en órbitas aproximadamente planas y circulares alrededor de un núcleo casi puntual 0 (fig. 22). Podemos calcular la corriente I que circula en una órbita, que será igual a la carga que pasa por un punto de dicha órbita por unidad de tiempo:

$$I = \frac{-e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi}$$

donde $-e$ = carga del electrón

$\tau = 2\pi/\omega$ = período de revolución del electrón en su órbita

$\omega = v/r$ = velocidad angular del electrón = veloc. tangencial / radio orbital

La superficie orientada que encierra el electrón en su giro es $\vec{S} = \pi r^2 \hat{\omega}$

donde $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$ (fig. 22). Luego, el momento magnético orbital $\vec{m}_0$ viene dado, según (3.21), por

$$\vec{m}_0 = I \vec{S} = -\frac{e\omega}{2\pi} \cdot \pi r^2 \hat{\omega} = -\frac{e}{2} r^2 \hat{\omega} \quad (3.79)$$

Por su parte, el impulso angular orbital es

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{m} = \vec{m} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m r^2 \hat{\omega}, \quad (3.80)$$

luego de haber aplicado la identidad (A.2) con $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$ (m es la masa del electrón). De (3.79) y (3.80) resulta

$$\vec{m}_0 = -\frac{e}{2m} \vec{L}_0 \quad (3.81)$$

Los valores medidos del momento magnético orbital $\vec{m}_0$ son del orden de una cantidad llamada magneton de Bohr

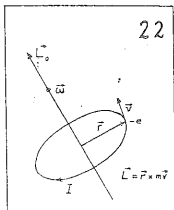
$$\mu_B \approx 9,3 \times 10^{-24} \text{ Am}^2.$$

El movimiento del electrón alrededor de su eje daría lugar a un momento magnético $\vec{m}_s$ y a un impulso angular $\vec{L}_s$, llamado espín. En realidad, esta descripción clásica sencilla no es válida y, en lugar de la relación (3.81) el momento magnético y el impulso correspondiente están ligados por la relación

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m} \vec{L}_s \quad (3.82)$$

Dejando de lado la imagen de la rotación del electrón, se dice que el espín representa el impulso angular intrínseco.

El efecto del espín no puede dejar de tenerse en cuenta, pues μ_B es del mismo orden de magnitud que el momento orbital μ_0 . El momento magnético total de un átomo, que notaremos como $\vec{m}_t$, es decir la suma de los momentos (orbitales y de espín) de todos sus electrones,



22

resulta ser proporcional al impulso angular total $\vec{L}_t$:

$$\vec{m}_t = g \left(-\frac{e}{2m} \right) \vec{L}_t \quad (3.83)$$

donde g es el llamado factor de Landé. Para $\vec{m}_t$ de origen puramente orbital $g = 1$, mientras que para $\vec{m}_t$ generado sólo por espines $g = 2$. En general g suele tomar valores comprendidos entre 1 y 2.

DIAMAGNETISMO: MODELO SEMICLÁSICO

Bohr (1913) dio una descripción sencilla y esencialmente válida del diamagnetismo. Sea un átomo ubicado en una región de campo magnético $\vec{B}$ (fig. 23). Consideremos un electrón cuya órbita tiene impulso angular $\vec{L}_0$ y momento magnético $\vec{m}_0$, relacionados por (3.81). La presencia del campo exterior $\vec{B}$ genera una cupla dada por (3.25):

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M} = \vec{m}_0 \times \vec{B} = +\frac{e\vec{B}}{2m} \times \vec{L}_0$$

donde podemos definir una velocidad angular

$$\vec{\omega}_p = \frac{e\vec{B}}{2m} \quad (3.84)$$

con $\vec{B} = B\hat{B} \Rightarrow \vec{\omega}_p = \omega_p \hat{B}$, siendo $\omega_p = \omega_p/2\pi$ la llamada frecuencia de Larmor.

Luego,

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}_0 \quad (3.85)$$

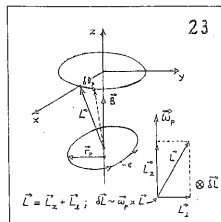
y eligiendo un referencial fijado al campo magnético con $\hat{e} \equiv \hat{B}$ (fig. 23) tenemos

$$\vec{L}_p = \omega_p \hat{e} \Rightarrow \vec{\omega}_p \times \vec{L}_0 = -\omega_p L_y \hat{x} + \omega_p L_x \hat{y} \quad (3.86)$$

(verificarlo), y la (3.85) se expresa como

$$\frac{dL_x}{dt} = -\omega_p L_y; \quad \frac{dL_y}{dt} = \omega_p L_x; \quad \frac{dL_z}{dt} = 0.$$

La tercera ecuación implica que $L_z = \text{const.}$, mientras que de las dos



23

primeras resulta:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_p} \frac{dL_y}{dt} \right) = \frac{1}{\omega_p} \frac{d^2 L_y}{dt^2} = -\omega_p L_y \implies \frac{d^2 L_y}{dt^2} + \omega_p^2 L_y = 0$$

y análogamente: $\frac{d^2 L_x}{dt^2} + \omega_p^2 L_x = 0$.

Estas ecuaciones, del tipo de la que describe a un oscilador armónico, tienen las soluciones conocidas:

$$L_x(t) = L_{\perp} \cos(\omega_p t + \varphi); \quad L_y(t) = L_{\perp} \sin(\omega_p t + \varphi),$$

donde (fig. 23): $L^2 = |\vec{L}|^2 = L_x^2 + L_y^2$, o sea $L_{\perp}^2 = L_x^2 + L_y^2$. Es decir que el vector $\vec{L}$ precesa alrededor del eje z, que es la dirección del campo magnético. Este movimiento, similar al que realiza un trompo, se denomina precesión de Larmor.

A partir de (3.85) es evidente que en un intervalo de tiempo δt , la variación en la componente normal $\vec{L}_{\perp}$ será (fig. 23):

$$\delta \vec{L}_{\perp} \sim \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

de modo que, al final de cada órbita girada, un electrón no volverá a pasar por la misma posición inicial (la que tenía al comienzo de esa órbita), sino que en el referencial fijo al campo $\vec{B}$, habrá girado en un ángulo adicional $\delta \theta_p$ debido a la precesión

$$\delta \theta_p \approx \omega_p \zeta,$$

donde ζ es el período orbital. Como siempre se cumple que $\omega_p \ll \omega$, resulta que $\delta \theta_p \ll 1$. Este giro adicional tendrá un radio $\vec{r}_p$, medido desde el eje de precesión z, y un correspondiente impulso angular:

$$\vec{L}_p = \vec{r}_p \times m(\vec{\omega}_p \times \vec{r}_p) = m r_p^2 \vec{\omega}_p,$$

que dará lugar a un momento magnético de precesión que calculamos a partir de $\vec{L}_p$ empleando (3.81) y (3.84):

$$\vec{\mu}_p = -\frac{e}{2m} \vec{L}_p = -\frac{e r_p^2}{2} \vec{\omega}_p = -\frac{e^2 \hbar^2}{4m} \vec{B}. \quad (3.86)$$

Si un átomo no tiene momento magnético neto ($\vec{\mu}_a = 0$ en 3.83), su comportamiento en un campo magnético será diamagnético, ya que habrá

un momento magnético inducido por el campo $\vec{B}$, que estará dado por la suma de las contribuciones de la forma (3.86) de cada electrón en su precesión en torno de $\vec{B}$, o sea

$$\vec{\mu}_{at} = \sum_{j=1}^Z (\vec{\mu}_p)_j = \sum_j \left(-\frac{e^2 \hbar^2}{4m} \frac{1}{r_j^2} \right) \vec{B} = -\frac{e^2 \hbar^2}{4m} \left(\sum_j \frac{1}{r_j^2} \right) \vec{B} \quad (3.87)$$

donde Z = número atómico del elemento = número de electrones;

r_j = radio de precesión r_p del electrón j -ésimo.

Es obvio que los factores $e^2/4m$ y $\sum_j \frac{1}{r_j^2}$ son definidos positivos, de modo que (3.87) expresa que el momento magnético inducido se opone al campo $\vec{B}$.

Definiendo un valor cuadrático medio del radio de precesión R_{ef}

tal que

$$Z R_{ef}^2 = \sum_j r_j^2$$

resulta

$$\vec{\mu}_{at} = -\left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{4m} R_{ef}^2 \right) \vec{B} = -\alpha_d \vec{B} \quad (3.88)$$

donde α_d representa la cantidad positiva entre paréntesis (tal que $\vec{\mu}_{at} // -\vec{B}$) y el campo $\vec{B}$ es el que actúa sobre el átomo en cuestión, es decir el campo magnético interior $\vec{B}_i$, definido para la cavidad que rodea al átomo (de manera análoga al caso electrostático).

Para estimar el $\vec{B}_i$ para una cavidad esférica podemos repetir el razonamiento previo a (1.112), o bien aprovechar la dualidad comentada en (3.73). Más precisamente:

$$\text{En Electrostática: } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{D} - \vec{p}_v) \implies \vec{E}_i = \vec{E} + \frac{\vec{p}_v}{3\epsilon_0} \quad (1.112)$$

donde el 3 en el denominador corresponde a una cavidad esférica.

En Magnetostática, según (3.73), el dual algebraico de $\vec{E}$ es $\vec{H}$:

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}_v)$, o sea que el rol de $\vec{p}_v$ lo ocupa $\mu_0 \vec{M}_v$ (esto se debe a la inclusión de μ_0 en la definición de la magnetización $\vec{M}_v$).

Luego, a (1.94) le corresponde su dual magnetostática:

$$\vec{H}_i = \vec{H} + \frac{(\mu_0 \vec{M}_v)}{3\mu_0} = \vec{H} + \frac{\vec{M}_v}{3} \quad (3.89)$$

en la cual $\vec{H}$ es la excitación magnética macroscópica (la que actúa sobre un elemento de volumen δV) y $\vec{H}_i$ es la que llamaremos excitación

microscópica, que es la que actúa sobre un átomo u otro dipolo puntual, y que calculamos en el centro de una cavidad.

Luego, teniendo en cuenta que la cavidad está vacía:

$$\vec{B}_i = \mu_0 \vec{H}_i = \mu_0 \vec{H} + \frac{\mu_0}{3} \vec{m}_v. \quad (3.90)$$

A partir de (3.88) calculamos la magnetización

$$\vec{m}_v = \frac{\partial \bar{m}}{\partial \vec{L}} = \frac{\partial N}{\partial \vec{L}} \vec{m} = n \vec{m}_{at} = -n \alpha_d \vec{B}_i$$

donde $n = dN/d\vec{L}$ es la densidad numérica de átomos por unidad de volumen. Luego (3.75) $\Rightarrow$

$$\vec{m}_v = \chi_m \vec{H} = -n \alpha_d \vec{B}_i = -n \alpha_d \left(\mu_0 \vec{H} + \frac{\mu_0}{3} \chi_m \vec{H} \right)$$

$$\Rightarrow \chi_m = -n \mu_0 \alpha_d \left(1 + \frac{\chi_m}{3} \right) = -n \mu_0 \alpha_d - n \mu_0 \frac{\alpha_d}{3} \chi_m$$

$$\therefore \chi_m = \frac{-\mu_0 \alpha_d n}{1 + \frac{\mu_0 \alpha_d}{3} n} = \frac{-3(\mu_0 Z e^2 R_{ef}^2) n}{12m + (\mu_0 Z e^2 R_{ef}^2) n} < 0 \quad (3.91)$$

Esta expresión permite calcular el radio medio de precesión R_{ef} a partir del valor medido de la susceptibilidad χ_m , ya que μ_0 , e , m son constantes universales, y Z , n se conocen para cada elemento. Resulta ser $R_{ef} \sim 0,1 \text{ \AA} = 10^{-11} \text{ m}$.

PARAMAGNETISMO

Si, contrariamente al caso recién estudiado, un átomo posee un momento magnético permanente $\vec{m}_t \neq 0$ dado por (3.83), cuando aplicamos un campo $\vec{B} \neq 0$ actúa un momento

$$\vec{M} = \vec{m}_t \times \vec{B} \quad (3.25)$$

que tiende a alinear a $\vec{m}_t$ paralelamente al campo magnético.

Si el átomo en cuestión estuviera totalmente aislado, la variación del impulso angular total estaría dada por

$$\frac{d\vec{L}_t}{dt} = \vec{m}_t \times \vec{B} = -\frac{g e}{2m} \vec{L}_t \times \vec{B} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \times \vec{L}_t = g \vec{\omega} \times \vec{L}_t \quad (3.92)$$

donde μ_0^d es la frecuencia de Larmor y g el factor de Landé.

La (3.92) se interpreta de la misma forma que (3.85), y el movimiento resultante es la precesión del átomo en torno de las líneas de campo. $\vec{B}$ no realiza trabajo y la energía del átomo $U_{mag} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ se mantiene constante.

En un medio magnético el átomo no está aislado (aquí $\vec{B} = \vec{B}_i =$ campo interior, al cual contribuye la magnetización), y las colisiones u otros modos de interacción entre los átomos hacen variar la energía. Si θ es el ángulo entre $\vec{m}$ y $\vec{B}$, tal que

$$U_{mag} = -m B \cos \theta \quad (3.34)$$

las pérdidas por colisiones disminuyen la energía magnética hasta que ésta alcanza un mínimo, para $\theta \rightarrow 0$. La consecuencia de este proceso será la alineación de los momentos con el campo magnético, de la cual resulta un valor de $\chi_m > 0$.

El modelo semiclásico de Langevin, que explica con buena aproximación el paramagnetismo, requiere emplear la Mecánica Estadística para estimar la magnetización media, obteniéndose la expresión:

$$m_v = n m_t (\coth x - 1/x)$$

donde n es la densidad numérica de átomos y $x = (m_t B_i)/(kT)$, con $k = \text{const. de Boltzmann}$, $T = \text{temperatura absoluta}$ (ver 2.14). Para valores normales del campo B y la temperatura T resulta $x \ll 1$ y por lo tanto

$$\coth x - 1/x \approx x/3 \Rightarrow m_v \approx n m_t^2 B_i / 3kT = \mu_0 n m_t^2 H_i / 3kT.$$

Definiendo una temperatura (llamada de Curie):

$$T_c = \frac{\mu_0 n m_t^2}{g K} \Rightarrow m_v = 3 \frac{T_c}{T} H_i \quad (3.93)$$

donde, según (3.89), $H_i = H + m_v/3$

$$\Rightarrow m_v = \chi_m H = 3 \frac{T_c}{T} (H + m_v/3) = 3 \frac{T_c}{T} H + \frac{T_c}{T} \chi_m H$$

$$\therefore \chi_m (1 - \frac{T_c}{T}) = 3 \frac{T_c}{T} \Rightarrow \chi_m = \frac{3 T_c}{T - T_c} > 0 \quad (3.94)$$

Esta relación, válida para $T > T_c$, no sólo difiere de la (3.91) en el signo de χ_m , sino en la forma del denominador, que en (3.94) permite un rápido crecimiento de $\chi_m = \mu_0 / \mu_i = 1 + \chi_m$ para $T \rightarrow T_c$.

Weiss hizo notar la necesidad de emplear el valor H_1 en lugar del campo macroscópico H en (3.93), y el resultado (3.94) se conoce como la ley de Curie y Weiss. Cuando la temperatura decrece hasta alcanzar el valor crítico T_c , el modelo deja de valer y en algunos casos se pasa de un comportamiento paramagnético a otro ferromagnético (con $\chi_m \gg 1$). En realidad, T_c es algo más alta que la temperatura a la cual el ferromagnetismo desaparece cuando se calienta un medio que presenta esa propiedad.

FERROMAGNETISMO

Las propiedades más características de los materiales ferromagnéticos son: una susceptibilidad muy elevada ($\chi_m \gg 1$) y la existencia de magnetización residual, es decir la posibilidad de tener $m_v \neq 0$ con $H = 0$. No existe una teoría clásica adecuada para explicar este fenómeno. Sin embargo, muchas de las propiedades observadas se pueden explicar mediante el modelo de Weiss que resumiremos a continuación.

Weiss (1907) propuso la expresión (3.89) para el campo efectivo que actúa sobre un dipolo, que toma la forma más general

$$H_1 = H + \alpha m_v \quad (3.95)$$

donde α , llamado coeficiente molecular de campo, depende de la sustancia en cuestión. El segundo término en (3.95) es proporcional a la magnetización existente en el medio y, en consecuencia, todo aumento en m_v dará lugar a un aumento en la cupla (3.25) que tiende a alinear los dipolos con el campo. Cada dipolo alineado aumentará la magnetización y también aumentará el momento (cupla) responsable de la alineación. Se dice que se produce un efecto acumulativo donde, una vez iniciada la alineación local de dipolos, la magnetización puede sobrevivir aun después de desaparecida la excitación exterior H .

Este proceso se conoce como magnetización espontánea, ya que basta con que aparezca localmente un valor muy pequeño de H para que el efecto acumulativo tenga lugar. Solamente puede ocurrir para algunos materiales y para $T < T_c$ (dada por 3.93, aproximadamente). Algunos valores de la temperatura de Curie son: 770°C para el hierro, 1131 para el cobalto y 358 para el níquel.

En su estado natural las sustancias ferromagnéticas no presentan

magnetización, en aparente contradicción con este modelo. Para explicar el hecho, Weiss postuló la existencia de dominios, definidos como regiones muy pequeñas, dentro de las cuales la magnetización es prácticamente completa, es decir que

$$\vec{M} = n \vec{m}_i \quad \text{y} \quad \vec{\mathcal{M}} = \int \vec{M} d\mathcal{V} \quad (3.96)$$

donde $\mathcal{V}$ es el volumen del dominio y $\vec{\mathcal{M}}$ su momento magnético total. La (3.96) equivale a decir que todos los dipolos de un mismo dominio están alineados en la misma dirección.

La dirección de la magnetización espontánea varía de un dominio al otro de manera que, en ausencia de excitación $\vec{H}$ exterior, el momento magnético total del material es nulo. Cuando se aplica una excitación $\vec{H} \neq 0$ los dominios se alinean con $\vec{H}$ y la magnetización crece hasta alcanzar valores muy elevados. Si se apaga dicha excitación los dominios no vuelven a sus orientaciones iniciales, y así se explica la existencia de la magnetización residual.

Los efectos descritos tienen lugar cuando:

- La configuración electrónica del átomo (o sea la distribución de los electrones en órbitas o capas) tiene espines no compensados entre sus electrones internos, es decir que hay un momento $\sum_i (\vec{m}_i)_z$ neto.
- La distancia entre los iones de un cristal tiene una cierta relación crítica con el diámetro atómico, favorable al proceso de alineación.

Quando se aumenta la temperatura, la distancia entre los iones aumenta y la alineación de los momentos no se produce, lo cual explica la desaparición del ferromagnetismo para $T > T_c$.

Los dominios de Weiss tienen existencia real, como se observa colocando una suspensión coloidal de polvo de hierro sobre una superficie de hierro pulido: las partículas de polvo se concentran formando una red de líneas que coinciden con los contornos de los dominios. Las dimensiones de éstos son del orden de los 100 micrones ($\sim 10^{-4}$ m).

Quando se aplica una excitación $\vec{H}$ muy pequeña las paredes de los dominios se corren, de modo que los dominios cuyos ejes tienen direcciones más próximas a la de $\vec{H}$ crecen a expensas de los otros. Si se aumenta $|\vec{H}|$ los dominios comienzan a rotar hasta alinearse con la excitación aplicada. Veremos más adelante la curva de magnetización al discutir el fenómeno de histéresis (fig. 38).

Este movimiento de los dominios es discontinuo y esencialmente

aleatorio, como lo demostró Barkhausen en 1919, cuando arrolló una bobina alrededor de una barra ferromagnética y conectó la bobina a un teléfono. Cuando H aumenta se escucha un ruido característico que lleva su nombre y se debe a la f.e.m. inducida por la variación del flujo magnético, originada en el crecimiento discontinuo de la magnetización.

El movimiento de los dominios tiene un efecto macroscópico sobre la longitud del material. Esta variación en las dimensiones debida a la magnetización se denomina magnetostricción. Para valores pequeños de H el hierro aumenta de tamaño en la dirección de $\vec{H}$ y disminuye en la dirección normal; para el níquel sucede lo contrario.

CONDICIONES DE CONTORNO EN LA SUPERFICIE QUE SEPARA DOS MEDIOS. BLINDAJE MAGNÉTICO

Hallaremos las relaciones entre las componentes de los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ a ambos lados de la superficie S de separación entre dos medios magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 .

a) Componentes normales (fig. 24)

Para el cilindro de la figura con $h \rightarrow 0$ la

$$(3.28) \implies \lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\implies B_{1n} dS - B_{2n} dS = 0 \implies$$

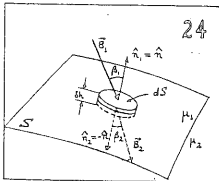
$$B_{1n} = B_{2n} \quad \therefore B_1 \cos \beta_1 = B_2 \cos \beta_2 \quad (3.97)$$

Si ambos medios son isótropos, de modo que $\vec{B}_{1,2} = \mu_{1,2} \vec{H}_{1,2}$, tenemos:

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \implies \mu_1 H_1 \cos \beta_1 = \mu_2 H_2 \cos \beta_2 \quad (3.98)$$

b) Componentes tangenciales (fig. 25)

En principio, es posible que sobre la superficie S circule una corriente superficial $\vec{g} \neq 0$, definida como en (3.53). Luego, para el



triángulo $\triangle$ de la figura con $h \rightarrow 0$ el teorema circuital de Ampère (3.68) toma la forma:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_v = \int_{S(h)} \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

Luego, $H_{1t} dl - H_{2t} dl = dl g_n$,

donde $g_n = \vec{H} \cdot \vec{g}$ es la componente de la densidad $\vec{g}$ normal al plano de $\triangle$; por lo tanto

$$H_{1t} - H_{2t} = g_n \implies H_1 \sin \beta_1 - H_2 \sin \beta_2 = g_n \quad (3.99)$$

Si ambos medios son isótropos:

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = g_n \implies \frac{B_1}{\mu_1} \sin \beta_1 - \frac{B_2}{\mu_2} \sin \beta_2 = g_n$$

En el caso más frecuente, cuando no hay corrientes libres sobre la superficie S , podemos dividir miembro a miembro la (3.98) y la igualdad que resulta de (3.99), obteniendo

$$\frac{\frac{B_1}{\mu_1} \sin \beta_1}{\frac{B_2}{\mu_2} \sin \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.100)$$

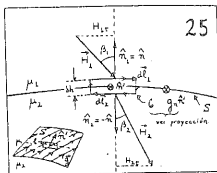
que es otra relación del tipo de la (1.109) similar a la ley de Snell, que representa la refracción de las líneas del campo magnético. Debemos notar que los ángulos α_1 en (1.109) y β_1 en (3.100) son, en general, distintos.

Las expresiones halladas permiten extender la solución de un problema a regiones separadas entre sí por superficies de discontinuidad en las propiedades magnéticas.

Cuando el medio (1) es ferromagnético, con permeabilidad $\mu = \kappa_m \mu_0$, y el medio (2) tiene susceptibilidad despreciable (vacío, dia- o paramagnético) vemos que

$$\mu \approx \mu_1 \gg \mu_2 \approx \mu_0 \implies \frac{\mu \sin \beta_1}{\mu_0 \sin \beta_2} = \frac{\mu}{\mu_0} = \kappa_m \gg 1.$$

Si, p.ej., el medio (1) es hierro con $\kappa_m = 1.000$, en la fig. 24 es $\mu \sin \beta_1 = \mu_0 \sin \beta_2 \approx 10^{-3} \mu \sin \beta_1$,



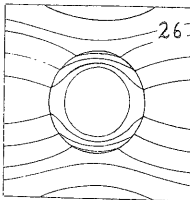
de modo que las líneas de campo que en el interior del hierro están separadas menos de 60° con respecto a la normal saldrán al exterior formando un ángulo $\beta_2 < 0,1^\circ$. Esta es una característica de todos los materiales ferromagnéticos, debida a su permeabilidad tan elevada: como β_1 no toma valores muy altos (excepto en aristas o cantos de S), en el exterior al medio resulta $\beta_2 \approx 0$, es decir que las líneas de campo son prácticamente normales a la superficie de un cuerpo ferromagnético.

Una aplicación inmediata de estas propiedades es el blindaje magnético, que se consigue utilizando superficies huecas o cáscaras, como en el caso electrostático (en aquel caso teníamos β_2 exactamente nulo, es decir líneas de campo eléctrico normales al conductor). Para comprender mejor el efecto observemos el comportamiento del campo $\vec{B}$ en presencia de una cáscara ferromagnética esférica (fig. 26). Las líneas del campo magnético se desvían hasta hacerse prácticamente normales a la superficie, como si fuera un campo eléctrico frente a una superficie conductora. Para $\mu \rightarrow \infty$ el campo $\vec{B}_{\text{int}}$ en el interior de la cavidad se anula; el cálculo detallado da $B_{\text{int}} \sim \mu^{-1} \sim \kappa^{-1}$.

La fig. 26 muestra cómo las líneas se deforman de modo de pasar por el medio más permeable (de allí el nombre de μ). La utilidad de esta propiedad es evidente, pues muchos dispositivos electrónicos y mecánicos deben trabajar en regiones libres de campo magnético.

CIRCUITOS MAGNÉTICOS. ELECTROIMANES

Consideremos un toroide con núcleo ferromagnético de sección S con permeabilidad μ uniforme (fig. 27), sobre el cual enrollamos una bobina de $N = n\ell \gg 1$ vueltas por la que hacemos circular una corriente I. En el toroide el flujo magnético $\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ está confinado en el núcleo y, como las líneas de campo son normales a las espiras (es decir que $\phi_{\text{lat}} = 0$ en 3.30) el toroide resulta ser un tubo de flujo



donde $\phi = BS = \text{const.}$ (3.101)

a través de todas las secciones. Esto es análogo a lo que sucede con una corriente que circula por un cable cerrado, que es la misma en toda sección del cable.

La excitación magnética $\vec{H}$ será normal a las espiras y si el bobinado es uniforme será

$H_t = H = \text{const.} \Rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_t d\ell$ para todo elemento de longitud a lo largo de la curva ℓ (fig. 27).

El teorema circuital de Ampère toma la forma

$$\oint_{\ell} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \oint_{\ell} d\ell H = \text{fem} = NI \quad (3.68)$$

donde (3.101) $\Rightarrow H = B/\mu = \phi/(\mu S)$

$$\Rightarrow \text{fem} = \oint_{\ell} \frac{d\ell \phi}{\mu S} = \phi \oint_{\ell} \frac{d\ell}{\mu S} = \phi R \quad (3.102)$$

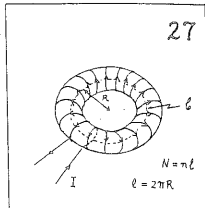
Aquí la integral que define a R tiene la misma forma que la resistencia definida en (2.22), y la ecuación (3.102) es la expresión dual de la ley de Ohm (2.24) para un circuito cerrado:

$$\text{fem} = IR.$$

Se establece así la siguiente dualidad algebraica:

$$\begin{aligned} \text{fem} &= \oint d\vec{\ell} \cdot \vec{B} \longleftrightarrow \text{fem} = \oint d\vec{\ell} \cdot \vec{H} \\ R &= \oint \frac{d\ell}{\mu S} \longleftrightarrow R = \oint \frac{d\ell}{\mu S} \\ I &= \iint d\vec{s} \cdot \vec{J} \longleftrightarrow \phi = \iint d\vec{s} \cdot \vec{B} \\ \text{conductividad } \sigma &\longleftrightarrow \text{permeabilidad } \mu \\ \text{campos } \vec{E}, \vec{J} &\longleftrightarrow \text{campos } \vec{H}, \vec{B} \end{aligned} \quad (3.103)$$

La cantidad dual de la resistencia, definida en (3.102) es



denomina reluctancia. La relación (3.102) expresa la ley de Ohm para un circuito magnético.

Cuando un circuito no es uniforme, sino que consta de varios tramos conectados en serie, la reluctancia de un elemento del vale

$$d\mathcal{R} = \frac{dl}{\mu S}$$

y se demuestra fácilmente que la reluctancia total $\mathcal{R}_x$ es la suma de las reluctancias $\mathcal{R}_k$ de los tramos sucesivos:

$$\mathcal{R}_x = \sum_k \mathcal{R}_k \quad (3.104)$$

Análogamente, la reluctancia de un conjunto de tramos ferromagnéticos conectados en paralelo verifica la relación

$$\mathcal{R}_n^{-1} = \sum_k \mathcal{R}_k^{-1} \quad (3.105)$$

Ejercicio: demostrar la validez de (3.104) y (3.105).

Las relaciones halladas permiten representar un circuito magnético gráficamente como si fuera un circuito de corriente continua, para lo cual suelen emplearse los símbolos de fem (para la fmm), resistencias (para las reluctancias) y corrientes (para los flujos magnéticos).

Como ejemplo, calcularemos el campo B en el entrehierro del electroimán que se esquematiza en la fig. 28. Llamamos entrehierro a la región donde se interrumpen el núcleo y la bobina. Las caras del núcleo ferromagnético que bordean el entrehierro son los polos del electroimán.

El flujo magnético dentro de la bobina está prácticamente confinado en el núcleo de sección S, mientras que en el entrehierro las líneas de campo se dispersan (fig. 28) y atraviesan una sección efectiva $S' > S$. Emplearemos los subíndices n (para el núcleo) y e (para el entrehierro).

La reluctancia total del circuito es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_e = \frac{\ell - \ell\ell}{\mu_n S} + \frac{\ell\ell}{\mu_e S'}$$

$$(3.102) \implies \phi = \frac{fmm}{\mathcal{R}} = \frac{NI}{\frac{\ell - \ell\ell}{\mu_n S} + \frac{\ell\ell}{\mu_e S'}} \quad (3.106)$$

Como el flujo magnético es constante:

$$\phi = B_n S = B_e S' \implies B_e = \frac{\phi}{S'} = \frac{\ell - \ell\ell}{\mu_n} \cdot \frac{NI}{S} + \frac{\ell\ell}{\mu_e}$$

Se nota que la contribución del entrehierro a la reluctancia total es generalmente mayor que la del núcleo, pues

$$\mathcal{R}_e = \frac{\ell\ell}{\mu_e S'} \left(\frac{\mu_n S}{\ell - \ell\ell} \right) \approx K_m \frac{\ell\ell}{\ell} > 1.$$

Por ejemplo, tomando valores típicos: $K_m = \mu_n/\mu_e \approx 1.000$; $\ell\ell = 1$ cm; $R = 16$ cm $\implies K_m \ell\ell/\ell \approx 10$.

En un electroimán conviene tomar $\ell\ell \ll \ell$, en cuyo caso

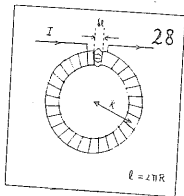
$$\left(\frac{\ell - \ell\ell}{\ell} \right) \cdot \frac{S'}{S} \approx 1 \implies B_e \approx \frac{\mu_n NI}{\ell\ell + \ell/K_m}$$

En la práctica estos cálculos suelen tener una precisión menor (o sea un error relativo mayor) que el 5%, debido a las numerosas aproximaciones realizadas:

- 1) B_t, H_t constantes dentro de las bobinas: en realidad $H_t \sim 1/R$, siendo R la distancia de la curva ℓ al eje del toroide.
- 2) $B = \mu H$ con $\mu = \text{const.}$ (proporcionalidad): en realidad $\mu = \mu(H) \implies K_m = \text{const.}$
- 3) $H_t = \text{const.}$ al pasar del núcleo al entrehierro, lo que sería cierto si no hubiera pérdidas de flujo magnético en los polos.
- 4) Se supone que el espaciado de las espiras es prácticamente inexistente, y que su distribución es completamente uniforme y perfectamente simétrica.

IMANES PERMANENTES

Supongamos que un material ferromagnético se magnetiza mediante una excitación $\vec{H}$ hasta alcanzar la saturación , es decir hasta que todos los dipolos que lo integran se hayan alineado con $\vec{H}$, con lo cual la magnetización $\vec{M}$ habrá alcanzado su máximo valor posible.



Cuando reducimos $\vec{H}$ hasta anularlo subsisten una magnetización $\vec{M}_r$ y un campo remanente $\vec{B}_r$ (fig. 29) tales que

$$\vec{B}_r = \mu_r \vec{M}_r \neq 0$$

Como veremos al discutir la curva de histéresis, cambiando el signo de las corrientes y así invirtiendo el sentido de $\vec{H}$ se puede anular el campo total $\vec{B}$ (el valor H_c que lo permite es la llamada fuerza coercitiva).

Cuanto mayores sean B_r y H_c , tanto mejor será el imán en cuestión. La curva del segundo cuadrante (fig. 29) describe la desmagnetización. El máximo valor del producto BH que se puede alcanzar en ese cuadrante mide la calidad del imán y se denomina P_m = energía-producto máxima (verificar que efectivamente: $[B \cdot H] = J \cdot m^{-3}$, de modo que P_m representa una densidad de energía).

Un material típico como el acero al carbono tiene una P_m del orden de $1.500 J \cdot m^{-3}$, y una aleación especial llamada Alnico 5 (que contiene Fe, Co, Ni, Al y Cu) tiene una $P_m \approx 36.000 J \cdot m^{-3}$.

Una forma útil de imán permanente es el mismo toroide con entrehierro de la fig. 28, sin la bobina. Supondremos que el radio del toroide es R y el de su sección es r , y que se cumplen las aproximaciones

$$R \gg r; \quad \ell \ll \ell = 2\pi R; \quad B_n = B_o \quad (\text{según 3.97})$$

Luego, el teorema circuital de Ampère (3.68), para un recorrido ℓ que pase por los centros de las secciones, expresa:

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{H} \approx H_o \ell + H_n \ell = 0 \implies H_n = -\frac{\ell}{\ell} H_o \quad (3.107)$$

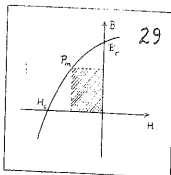
Es decir que los sentidos de $\vec{H}$ dentro y fuera del imán son opuestos. Además

$$(3.95) \implies B_n \approx \mu_r H_n = \mu_r H_o = B_o \implies H_n = \frac{\mu_r}{\mu} H_o \quad (3.108)$$

Igualando (3.107) y (3.108) vale aproximadamente:

$$K_m = 1 + \chi_m = \frac{\mu}{\mu_o} = -\frac{\ell}{\ell} < 0 \quad (3.109)$$

Este resultado expresa el valor que alcanza la permeabilidad μ en el



equilibrio, que corresponde a un punto del segundo cuadrante (fig. 29).

La (3.109) muestra cómo la magnetización $\vec{M}_r$ se opone y predomina sobre la excitación $\vec{H}$ dentro del imán, de modo que allí $\vec{M}_r$ es paralela al campo total $\vec{B}_n$, y ambos son opuestos a $\vec{H}_n$.

Es interesante comparar una barra cilíndrica imantada con un solenoide ideal de las mismas dimensiones. Supondremos que la longitud es mucho mayor que el radio del cilindro, y que en el interior del imán la magnetización $\vec{M}_r \approx \vec{M}$ es longitudinal y uniforme (fig. 30).

Las líneas de campo en el solenoide se muestran en la fig. 30-a, donde $\vec{B} = \mu_r \vec{H} \nabla \nabla$ y basta con representar un solo campo, dado por $H = n I_A$ en el interior (n = número de vueltas/unidad de longitud; I_A = corriente en la bobina).

Para calcular el campo creado por la barra recurrimos a las corrientes de Ampère dadas por (3.57) y (3.58), donde (fig. 30-b):

$$\hat{n} = \hat{x}, \quad \vec{M} = M \hat{x} = \text{const.} \implies$$

$$\vec{B}_A = \vec{M} \times \hat{n} = M \hat{x} \times \hat{x} = M \hat{y}.$$

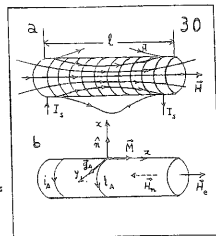
Tomando un recorrido ℓ paralelo al eje z , en (3.53) tenemos

$$d\vec{\ell}_n = dz \hat{y} \implies I_A = \int_{\ell} d\vec{\ell}_n \cdot \vec{B}_A = \int_{\ell} dz k = M \ell.$$

Podemos suponer que esta corriente está distribuida en un número $N = n \ell$ de espiras, de modo que $I_A = n \ell I_A$. Entonces

$$I_A = n \ell I_A = M \ell \implies \boxed{I_A = M / n} \quad (3.110)$$

El campo generado en el exterior por esta distribución de corrientes de Ampère es equivalente al creado por un solenoide ideal con el mismo número de vueltas n , siempre que tomemos $I_A \approx I_A$. Obviamente en el exterior es $\vec{B} \parallel \vec{H}$ para ambas configuraciones, lo que también sucede en el interior de la bobina, mientras que en la barra $\vec{B}$ y $\vec{H}$ son antiparalelos, como vimos.



FERRIMAGNETISMO: FERRITAS

Algunas sustancias sólidas que son paramagnéticas por sobre cierta temperatura cambian su comportamiento para temperaturas más bajas. Este fenómeno, que difiere del ferromagnetismo, fue descrito por Néel (1932) diciendo que los átomos en ellas se ordenan en dos grupos, cuyos espines están ordenados pero son anticaparelos entre sí. Cuando esto ocurre se observan dos fenómenos distintos:

a) Si los dos grupos de átomos tienen momentos magnéticos ($\vec{m}_g$) iguales y opuestos, el momento neto es nulo, a pesar de que los momentos atómicos individuales son intensos. Este fenómeno se llama anti-ferromagnetismo.

b) Si el momento magnético de un grupo supera en magnitud al del otro habrá un momento neto resultante, aun en ausencia de una excitación exterior $\vec{H}$. Esta propiedad se conoce como ferrimagnetismo.

La temperatura de transición, a la cual el material pasa del estado de espines ordenados (ferri- o antiferromagnetismo, según la sustancia) a desordenados (paramagnetismo) se llama temperatura de Néel T_N . El proceso descrito explica por qué muchas sustancias paramagnéticas no se vuelven ferromagnéticas a temperaturas muy bajas.

Una clase importante de sustancias con estas propiedades la constituyen las ferritas, que no poseen electrones de conducción y son aislantes o semiconductores, que tienen un valor elevado de permeabilidad no lineal $K_m = K_m(H) \gg 1$ y muestran la misma saturación para excitaciones elevadas que los ferromagnéticos, que son conductores.

Las ferritas son óxidos complejos de elementos del llamado grupo de transición de la tabla periódica (Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn; con números atómicos comprendidos entre 21 y 30). Entre las más conocidas figuran la magnetita (Fe_3O_4 en la forma $FeO \cdot Fe_2O_3$), sustancia que llamó la atención de los antiguos griegos; y las formas similares: $CrFe_2O_4$, $MnCr_2O_4$, $MnFeCrO_4$, etc. La ferrita de zinc $ZnFe_2O_4$ es antiferromagnética.

B) CORRIENTES VARIABLESINTRODUCCION

Hasta aquí hemos supuesto condiciones estáticas, es decir que todas las cantidades de interés son independientes del tiempo. Los resultados fundamentales estudiados pueden resumirse en:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.15) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.28)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.20) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.39)$$

$$\text{donde } \vec{E} = -\nabla V \quad (1.18) \quad \text{y} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.27)$$

$$\text{con } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.21) \quad \text{y} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.51)$$

En Electroestática la densidad total de carga ρ (la libre más la de polarización) es la fuente o causa; V y $\vec{E}$ son los resultados o efectos. En Magnetostática la densidad total de corriente $\vec{J}$ (la verdadera más la de magnetización) es la causa; $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son los efectos. En ambos casos suponemos que las interacciones se propagan en forma instantánea, y que las densidades y los campos de cada problema son los valores en el equilibrio, después de que las cargas se hayan acomodado y alcanzado condiciones estáticas, a partir de las cuales toda variación temporal es despreciable a escala macroscópica. Esto no excluye las fluctuaciones que denominamos "microscópicas", que generalmente tienen promedio nulo y no afectan las cantidades descriptas en las ecuaciones de arriba.

Cuando consideramos las variaciones en el tiempo, los resultados experimentales indican que el teorema de Gauss sigue valiendo en sus formas (1.15) y (3.25), pero las ecuaciones (1.20) y (3.39), así como los potenciales V y $\vec{A}$, cambian de forma.

Los tratamientos requeridos para analizar los casos cuasi-estáticos, donde las condiciones varían lentamente en el tiempo, y para los procesos que involucren radiación, donde las variaciones temporales son muy rápidas, son esencialmente distintos. En lo que sigue nos ocuparemos solamente del primer tipo de problema, ya que la radiación no puede tratarse con las hipótesis de la Física Clásica.

INDUCCIÓN ELECTROMOTRIZ: LEY DE FARADAY

Faraday (1831), e independientemente Henry, descubrieron que toda variación en el flujo magnético va acompañada por la presencia de un campo eléctrico. Los respectivos experimentos fueron sugeridos por los descubrimientos de Oersted y Ampère, quienes habían observado la aparición de un campo magnético asociado al movimiento de cargas eléctricas.

Los resultados experimentales de Faraday pueden resumirse como sigue. Sean dos espiras, una pasiva $\mathcal{C}_1$ y la otra activa $\mathcal{C}_2$ (fig. 31). Entonces se verifica que:

- 1) Toda vez que el flujo magnético total a través de la espira $\mathcal{C}_1$, definido como

$$\phi_1 = \iint_{S(\mathcal{C}_1)} \vec{B} \cdot \vec{n}$$

varía en el tiempo en una cantidad $\Delta\phi_1$, se induce en la espira una fuerza electromotriz $\mathcal{E}'_1$.

- 2) La magnitud de esta f.e.m. es proporcional a la variación del flujo por unidad de tiempo:

$$|\mathcal{E}'_1| \sim |d\phi_1 / dt| \quad (3.111)$$

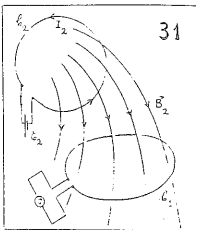
- 3) El sentido de la f.e.m. $\mathcal{E}'_1$ es tal que la corriente I'_1 que genera dicha f.e.m. produce un flujo adicional a través de $\mathcal{C}_1$ cuyo signo:

- a) coincide con el de ϕ_1 cuando $\Delta\phi_1 < 0$;
b) se opone al de ϕ_1 cuando $\Delta\phi_1 > 0$.

- 4) Toda variación en ϕ_2 debida a la corriente propia I_2 también induce una f.e.m. $\mathcal{E}'_2$ en la espira $\mathcal{C}_2$, la cual obedece las mismas reglas enunciadas (1 a 3). Dicho proceso se denomina autoinducción.

Lenz analizó la posibilidad de que una variación en el flujo originara una f.e.m. contraria a la prescripta por la regla (3):

- Una variación $\Delta\phi$ crearía una $\mathcal{E}'$ que originaría una corriente I'
- Esta corriente generaría un campo $\vec{B}'$ cuyo flujo $\Delta\phi'$ sería de igual signo que $\Delta\phi$.
- Este $\Delta\phi'$ daría lugar, por el mismo proceso, a un $\Delta\phi''$ de igual



signo, etc. de modo que los sucesivos $\Delta\phi', \Delta\phi'', \dots \Delta\phi^{(n)} \dots$ se irían generando sin requerir una fuente de energía.

Por el contrario, la regla (3) indica que una variación inicial $\Delta\phi$ genera un proceso del tipo:

$$\Delta\phi \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow I' = \frac{\mathcal{E}'}{R} \longrightarrow \vec{B}' \longrightarrow \Delta\phi' = \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B}' \cdot \vec{n}$$

tal que

$$\text{signo } \Delta\phi' = - \text{signo } \Delta\phi$$

Es decir que el sentido de la f.e.m. inducida es aquél que tende a oponerse a la variación inicial del flujo magnético. La condición (3.112) se conoce como ley de Lenz (1833).

Los resultados (3.111) y (3.112) pueden resumirse en la ley de Faraday-Lenz:

$$f.e.m. \text{ inducida} = \mathcal{E}' = - \frac{d\phi}{dt} \quad (3.113)$$

donde el signo del flujo está definido por el sentido asignado a la espira $\mathcal{C}$ al calcular

$$\phi = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B} \quad (3.114)$$

($\vec{B}$ tiene el sentido elegido para la corriente I sobre $\mathcal{C}$). Entonces el flujo a través de la superficie $S(\mathcal{C})$:

$$\phi = \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \iint_{S(\mathcal{C})} \hat{n} \cdot \vec{B}$$

es positivo cuando $\hat{n}$ es la normal exterior de la superficie $S(\mathcal{C})$ que queda a la izquierda de $\mathcal{C}$ cuando recorremos esta curva.

En (3.114) $\vec{B}'$ es el campo inducido en el interior del conductor, campo que no es conservativo, como veremos.

En efecto, aplicando el teorema de Stokes (A.17) en (3.114):

$$\mathcal{E}' = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{B}' = \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B}'$$

Si la espira $\mathcal{C}$ se mantiene en reposo y no se deforma:

$$- \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \vec{B} = - \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \iint_{S(\mathcal{C})} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{B}' \quad \forall S(\mathcal{C})$$

Luego, la ecuación (3.113) equivale a

$$\nabla \times \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(3.116)

que es la forma local de la ley de Faraday- Lenz. Esta forma tiene validez más general que la expresión (3.113), ya que se cumple para cualquier variación del flujo magnético, independientemente de su causa.

$\Delta \phi$ puede deberse al movimiento de toda la espira o de una parte de ella (deformación), a la variación del campo magnético $\vec{B}$ en el tiempo, ya sea por variaciones en las corrientes en la propia espira o en otras, etc. Pero los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ también pueden medirse en ausencia de espiras por sus efectos sobre cargas puntuales, en cuyo caso la (3.116) adquiere una validez completamente general, correspondiendo a los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ totales medidos en un punto cualquiera del espacio.

Como consecuencia importante de esta ley podemos calcular las relaciones entre potenciales y campos cuando hay variación temporal de las cantidades de interés. Como la (3.28) sigue valiendo en este caso, también se cumple:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3.27)$$

Reemplazando esta expresión de $\vec{B}$ en (3.116) tenemos:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \forall \vec{r}, t.$$

Luego, debe existir una función $V(\vec{r}, t)$ tal que

$$-\nabla V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \implies \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.117)$$

donde $-\nabla V$ es la contribución conservativa al campo eléctrico total y $-\partial \vec{A}/\partial t$ representa el campo inducido:

$$\vec{E}_{ind} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \ni \oint \vec{E}_{ind} \cdot d\vec{r} \neq 0.$$

Tanto el potencial escalar $V(\vec{r}, t)$ como el vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ dependen, en general, del tiempo.

EJEMPLOS

a) Espiras estacionarias

Sean N espiras estacionarias (es decir quietas, que no han de

deformarse) con inductancias $M_{jk} \ni dM_{jk}/dt = 0$.

Aplicando el principio de superposición y la definición (3.41) obtenemos el flujo magnético que atraviesa la espira j -ésima, que será la suma de los flujos $\phi_{jk} = M_{jk} I_k$ generados a través de ella por las corrientes de todas las espiras (incluyendo la misma I_j):

$$\phi_j = \sum_{k=1}^N \phi_{jk} = \sum_k M_{jk} I_k \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

Si las corrientes, y con ellas los flujos magnéticos, varían en el tiempo, se inducirá en la espira (j) una f.e.m.

$$\mathcal{E}_j = - \frac{d\phi_j}{dt} = - \sum_{k=1}^N M_{jk} \frac{dI_k}{dt} \quad (3.117)$$

En particular, para una sola espira, que puede tener intercalados elementos pasivos (p.ej. resistencias), la f.e.m. inducida vale

$$\mathcal{E}_{ind} = - L \frac{dI}{dt} \quad (3.118)$$

En un circuito aislado, donde puede haber otras fuentes con una f.e.m. total $\mathcal{E}$ y elementos pasivos con caídas de tensión ΔV_1 podemos expresar la segunda ley de Kirchhoff como:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{ind} = \sum_i \Delta V_i \quad (3.119)$$

También podemos pasar el segundo término (como si fuera una caída sobre la espira) al segundo miembro, en la forma $\Delta V_L = -\mathcal{E}_{ind}$, con lo cual (3.119) equivale a

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + \sum_i \Delta V_i \quad (3.120)$$

que es la forma más útil para el cálculo, como veremos más adelante.

El signo (-) en $\mathcal{E}_{ind}$ indica que esta f.e.m. tiende a oponerse al crecimiento de la corriente que genera el flujo a través de L , de acuerdo con lo prescrito por la ley de Lenz.

b) Diamagnetismo de partículas cargadas

Consideremos el movimiento en el vacío de una partícula de carga q y masa m en una región de campo $\vec{B}$ uniforme. Para simplificar,

supondremos que la velocidad $\vec{v}$ se mantiene en un plano normal a $\vec{B}$ (fig. 32). La fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.2)$$

es siempre normal a $\vec{v}$, de modo que el movimiento continúa en un mismo plano. En consecuencia, el movimiento de q será circular y uniforme, con un radio R que podemos obtener a partir de la expresión de la fuerza centrípeta:

$$F = q v B = \frac{m v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{q B}$$

El período de revolución será

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B} = \frac{1}{f_c}$$

donde $f_c = \omega_c/2\pi$ es la llamada frecuencia de ciclotrón, con

$$\omega_c = q B / m \quad (3.121)$$

Vista como una espira (fig. 22) la órbita de la carga tiene un momento magnético dado, como en (3.79), por

$$\vec{m} = \frac{q}{2} R^2 \omega \hat{\omega} = -\frac{q}{2} \frac{R v}{B} \vec{B} = -\frac{q}{2} \frac{m v}{q B} \vec{B} = -\frac{m v^2}{2 B^2} \vec{B} \quad (3.122)$$

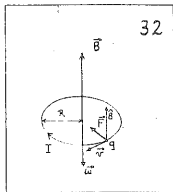
donde, como se ve en la fig. 32, $\hat{\omega} = -\hat{B} = -\vec{B}/B$.

La (3.122) indica el comportamiento diamagnético de toda carga que se mueve bajo la sola acción de un campo magnético. Mirando la órbita desde el extremo del vector $\vec{B}$ los iones positivos girarán en sentido negativo (horario), y los electrones lo harán en sentido positivo (antihorario). El resultado será siempre la generación de un momento magnético que tenderá a disminuir el campo magnético total, en concordancia con lo determinado por la ley de Lenz.

c) Barra conductora en movimiento

Sea un conductor de longitud $\vec{\ell}$ orientado en la dirección $\vec{\ell} = \vec{\ell}/\ell$ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo $\vec{B}$ uniforme (fig. 33). Sobre las cargas libres (electrones) en la barra conductora actúa la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.2)$$



En un referencial $\mathcal{R}'$ que se mueve con la barra la velocidad de q es $\vec{v}' = 0$, y allí los electrones se ven sometidos a un campo eléctrico dado, como en (3.4), por $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$.

La f.e.m. correspondiente, empleando (A.1) es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{CD} &= \int_C^D \vec{\ell} \cdot \vec{E}' = \int_C^D \vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \\ &= \vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{B} \cdot \vec{v} \times \vec{\ell}. \end{aligned}$$

Observemos que $\vec{v} \times \vec{\ell} = \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{\ell} = \frac{d}{dt} (\vec{F} \times \vec{\ell}) = \frac{d\vec{S}}{dt}$ (fig. 33),

que es la superficie barrida por el conductor en su movimiento.

$$\text{Luego, } \mathcal{E}_{CD} = -\vec{B} \cdot d\vec{S}/dt = -d\phi/dt \quad (3.123)$$

donde $d\phi$ es el flujo a través de la superficie dS barrida por el conductor en el tiempo dt (para $\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{v}$ mutuamente normales: $\mathcal{E}_{ind} = B\ell v$).

El resultado (3.123) es totalmente consistente con la ley de Faraday-Lenz, pero no debe interpretarse como una "deducción" de esta ley, ya que los alcances de las (3.113) y (3.116) son mucho más generales.

Hemos visto que el campo magnético $\vec{B}$ no realiza trabajo sobre las cargas que se mueven bajo la única acción de $\vec{B}$. Esto no es el caso para la barra que analizamos, ya que otro agente exterior le suministra la potencia necesaria para trasladarla con velocidad $\vec{v}$. Es interesante ver cómo, además de la reacción electromagnética contra el cambio de flujo, existe una reacción mecánica, debida a que la velocidad $\vec{v}$ es normal al campo $\vec{B}$.

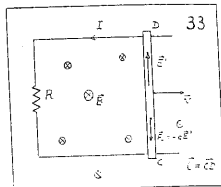
En efecto, supongamos que entre C y D existe una resistencia R finita (fig. 33). Entonces circulará por la barra una corriente

$$\text{inducida} \quad I = \mathcal{E}_{CD}/R = \frac{1}{R} \vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

y la interacción de esta corriente con el campo originará una fuerza dada por (3.11):

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} = \frac{1}{R} (\vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B}) (\vec{\ell} \times \vec{B})$$

La potencia disipada durante el movimiento de la barra conductora se deberá exclusivamente a esta fuerza, y valdrá



$$\mathbf{P}_f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{R} (\vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B}) (\vec{\ell} \times \vec{B} \cdot \vec{v}) = -\frac{1}{R} (\vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B})^2$$

donde $\vec{\ell} \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \mathcal{E}_{CD}$, y resulta

$$\mathbf{P}_f = -\frac{\mathcal{E}_{CD}^2}{R} = -I^2 R \quad (3.124)$$

que es la llamada potencia de reacción, que, según vimos en (2.26) disipa la resistencia R en forma de calor (ley de Joule). La fuerza neta $\mathbf{F}$ es la fuerza de reacción que se opone al movimiento, ya que en todos los casos: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}_f < 0 \quad \forall \mathbf{v}$.

d) Espiras en rotación

Sea una bobina rectangular de N vueltas, de dimensiones $\ell \times d$, que gira con velocidad angular $\omega = \text{const.}$ alrededor de un eje que pasa por su centro (fig. 34), en una región de campo magnético $\vec{B}$ uniforme.

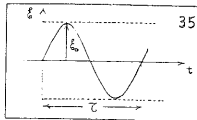
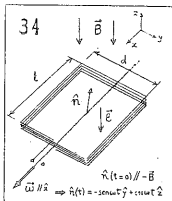
La f.e.m. inducida sobre cada vuelta de la bobina es

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \iint d\vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{d}{dt} \cdot \vec{B} \cdot \iint d\vec{S}$$

o sea $\mathcal{E} = N B \omega \sin \omega t$ (verificarlo).

Luego, la f.e.m. entre los extremos de la bobina (sobre las N espiras) será

$$\mathcal{E}_N = N S B \omega \sin \omega t \equiv \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (3.125)$$



Vemos que esta bobina, que es el elemento esencial de un generador de Faraday, se comporta como una fuente de tensión alterna, que varía en el tiempo con una frecuencia $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ (fig. 35).

Un sistema de este tipo transforma energía mecánica (necesaria para superar la cupla de reacción

$\mathbf{F} \times \mathbf{F}$ y así mantener constante la velocidad angular ω) en energía eléctrica de tensión dada por (3.125), donde $\mathcal{E}_0$ es la tensión de pico.

EFFECTO HALL

Hall (1879) descubrió que si por un conductor chato, cuyo plano es normal a un campo magnético intenso $\vec{B}$, circula una corriente de densidad $\vec{J}$, aparece una f.e.m. $\mathcal{E}_H$ transversal al conductor (fig. 36).

a) Efecto normal

El modelo sencillo de conducción por los electrones libres se esquematiza en la fig. 36, donde

$$\vec{B} = B \hat{x}, \quad q = -e, \quad \vec{v}_- = -v \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = n q \vec{v}_- = n e v \hat{y}$$

La fuerza de Lorentz sobre los electrones

$$\vec{F}_- = q \vec{v}_- \times \vec{B} = (-e) (-v \hat{y}) \times (B \hat{x}) = -e v B \hat{z}$$

hace que éstos se acumulen en un borde del conductor, lo cual produce un exceso de carga positiva en el borde opuesto, y esta distribución de cargas genera un campo eléctrico $\vec{E}_H$ que crece hasta cancelar exactamente la fuerza magnética. Es decir que el régimen de equilibrio se alcanza cuando

$$q_- \vec{E}_H + \vec{F}_- = 0 \Rightarrow \vec{E}_H = -\frac{\vec{F}_-}{q_-} = \frac{+e v B}{-e} \hat{z} = -v B \hat{z} \quad (3.126)$$

La f.e.m. resultante es $\mathcal{E}_H = v B b$.

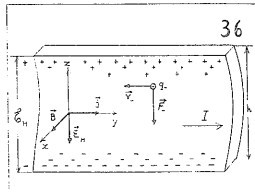
Conviene definir un coeficiente de Hall

$$R_H \equiv \frac{E_z}{J_y B_x} \quad (3.127)$$

que en este caso da: $R_H = (-vB)/(nevB) = -1/(ne) < 0$.

Este coeficiente tiene el signo de la carga de los portadores y es inversamente proporcional a la densidad numérica n de los mismos. Al medir R_H se mide indirectamente dicha densidad: $n = (-e R_H)^{-1}$.

Los valores medidos de n coinciden con los calculados por otros métodos con un error menor que el 30% para todos los metales monovalentes (Li, Na, K, Cu, Ag, Au, etc.) y para los buenos conductores, en general.



b) Efecto anómalo

Para muchos metales (Be, Fe, Zn, Cd, W) el coeficiente de Hall medido es positivo, lo que no puede explicarse con el modelo descripto. Este caso se conoce como efecto Hall anómalo.

En la teoría de sólidos se demuestra que algunos electrones en ciertas órbitas se comportan como huecos positivos (con carga y masa iguales en magnitud a las del electrón). Esta propiedad no se puede explicar sin recurrir a métodos de la Mecánica Cuántica, pero algunos resultados son fácilmente comprensibles. Por ejemplo, la fuerza de Lorentz sobre un hueco (+) es $\vec{F}_+ = +e\vec{v}_+ \times \vec{B}$, es decir que $q_+ = +e$.

Los portadores de carga en los conductores anómalos son estos huecos, de modo que (fig. 37)

$$\vec{J} = nq_+\vec{v}_+ = nev\hat{y} \quad \text{como en el efecto normal,}$$

$$\text{pero } \vec{F}_+ = q_+\vec{v}_+ \times \vec{B} = (+e)(v\hat{y}) \times (B\hat{z}) = -evB\hat{x},$$

lo que genera una acumulación de huecos positivos en el borde opuesto al caso normal, resultando un campo $\vec{E}_H$ tal que

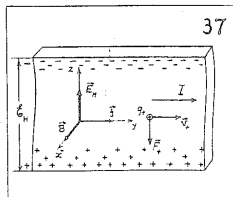
$$q_+\vec{E}_H + \vec{F}_+ = 0 \implies \vec{E}_H = -\frac{\vec{v}_+}{q_+} \times \vec{B} \hat{z},$$

que tiene sentido opuesto al hallado en (3.126).

Luego, en (3.127) resulta ser:

$$R_H = \frac{E_x}{j_y B_x} = \frac{+vB}{nev \cdot B} = \frac{1}{ne} > 0.$$

Las densidades n medidas a partir de R_H en conductores anómalos resultan ser mucho menores que las correspondientes a conductores normales.



37

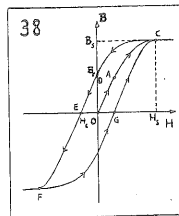
HISTERESIS

Una propiedad importante de los materiales ferromagnéticos es la dependencia peculiar de la relación B/H con respecto a la historia magnética del medio, es decir a los valores anteriores del campo y la manera en que se sucedieron. Consideremos una barra cilíndrica desmagnetizada ($B=H=0$, punto O en la fig. 38) rodeada por una bobina (primaria) que nos permite variar la excitación magnética H . El valor de B en cada instante se puede determinar midiendo la f.e.m. que se induce en otra bobina arrollada sobre la primera (secundaria) cada vez que varía el flujo magnético en el material.

A medida que crece H se reorientan los dipolos magnéticos dentro de los dominios y, para valores más altos de H (a partir del punto A) los dominios rotan, hasta que para un punto como C la magnetización m_v deja de crecer al haberse alcanzado el estado de saturación ($H=H_s$, $B=B_s$). A partir de allí B sólo puede crecer según la relación $\Delta B/\Delta H = \mu_0$ (demostrarlo recordando que $\Delta m_v = 0$ para $H > H_s$).

Si, luego de haber alcanzado un valor dado de $H > 0$ disminuimos la excitación H , los valores de H y de B no siguen la curva CAO sino que recorren un camino como el CDEF, de modo que para un mismo valor de H hay varios campos B posibles. En particular, cuando $H=0$ (punto D) el campo magnético B no se anula, ya que la magnetización retiene un valor $m_r > 0$, sino que exhibe un valor B_r llamado campo remanente. Para que B se anule es necesario invertir la corriente primaria y, con ella, cambiar el sentido de H . Aplicando una excitación H_c llamada fuerza coercitiva se alcanza el punto E donde $B=0$ (pero la magnetización subsiste!).

Si seguimos aumentando H alcanzaremos un nuevo valor de



saturación (punto F) donde $B = -B_s$. Podemos retornar a C, luego de pasar por G donde $H = -H_c > 0$, cerrando la curva en un proceso que recibe el nombre de ciclo de histéresis. Este comportamiento del medio se debe a la perdurabilidad de la magnetización.

Calcularemos el área de este ciclo. Supongamos que el solenoide de primario tiene $N = n\ell$ espiras y una sección S , y que variamos B , y por lo tanto ϕ , de modo que se induce una f.e.m.

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -N S \frac{dB}{dt}.$$

Luego, para que la corriente que genera la excitación H siga circulando es necesario aplicar una f.e.m. adicional $\mathcal{E} = -\mathcal{E}_{\text{ind}}$, lo que implica entregar al primario una energía $dW = \mathcal{E} i dt = -\mathcal{E}_{\text{ind}} i dt$ en un intervalo de tiempo dt .

Por lo tanto, $dW = N S \frac{dB}{dt} i dt = (n\ell) S dB i$ donde (ℓS) es el volumen V de la barra y $ni = H$ es la excitación magnética, o sea que

$$H dB = dW/V$$

y el área del ciclo completo CDEFGC vale

$$\oint H dB = \frac{W}{V} = \text{energía entregada por la f.e.m. adicional por unidad de volumen,}$$

que es el trabajo por unidad de volumen requerido para magnetizar y desmagnetizar el material ferromagnético. Esta energía termina disipándose en forma de calor. Por esta razón en los transformadores y otros sistemas donde se trata de disminuir pérdidas y evitar el calentamiento de los materiales se emplean aleaciones ferromagnéticas de ciclo estrecho (aceros al silicio, p.ej.).

ENERGÍA MAGNÉTICA

Podemos aplicar la relación (3.118) al circuito de la fig. 39, donde se muestra una bobina de inductancia L conectada en serie con la resistencia R y una f.e.m. $\mathcal{E}$. Supondremos que inicialmente la llave S está abierta ($i = 0$).

Al cerrar la llave S se produce una variación en el flujo magnético ϕ concatenado por la bobina (inicialmente $\phi = 0$) y aparece una $\mathcal{E}_{\text{ind}}$ dada por

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}. \quad (3.118)$$

Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones (3.119) a la única malla vemos que en todo instante

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{ind}} = R i \implies \mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + R i.$$

Luego, la potencia entregada por la f.e.m. será

$$i \mathcal{E} = L i \frac{di}{dt} + R i^2$$

y la energía entregada entre $t'=0$ y $t'=t$:

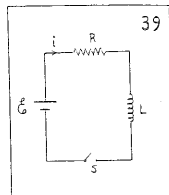
$$U = \int_0^t dt' P(t') = L \int_0^t dt' i \frac{di}{dt'} + R \int_0^t dt' i^2,$$

cuyo segundo término es el calor disipado en la resistencia por efecto Joule. Luego, el primer término representa la energía magnética asociada al campo que la corriente i crea al circular por la bobina

$$U_{\text{mag}} = L \int_0^t dt' i \frac{di}{dt'} = L \int_{i(0)=0}^{i(t)} di = \frac{1}{2} L i^2(t). \quad (3.120)$$

Ejercicio: verificar que la energía dada por (3.120) está almacenada en el campo $\vec{B}$ generado en la bobina. Para ello reemplazar la f.e.m. $\mathcal{E}$ por un cortocircuito (fig. 39) y comprobar que la energía total disipada en un tiempo muy prolongado por la resistencia es igual a U_{mag} .

Cuando tenemos varias espiras con $I_j = \text{const.}$ (fig. 14) podemos calcular la energía magnética de la configuración analizando las interacciones entre dos de ellas. Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espiras con corrientes I_1 e I_2 respectivamente. Si desplazamos a $\mathcal{E}_1$ en un $d\vec{r}$ muy pequeño, en un intervalo de tiempo dt debemos entregar una cantidad



siendo $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ el campo total, generado por todas las corrientes presentes, o sea $\vec{B} = \vec{B}_V + \vec{B}_m$.

Para un elemento de volumen $d\tau_k$ del tubo ℓ_k (fig. 40):

$$\vec{I}_k d\vec{\ell}_k = (\vec{j}_k \cdot \Delta \vec{S}_k) d\vec{\ell}_k = (d\vec{\ell}_k \Delta \vec{S}_k) \vec{j}_k \hat{n}_k = d\tau_k \vec{j}_k \hat{n}_k$$

donde $\vec{I}_k = \text{const.}$ sobre ℓ_k , lo que permite escribir:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k \vec{I}_k \Phi_k = \frac{1}{2} \sum_k (\vec{j}_k \cdot \Delta \vec{S}_k) \oint_{\ell_k} d\vec{\ell}_k \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} \sum_k \oint_{\ell_k} d\vec{\ell}_k \Delta \vec{S}_k \vec{j}_k \hat{n}_k \cdot \vec{A} \\ \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_k \oint_{\ell_k} d\tau_k \vec{j}_k \cdot \vec{A} \equiv \frac{1}{2} \int_{V(S)} d\tau \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (3.136)$$

ya que los tubos de corriente ℓ_k llenan el volumen $V(S)$.

Es obvio que en (3.136) $\vec{j} = \vec{j}_V$, pero en el campo $\vec{B}$ (y en el potencial $\vec{A}$) participan las contribuciones de todas las fuentes, incluyendo las corrientes microscópicas $\vec{j}_A$ dadas por (3.33).

Para una distribución finita de corrientes podemos transformar la expresión (3.136) empleando la identidad (A.8) y el teorema de Ampère (3.66):

$$\vec{j}_V \cdot \vec{A} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \\ U = \frac{1}{2} \int_{V(S)} d\tau \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) + \frac{1}{2} \int_{V(S)} d\tau \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (3.137)$$

donde S es la superficie que encierra la distribución de corrientes. Estas integrales pueden extenderse a todo el espacio ya que la contribución del exterior de S es nula:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d\tau \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (3.138)$$

El primer término en (3.137) se anula pues

$$\left| \int_{V_F} d\tau \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \oint_{S_R} d\vec{S} \cdot (\vec{H} \times \vec{A}) \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R} dS H A \sim \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{S_R} d\Omega R \frac{1}{R^2} \frac{1}{R} = 0$$

de manera análoga a la discusión previa a (1.62).

La expresión (3.138) es útil cuando se conoce $\vec{j}_V$ en todo el espacio. A veces $\vec{A}$ ó $\vec{j}_V$ tienen singularidades, pero $\vec{B}$ y $\vec{H}$ tienen expresiones sencillas, en cuyo caso conviene emplear (3.137), la cual define una densidad de energía magnética

$$\eta_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (3.139)$$

MOVIMIENTO DE CUERPOS PARA- Y DIAMAGNÉTICOS EN UN CAMPO NO UNIFORME

Para medios magnéticos isotrópicos la expresión (3.139) se puede enunciar de varias formas:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \eta_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (3.140)$$

Podemos emplear estas relaciones para analizar el movimiento de un cuerpo muy pequeño de volumen ΔV en un campo magnético no uniforme $\vec{B}(\vec{r})$. Supondremos que el cuerpo es dia- o paramagnético con permeabilidad μ , y que su presencia introduce una modificación despreciable en el campo $\vec{B}$ total.

La posición inicial del cuerpo es $\vec{r}_1$, y la final $\vec{r}_2$. En la fig. 41 los campos respectivos son tales que

$$|\vec{B}(\vec{r}_1)| = B_1 < B_2 = |\vec{B}(\vec{r}_2)|,$$

como lo indican las densidades de líneas de campo en ambos puntos (ver 1.56, p.41)

La energía magnética en la situación inicial, con ΔV en $\vec{r}_1$, es

$$U_1 = \frac{B_1^2}{2\mu} \Delta V + \frac{B_2^2}{2\mu_s} \Delta V + \frac{1}{2\mu_s} \int_{\text{resto}} d\tau B^2$$

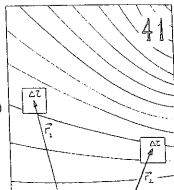
(verificarlo). Análogamente, la energía total en la situación final, con ΔV en $\vec{r}_2$, es

$$U_2 = \frac{B_1^2}{2\mu_s} \Delta V + \frac{B_2^2}{2\mu} \Delta V + \frac{1}{2\mu_s} \int_{\text{resto}} d\tau B^2.$$

En ambos casos la tercera integral toma aproximadamente el mismo valor, correspondiente a la energía magnética en todo el espacio, excluyendo los volúmenes ΔV en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$.

La variación de la energía potencial como consecuencia del desplazamiento descripto resulta ser

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{\Delta V}{2} \left[B_1^2 \left(\frac{1}{\mu_s} - \frac{1}{\mu} \right) + B_2^2 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_s} \right) \right] = \\ = \frac{\Delta V}{2} (B_1^2 - B_2^2) \left(\frac{1}{\mu_s} - \frac{1}{\mu} \right) \quad \text{donde } \frac{1}{\mu_s} - \frac{1}{\mu} = \frac{\chi_m}{\mu} \\ \Rightarrow \Delta U = \frac{\Delta V}{2\mu} \chi_m (B_1^2 - B_2^2). \quad (3.141)$$



El cuerpo tenderá a moverse espontáneamente hacia un estado de menor energía magnética, o sea que $\{U < 0$ (de tal modo que $\{F > 0$). Como $\Delta T / 2\mu > 0$, debe cumplirse la condición

$$\{U < 0 \implies \chi_m (B_1^2 - B_2^2) < 0.$$

Esta condición significa que:

- a) Si $\chi_m > 0 \implies B_1 < B_2$, es decir que un cuerpo paramagnético se moverá hacia una región de campo más intenso (como en la fig. 41).
 b) Si $\chi_m < 0 \implies B_1 > B_2$, es decir que un cuerpo diamagnético se moverá hacia una región de campo más débil.

El método de Curie para medir la susceptibilidad χ_m se basa en la relación (3.141). Si se conoce la variación de $B = B(z)$ en una región, se puede medir la fuerza sobre un cuerpo sometido a ese campo, que resulta ser

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \approx \frac{\Delta U}{\Delta z} \left| B \frac{dB}{dz} \right| |\chi_m|$$

ya que $|\chi_m| \ll 1 \implies \mu \approx \mu_0$.

La propiedad (b) se cumple para los plasmas (pues ya vimos que los iones y los electrones que forman un plasma tienen un comportamiento diamagnético en presencia de un campo $\vec{B}$). Si se genera un campo magnético que sea mínimo en una región finita, se habrá logrado el confinamiento magnético del plasma.

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Maxwell fue el primero en darse cuenta de que la ley de Ampère (3.9) y su consecuencia fundamental, el teorema circuital en la forma (3.39), dejan de valer cuando las fuentes y los campos varían en el tiempo. Ya vimos en (3.40) que, en el vacío,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_V \implies \nabla \cdot \vec{J}_V = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

luego de aplicar la ecuación de continuidad (2.8). Esto es cierto para condiciones estáticas y falso en el caso más general de $\partial_t \neq 0$.

Maxwell mismo (1865) propuso la corrección requerida. Si agregamos a las fuentes del campo magnético un término $\vec{G}$, por el momento

desconocido, la (3.66) toma la forma

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_V + \vec{G},$$

de manera que

$$\nabla \cdot \vec{J}_V = \nabla \cdot \nabla \times \vec{H} - \nabla \cdot \vec{G} = -\nabla \cdot \vec{G}.$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad da: $\nabla \cdot \vec{J}_V = -\partial_t \rho$ (2.8)

de donde resulta $\nabla \cdot \vec{G} = \partial_t \rho$.

Ya hemos dicho que el teorema de Gauss en su forma

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.101)$$

sigue valiendo para condiciones variables en el tiempo.

Luego,

$$\nabla \cdot \vec{G} = \partial_t \rho = \partial_t \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \partial_t \vec{D}$$

$$\implies \vec{G} = \partial_t \vec{D} + \nabla \times \vec{Z},$$

donde $\vec{Z}$ es una función arbitraria que Maxwell eligió nula, por simplicidad.

En consecuencia, el teorema de Ampère toma la forma

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_V + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.142)$$

cuyo segundo término, que tiene las dimensiones de una densidad de corriente, recibió el nombre de corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D = \partial_t \vec{D} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_V + \vec{J}_D \quad (3.143)$$

La proposición de Maxwell, confirmada experimentalmente, de agregar esta "corriente" fue su contribución más relevante al Electromagnetismo. El término agregado implica que un campo magnético no sólo está asociado a una corriente, sino que también aparece cuando un campo eléctrico varía en el tiempo. Para $\vec{J}_V = 0$ la situación presenta una notable simetría con la descripta por la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.116)$$

que expresa la generación de un campo eléctrico cuando un campo magnético varía en el tiempo.

En condiciones estáticas $\vec{j}_D = \partial_t \vec{D} = 0$, de modo que el teorema de Ampère recobra la forma (3.66).

Tomando la divergencia de ambos miembros en (3.143) resulta $\nabla \cdot (\vec{j}_V + \vec{j}_D) = 0$, de modo que las líneas de corriente del vector entre paréntesis son cerradas. Esto suele representarse como en el condensador de la fig. 42, donde $\vec{j}_D = 0$ y $\vec{j}_V \neq 0$ en el cable, mientras que $\vec{j}_D \neq 0$ y $\vec{j}_V = 0$ entre las placas del condensador, de modo que en el dieléctrico las líneas de $\vec{j}_D$ "cierran" las correspondientes a las corrientes de conducción.

En función de $\vec{B}$ el teorema de Ampère (3.39), incluyendo las corrientes de magnetización en un medio material, toma la forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times (\vec{H} + \vec{M}_V) = \mu_0 \nabla \times \vec{H} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}_V = \mu_0 (\vec{j}_V + \vec{j}_D) + \mu_0 \vec{j}_A$$

$$\implies \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_V + \vec{j}_D + \vec{j}_A) = \mu_0 \vec{j}_t \quad (3.144)$$

donde definimos una corriente total $\vec{j}_t = \vec{j}_V + \vec{j}_D + \vec{j}_A$, con $\vec{j}_D$ dada por (3.143) y $\vec{j}_A$ definida en (3.58).

Para ver cómo se modifica el teorema circuital de Ampère en su forma integral, considérenos una curva cerrada ℓ . Aplicando el teorema de Stokes (A.17) podemos calcular el flujo a través de $S(\ell)$ para ambos miembros de la (3.142):

$$\iint_{S(\ell)} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_{\ell} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \iint_{S(\ell)} d\vec{S} \cdot \vec{j}_V + \iint_{S(\ell)} d\vec{S} \cdot \partial_t \vec{D}$$

$$\oint_{\ell} d\vec{r} \cdot \vec{H} = I_V + \frac{d\phi_e}{dt} \quad (3.145)$$

donde $\phi_e = \iint_{S(\ell)} d\vec{S} \cdot \vec{D}$ es el flujo del vector desplazamiento o flujo eléctrico a través de la superficie $S(\ell)$. La (3.145) es la expresión integral del teorema de Ampère para corrientes y campos que varían en el tiempo.

Es conveniente estimar el orden de magnitud de la corriente de desplazamiento, comparándola con la corriente de conducción $\vec{j}_V$. Supondremos que los campos varían en el tiempo en forma periódica con frecuencia angular ω :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Luego, en un medio material con permitividad ϵ y conductividad σ , la ley de Ohm (2.19) da

$$\vec{j}_V = \sigma |\vec{E}| = \sigma E_0 |\cos \omega t|.$$

La corriente de desplazamiento vale $\vec{j}_D = \epsilon |\partial_t \vec{E}| = \epsilon E_0 \omega |\sin \omega t|$. Luego,

$$\frac{j_D}{j_V} = \frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}_V|} = \frac{\epsilon \omega E_0}{\sigma E_0} |f(t)| \sim \frac{\epsilon \omega}{\sigma} = 2\pi \epsilon \eta \nu \quad (3.146)$$

donde $f(t)$ es una función periódica de frecuencia $\omega/2\pi$, y el factor $(2\pi \epsilon \eta)$ depende de las propiedades del medio ($\eta = 1/\sigma =$ resistividad). Para un buen conductor, como el cobre:

$$\eta \approx 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m; \quad \epsilon \approx \epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12} F \cdot m^{-1} \implies 2\pi \epsilon \eta \approx 10^{-18} s.$$

Es decir que en un buen conductor la corriente de desplazamiento es despreciable para campos que varíen con frecuencias que no superen los 10^{17} Hz:

$$j_D/j_V = 2\pi \epsilon \eta \nu \approx 10^{-1} \ll 1$$

(el hertzio es $Hz = s^{-1}$ es la unidad de la frecuencia ν , definida como la inversa del período de oscilación).

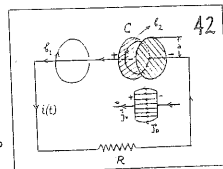
En el vacío, obviamente, $\sigma = 0$ y no puede haber corrientes verdaderas. En general, en un buen aislante la corriente de desplazamiento es dominante, ya que

$$\epsilon \approx 10 \epsilon_0; \quad \eta \approx 10^{12} \Omega \cdot m \implies 2\pi \epsilon \eta \approx 500 s \quad \therefore \quad \frac{j_D}{j_V} = 500 \nu \gg 1 \quad \forall \nu.$$

DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Consideremos el caso de un condensador cargado C de placas planas paralelas muy próximas, que se unen a través de una resistencia R (fig. 42).

Es fácil demostrar (ver Cap. IV) que la corriente de descarga varía en el tiempo como



$$i(t) = -(Q/RC) e^{-t/RC},$$

donde Q es la carga del condensador en $t = 0$.

Sean dos circunferencias (fig. 42): $\mathcal{C}_1$ de radio r_1 , lejos del condensador, normal al cable y enrollada alrededor de éste; y $\mathcal{C}_2$ de radio r_2 similar a la anterior, ubicada entre las placas de C . Para simplificar supondremos que las placas son muy extensas y circulares, de radio a , y que el cable pasa por su centro, de modo que con buena aproximación las circunferencias serán curvas de Ampère en el sentido definido después de (3.38). Por lo tanto, (3.145) da

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2\pi r_1 H_1 \approx i(t) \implies H_1 \approx \frac{i(t)}{2\pi r_1}$$

ya que $\phi_e \approx 0$ lejos del condensador. El campo es igual al generado por un hilo indefinido, ya que la corriente $\vec{I}_D$ es despreciable. En cambio, para $\mathcal{C}_2$ entre las placas

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{H} \cdot d\vec{r} = 2\pi r_2 H_2 = \frac{d\phi_e}{dt}.$$

Si tomamos $r_2 \gg a$ resulta $\phi_e(t) = \iint d\vec{S} \cdot \vec{D} \approx Q(t) =$ carga del condensador. Para verlo basta con aplicar el teorema de Gauss (1.8) a un cilindro que comprenda a $S(\mathcal{C}_2)$ y se cierre dentro del metal de la placa positiva: el único flujo no nulo, a través de $S(\mathcal{C}_2)$, es igual a la carga encerrada.

$$\text{Como vimos en (2.9)} \quad dQ/dt = i(t) \implies H_2 = \frac{i}{2\pi r_2} \frac{d\phi_e}{dt} = \frac{i(t)}{2\pi r_2},$$

con lo cual la corriente de desplazamiento entre las placas del condensador daría el mismo campo magnético que la corriente verdadera en el cable. Ello sólo es cierto cuando $r_2 \gg a$, ya que en el caso general de $r_2 < a$ resulta

$$\phi_e \approx \left(\frac{r_2}{a}\right)^2 Q(t) < Q(t) \quad (\text{verificarlo!})$$

porque la corriente de desplazamiento está repartida en una región muy extensa (de área seguramente mayor que πa^2), en comparación con la corriente $i(t)$ concentrada en el conductor. La situación está esquematizada en el interior del circuito de la fig. 42.

Ecuaciones de Maxwell

Con los resultados recién discutidos se completa un sistema de ecuaciones vectoriales que revela una cierta simetría esencial entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. Esta simetría fue magníficamente presentada por Maxwell, quien construyó el sistema:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (\text{teorema de Gauss o ec. de Poisson, 1.101})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{teorema de Gauss o conservación del flujo magnético, 3.28})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (\text{ley de Faraday-Lenz, 3.116})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_v + \partial_t \vec{D} \quad (\text{teorema de Ampère-Maxwell, 3.142})$$

Este sistema, conocido como ecuaciones de Maxwell, constituye la base de toda la teoría electromagnética. Las 8 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales involucran las 12 componentes de los campos $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ y $\vec{H}$, y las 4 componentes de las densidades libres ρ_e , $\vec{J}_v$, que pueden interpretarse como las fuentes de los campos.

Al sistema suelen agregarse las llamadas relaciones constitutivas, que dependen de las propiedades del medio donde actúan los campos. Para medios isótropos estas relaciones son:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \quad (1.103)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (3.74)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{ley de Ohm, 2.19}).$$

La fuerza de Lorentz, que define el significado físico de los campos $\vec{E}$, $\vec{B}$ por su efecto sobre una carga de prueba q con velocidad $\vec{v}$ es:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.3)$$

Finalmente, el número de ecuaciones y la resolución se simplifican sustancialmente que se emplean los potenciales escalar V y vectorial $\vec{A}$, tales que

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.27)$$

$$\vec{B} = -\nabla V - \partial_t \vec{A} \quad (3.117)$$

Para definir los potenciales hemos empleado dos propiedades que valen en forma independiente de las fuentes: la conservación del flujo magnético (3.28) y la ley de Faraday (3.116). Las otras dos relaciones (3.101) y (3.142) involucran explícitamente a las fuentes ρ y $\vec{J}_v$. Vamos a reescribirlas en función de los potenciales suponiendo, para simplificar, que todas las interacciones tienen lugar en el vacío o en un medio muy tenue (como el aire) con $\epsilon \approx \epsilon_0$ y $\mu \approx \mu_0$.

$$\text{La ecuación de Poisson es } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1.15)$$

y el teorema de Ampère-Maxwell con $\vec{B} = \epsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{H} = \mu_0 \vec{B}$ toma la forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{H} = \mu_0 (\vec{J}_v + \partial_t \vec{D}) = \mu_0 \vec{J}_v + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad (3.147)$$

Reemplazando los potenciales resultan las equivalentes de las ecuaciones de Maxwell (1.15) y (3.142):

$$\text{En (1.15): } -\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (\nabla V + \partial_t \vec{A}) = \nabla^2 V + \partial_t (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3.148)$$

- Aplicando la identidad (A.10) en (3.147):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_v + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t (-\nabla V - \partial_t \vec{A}) = \\ &= \mu_0 \vec{J}_v - \epsilon_0 \mu_0 \nabla (\partial_t V) - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} \\ \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t V) &= -\mu_0 \vec{J}_v \end{aligned} \quad (3.149)$$

En condiciones estáticas ($\partial_t = 0$) el potencial vectorial vale

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_V d\tau' \frac{\vec{J}_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.51)$$

Aplicando el teorema de la divergencia (A.12) resulta:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mu_0 \int_V d\tau' \nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}_v}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \mu_0 \oint_{S(V)} d\vec{S}' \cdot \frac{\vec{J}_v}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde $S(V)$ encierra a todas las fuentes, de modo que sobre esa superficie $\vec{J}_v = 0$. En consecuencia:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (3.150)$$

La condición (3.150) define la llamada norma de Coulomb sobre el potencial, condición válida para configuraciones estáticas. En este caso las (3.148) y (3.149) se convierten en:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (1.52) \quad \text{y} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_v} \quad (3.151)$$

ya conocidas, donde los potenciales V y $\vec{A}$ aparecen separados algebraicamente (uno solo en cada ecuación).

Para el caso general de condiciones que varían en el tiempo, Lorentz halló una condición que permite reemplazar las ecuaciones (3.148) y (3.149) por otras donde los potenciales aparecen separados. Sabemos que $V(\vec{r}, t)$ está definido a menos de una constante, y $\vec{A}(\vec{r}, t)$ lo está a menos del gradiente de un campo escalar (ver ecs. 33 y 34, Análisis Vectorial). Siempre podemos elegir la constante en V y el escalar variable en $\vec{A}$ de manera que se anule el paréntesis en (3.149), es decir que se verifique

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t V = 0} \quad (3.152)$$

Entonces

$$(3.148) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho} \quad (3.153)$$

$$(3.149) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_v} \quad (3.154)$$

La condición (3.152) define la norma de Lorentz sobre los potenciales, que permite simplificar el sistema de ecuaciones de Maxwell, llevándolo a una forma analítica tratable. Obviamente, la norma de Coulomb (3.150) es un caso particular de la de Lorentz para condiciones independientes del tiempo.

Si definimos una constante c tal que

$$c \equiv (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \quad (3.155)$$

y un operador $\square^2$, llamado d'Alembertiano:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - c^{-2} \partial_t^2 \quad (3.156)$$

las ecuaciones (3.153) y (3.154) toman la forma:

$$\boxed{\square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}_v} \quad (3.157)$$

Se ve que la norma de Lorentz permite escribir las ecuaciones de Maxwell en forma similar, ya sea para condiciones estáticas o dependientes del tiempo, reemplazando en el último caso el operador Laplaciano por el d'Alembertiano.

PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN EL VACIO

Como aplicación de las ecuaciones de Maxwell analizaremos su forma en una región libre de cargas y de corrientes:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.158)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.159)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (3.160)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon \mu \partial_t \vec{E} \quad (3.161)$$

Tomando el rotor de la (3.160) y empleando la identidad (A.10) tenemos:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \partial_t \vec{B} = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\text{donde (3.161)} \implies \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \epsilon \mu \partial_{tt}^2 \vec{E}$$

y aplicando (3.158) resulta:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \epsilon \mu \partial_{tt}^2 \vec{E} = \square^2 \vec{E} = 0} \quad (3.162)$$

Repetiendo las mismas operaciones para la ecuación (3.161) y aplicando (3.159) y (3.160) en el orden anterior obtenemos el resultado análogo (verificarlo):

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \epsilon \mu \partial_{tt}^2 \vec{B} = \square^2 \vec{B} = 0} \quad (3.163)$$

Observemos que en el vacío y sin fuentes ($\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$), las (3.157) toman la misma forma:

$$\square^2 V = \square^2 \vec{A} = 0.$$

Vemos que todas las componentes de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, así como los potenciales $V, \vec{A}$ cumplen la condición:

$$\square^2 G = \nabla^2 G - c^{-2} \partial_{tt}^2 G = 0 \quad (3.164)$$

donde $G(\vec{r}, t)$ es una componente cualquiera de un campo o de un potencial. La (3.164), denominada ecuación de las ondas, es una de las más importantes de la Física matemática, y tiene infinitas soluciones. Son especialmente interesantes las soluciones de la forma:

$$G(\vec{r}, t) = G(\hat{k}, \vec{r} - ct) \quad (3.165)$$

Estas son funciones que toman un mismo valor para todas las combinaciones de $\vec{r}, t$ que verifican la condición

$$\hat{k} \cdot \vec{r} - ct = \hat{k} \cdot \vec{r}_0 = \text{const.}$$

siendo $\hat{k}$ un vector fijo. Es decir que si la función G toma el valor G_0 en el punto $\vec{r}_0$ en $t=0$, en un instante t posterior dicho valor de G aparece en la posición $\vec{r} = \vec{r}_0 + c \hat{k} t$, o sea que ese valor de la función se propaga con velocidad

$$v = \hat{k} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{t} = c = \text{const.}$$

Las funciones de la forma descripta definen ondas que viajan en la dirección y sentido definidos por $\hat{k}$ con una velocidad de magnitud dada por

$$c = (\epsilon \mu)^{-1/2} \quad (3.155)$$

que es (experimentalmente) idéntica a la velocidad de la luz en el vacío. Más generalmente, c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío.

El valor medido de c es constante e idéntico:

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Como ya hemos visto, la relación (3.155) permite definir μ arbitrariamente ($\mu = 4\pi \times 10^{-7}$) para dar automáticamente el valor de $\epsilon = 1/\mu c^2$.

Ejercicio: Demostrar, por derivación directa, que toda función de la forma (3.165) satisface la ecuación (3.164).

CAPÍTULO IV

TRANSITORIOS

A) ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS A COEFICIENTES CONSTANTES

DEFINICIÓN Y EXISTENCIA DE SOLUCIONES

Las ecuaciones diferenciales son aquellas en las cuales las incógnitas son funciones de una o de varias variables, en las que aparecen estas funciones y sus derivadas. Si las incógnitas dependen de varias variables se trata de ecuaciones en derivadas parciales. Si dependen de una sola variable independiente, tenemos ecuaciones diferenciales ordinarias.

En numerosas aplicaciones a la Física la variable independiente suele ser el tiempo, por lo cual en lo que sigue la designaremos con una letra t . Sin embargo, existe una multitud de problemas que tienen sus dúales en otros modelos físicos, es decir problemas que se reducen a un mismo sistema de ecuaciones, de modo que varios de los ejemplos que plantearemos nos darán el método de resolución común a diversos problemas de la Física.

Un sistema de ecuaciones se denomina lineal cuando en cada término de cada ecuación aparece una sola función incógnita o una única derivada de cualquier orden de alguna incógnita. Así, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias más general posible se puede escribir en la forma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m a_{ijk}(t) \frac{d^k x_j}{dt^k} - f_i(t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

donde $x_1(t) \dots x_n(t)$ son las incógnitas, a_{ijk} son los coeficientes y $f_i(t)$ son los términos independientes (los que no contienen a las incógnitas, aunque pueden depender de t). Observemos que en el sistema (4.1) hay un total de n ecuaciones con n incógnitas: j indica el número de incógnita, i define el número de ecuación y k , el orden de la derivada de un término dado.

Cuando todos los términos independientes son nulos, las ecuaciones se dicen homogéneas. A todo sistema lineal inhomogéneo (como el 4.1 con $f_i \neq 0$) le corresponde un sistema lineal homogéneo de la forma

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m a_{ijk}(t) \frac{d^k x_j}{dt^k} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

Las ecuaciones homogéneas y sus soluciones juegan un papel fundamental en la resolución de los sistemas inhomogéneos, como veremos.

En lo que sigue nos haremos de ocupar solamente de aquellas ecuaciones diferenciales en las cuales los coeficientes a_{ijk} son constantes. Este tipo de ecuaciones nos permite describir el comportamiento de los circuitos eléctricos que se pueden construir con elementos lineales de dos terminales (resistencias, inductancias y condensadores).

Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones cuya sustitución en el sistema las convierte en identidades. Para las ecuaciones que nos interesan aquí hay un teorema del Análisis que garantiza la existencia y unicidad de soluciones continuas de estos sistemas de ecuaciones, bajo condiciones bastante amplias. Aquí no nos detendremos en la enunciación precisa, ni mucho menos en la demostración del teorema de existencia y unicidad de las soluciones. Para quien esté interesado en el tema recomendamos el texto Ordinary Differential Equations, de L.S. Pontryagin (Addison-Wesley, Reading, 1962), especialmente adecuado para estudiantes de Física e Ingeniería. Sin embargo debemos definir las condiciones necesarias para que el problema esté bien planteado. Para ello hace falta conocer las llamadas condiciones iniciales.

SOLUCIONES PARTICULARES Y CONDICIONES INICIALES

Para fijar ideas nos ocuparemos por ahora de una sola ecuación diferencial lineal

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} = f(t) \quad (4.3)$$

en una sola incógnita $x(t)$. El orden de la ecuación es el orden de la derivada más elevada de la incógnita que figura en el primer miembro: n en este caso. Los coeficientes a_k son constantes. La derivada de orden cero es la misma función $x(t)$.

Esta ecuación diferencial es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma (verificarlo):

$$x_1 = x(t); \quad x_2 = \frac{dx}{dt}; \quad x_3 = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad \dots$$

$$\dots\dots\dots x_n = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt} \quad (4.4)$$

$$\text{de modo que} \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1}(t) + a_n dx_n/dt = f(t).$$

Es decir que la ecuación (4.3) equivale al sistema de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3; \quad \dots\dots \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n; \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{1}{a_n} [f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ejercicio: Verificar la equivalencia enunciada.

Como vemos, una ecuación de orden n equivale a un sistema de n ecuaciones de primer orden en las cuales la única derivada primera que aparece se puede despejar como en (4.5). Las ecuaciones así expresadas constituyen lo que se denomina un sistema normal. La mayoría de los métodos numéricos que empleamos para resolver ecuaciones del tipo (4.3) comienzan por reducirlas a la forma normal.

Dada esta equivalencia, nos basta con analizar las propiedades de estos sistemas, para los cuales no es difícil enunciar el teorema de existencia y unicidad de las soluciones.

El sistema (4.5), o cualquier otro semejante, se puede expresar en forma vectorial definiendo un vector $\vec{x}(t)$ que tenga por componentes a las funciones $x_i(t)$ definidas en (4.4) y un vector $\vec{G}(t)$ cuyas componentes sean los segundos miembros del sistema de ecuaciones (4.5) con lo cual tenemos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{G}(t, \vec{x}) \quad (4.6)$$

con $G_1 = x_2$; $G_2 = x_3$; etc.

Dar valores iniciales al problema significa afirmar que en un instante t_0 (es decir para un valor t_0 de la variable independiente) la solución $\vec{x}$ toma el valor $\vec{x}_0$, o sea

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \quad (4.7)$$

donde las componentes de $\vec{x}_0$ son constantes. Las condiciones iniciales (4.7) significan que x_1 calculada (o medida) en t_0 toma el

valor x_{10} , x_2 vale allí x_{20} , etc.

También es posible dar condiciones iniciales especificando los valores de algunas de las componentes de $\vec{x}$ (o de sus derivadas) en distintos puntos (instantes o valores de t). Sin embargo, los métodos de resolución son similares en todos los casos y nos basta con enunciar las propiedades fundamentales para el caso definido por las condiciones (4.7).

Supondremos que todas las funciones que aparecen explícitamente en las ecuaciones diferenciales tienen derivadas primeras continuas, lo cual es un requisito habitual en la Física del continuo.

El teorema de existencia y unicidad establece que existe una solución única $\vec{x}(t)$ del sistema de ecuaciones (4.6) que verifica idénticamente las condiciones (4.7) cuando las funciones $G_k(t, \vec{x})$ y todas sus derivadas parciales son continuas en un cierto dominio del espacio de las variables $(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Por la equivalencia ya demostrada resulta que, dentro de condiciones de continuidad semejantes, existe una única solución de la ecuación diferencial (4.3) siempre que se disponga de un número de condiciones iniciales suficientes del tipo (4.7).

La reducción a la forma normal según el procedimiento descrito para la ecuación (4.7) nos permitirá en cada caso decidir si el número de condiciones iniciales es suficiente. En los problemas más sencillos podemos seguir un criterio práctico para el caso de una sola ecuación:

El número de condiciones iniciales independientes y comparables debe ser igual al orden de la ecuación diferencial.

Por ejemplo, en un circuito con tres corrientes i_1, i_2, i_3 , no son independientes las condiciones iniciales:

$$\text{en } t = 0: i_1 + i_2 = 0; \quad i_1 + i_3 = 0; \quad i_2 - i_3 = 0,$$

pues la tercera se obtiene restando las dos primeras entre sí.

En general, si no se han planteado condiciones iniciales en número suficiente, la ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones, las cuales contendrán coeficientes indeterminados, es decir constantes cuyos valores se determinan empleando las condiciones iniciales, las que nos permiten seleccionar la solución única de entre ese conjunto infinito de soluciones posibles.

Es posible que un problema admita distintas soluciones que tengan intervalos (dominios) de definición distintos, pero si las

condiciones iniciales para estas soluciones formalmente distintas son idénticas, entonces las soluciones deben coincidir en la intersección de sus dominios de definición, como consecuencia de la unicidad.

Como ya hemos dicho, las soluciones de las ecuaciones homogéneas juegan un papel fundamental en la resolución de las inhomogéneas. Definiremos como solución particular de una ecuación diferencial inhomogénea a cualquier función que la verifique idénticamente, aun cuando no cumpla las condiciones iniciales. Por ejemplo, la función $x = b/c = \text{const.}$ es una solución particular de la ecuación

$$a \, dx/dt + bx = c,$$

como vemos inmediatamente por sustitución directa. Pero es posible que las condiciones iniciales sean incompatibles con dicha función, como sucede si se tiene que satisfacer la condición $x(t_0) = 0$, que sólo es compatible para $b = 0$, $c \neq 0$. Para construir una solución veremos que hace falta resolver primero la ecuación homogénea que se obtiene anulando el término independiente de la ecuación inhomogénea que nos proponemos resolver.

PROPIEDADES GENERALES DE LAS SOLUCIONES

Todas las propiedades que discutiremos a continuación valen para sistemas de ecuaciones del tipo descrito en (4.1): ordinarias, lineales, inhomogéneas, aun para coeficientes variables. Para fijar ideas vamos a iniciar el estudio de las soluciones de una ecuación como la (4.3) de orden n a coeficientes constantes.

Esta ecuación se puede escribir en forma simplificada si definimos el siguiente operador lineal P :

$$P[x(t)] = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} = a_0 + a_1 \frac{dx}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} \quad (4.8)$$

con lo cual la ecuación (4.3) toma la forma

$$P[x] = f(t) \quad (4.9)$$

cuya ecuación homogénea correspondiente es

$$P[y] = 0. \quad (4.10)$$

I) Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones cualesquiera de la ecuación homogénea (4.10). Entonces, si c_1 y c_2 son dos constantes complejas arbitrarias, veremos que la combinación lineal $c_1 x + c_2 y$ también es

solución de dicha ecuación homogénea. En efecto:

$$P[c_1 x + c_2 y] = c_1 P[x] + c_2 P[y] = 0 + 0 = 0,$$

puesto que el operador es lineal, por serlo todas las operaciones que contiene: sumas, productos por constantes y derivadas.

II) Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos soluciones cualesquiera de la ecuación inhomogénea (4.9). Entonces la diferencia entre ellas es una solución de la homogénea (4.10). En efecto:

$$P[x - y] = P[x] - P[y] = f(t) - f(t) = 0.$$

III) Sea $x(t)$ una solución de la ecuación inhomogénea (es decir una solución particular) e $y(t)$ una solución cualquiera de la homogénea. Entonces la suma de ambas es solución de la inhomogénea (4.9). En efecto:

$$P[x + y] = P[x] + P[y] = f(t) + 0 = f(t).$$

Esta es una propiedad muy útil para hallar soluciones de la ecuación inhomogénea.

IV) Supongamos que el término independiente $f(t)$ de la ecuación (4.9) se puede descomponer en la suma de otros de la forma

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t),$$

donde c_1 y c_2 son constantes complejas. Sean $x(t)$ e $y(t)$ soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$P[x] = f_1(t); \quad P[y] = f_2(t),$$

respectivamente. Entonces la combinación lineal $c_1 x + c_2 y$ es solución de la ecuación (4.9). En efecto:

$$P[c_1 x + c_2 y] = c_1 P[x] + c_2 P[y] = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = f(t).$$

Esta propiedad nos permitirá resolver ecuaciones cuyos términos independientes se pueden descomponer en combinaciones lineales de funciones más simples, como sucede con las funciones circulares e hiperbólicas (se descomponen en exponenciales), los polinomios (en potencias), etc.

METODO OPERACIONAL. PROPIEDADES DE LA EXPONENCIAL

Por su simplicidad, adoptaremos la notación operacional simbólica para la resolución de las ecuaciones que nos interesan. Designaremos la derivada de $x(t)$ con respecto a t mediante la expresión

$$p x \equiv dx/dt, \text{ o sea que } p^k x \equiv d^k x/dt^k, \text{ etc.} \quad (4.11)$$

Empleando esta práctica notación, el operador que hemos asociado a las ecuaciones diferenciales (4.9) y (4.10) toma la forma

$$p[x] = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x}{dt^k} \equiv \sum_{k=0}^n a_k p^k x, \quad (4.12)$$

que equivale a definir un polinomio operacional

$$P(p) \equiv \sum_{k=0}^n a_k p^k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n. \quad (4.13)$$

Empleando $P(p)$ la ecuación (4.9) se escribe como

$$P(p) x = f(t). \quad (4.14)$$

He aquí algunas de las propiedades más evidentes de estos operadores. Sean $G(p)$ y $H(p)$ dos operadores diferenciales lineales, $x(t)$ e $y(t)$ dos funciones arbitrarias. Entonces es fácil ver que:

$$i) \quad G(p)(x+y) = G(p)x + G(p)y$$

$$ii) \quad [G(p) + H(p)]x = G(p)x + H(p)x$$

$$iii) \quad G(p)[H(p)y] = [G(p)H(p)]y$$

La función $e^{\lambda t}$ (donde λ es una constante compleja) cumple un papel esencial en la resolución de estas ecuaciones, debido a que es la autofunción del operador p. En efecto:

$$p e^{\lambda t} = d e^{\lambda t} / dt = \lambda e^{\lambda t}.$$

Observamos que λ es el autovalor correspondiente a esta autofunción.

Como sabemos, una vez halladas las autofunciones y autovalores de un problema analítico, la resolución del mismo suele reducirse a un sencillo problema algebraico.

Como el operador p es lineal, cada vez que lo aplicamos a $e^{\lambda t}$ el resultado es el mismo que se obtiene multiplicando una vez por el autovalor λ , de manera que

$$p^2 e^{\lambda t} = p(\lambda e^{\lambda t}) = \lambda p e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} \dots$$

y, en general:

$$p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t} \quad (4.15)$$

Por lo tanto, si aplicamos el operador $P(p)$ definido en (4.13) a la autofunción $e^{\lambda t}$, resulta

$$P(p) e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^n a_k p^k e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad (4.16)$$

es decir que la autofunción resulta multiplicada por un polinomio en la constante λ cuyos coeficientes son los mismos del operador $P(p)$. Al nuevo polinomio lo indicamos como $P(\lambda)$.

ECUACION LINEAL HOMOGÉNEA. RAICES SIMPLES DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

La ecuación homogénea (4.10) tiene a la autofunción $e^{\lambda t}$ como solución:

$$P(p) e^{\lambda t} = e^{\lambda t} P(\lambda) = 0 \quad (4.17)$$

solamente cuando λ es una raíz del polinomio $P(\lambda)$, es decir cuando λ verifica idénticamente la ecuación algebraica

$$P(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n = 0. \quad (4.18)$$

Cuando esto sucede la autofunción $e^{\lambda t}$ es una solución de la (4.10). La ecuación algebraica (4.18) se denomina ecuación característica o auxiliar correspondiente a las ecuaciones (4.9) y (4.10). $P(\lambda)$ es el polinomio característico correspondiente al operador $P(p)$, y cada una de las autofunciones $e^{\lambda_i t}$ que se construyen a partir de las raíces λ_i de la ecuación (4.18) se llama solución fundamental de la ecuación diferencial homogénea.

El número de soluciones fundamentales está claramente determinado por el orden del operador $P(p)$, ya que éste coincide obviamente con el grado n del polinomio característico $P(\lambda)$. El teorema fundamental del álgebra establece que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas (si algunas de ellas no son reales, a cada una de éstas le corresponde su compleja conjugada, que también es raíz). Algunas raíces pueden aparecer repetidas y se denominan múltiples (las restantes se llaman simples). El número de veces que aparece una raíz en el desarrollo (productoria) del polinomio es la multiplicidad de esa raíz.

Recordando la propiedad (I) de las soluciones, notamos que cualquier combinación lineal de soluciones fundamentales debe ser solución de la ecuación lineal homogénea (4.10). Es decir que si $c_1, \dots, c_n$ son constantes complejas cualesquiera, entonces

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ raíces de (4.18), es solución de (4.10).

Vemos un ejemplo sencillo de lo expuesto. La ecuación de segundo orden

$$P(x) = p^2 x - px - 6x = 0, \quad (4.19)$$

cuyo polinomio característico $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Por lo tanto, cualquier combinación lineal de la forma

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ es solución de la ecuación (4.19). Si sabemos, por ejemplo, que en $t=0$ se verifica $x(0) = 0$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -1$;

podemos calcular los dos coeficientes c_1 y c_2 . En efecto (verificarlo):

$$\begin{aligned} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \text{y} \quad -3c_1 + 2c_2 = -1 \\ \implies c_1 = -c_2 = \frac{1}{5} \implies x(t) = \frac{1}{5} (e^{-3t} - e^{2t}). \end{aligned}$$

Como vemos, la resolución de una ecuación diferencial homogénea cuyas raíces son simples se reduce a un simple problema algebraico:

i) La resolución de la ecuación algebraica característica que provee los coeficientes de t en los exponentes de las autofunciones.

ii) La obtención de los coeficientes (indeterminados a priori) que participan en la combinación lineal de autofunciones, lo que se logra reemplazando en las condiciones iniciales y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas lineales que resulta.

En la práctica conviene siempre agregar un tercer paso: la verificación de la solución mediante la sustitución directa de la misma:

- a) en la ecuación diferencial;
- b) en las condiciones iniciales.

CASO DE RAICES MULTIPLES

Sea la ecuación diferencial homogénea

$$P(u) = (p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 2p + 1) u(t) = 0, \quad (4.20)$$

cuyo polinomio característico se puede factorizar como

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Es fácil ver que las raíces de la ecuación característica son:

$$\lambda_1 = j; \quad \lambda_2 = -j; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1;$$

donde llamamos (cuando no haya confusión posible con la densidad de corriente!) j a la unidad imaginaria, para distinguirla de las

corrientes y de los subíndices, de modo que $j = \sqrt{-1}$.

Dos de las raíces son complejas conjugadas ($\lambda_3 = \lambda_4^*$) y la restante es doble ($\lambda_3 = \lambda_4$; multiplicidad=2). En apariencia, las únicas soluciones fundamentales serían e^{jt} , e^{-jt} , e^{-t} . Sin embargo, veremos que éstas no permiten expresar todas las soluciones posibles cuando tenemos raíces dobles del polinomio característico. Para ello emplearemos un sencillo razonamiento que permite obtener las soluciones fundamentales que faltan.

Toda combinación lineal de las autofunciones de (4.20) debe ser solución de la ecuación. En particular, deberá serlo la siguiente:

$\tilde{u}(t) = \frac{e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t}}{\lambda_3 - \lambda_4}$, cuyo límite para $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4$ se obtiene aplicando el teorema de L'Hospital (ya que en ese límite el numerador y el denominador se anulan):

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \lambda_4} \tilde{u} = \lim_{\lambda_3 \rightarrow \lambda_4} \frac{d/d\lambda_3 (e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t})}{d/d\lambda_3 (\lambda_3 - \lambda_4)} = \lim_{\lambda_3 \rightarrow \lambda_4} \frac{t e^{\lambda_3 t}}{1} = t e^{\lambda_3 t}$$

(en todo el cálculo λ_4 permanece constante).

La combinación $\tilde{u}$ así obtenida es una nueva solución de (4.20), de modo que el conjunto de soluciones fundamentales es:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{jt}; \quad e^{\lambda_2 t} = e^{-jt}; \quad e^{\lambda_3 t} = e^{-t}; \quad t e^{\lambda_3 t} = t e^{-t},$$

y según (I) toda combinación lineal de éstas será solución de (4.20), o sea que la solución general de esta ecuación deberá ser de la forma

$$u(t) = c_1 e^{jt} + c_2 e^{-jt} + (c_3 + c_4 t) e^{-t} \quad (4.21)$$

Para determinar los cuatro coeficientes c_k serán necesarias cuatro condiciones iniciales, las que darán lugar a cuatro ecuaciones algebraicas lineales, de cuya compatibilidad e independencia dependerá la posibilidad de obtener la solución única de la ecuación (4.20).

Ejercicio: Demostrar, por sustitución directa en (4.20), que la función $u(t)$ recién obtenida es solución de la ecuación.

Este resultado se puede generalizar para cualquier multiplicidad, y expresarse en una forma que abarque como caso particular al de las raíces simples de la sección anterior (multiplicidad uno). A ello se refiere el siguiente

Teorema Sea la ecuación diferencial homogénea a coeficientes constantes $P(p)u(t) = 0$, de orden n . Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ todas las raíces distintas del polinomio $P(\lambda)$, o sea que $m \leq n$. Sea k_i la

hallar una solución particular $y_p(t)$ con un término independiente de la forma de (4.26) nos basta con saber cómo resolver una ecuación del tipo

$$F(p) u = Q(t) e^{\mu t} \quad (4.28)$$

donde $Q(t)$ es un polinomio de grado q y μ es una constante. Hay que distinguir, sin embargo, dos casos importantes:

- Que μ sea raíz de $F(\lambda) = 0$ con multiplicidad k .
- Que μ no sea raíz de esa ecuación característica.

Podemos verificar por sustitución directa que:

- En el caso (a) la solución particular de (4.28) es una función de la forma

$$u_p(t) = t^k R(t) e^{\mu t} \quad (4.29)$$

donde $R(t)$ es un polinomio de grado q (el mismo grado de Q).

- En el caso (b) es $k=0$ y la solución particular de (4.28) tiene la forma

$$u_p(t) = R(t) e^{\mu t} \quad (4.30)$$

donde nuevamente $R(t)$ es un polinomio de grado q . Es obvio que (4.30) es un caso particular trivial de (4.29).

Para fijar ideas veremos un par de ejemplos del tipo de los que se nos presentan en la práctica. Hallaremos una solución particular de la ecuación diferencial

$$F(y) = (p^2 + \omega^2) y = at^2 + bt + c \equiv Q(t) \quad (4.31)$$

que es de la forma (4.28) con $\mu = 0$ y $q = 2$. Las raíces del polinomio característico $(\lambda^2 + \omega^2)$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = j\omega \neq 0$, de modo que nos encontramos en el caso (b). Luego, una solución particular de (4.31) es

$$y_p(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3,$$

cuyos coeficientes se calculan por simple sustitución en (4.31):

$$F[y_p] = 2c_1 + \omega^2(c_1 t^2 + c_2 t + c_3) = at^2 + bt + c.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de t en ambos miembros resulta:

$$\omega^2 c_1 = a; \quad \omega^2 c_2 = b; \quad \omega^2 c_3 + 2c_1 = c;$$

de donde:

$$c_1 = a/\omega^2; \quad c_2 = b/\omega^2; \quad c_3 = c/\omega^2 - 2a/\omega^4$$

Luego, la solución particular buscada es

$$y_p(t) = \omega^{-2}(at^2 + bt + c - 2a\omega^{-2}).$$

He aquí un ejemplo algo más complicado. Sea la ecuación diferencial

$$F[z] = (p^2 + 1)z = t \cos t \equiv \frac{1}{2} t e^{it} + \frac{1}{2} t e^{-jt}, \quad (4.32)$$

cuyo término independiente es un cuasipolinomio.

El polinomio característico correspondiente es $(\lambda^2 + 1)$ y sus raíces son $\lambda_1 = -\lambda_2 = j$. Conviene resolver por separado las ecuaciones:

$$(p^2 + 1)z = \frac{1}{2} t e^{it} \quad \text{y} \quad (p^2 + 1)z = \frac{1}{2} t e^{-jt}.$$

Conjugando ambos miembros de la primera ecuación se obtiene la segunda ecuación con z^* como incógnita. O sea que si $z(t)$ es solución de la primera, su conjugada lo es de la segunda.

La primera ecuación es del tipo descrito en (a), pues $\mu = j$ es una raíz simple del polinomio característico ($k=1$). Luego, debemos ensayar una solución particular de la forma

$$z_p^1(t) = t^k R(t) e^{\mu t} \equiv t(c_1 + c_2 t) e^{it}.$$

Sustituyendo ésta en la ecuación diferencial tenemos (verificarlo):

$$(p^2 + 1)z_p^1 = [2(c_2 + j c_1) + 4j c_2 t] e^{it} = \frac{1}{2} t e^{it},$$

de donde resulta $c_1 = 1/8$; $c_2 = -j/8$, y la solución particular de (4.32) es

$$z_p(t) = z_p^1 + z_p^{1*} = \frac{1}{8}(t - jt^2)e^{it} + \frac{1}{8}(t + jt^2)e^{-it} = \frac{1}{4}(\cos t + t \sin t).$$

En este último ejemplo notamos la utilidad de los cuasipolinomios, que nos permiten resolver numerosos problemas posibles. Algunos ejemplos útiles de términos independientes son

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega t}; \quad \sin \omega t = \frac{j}{2} e^{j\omega t} - \frac{j}{2} e^{-j\omega t};$$

$$\cosh \mu t = \frac{1}{2} e^{\mu t} + \frac{1}{2} e^{-\mu t}; \quad \sinh \mu t = \frac{1}{2} e^{\mu t} - \frac{1}{2} e^{-\mu t};$$

$$\cos 2t \cos 3t = \frac{1}{4} e^{5jt} + \frac{1}{4} e^{jt} + \frac{1}{4} e^{-jt} + \frac{1}{4} e^{-5jt}; \quad \text{etc.}$$

También comprobamos en el caso (4.32) una propiedad general:

Las soluciones de ecuaciones con coeficientes reales son funciones reales.

La demostración general se basa en una descomposición del término independiente en una función y su conjugada, como en este ejemplo.

Los desarrollos de Fourier de funciones periódicas son series convergentes, como podemos ver en cualquier texto de Análisis Matemático. Es decir que siempre podemos aproximarlos con un número finito de términos, número que será tanto más grande cuanto mayor sea la precisión

deseada en la aproximación. Es fácil ver que dichos desarrollos de Fourier truncados no son otra cosa que cuasipolinomios. Esto nos permite resolver con la aproximación que deseamos cualquier ecuación inhomogénea con término independiente periódico.

Debemos entonces cómo obtener la solución general de la ecuación homogénea y también la solución particular de la inhomogénea. Para hallar la solución general de la inhomogénea debemos sumar esas soluciones como en (4.27). De esa manera obtendremos una función donde los coeficientes de la solución completa $u(t)$ que provienen de la solución de la homogénea quedan indeterminados. Para calcularlos simplemente especializamos el valor de la variable t según lo dicten las condiciones iniciales, con lo cual cada una de esas condiciones se convertirá en una ecuación algebraica lineal cuyas incógnitas son ahora los coeficientes indeterminados. Resueltas estas ecuaciones algebraicas habremos obtenido la solución completa buscada.

Resumiremos el procedimiento en un ejemplo muy sencillo:
Sea la ecuación de primer orden

$$dx/dt + x = a \quad (4.33)$$

con la condición inicial $x(0) = b$.

Primero resolvemos la ecuación homogénea $(p+1)x_h = 0$. La única raíz del polinomio característico es $\lambda = -1$, de modo que la solución general de la homogénea es

$$x_h(t) = c_1 e^{-t}$$

donde c_1 es una constante arbitraria. Como el término independiente es una constante (cuasipolinomio de grado 0), la solución particular será también constante. Sustituyendo $u_p = \text{const.}$ en (4.33) obtenemos $u_p = a$. Luego, la solución general de la ecuación planteada es

$$x(t) = c_1 e^{-t} + a.$$

La condición inicial para $t=0$ requiere que $x(0) = c_1 + a = b$, de donde resulta $c_1 = b - a$. Finalmente la solución completa es

$$x(t) = (b - a)e^{-t} + a.$$

En la parte (3) de este capítulo veremos numerosos ejemplos de aplicación del método recién descripto.

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. METODO DE ELIMINACION

Hasta aquí nos hemos ocupado de una sola ecuación diferencial. Veremos que, siguiendo ciertas reglas sencillas, es posible reducir

sistemas de varias ecuaciones lineales a una sola ecuación del tipo ya descripto, empleando para ello el método de eliminación.

Nuevamente conviene distinguir entre sistemas homogéneos e inhomogéneos. Comencemos por analizar los primeros. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$\sum_{i=1}^n A_{is}(p) x_s(t) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.34)$$

donde cada $A_{is}(p)$ es un polinomio en el operador diferencial p . Si formamos la matriz cuadrada de $n \times n$ que tiene por elementos los operadores $A_{is}(p)$, podemos calcular su determinante

$$D(p) = \det[A_{is}],$$

que también es un operador diferencial. Este determinante tiene un polinomio asociado que se obtiene reemplazando λ en lugar de p , que es el polinomio característico del sistema (4.34). Luego de calcular las raíces de este $D(\lambda) = 0$, supongamos que la raíz λ_1 tenga multiplicidad k_1 . Entonces vale el siguiente

Teorema) Las soluciones del sistema homogéneo (4.34), cuyo determinante característico no es idénticamente nulo, son cuasipolinomios de la forma

$$x_s(t) = \sum_{i=1}^m g_{si}(t) e^{\lambda_i t} \quad (4.35)$$

donde λ_i es la raíz de multiplicidad k_i del polinomio $D(\lambda)$, y las funciones $g_{si}(t)$ son polinomios de grado $k_i - 1$.

Veamos un ejemplo sencillo. Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} (p+1)x_1 + px_2 = 0 \\ (p^2-1)x_1 + (p^2+1)x_2 = 0 \end{cases}$$

Luego,

$$D(p) = \begin{vmatrix} p+1 & p \\ p^2-1 & p^2+1 \end{vmatrix} = p^2 + 2p + 1,$$

tiene un polinomio asociado $D(\lambda)$ con una raíz doble: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Por lo tanto, las soluciones son, según (4.35):

$$x_1(t) = (a+t)b e^{-t}; \quad x_2(t) = (c+t)d e^{-t};$$

cuyos coeficientes no son independientes. En efecto, reemplazando en las ecuaciones dadas resulta

$$(p+1)x_1 + px_2 = e^{-t}(a - \dots) = 0$$

o sea $c = 0$, $a = d$. Luego:

$$x_1(t) = (a+t)b e^{-t}; \quad x_2(t) = a e^{-t};$$

(reemplazando en la otra ecuación el resultado es idéntico). Para determinar estos únicos dos coeficientes a , b debemos recurrir a las condiciones iniciales, como se vio en las secciones anteriores.

Para sistemas de ecuaciones sencillos se puede aplicar directamente el método de eliminación, que consiste en despejar de una ecuación una de las incógnitas x_i (o alguna derivada de una incógnita), expresándola en función de las demás y luego reemplazar dicha incógnita o derivada en las otras ecuaciones.

Por ejemplo, calculemos la velocidad $\vec{v}(t)$ de una partícula de carga q y masa m que se mueve en un campo magnético $\vec{B}$ que apunta en la dirección z . La fuerza de Lorentz (3.2) es, en componentes cartesianas: $m dv_x/dt = q v_y B$; $m dv_y/dt = -q v_x B$; $m dv_z/dt = 0$.

Empleando la frecuencia de ciclotrón definida en (3.121): $\omega = qB/m$ las tres ecuaciones toman la forma

$$p v_x - \omega v_y = 0; \quad p v_y + \omega v_x = 0; \quad p v_z = 0.$$

La tercera ecuación describe un movimiento uniforme en la dirección z , ya que $p v_z = 0$ tiene la raíz $\lambda = 0$, de modo que $v_z = \text{const.}$

Despejando v_y de la primera ecuación: $v_y = \frac{1}{\omega} p v_x$ y derivando:

$p v_y = \frac{1}{\omega} p^2 v_x$, podemos sustituir en la segunda, obteniendo: $\omega [\frac{1}{\omega} p^2 v_x + \omega v_x] = (p^2 + \omega^2) v_x = 0$.

En forma exactamente análoga se obtiene la ecuación

$$(p^2 + \omega^2) v_y = 0.$$

Estas ecuaciones de segundo orden tienen las incógnitas separadas (aparece una sola en cada ecuación), y se resuelven por los métodos descriptos en secciones anteriores. Las raíces valen $\pm j\omega$ y es fácil verificar que si la partícula tenía una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (v \cos \theta, v \sin \theta, w)$, la proyección sobre el plano (x, y) de la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio $r = v/\omega$.

Quando el sistema de ecuaciones es inhomogéneo se lo resuelve por el método descripto para una sola ecuación, comenzando por resolver el sistema homogéneo correspondiente y sumando luego las soluciones particulares respectivas. Las condiciones iniciales aplicadas a las soluciones completas (suma de solución de homogénea más particular) conducirán a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de las cuales obtendremos los coeficientes indeterminados que aparecen al resolver el sistema homogéneo.

b) ANALISIS DE TRANSITORIOS EN CIRCUITOS SIMPLES

En lo que sigue estudiaremos el comportamiento de circuitos simples que se pueden armar mediante combinaciones de resistencias (R), condensadores (C) e inductancias (L, M). En cada caso plantearemos las respectivas ecuaciones diferenciales con sus condiciones iniciales y las resolveremos empleando los métodos descriptos en las secciones anteriores. En la resolución seguiremos paso por paso los procedimientos ya descriptos, luego de una breve descripción del sistema físico y sin dedicarle comentarios adicionales, a menos que surja alguna conclusión específica.

Obtenidas las soluciones, interpretaremos los resultados físicos y discutiremos algunos casos particulares de interés. También analizaremos la conservación de energía en los procesos de carga y descarga, que siempre involucran la transferencia de energía electromagnética dentro del circuito, o la disipación de la misma en forma de calor.

En lo inmediato sólo estudiaremos circuitos conectados a fuentes continuas ($f.e.m. = \text{const.}$), en los cuales hay llaves ideales, infinitamente rápidas, que permiten variar instantáneamente las diferencias de potencial entre distintos puntos de los de los respectivos circuitos. Una llave puede considerarse ideal cuando su tiempo de respuesta es despreciable en comparación con el tiempo característico (la constante de tiempo, p.e.j.) del circuito donde actúa la llave. Veremos que no es difícil determinar el tiempo característico de las combinaciones simples de resistencias, inductancias y condensadores.

En general, la resolución de este tipo de circuitos implica el cálculo de las cargas (en condensadores) o de las corrientes de ramas a partir de las f.e.m. conocidas. Cuando planteamos las ecuaciones y sus condiciones iniciales nos conviene elegir como incógnita a la derivada temporal del menor orden posible de la carga $q(t)$. Ello permite aplicar de manera sistemática el método operacional y evita el uso expedito de integrales definidas.

Si, por ejemplo, hemos elegido a la carga q como variable dependiente, una vez calculada la carga es muy sencillo determinar la corriente $i(t)$ por derivación directa ya que, por la conservación de la carga, en todo circuito se verifica (ecuación 2.9):

$$i = dq/dt$$

(4.36)

Para calcular las tensiones a partir de la corriente $i(t)$ debemos recurrir a las relaciones fundamentales que fuimos describiendo (todas ellas de origen experimental):

i) Ley de Ohm: en cada instante t la caída de tensión (diferencia de potencial) entre los extremos de una resistencia R vale

$$V_R(t) = R i(t). \quad (4.37)$$

ii) Capacidad de un condensador: en cada instante t la carga $q(t)$ de la placa positiva (interior) de un condensador vale $q(t) = C V_C(t)$, de donde resulta que la diferencia de potencial entre las dos placas es

$$V_C(t) = \frac{1}{C} q(t). \quad (4.38)$$

iii) Ley de Faraday: cuando varía la corriente $i(t)$ que circula por una inductancia L , con ella varía el flujo magnético propio a través de la inductancia, de modo que aparece entre los extremos de L una f.e.m. (fig. 1)

$$E_L(t) = -L \frac{di}{dt}.$$

Como ya hemos visto al discutir la convención de signos en (3.120) esta f.e.m. equivale a una caída de tensión de signo opuesto (fig. 1). Es decir que

$$V_L(t) = L \frac{di}{dt}. \quad (4.39)$$

Recordemos que para un circuito cerrado (malla), cuyas corrientes de ramas son i_k y cuyas resistencias respectivas valen R_k , suponiendo que la inductancia L se encuentra en la rama 1, la ecuación (3.120) toma la forma

$$E_n = L \frac{di_1}{dt} + \sum_k R_k i_k, \quad (4.40)$$

donde las E_n son las f.e.m. encontradas al recorrer la malla.

Cuando existe acoplamiento magnético entre dos inductancias, las ecuaciones correspondientes a las respectivas mallas también se acoplan, ya que en las ecuaciones que describen los flujos magnéticos (Cap. III, fig. 16) aparecen términos que contienen a las dos

corrientes que circulan por ambas inductancias. En este caso, que discutiremos en detalle en el Cap. V, los signos de las caídas de tensión dependen de los enrollamientos de las bobinas.

Para el caso de dos bobinas cuya inductancia mutua vale M , las caídas de tensión que resultan del acoplamiento magnético valen

$$V_1(t) = \pm M \frac{di_2}{dt} \text{ (sobre } L_1); \quad V_2(t) = \pm M \frac{di_1}{dt} \text{ (sobre } L_2) \quad (4.41)$$

CIRCUITO RC SERIE

El caso más sencillo de corriente variable está dado por un circuito serie de dos elementos pasivos. En la fig. 2 se muestra una resistencia R en serie con un condensador C cuya carga $q(t)$ suponemos distribuida según la convención de signos indicada en la figura. La carga podría estar distribuida en sentido inverso, correspondiendo a $q < 0$, como sucedía al calcular una corriente continua (Cap. II), cuando le asignábamos un sentido arbitrario a la corriente al iniciar el planteo de un problema. E es una f.e.m. constante y C está inicialmente cargado con

$$q(0) = Q_0 = C V_0.$$

La llave S , inicialmente abierta, se cierra en $t = 0$, con lo cual se conecta la fuente E y comienza a circular la corriente que carga al condensador.

En lo que sigue, para abreviar, emplearemos la notación que aclaramos solamente en este caso particular.

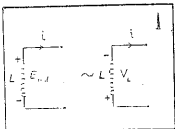
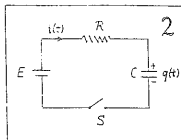
ED) (Planteo de la ecuación diferencial).

La ley de Kirchhoff de las tensiones establece para $t > 0$ que:

$$E = \frac{1}{C} q + R i = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt} \implies F[q] \equiv (R p + \frac{1}{C}) q(t) = E. \quad (4.42)$$

Esta ED es de primer orden y podemos calcular fácilmente las raíces de su

PC) (Polinomio característico) $P(\lambda) = R\lambda + 1/C = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$



donde $\tau = RC$ es el tiempo característico o la constante de tiempo del circuito.

Luego, la solución fundamental (única, por ser la ecuación de primer orden) es

SP) (Solución fundamental) $e^{-t/\tau} = e^{-t/RC} = e^{-t/\tau}$,

con lo cual podemos expresar la solución de la ecuación homogénea:

H) (Ecuación homogénea) $F[q_h] = 0 \implies q_h(t) = a e^{-t/\tau}$.

Ahora podemos hallar una solución particular de la ecuación inhomogénea (4.42):

P) (Solución particular)

Como $f(t) = E = \text{const.}$, nos encontramos con el caso más elemental de cuasi-polinomio, y debe ser $q_p = \text{const.}$ Para calcularla sustituimos q_p en (4.42):

$$\frac{1}{C} q_p = E \implies q_p = CE.$$

Luego, la solución general será:

G) (Solución general) $q(t) = q_h + q_p = a e^{-t/\tau} + CE$,

donde falta determinar el coeficiente a . Para hacerlo empleamos la condición inicial.

CI) (Condiciones iniciales)

Expresamos $q(t)$ en el instante $t=0$:

$$q(0) = a e^0 + CE = a + CE = q_0 \implies a = q_0 - CE.$$

Finalmente expresamos la

SC) (Solución completa)

$$q(t) = (q_0 - CE) e^{-t/\tau} + CE \quad (4.43)$$

o bien: $q(t) = C(V_0 - E) e^{-t/\tau} + CE.$

Para calcular la corriente $i(t)$ simplemente derivamos en (4.43):

$$i(t) = -\frac{(q_0 - CE)}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{(E - V_0)}{R} e^{-t/\tau}, \quad (4.44)$$

cuyo valor inicial es $i(0) = -I_0 = (E - V_0)/R.$

Discutiremos dos casos particulares de interés práctico:

a) Descarga del condensador

Supongamos que no hay fuente conectada ($E = 0$). Por simple sustitución en (4.43) y (4.44) obtenemos

$$q(t) = C V_0 e^{-t/\tau}; \quad i(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (4.45)$$

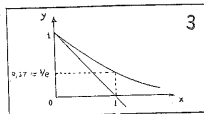
Para representar estas expresiones gráficamente conviene emplear variables dimensionales. Casi siempre las más convenientes surgen del mismo problema. Así, el tiempo se puede medir en unidades de la constante τ , definiendo una variable $x = t/\tau$, y la carga se puede medir en unidades de la carga inicial Q_0 , definiendo una variable $y(x) = q/Q_0$. Análogamente, la corriente se puede reemplazar por la variable $z(x) = i/I_0$, donde $I_0 = V_0/R = -i(0)$.

Usando dichas variables las ecuaciones (4.45) toman la forma:

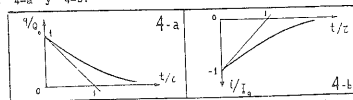
$$y = e^{-x}; \quad z = -e^{-x}.$$

Para trazar las curvas correspondientes es conveniente observar que la función exponencial toma el valor 1 en $x = 0$, siendo su

pendiente allí igual a -1 . Es decir que su tangente en el punto $(0, 1)$ es una recta que pasa por el punto $(1, 0)$, como se ve en la fig. 3. Sabiendo que la función se anula para $x \rightarrow \infty$, trazamos la curva que se muestra.



De esta manera representamos los resultados (4.45) en las figuras 4-a y 4-b:



La interpretación física de los resultados es inmediata, pues la carga del condensador disminuye exponencialmente con el tiempo hasta tomar el valor Q_0/e cuando $t = \tau$. Podemos definir un valor del tiempo para el cual podemos dar por terminado el proceso de descarga,

dado que habrá un instante para el cual $q(t) = e =$ carga de un electrón, a partir del cual la carga puede considerarse como nula.

La corriente de descarga tiene sentido contrario al indicado en la fig. 2, como corresponde al tenemos en cuenta la polaridad inicial de las placas del condensador. Este se comporta como una fuente que, en ausencia de la f.e.m., provoca una corriente opuesta a la que crearía una fuente de la polaridad indicada en aquella figura.

Veremos que se conserva la energía, recordando que la energía electrostática del condensador en $t=0$ es $U_C = \frac{1}{2} C V_0^2$. La potencia disipada en forma de calor por la resistencia R durante la descarga vale en cada instante $P(t) = R i^2(t)$. Luego, la energía total disipada por R durante toda la descarga vale

$$U_d = \int_0^{\infty} dt P(t) = \int_0^{\infty} dt R i^2(t) = R \int_0^{\infty} dt \frac{V_0^2}{R^2} e^{-2t/RC} = \\ = \frac{dV_0^2 RC}{2 R^2} \int_0^{\infty} d\left(\frac{2t}{RC}\right) e^{-2t/RC} = \frac{1}{2} C V_0^2 = U_C$$

o sea que es igual a la energía inicialmente disponible. Vamos, de paso, que siempre conviene elegir como variable de integración al argumento de la exponencial (en este caso igual a $2t/RC$).

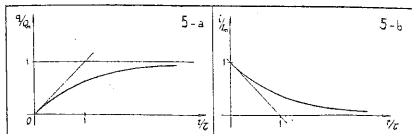
b) Carga del condensador

Supongamos ahora que el condensador está inicialmente descargado y conectamos a la fuente E (fig. 2), es decir que $Q_0 = V_0 = 0$. Sustituyendo estos valores en (4.43) y (4.44) resulta

$$q(t) = CE(1 - e^{-t/\tau}); \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}. \quad (4.46)$$

Inicialmente es $i(0) = 0$, $i(0) = I_m = E/R$ (este valor es el máximo de la corriente, que decrece exponencialmente con el tiempo). Luego de un tiempo suficientemente largo la carga se acerca a su valor máximo $Q_m = CE$, y la corriente tiende a 0. Empleando las variables adimensionales t/τ , q/Q_m e i/I_m podemos representar los resultados (4.46) como en las figuras 5-a y 5-b.

Es fácil verificar que la energía total provista por la fuente E durante todo el proceso de carga del condensador es igual a la suma de la energía disipada en la resistencia (U_R) más la almacenada en el



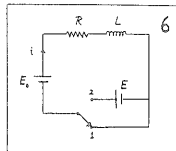
condensador (U_C), y que $U_R = U_C = \frac{1}{2} CE^2$ (verificarlo).

Ejercicio: Calcular la energía total entregada por la f.e.m. entre $t=0$ y un instante arbitrario:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) = \int_0^t dt' P(t') + \frac{1}{2} q(t) V_C(t).$$

CIRCUITO RL SERIE

Estudiaremos ahora el transitorio del circuito de la fig. 6, donde la llave S puede adoptar las posiciones 1 y 2. De tal manera queda conectada al circuito una f.e.m. E_0 ó $E_0 + E$, respectivamente. Esta conexión nos permite optar entre distintos valores de la corriente inicial $i(0)$, como veremos enseguida.



Supongamos que inicialmente la llave está conectada en la posición 1 durante un tiempo muy prolongado (hasta alcanzar un cierto estado estacionario) y en $t=0$ la hacemos pasar a la posición 2.

La única variable que interesa en este caso es la corriente $i(t)$. Su valor inicial en estado estacionario es $i(0) = E_0/R = I_0$.

Calcularemos ahora su evolución temporal empleando la notación que hemos introducido al tratar el circuito RC.

RD) Al pasar la llave a la posición 2 la f.e.m. total pasa a valer $E_0 + E$, y la ley de Kirchhoff da:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = (Lp + R)i = E_0 + E.$$

$$PC) \quad P(\lambda) = L\lambda + R = 0 \implies \lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau},$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo.

$$SP) \quad \therefore e^{\lambda t} = e^{-Rt/L} = e^{-t/\tau}.$$

$$H) \quad i_h(t) = a e^{-t/\tau}$$

$$P) \quad E_0 + E = \text{const.} \implies i_p = \text{const.} \Rightarrow Ri_p = E_0 + E$$

$$\implies i_p = (E_0 + E)/R.$$

$$G) \quad i(t) = i_h + i_p = a e^{-t/\tau} + (E_0 + E)/R.$$

$$CI) \quad i(0) = a + (E_0 + E)/R = E_0/R \implies a = -E/R.$$

$$SC) \quad i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} + (E_0 + E)/R = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{E_0}{R}. \quad (4.47)$$

Vamos ahora dos casos de interés práctico:

a) Descarga de la inductancia

La descarga de la bobina equivale a reemplazar la f.e.m. inicial E_0 por un cortocircuito, lo que en el circuito de la fig. 6 se logra conectando una f.e.m. $E = -E_0$, de modo que la f.e.m. total para $t > 0$ vale $E_0 + E = 0$. En este caso el resultado (4.47) toma la forma

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} = \frac{E_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (4.48)$$

que ya hemos representado en la fig. 3 donde, para este caso las variables del gráfico son: $x = t/\tau$, $y = i/I_0$.

Es fácil ver que la energía magnética almacenada inicialmente en la inductancia $U_L = \frac{1}{2} LI_0^2$ se disipa por efecto Joule en la resistencia:

$$U_R = \int_0^\infty dt P(t) = R \int_0^\infty dt i^2(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 = U_L$$

(verificarlo por sustitución directa de 4.48 a integración).

b) Carga de la inductancia

En este caso la corriente inicial por la bobina L es nula, lo cual corresponde a $E_0 = 0$. La expresión de la corriente (4.47) es:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = I_m (1 - e^{-t/\tau})$$

donde I_m es la corriente máxima que circula para $t \rightarrow \infty$.

Eligiendo las variables adimensionales $x = t/\tau$, $z = i/I_m$ podemos representar la corriente $z = 1 - e^{-x}$ como en la fig. 7.

Cuando $t \rightarrow \infty$ la corriente se hace constante y, por lo tanto, no hay caída de tensión sobre la bobina, que queda cargada con una energía magnetostática $U_L = \frac{1}{2} LI_m^2$. En ese estado estacionario la caída de tensión sobre la resistencia es igual a la f.e.m.: $E = RI_m$.

Debemos observar que en un circuito que contiene inductancias hay una restricción importante sobre las condiciones iniciales posibles, ya que la corriente no puede tener un salto o discontinuidad. Si no fuera así, se induciría sobre la bobina L una f.e.m. infinita, ya que

$$|E_L| = L \left| \frac{di}{dt} \right|_t = L \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{i(t_0 + \Delta t) - i(t_0)}{\Delta t} = \infty,$$

lo cual carece de significado físico. En consecuencia, debe cumplirse la condición

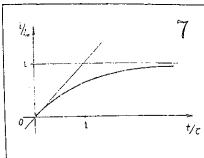
$$i(t_0^-) = i(t_0^+) \quad \forall t_0. \quad (4.49)$$

Esta condición se verifica en los casos recién estudiados, como vemos en la fig. 3 (donde $i = I_0$ antes y después de $t = 0$), y en la fig. 7 (donde $i = 0$ antes y después de $t = 0$).

Resumiendo, en todo circuito con inductancias las condiciones iniciales deben ser compatibles con la continuidad de las corrientes por las bobinas.

CIRCUITO LC SERIE

En la fig. 8 se ve un circuito cuya resistencia es despreciable, con una fuente conectada a un condensador en serie con una inductancia. Supondremos que en un instante que elegimos como $t = 0$ el condensador está cargado con una carga Q_0 de la polaridad indicada, y que en ese instante circula una corriente I_0 .



Con la misma notación empleada en los dos ejemplos anteriores tenemos:

$$ED) \quad L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = (Lp^2 + \frac{1}{C}) q = E$$

que contiene un operador $P(p)$ de segundo orden. Luego:

$$PC) \quad L\lambda^2 + \frac{1}{C} = 0 \implies \lambda^2 = -\frac{1}{LC}$$

$$\implies \lambda_1 = j\omega_0, \quad \lambda_2 = -j\omega_0$$

donde $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia natural de oscilación del circuito.

$$SF) \quad e^{\lambda_1 t} = e^{j\omega_0 t}, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{-j\omega_0 t}.$$

$$H) \quad q_h = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{-j\omega_0 t}, \text{ donde } a_1 \text{ y } a_2 \text{ son constantes}$$

complejas.

$$P) \quad E = \text{const.} \implies q_p = \text{const.} \Rightarrow \frac{1}{C} q_p = E \implies q_p = CE.$$

$$G) \quad q(t) = q_h + q_p = a_1 e^{j\omega_0 t} + a_2 e^{-j\omega_0 t} + CE = \\ = (a_1 + a_2) \cos \omega_0 t + j(a_1 - a_2) \sin \omega_0 t + CE.$$

La corriente $i(t)$ se obtiene por derivación directa (la necesitamos para emplear la segunda condición inicial):

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_0(a_1 + a_2) \sin \omega_0 t + j\omega_0(a_1 - a_2) \cos \omega_0 t.$$

$$CI) \quad q(0) = (a_1 + a_2) + CE = Q_0$$

$$i(0) = \omega_0 j(a_1 - a_2) = I_0$$

Observamos que las constantes que necesitamos para expresar $q(t)$ e $i(t)$ son, directamente:

$$(a_1 + a_2) = Q_0 - CE; \quad j(a_1 - a_2) = I_0/\omega_0.$$

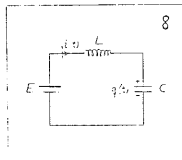
que expresan los coeficientes reales de $q(t)$.

SC) Luego

$$q(t) = (Q_0 - CE) \cos \omega_0 t + (I_0/\omega_0) \sin \omega_0 t \quad (4.50)$$

$$i(t) = -\omega_0(Q_0 - CE) \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

Es evidente que las soluciones halladas cumplen las condiciones iniciales supuestas.



Las expresiones (4.50) contienen toda la información útil, pero antes de interpretarlas describiremos su representación en función de amplitudes y fases, que es la más conveniente para este caso.

AMPLITUDES Y FASES

Toda función armónica de frecuencia ω y de la forma

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (4.51)$$

se puede representar como

$$f(t) = F \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.52)$$

donde la amplitud F y la fase inicial φ se obtienen mediante las expresiones

$$F = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \varphi = -\arctg(B/A) \quad (4.53)$$

Para verlo basta con desarrollar el coseno en (4.52):

$$f(t) = F(\cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Esta igualdad se cumple sólo si $A = F \cos \varphi$; $B = -F \sin \varphi$ de donde se deducen inmediatamente las (4.53).

Para evitar una indeterminación en $\pi = 180^\circ$ (inherente a la función $\arctg x$), cuando calculamos la fase conviene primero hallar

$$F = \sqrt{A^2 + B^2}, \text{ y después utilizar las dos expresiones}$$

$$\varphi = \arccos(A/F) \quad \text{y} \quad \varphi = -\arcsin(B/F)$$

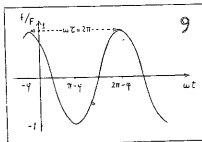
que, juntas, definen unívocamente el cuadrante de la fase.

La amplitud F es el valor máximo de $|f(t)|$, que lo toma para $\omega t + \varphi = N\pi$ (N entero arbitrario).

La fase inicial está directamente relacionada con $f(0)$:

$$\cos \varphi = f(0)/F.$$

Para representar (4.52) conviene elegir las variables adimensionales $x = \omega t$, $y = f/F$. Empleándolas obtenemos el gráfico de la fig. 9, donde se observa la periodicidad de $f(t)$ con $T = 2\pi/\omega$.



Volviendo al circuito LC, podemos reescribir las expresiones (4.50) en la forma

$$q(t) = Q \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + CE \quad (4.54)$$

$$i(t) = I \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$$

donde, según (4.53), las amplitudes y las fases valen

$$Q = \sqrt{(Q_0 - CE)^2 + (I_0/\omega_0)^2}, \quad I = \sqrt{\omega_0^2 (Q_0 - CE)^2 + I_0^2} = \omega_0 Q,$$

$$\varphi_0 = + \arctg \frac{I_0}{\omega_0 (Q_0 - CE)}, \quad \varphi_i = - \arctg \frac{\omega_0 (Q_0 - CE)}{I_0}$$

Las expresiones (4.54) están representadas en la fig. 9, donde $r(t) = q(t) - CE$ para la carga, e $i(t)$ para la corriente. La carga del condensador oscila en torno del valor CE, mientras que el valor medio de la corriente es cero. Si no hay f.e.m. alguna conectada, habiendo partido de las mismas condiciones iniciales (condensador y bobina cargados), el circuito seguirá oscilando con la frecuencia ω_0 . Físicamente esto es posible porque, al no existir disipación ($R=0$), la energía de los campos electromagnéticos "va y vuelve" entre el condensador y la inductancia, pero siempre conserva su valor inicial. Para verificarlo supongamos que $R=0$ para simplificar algo las expresiones, de modo que tenemos:

$$q(t) = Q \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{esto implica elegir la fase de la carga de modo que } q(0) = Q \sin \varphi)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \omega_0 Q \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{con } Q = \sqrt{Q_0^2 + I_0^2/\omega_0^2}; \quad I = \omega_0 Q.$$

En consecuencia, la energía total entretenida en el circuito, calculada en un instante cualquiera t , vale:

$$U(t) = U_C(t) + U_L(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} L i^2(t) = \\ = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\text{donde } Q^2 = Q_0^2 + I_0^2/\omega_0^2, \quad \omega_0^2 = (LC)^{-1}.$$

$$\text{Luego, } U(t) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} + \frac{1}{2} L I_0^2,$$

donde el último miembro representa la energía inicial en el circuito, correspondiente a la carga Q_0 en C y la corriente I_0 por L.

CIRCUITO RLC SERIE

En la fig. 10 vemos una f.e.m. conectada en serie a una resistencia R, un condensador C y una inductancia L. Supondremos que las condiciones iniciales del circuito son

$$q(0) = Q_0, \quad i(0) = 0.$$

Calcularemos la carga y la corriente (cuyas polaridades se indican en la figura) procediendo de la misma forma que en los casos anteriores, pero enseguida se hará evidente que el comportamiento del circuito cambia sustancialmente según ciertas relaciones entre los parámetros del mismo. Por ello, luego de plantear la EC y el PC correspondiente, analizaremos por separado los tres casos posibles.

ED) La ley de Kirchhoff de las tensiones expresa que

$$F[q] = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} q = (Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}) q(t) = E \quad (4.55)$$

$$\text{PC) } F(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \implies \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\text{donde, definiendo } \alpha = R/2L, \quad \omega_0^2 = 1/LC, \quad \beta^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$$

$$\text{resulta } \lambda_1 = -\alpha + \beta, \quad \lambda_2 = -\alpha - \beta.$$

Podemos distinguir tres casos, según que α^2 sea mayor, igual o menor que ω_0^2 :

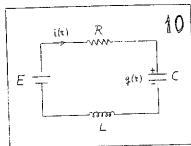
a) Caso sobreamortiguado

En este caso β es real y positivo: $\alpha^2 > \omega_0^2 \implies R > 2\sqrt{L/C}$.

$$\text{SF) } e^{\lambda_1 t} = e^{-(\alpha+\beta)t}, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{-(\alpha-\beta)t}$$

$$\text{H) } o_1 = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\alpha t} (a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}).$$

$$\text{F) } E = \text{const.} \implies q_p = CE.$$



$$G) \quad q(t) = e^{-\alpha t} (a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}) + CE$$

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = (-\alpha + \beta) a_1 e^{(\beta - \alpha)t} + (-\alpha - \beta) a_2 e^{-(\alpha + \beta)t}$$

$$CI) \quad q(0) = a_1 + a_2 + CE = Q_0$$

$$i(0) = -\alpha(a_1 + a_2) + \beta(a_1 - a_2) = 0$$

Definiendo $Q = Q_0 - CE$, las soluciones de este sistema son:

$$a_1 = \frac{Q}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right); \quad a_2 = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

$$SC) \quad q(t) = e^{-\alpha t} \frac{Q}{2} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\beta t} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{-\beta t} \right] + CE =$$

$$= Q e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \right] + CE$$

$$\Rightarrow q(t) = Q e^{-\alpha t} \left(\cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right) + CE.$$

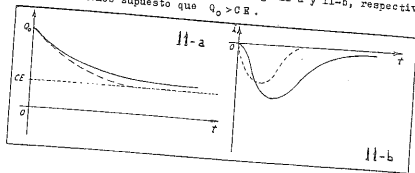
$$\therefore i(t) = -\alpha Q e^{-\alpha t} \left(\cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right) + \beta Q e^{-\alpha t} \left(\sinh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \cosh \beta t \right) =$$

$$= Q e^{-\alpha t} \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \right) \sinh \beta t = -\frac{\omega^2}{\beta} Q e^{-\alpha t} \sinh \beta t \quad (4.56)$$

Se verifica fácilmente que se cumplen las condiciones iniciales. Para representar $q(t)$ e $i(t)$ conviene observar que siendo $\beta^2 = \alpha^2 - \omega^2 > 0$, siempre se verifica que $\alpha > \beta$, de modo que los productos $e^{-\alpha t} (\cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t)$, $e^{-\alpha t} \sinh \beta t$ se anulan para $t \rightarrow \infty$ ya que, por ejemplo

$$e^{-\alpha t} \cosh \beta t = \frac{1}{2} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} + e^{-\beta t}) \sim e^{-(\alpha - \beta)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \text{ etc.}$$

Teniendo en cuenta los valores iniciales podemos representar la carga y la corriente como se ve en las fig. 11-a y 11-b, respectivamente, donde hemos supuesto que $Q_0 > CE$.



Notemos que la curva $q(t)$ es horizontal para $t=0$, como lo requiere la condición inicial sobre la corriente $i(0) = 0$.

La corriente circula en sentido contrario al indicado en la fig. 10 cuando $Q_0 > CE$, pues la tensión sobre el condensador es mayor que la f.e.m. Su módulo crece hasta alcanzar un máximo en $t_m = \frac{1}{\beta} \arg \tanh \frac{\alpha}{\beta}$ donde toma el valor

$$|i_{\max}| = \frac{\omega}{\alpha} Q e^{-\alpha t_m} \cosh \beta t_m \quad (\text{verificarlo}).$$

Después de $t = t_m$ la corriente tiende a cero como se ve en la fig. 11-b, mientras la carga va alcanzando el valor estacionario CE .

Si $Q_0 = CE$ (o sea $Q=0$), la carga se mantiene constante y no circula corriente. Para $Q_0 < CE$ la curva de la carga $q(t)$ se mantiene por debajo de la recta $q = CE$, a la cual tiende asintóticamente. La corriente es positiva y tiene la misma forma que en la fig. 11-b, ya que es proporcional a $-Q > 0$.

Como vemos, el comportamiento del circuito está dominado por el factor $e^{-\alpha t}$, donde $\alpha = R/2L$ es la llamada constante de amortiguamiento. Este caso particular se denomina sobreamortiguado, por comparación con el caso límite que pasamos a discutir, correspondiente a $\beta = 0$.

b) Caso crítico

En este caso $\beta = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^2$, o sea $R = 2\sqrt{L/C} = R_c$ (este valor de la resistencia se llama crítico). Las dos raíces del PC coinciden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha \quad (\text{multiplicidad} = 2)$$

SP) $e^{\lambda t} = e^{-\alpha t}$; $t e^{\lambda t} = t e^{-\alpha t}$ son las soluciones fundamentales.

$$R) \quad q_h = (b_1 + b_2 t) e^{\lambda t} = (b_1 + b_2 t) e^{-\alpha t}$$

$$P) \quad E = \text{const.} \Rightarrow q_p = CE$$

$$G) \quad q(t) = (b_1 + b_2 t) e^{-\alpha t} + CE$$

$$\frac{dq}{dt} = i(t) = (b_2 - \alpha b_1 - \alpha b_2 t) e^{-\alpha t}$$

$$CI) \quad q(0) = b_1 + CE = Q_0 \Rightarrow b_1 = Q_0 - CE = Q$$

$$i(0) = b_2 - \alpha b_1 = 0 \Rightarrow b_2 = \alpha b_1 = \alpha Q.$$

$$SC) \quad q(t) = Q(1 + \alpha t) e^{-\alpha t} + CE \quad (4.58)$$

$$i(t) = -\alpha^2 Q t e^{-\alpha t}. \quad (4.59)$$

Ejercicio: Obtener las expresiones (4.58) y (4.59) a partir de las (4.56) y (4.57), respectivamente, tomando el límite de éstas para $\beta \rightarrow 0$, tratando a t como constante (recordar que, por el teorema de L'Hospital, $(\sin \beta t)/\beta \rightarrow t$ cuando $\beta \rightarrow 0$).

Los gráficos correspondientes a las ecuaciones (4.58) y (4.59) son similares a los del caso sobreamortiguado, y se representan en las fig. 11-a y 11-b mediante líneas de trazos. Tanto la carga como la corriente tienden a sus valores estacionarios (asintóticos) más rápidamente que en el caso sobreamortiguado. El caso crítico representa el límite entre dos situaciones muy distintas, como veremos.

c) Caso subamortiguado u oscilatorio

Si dejamos fijos los demás parámetros del circuito RLC y disminuimos la resistencia R , a medida que ésta tiende a cero su comportamiento deberá tender al del circuito LC ideal ya descrito, que es puramente oscilatorio y puede considerarse como un caso límite del que pasamos a describir.

Ahora suponemos que $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, o sea que $R < 2\sqrt{L/C} = R_c$. Definimos

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j\omega \quad \text{donde } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Luego: $\lambda_1 = -\alpha + j\omega$, $\lambda_2 = -\alpha - j\omega$.

SP) $e^{\lambda_1 t} = e^{(-\alpha + j\omega)t} = e^{-\alpha t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)$

$e^{\lambda_2 t} = e^{(-\alpha - j\omega)t} = e^{-\alpha t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$

H) $q_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\alpha t} [(c_1 + c_2) \cos \omega t + j(c_1 - c_2) \sin \omega t]$

P) $R = \text{const.} \Rightarrow q_p = CR$.

G) $q(t) = e^{-\alpha t} [(c_1 + c_2) \cos \omega t + j(c_1 - c_2) \sin \omega t] + CR$

$$i(t) = -\alpha e^{-\alpha t} [(c_1 + c_2) \cos \omega t + j(c_1 - c_2) \sin \omega t] + e^{-\alpha t} [-\omega(c_1 + c_2) \sin \omega t + j\omega(c_1 - c_2) \cos \omega t] \Rightarrow$$

$$i(t) = e^{-\alpha t} \{ [-\alpha(c_1 + c_2) + j\omega(c_1 - c_2)] \cos \omega t + [-\omega(c_1 + c_2) - j\alpha(c_1 - c_2)] \sin \omega t \}$$

CI) $q(0) = (c_1 + c_2) + CR = Q_0$

$$i(0) = -\alpha(c_1 + c_2) + j\omega(c_1 - c_2) = 0$$

Las incógnitas que interesan son $(c_1 + c_2)$ y $j(c_1 - c_2)$, que son las constantes reales que aparecen en $q(t) = i(t)$:

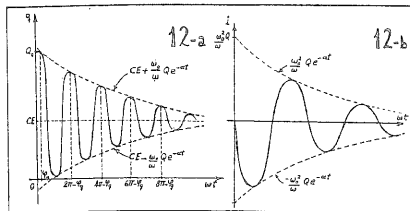
$$c_1 + c_2 = Q_0 - CR = Q \quad ; \quad j(c_1 - c_2) = \frac{\alpha}{\omega} (c_1 + c_2) = \frac{\alpha}{\omega} Q$$

SC) $q(t) = Q e^{-\alpha t} (\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) + CR \quad (4.60)$

$$i(t) = -\frac{\omega Q}{\omega} Q e^{-\alpha t} \sin \omega t \quad (4.61)$$

Vemos que, efectivamente, la carga y la corriente oscilan con frecuencia ω (menor que ω_0), la primera en torno del valor CR , y la corriente en torno del cero. Estas oscilaciones están amortiguadas por el mismo factor exponencial que aparecía en los casos anteriores. Dicho factor es de claro origen disipativo y caracteriza los transitorios cuya ED contiene un término lineal de primer orden ($\alpha = R/2L \sim R$).

En las fig. 12-a y 12-b representamos la carga y la corriente en función del tiempo para un caso con $Q_0 > CR$ y $\alpha \ll \omega_0$. El factor de amortiguamiento determina, a menos de una constante, las dos curvas envolventes representadas mediante líneas de trazos.



Empleando las relaciones (4.53) es fácil verificar (hacerlo) que

$$q(t) = CR + \frac{\omega_0}{\omega} Q e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{donde } \varphi = \arctan \frac{\alpha}{\omega}$$

Vemos que, como $\omega_0^2 = \alpha^2 + \omega^2$, la amplitud de las oscilaciones es mayor que Q , ya que $\omega_0 > \omega$. La fase inicial no se anula (para las condiciones iniciales supuestas), de modo que los máximos y mínimos se producen en los tiempos indicados en la fig. 12-a.

CAPÍTULO V

CORRIENTE ALTERNA

INTRODUCCION

En el Capítulo IV hemos analizado el comportamiento transitorio de circuitos sencillos cuando una f.e.m. varía muy rápidamente, p.ej. mediante la pulsación de una llave. Aquí estudiaremos el comportamiento de estos mismos circuitos cuando la f.e.m. aplicada varía sinusoidalmente en el tiempo. Este tipo de f.e.m. es el que utilizamos cotidianamente, ya que los generadores industriales (alternadores) funcionan según los mismos principios esbozados en (3.125), produciendo una f.e.m. cuya frecuencia coincide con la velocidad angular ω de rotación de las bobinas enrolladas en torno del rotor del generador.

Las corrientes y tensiones transitorias, generalmente de duración muy limitada, también están presentes, pero siempre podemos estudiar por separado la solución $u_h(t)$ de la ecuación homogénea, que determina el transitorio, y la solución particular $u_p(t)$ de la ecuación completa del circuito, que describe el estado estacionario del mismo. Las cantidades totales

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (4.27)$$

se reducen para $t \gg t_c$ a la forma $u(t) \approx u_p(t)$, siendo t_c el tiempo característico del transitorio.

El análisis del comportamiento transitorio tiene gran importancia para el diseño de un circuito, ya que la potencia total $i(t)v(t)$ disipada sobre un elemento podría superar el valor límite que dicho elemento puede soportar, aun durante tiempos $t \leq t_c$. Teniendo en cuenta la necesidad de evitar dicha situación al diseñar el circuito, la dejaremos de lado para analizar el comportamiento estacionario de circuitos con elementos lineales (R, L y C) para f.e.m. alternas de la forma

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

donde E_0 es la amplitud, ω la frecuencia angular ($\omega = 2\pi\nu$, siendo $\nu = 1/T$ la frecuencia y T el período) y φ la fase inicial de la f.e.m., como en la fig. 35 del Cap. III.

El tratamiento siguiente vale para frecuencias bajas (menores que $100 \text{ kHz} \Rightarrow \omega < 10^6 \text{ s}^{-1}$) (+), para las cuales se puede despreciar la radiación emitida por el circuito, así como los efectos inductivos y capacitivos de los cables que unen sus elementos.

AMPLITUDES COMPLEJAS

Empleando la misma notación del Cap. IV consideremos la ecuación diferencial (con $p \equiv d/dt$)

$$P[x(t)] = \sum_{k=0}^n a_k p^k x(t) = r \cos(\omega t + \alpha) \equiv f(t) \quad (5.2)$$

cuyo operador P tiene coeficientes a_k reales y cuyo término independiente $f(t)$ representa una oscilación sinusoidal de amplitud r , fase inicial α y frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$. Notemos que toda función de la forma $r \sin(\omega t + \beta)$ se puede escribir como la (5.2) con sólo tomar $\alpha = \beta - \pi/2$, pues

$$\sin(\omega t + \beta) = \cos(\omega t + \beta - \pi/2).$$

Podemos emplear la fórmula de De Moivre para e real:

$$e^{js} = \cos s + j \sin s \Rightarrow \cos s = \operatorname{Re} e^{js}; \quad \sin s = \operatorname{Im} e^{js},$$

para reemplazar la (5.2) por esta otra ecuación:

$$P[z(t)] = r e^{j(\omega t + \alpha)} = r e^{j\alpha} e^{j\omega t} \equiv \rho e^{j\omega t} \quad (5.3)$$

donde $\rho = r e^{j\alpha}$ es tal que $\operatorname{Re}(\rho e^{j\omega t}) = f(t)$. Llamamos a ρ amplitud compleja de $f(t)$ y elegimos la función $z(t)$ tal que $z(t) = x(t) + y(t)$, o sea

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t); \quad y(t) = \operatorname{Im} z(t).$$

Este reemplazo es muy ventajoso, ya que la ecuación (5.3) se resuelve inmediatamente (es de la forma inhomogénea 4.28), y una vez conocida $z(t)$ obtenemos fácilmente la solución deseada $x(t)$. En efecto, por la linealidad del operador real P podemos tomar la parte real de ambos miembros de (5.3), resultando para el primer miembro:

$$\operatorname{Re} P[z] = P[\operatorname{Re} z] \equiv P[x]$$

y para el segundo: $\operatorname{Re}(\rho e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(r e^{j(\omega t + \alpha)}) \equiv r \cos(\omega t + \alpha)$

de modo que $P[x] = r \cos(\omega t + \alpha)$.

(*) Las cantidades que expresamos en la unidad s^{-1} son frecuencias angulares (ω), mientras que $\nu = \omega/2\pi$ se expresa en Hz (hertzios, ver Cap. III).

Es decir que para hallar la solución real de una ecuación diferencial inhomogénea cuyo término independiente oscila sinusoidalmente, conviene resolver una ecuación del tipo (5.3) o (4.28), hallando así $z(t)$. La solución de la primera ecuación, es decir la que interesa, es la parte real de $z(t)$. Si se prefiere expresar la oscilación como $r(t) = r \sin(\omega t + \beta)$ vale todo lo dicho con sólo tomar la parte imaginaria de $z(t)$.

Teniendo en cuenta que la (5.3) es de la forma (4.28) con $\mu = j\omega$, al resolverla debemos distinguir dos casos posibles, según el valor que tome el polinomio $P(\mu)$ para $\mu = j\omega$:

- $P(j\omega) = 0$, posiblemente con multiplicidad k ;
- $P(j\omega) \neq 0$.

El caso (a) se tratará por separado. El caso (b), más frecuente, se resuelve muy fácilmente. Basta con reemplazar en (5.3) una solución particular

$$z_p(t) = \sigma e^{j\omega t} \quad \text{donde } \sigma = s e^{j\beta} \quad (s, \beta \text{ reales})$$

es la amplitud compleja de la solución. Se obtiene

$$P(z_p(t)) = \sum_{k=0}^n a_k p^k (\sigma e^{j\omega t}) = \sigma \sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k e^{j\omega t} = \sigma P(j\omega) e^{j\omega t} = \rho e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma = \frac{\rho}{P(j\omega)} & \text{o sea} \\ s e^{j\beta} = \frac{r e^{j\alpha}}{P(j\omega)} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde $P(j\omega)$ es un polinomio que no se anula, dada la condición (b). Tomando módulos y argumentos en (5.4) obtenemos s y β :

$$s = r / |P(j\omega)| \quad \text{y} \quad \beta = \alpha - \arg P(j\omega). \quad (5.5)$$

En consecuencia, la solución particular de (5.2) tendrá la forma

$$x_p(t) = \operatorname{Re} z_p(t) = \operatorname{Re} (\sigma e^{j\omega t}) = \operatorname{Re} (s e^{j\beta} e^{j\omega t}) = s \cos(\omega t + \beta)$$

y la solución general de (5.2) será

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde x_h es una solución de la ecuación homogénea $P(p)x_h(t) = 0$. Observemos la forma de $x_p(t)$: a una excitación sinusoidal de frecuencia ω le corresponde una respuesta (solución) también sinusoidal y de la misma frecuencia aunque, en general, la excitación y la respuesta están desfasadas entre sí.

Analicemos brevemente los sistemas de ecuaciones resolubles

aplicando amplitudes complejas. Estos se resuelven muy fácilmente cuando la frecuencia de las excitaciones (términos independientes) es la misma en todas las ecuaciones.

Sea el sistema con coeficientes reales:

$$\sum_{k=0}^n a_{ik}(p) x_k(t) = r_i \cos(\omega t + \alpha_i) \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.6)$$

donde los $a_{ik}(p)$ son polinomios en el operador $p \equiv d/dt$ y las inógnitas son las funciones $x_k(t)$. Para hallar sus soluciones particulares basta con resolver el sistema complejo

$$\sum_{k=0}^n a_{ik}(p) z_k(t) = \rho_i e^{j\omega t} \quad \text{con } \rho_i = r_i e^{j\alpha_i} \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.7)$$

Las soluciones son de la forma

$$z_k(t) = \sigma_k e^{j\omega t} \quad \text{con } \sigma_k = a_k e^{j\beta_k}$$

Reemplazándolas en (5.7) se obtiene el sistema algebraico

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(j\omega) \sigma_k = \rho_i \quad (i=1, \dots, n) \quad (5.8)$$

que se resuelve fácilmente, obteniendo las amplitudes complejas σ_i .

RESONANCIA RESONANCIA

El caso (a) $P(j\omega) = 0$ presenta un interés especial y puede tratarse como en el ejemplo que estudiaremos a continuación.

Sea la ecuación con coeficientes reales

$$P(x) = p^2 x + \Omega^2 x = r \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.9)$$

que corresponde a la ecuación compleja $P(z) = r e^{j(\omega t + \alpha)}$.

La (5.9) describe un oscilador armónico de frecuencia natural Ω (ver 4.50) forzado por la excitación exterior de frecuencia ω . Cuando las dos frecuencias son distintas la solución de (5.9) está dada por (5.4) con

$$P(j\omega) = (j\omega)^2 + \Omega^2 = \Omega^2 - \omega^2$$

$$\Rightarrow z_p = \sigma e^{j\omega t} \quad \text{a} \quad \sigma = \frac{r e^{j\alpha}}{\Omega^2 - \omega^2} \Rightarrow x_p(t) = \left(\frac{r}{\Omega^2 - \omega^2} \right) \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.10)$$

solución que carece de sentido para $\omega = \Omega$.

La solución (5.10) describe las oscilaciones forzadas con una amplitud que depende de Ω y ω , y una frecuencia ω que coincide con la de excitación. Es fácil ver que la solución general es de la forma

$$x(t) = x_h + x_p = A \cos(\Omega t + \beta) + \frac{r}{\Omega^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \alpha),$$

donde las dos constantes indeterminadas A y β en $x_h(t)$ sólo se pueden determinar conociendo las condiciones iniciales. El término $x_p(t)$ describe la oscilación natural del sistema.

Para $\omega = \Omega$ tenemos

$$P(j\omega) = \Omega^2 - \omega^2 = (\Omega + \omega)(\Omega - \omega) = 0,$$

de modo que $j\omega$ es una raíz simple (multiplicidad $k=1$) de la ecuación característica y, según (4.29), la solución particular será un unispolinomio de la forma

$$z_p(t) = t R e^{j\omega t}$$

con $R = \text{const.}$, ya que $r = \text{const.}$ Sustituyendo z_p en (5.9) con $\omega = \Omega$ obtenemos

$$P[z_p] = R(p^2 + \Omega^2)(t e^{j\omega t}) = R[p(e^{j\omega t} + j\omega t e^{j\omega t}) + \omega^2 t e^{j\omega t}] = R(2j\omega) e^{j\omega t} = r e^{j(\omega t + \alpha)} = (r e^{j\alpha}) e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow R = \frac{r e^{j\alpha}}{2j\omega} = \frac{r}{2\omega} e^{j(\alpha - \pi/2)} \quad \text{pues } 1/j = e^{-j\pi/2}.$$

Luego:
$$z_p(t) = \frac{r}{2\omega} t e^{j(\omega t + \alpha - \pi/2)}$$

$$\Rightarrow z_p(t) = R e^{j\omega t} = \frac{r}{2\omega} t \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.11)$$

expresión que representa oscilaciones cuya amplitud crece indefinidamente para $t \rightarrow \infty$.

Este fenómeno, que implica la transferencia de energía sin disipación, de la fuente de excitación al oscilador, con una frecuencia igual a la frecuencia natural de éste, se denomina resonancia esencial. En los sistemas físicos reales (como en 4.59) la presencia de términos de primer orden en las ecuaciones da lugar a un factor de amortiguamiento exponencial en la respuesta, que evita la divergencia en el tiempo de las amplitudes, ya que $t e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ si $\alpha > 0$ para $t \rightarrow \infty$. Dichos términos de primer orden están asociados a fenómenos disipativos (resistencia, viscosidad, rozamiento o fricción, etc.).

TENSIONES, CORRIENTES E IMPEDANCIAS: LEY DE OHM

Supongamos que se aplica una f.e.m. sinusoidal

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

conectada entre los extremos A y B de una rama formada por elementos pasivos (fig. 1). La corriente inicialmente no será periódica pues incluirá un término transitorio, pero para $t \gg t_0$ se habrá alcanzado el estado estacionario, en el cual

$$|i_h(t)| \ll |i_p(t)| \Rightarrow i(t) \approx i_p(t).$$

Para calcular la carga y la corriente en cada instante t (valores instantáneos) podemos aplicar las leyes de Kirchhoff como en (4.41). La diferencia de potencial entre A y B resulta ser

$$V_{AB}(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}(t) \quad (5.12)$$

y la podemos expresar en forma operacional eligiendo como incógnita a la derivada temporal de menor orden de la carga $q(t)$ que figure en las ecuaciones:

$$P[q(t)] = (Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}) q(t) = \mathcal{E}(t) \quad (5.13)$$

con $\mathcal{E}(t) = \text{Re} [E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = \text{Re} (E e^{j\omega t})$.

Aquí la notación empleada es:

$$\mathcal{E}(t) = \text{valor instantáneo de la f.e.m.}$$

$$E = E_0 e^{j\varphi_0} = \text{amplitud compleja de } \mathcal{E}$$

$$E_0 = |E| = \text{amplitud real o valor de pico de } \mathcal{E}$$

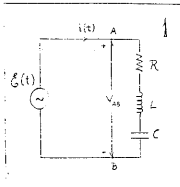
$$\varphi_0 = \arg E = \text{fase inicial de } \mathcal{E}.$$

Definimos una tensión compleja que incluye la dependencia temporal

$$E(t) = E e^{j\omega t} \quad (5.14)$$

tal que $\mathcal{E}(t) = \text{Re } E(t)$.

El segundo miembro de (5.14) contiene dos factores: la amplitud compleja E (independiente del tiempo) y la función periódica $e^{j\omega t}$ de módulo igual a 1.



En lo que sigue emplearemos la misma notación para todas las cantidades de interés que varíen en el tiempo, con excepción de la potencia disipada. Así,

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{valor instantáneo de la corriente} = \operatorname{Re} I(t) \\ I(t) &= \text{corriente compleja} = I_0 e^{j\omega t} \\ I &= \text{amplitud compleja de la corriente} = I_0 e^{j\varphi} \\ I_0 &= \text{amplitud real de la corriente} = |I| \\ \varphi &= \text{fase inicial de la corriente; etc.} \end{aligned}$$

Salvo indicación en contrario, nos referiremos siempre a las soluciones estacionarias (particulares) de las ecuaciones de circuito. Con esta notación, la forma compleja de (5.13) es

$$F[Q(t)] = (Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}) Q(t) = E(t) \quad (5.15)$$

$$\text{tal que } Q(t) = \operatorname{Re} Q(t) \text{ con } Q(t) = Q_0 e^{j\omega t} = (Q_0 e^{j\varphi_0}) e^{j\omega t}.$$

$$\text{Si } R \neq 0 \implies F(j\omega) = L(j\omega)^2 + R(j\omega) + \frac{1}{C} = -L\omega^2 + \frac{1}{C} + jR\omega \neq 0.$$

$$\text{Eliminando } e^{j\omega t} \text{ como en (5.4) resulta: } Q = \frac{E}{F(j\omega)},$$

de donde se obtiene el valor instantáneo de la carga

$$q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.16)$$

$$\text{con } Q_0 = E_0 / |F(j\omega)| \text{ y } \varphi_0 = \varphi_e - \arg F(j\omega).$$

Para obtener la corriente $i(t)$ podemos derivar directamente la expresión (5.16), o bien derivar miembro a miembro la (5.15):

$$pF[Q(t)] = F[pQ(t)] = F[I(t)] = pE(t) \text{ pues } pQ(t) = I(t),$$

$$\text{donde } F[I(t)] = F[I_0 e^{j\omega t}] = I_0 e^{j\omega t} F(j\omega)$$

$$\text{y } pE(t) = p(E_0 e^{j\omega t}) = j\omega E_0 e^{j\omega t} \implies F(j\omega) \cdot I = j\omega \cdot E$$

$$I = \frac{E}{F(j\omega)/j\omega} = \frac{E}{Z(\omega)} \quad (5.17)$$

Hemos obtenido una relación lineal entre las amplitudes complejas de la corriente y la tensión, que podemos reescribir como

$$E = Z I$$

donde $Z = Z(\omega)$ es un factor que no depende de la fuente, sino sólo

de los parámetros (L, R, C) de los elementos pasivos y de la frecuencia ω de la fuente. La cantidad Z se denomina la impedancia del circuito y la relación (5.18), semejante a la forma que toma la (2.24) para un circuito cerrado ($\mathcal{E} = R i$), se conoce como la ley de Ohm para las amplitudes complejas.

Conviene expresar la impedancia en la misma forma módulo-exponencial (es la más útil para todas las operaciones entre complejos, exceptuando la suma y la resta):

$$Z(\omega) = |Z| e^{j\varphi}$$

donde $\varphi = \arg Z$. Entonces la ecuación (5.17) equivale a las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} I_0 = E_0 / |Z| \\ \varphi_i = \arg E - \arg Z = \varphi_e - \varphi. \end{cases} \quad (5.19)$$

También podemos escribirla en la forma binomial:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5.20)$$

$$\text{donde } R(\omega) = \operatorname{Re} Z \text{ y } X(\omega) = \operatorname{Im} Z \implies |Z| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$$

$$\text{y } \varphi = \arg Z = \arccos \frac{R(\omega)}{|Z|} = \arcsen \frac{X(\omega)}{|Z|}.$$

Utilizando ambas expresiones de φ se puede calcular dicha fase sin ambigüedad (la alternativa $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ en 4.54 se emplea por comodidad, pero define la fase a menos de $\pi = 180^\circ$).

Notemos que, si bien en un circuito serie $R(\omega)$ es la suma de las resistencias del circuito, en general $R(\omega)$ puede contener otros parámetros. Hecha esta aclaración, llamaremos resistencia a la parte real $R(\omega)$ de Z , y reactancia a su parte imaginaria $X(\omega)$.

A partir de (5.18) se obtiene la relación correspondiente entre los valores instantáneos ya que, multiplicando por $e^{j\omega t}$, resulta

$$E e^{j\omega t} = Z(\omega) I e^{j\omega t} \implies E(t) = Z I(t) \quad (5.21)$$

Con los valores obtenidos en (5.19) la corriente instantánea vale

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (5.22)$$

Para el caso particular de la fig. 1 tenemos:

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = \frac{P(j\omega)}{j\omega} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}),$$

$$\text{o sea: } R(\omega) = R; \quad X(\omega) = \omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Mientras que para sistemas pasivos es $R(\omega) \geq 0$, la reactancia $X(\omega)$ puede ser positiva, nula o negativa. En el primer caso decimos que el circuito es inductivo (pues X tiene el signo de ωL), en el segundo, que es resistivo y en el tercero, capacitivo (pues X tiene el signo de $-1/\omega C$).

Si consideramos por separado tres circuitos elementales que contienen solamente una resistencia, una inductancia o un condensador, las respectivas impedancias serán

$$Z_R = R; \quad Z_L = j\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}.$$

Estas impedancias elementales se expresan en la forma módulo-exponencial como

$$Z_R = R; \quad Z_L = \omega L e^{j\pi/2}; \quad Z_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \quad (5.23)$$

ya que $j = e^{j\pi/2}$.

Las impedancias se representan como se indica en la fig. 2, donde los sentidos de I y E coinciden con los elegidos para $i(t)$ y $\mathcal{E}(t)$.

Si elegimos como referencia la fase de la f.e.m. (lo que equivale a medir el tiempo t a partir del instante en que $\mathcal{E} = +\mathcal{E}_0$):

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \implies \varphi_{\mathcal{E}} = 0,$$

resulta $\varphi_i = -\varphi = -\arg Z \implies i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$.

Si hubiéramos elegido la fase de referencia de modo que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi)$, los valores instantáneos tendrían la misma forma $A(t) \sim \sin(\omega t + \varphi)$, que resulta de tomar las partes imaginarias de las cantidades complejas $Q(t)$, $I(t)$, etc.

La inversa de la impedancia

$$Y(\omega) = 1/Z(\omega)$$

se denomina admitancia (juega el papel de la conductancia G en corriente continua, ver 2.27). A partir de (5.20) obtenemos

$$Y(\omega) = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} \equiv G(\omega) - jB(\omega) \quad (5.24)$$

$$\text{donde } G(\omega) = \frac{R}{|Z|^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} = \text{conductancia}$$

$$\text{y } B(\omega) = \frac{X}{|Z|^2} = \frac{X}{R^2 + X^2} = \text{susceptancia}.$$

Para una inductancia ideal valen

$$R = 0; \quad X = \omega L \implies G(\omega) = 0; \quad B(\omega) = 1/\omega L$$

y para un condensador ideal:

$$R = 0; \quad X = -1/\omega C \implies G(\omega) = 0; \quad B(\omega) = -\omega C.$$

Unidades: De la ley de Ohm se deduce inmediatamente que la impedancia tiene las mismas unidades que la resistencia (ohms). Análogamente, la admitancia tiene las unidades de la conductancia (ohm⁻¹ ó mho).

TEOREMAS GENERALES DE CIRCUITOS

Como en el caso de los circuitos magnéticos, la dualidad evidente entre la ley de Ohm (5.18) y su análoga para corriente continua ($V = RI$) nos permite aplicar todos los teoremas del Cap. II a los circuitos de corriente alterna. Pero debemos recordar que esta ley de Ohm solamente se puede aplicar a las cantidades complejas como $\mathcal{E}(t)$ e $I(t)$ o a sus amplitudes $\mathcal{E}, I$.

Con esta prevención, todos los métodos de resolución de circuitos de corriente continua sirven para calcular las amplitudes complejas de las tensiones de nudos, corrientes de mallas, de ramas, etc. En todas las expresiones válidas para corriente continua (excepto las que se refieren a la potencia disipada!) basta con sustituir

$$\begin{aligned} \text{resistencias } R_k &\longrightarrow \text{impedancias } Z_k \\ \text{conductancias } G_k &\longrightarrow \text{admitancias } Y_k. \end{aligned}$$

Los valores instantáneos de las cantidades se obtienen en la forma

$$\mathcal{A}(t) = \text{Re}(A e^{j\omega t}) \equiv \text{Re } \mathcal{A}(t),$$

donde A es la amplitud compleja de la cantidad $\mathcal{A} = \mathcal{E}, V, I$, etc.

En particular, valen las leyes de Kirchhoff (2.36) y (2.38), que

ahora toman las formas respectivas

$$\sum_k I_k = 0 \quad (5.25)$$

para las amplitudes complejas de las corrientes $i_k(t)$ que entran a un mismo nudo, y

$$\sum_j Z_j = \sum_k Z_k I_k \quad (5.26)$$

para las amplitudes complejas de las f.e.m. $\mathcal{E}_j(t)$ y de las tensiones $V_k(t)$ que se encuentran al recorrer una misma malla.

Como consecuencia inmediata de las leyes de Kirchhoff se obtienen las relaciones:

$$Z_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n Z_k \quad (5.27)$$

para la impedancia equivalente de n elementos pasivos conectados en serie, e

$$Y_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n Y_k \quad (5.28)$$

para la admitancia equivalente de n elementos conectados en paralelo. Estas relaciones son las duales de (2.40) y (2.42), respectivamente.

Expresando las cantidades en forma binomial, obtenemos las relaciones:

$$R_{\Sigma} = \sum_k R_k; \quad X_{\Sigma} = \sum_k X_k \quad \text{y} \quad G_{\Sigma} = \sum_k G_k; \quad B_{\Sigma} = \sum_k B_k.$$

A menudo utilizamos los valores conjugados de la impedancia:

$$Z^*(\omega) = R(\omega) - j X(\omega) \quad \Rightarrow \quad Z Z^* = |Z|^2$$

y de la admitancia

$$Y^*(\omega) = G(\omega) + j B(\omega) \quad \Rightarrow \quad Y Y^* = |Y|^2.$$

Por ejemplo, podemos expresar la impedancia equivalente de Z_1 en paralelo con Z_2 :

$$Z_{\parallel} = R_{\parallel} + j X_{\parallel} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 Z_2 (Z_1^* + Z_2^*)}{(Z_1 + Z_2)(Z_1^* + Z_2^*)} = \frac{|Z_1|^2 Z_2 + |Z_2|^2 Z_1}{|Z_1 + Z_2|^2}$$

$$\Rightarrow R_{\parallel} = \frac{|Z_1|^2 R_2 + |Z_2|^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}; \quad X_{\parallel} = \frac{|Z_1|^2 X_2 + |Z_2|^2 X_1}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (5.29)$$

Las ecuaciones de mallas de un circuito con K mallas serán de la forma

$$E_k = \sum_{t=1}^K Z_{kt} I_t \Rightarrow I_t = \sum_{k=1}^K \frac{A_{tk}}{D} E_k$$

donde, como en (2.50), A_{tk} es el adjunto del elemento Z_{tk} de la matriz de impedancias $\bar{Z}$ cuyo determinante es D .

Análogamente, las ecuaciones de nudos tendrán la forma

$$J_k = \sum_{t=1}^{n-1} Y_{kt} E_t \Rightarrow E_t = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A'_{tk}}{D'} J_k$$

donde J_k es la amplitud compleja de la corriente equivalente total de las fuentes que llegan al nudo k -ésimo, Y_{kt} son los elementos de la matriz de admitancias $\bar{Y}$ cuyos adjuntos son A'_{tk} y cuyo determinante es D' , y E_t es la tensión del nudo t -ésimo.

DIAGRAMAS VECTORIALES

Volvamos al circuito de la fig. 1 y calculemos la corriente $i(t)$ y las caídas de tensión instantáneas $V_k(t)$ sobre los elementos pasivos. Tomando como referencia la fase de la f.e.m. ($\varphi_0 = 0$), la ley de Ohm (5.18) da:

$$E_R = R I = R I_0 e^{-j\varphi};$$

$$E_C = \frac{1}{j\omega C} I = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega C} I_0 e^{-j\varphi} = \frac{1}{\omega C} I_0 e^{j(-\varphi - \pi/2)}$$

$$\text{siendo } \varphi = \arg Z = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad I_0 = E_0/|Z| \quad (5.19)$$

$$E_L = j\omega L I = \omega L e^{j\pi/2} I_0 e^{-j\varphi} = \omega L I_0 e^{j(-\varphi + \pi/2)}.$$

$$\text{Luego:} \quad i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = I_0 \cos(\omega t - \varphi);$$

$$V_R(t) = \operatorname{Re}(E_R e^{j\omega t}) = R I_0 \cos(\omega t - \varphi);$$

$$V_C(t) = \operatorname{Re}(E_C e^{j\omega t}) = \frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2) = + \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t - \varphi);$$

$$V_L(t) = \operatorname{Re}(E_L e^{j\omega t}) = \omega L I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) = -\omega L I_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Es evidente que, salvo en el caso de $i(t)$ y $V_R(t)$ que siempre están en fase en un circuito serie, la representación gráfica de estas funciones sinusoidales con sus amplitudes y fases distintas, es bastante engorrosa. Las cantidades complejas correspondientes de la forma $A(t) = A e^{j\omega t}$ permiten simplificar la representación.

En el plano complejo (fig. 3) el producto $A e^{j\omega t}$ contiene un factor constante en el tiempo (la amplitud compleja $\tilde{A}$) y un vector

unitario o versor $e^{j\omega t}$ que gira en sentido antihorario en torno del origen con velocidad angular ω .

El ángulo que forma con el eje real el vector $A(t)$ será

$$\arg A(t) = \arg A + \arg e^{j\omega t} = \arg A + \omega t,$$

de modo que la multiplicación por el versor implica la rotación del vector $A(t)$ con la misma velocidad angular.

En la fig. 3 representamos:

$$I(t) = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$E_R(t) = R I_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$E_C(t) = \frac{I_0}{\omega C} e^{j(\omega t - \varphi - \pi/2)}$$

$$E_L(t) = \omega L I_0 e^{j(\omega t - \varphi + \pi/2)}$$

El diagrama vectorial resultante muestra cómo $V_R(t)$ está en fase con $i(t)$, mientras que la caída $V_C(t)$ está atrasada y la $V_L(t)$ adelantada con respecto a la corriente, ambas en $\pi/2 = 90^\circ$.

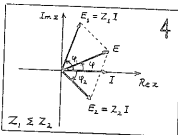
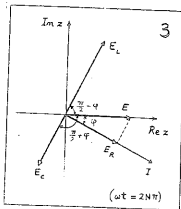
Los valores instantáneos pueden calcularse gráficamente en cada instante t , midiendo las abscisas (partes reales) de los vectores de la forma $A(t)$. Si se eligió la forma $A(t) = A_0 \sin \omega t$ correspondrá tomar las ordenadas de los respectivos vectores.

Para representar circuitos con elementos en serie basta con un solo vector corriente $I(t)$, cuya fase suele elegirse como referencia, de modo que $\varphi_i = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_e$. Como verificación, observemos que el vector que representa a $E(t)$ de la f.e.m. debe ser en todo instante igual a la suma vectorial de los $E_k(t)$, de modo que la fase φ de la impedancia total (igual al desfase entre E e I) se puede hallar gráficamente (fig. 4).

Para circuitos en paralelo conviene tomar como referencia la fase de la tensión común E (fig. 5), de modo que la corriente compleja en cada rama se obtiene como

$$I_k = E/Z_k \Rightarrow \arg I_k = -\arg Z_k = -\varphi_k$$

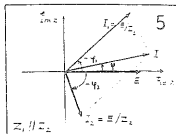
y como verificación inmediata debe



cumplirse la condición

$$I = \sum_k I_k = \sum_k (E/Z_k).$$

Como se ve en la fig. 5, también en este caso se obtiene fácilmente el desfase φ entre la tensión E de la f.e.m. y el vector correspondiente a la corriente total I , que es la resultante de sumar los vectores I_k .



VALOR EFICAZ DE UNA CANTIDAD PERIÓDICA

En la práctica las tensiones y corrientes sinusoidales son las que se utilizan con mayor frecuencia, pero también se usan otras formas periódicas: onda rectangular o "cuadrada" (fig. 6-a), onda triangular o "diente de sierra" (fig. 6-b), etc.

Los valores instantáneos cambian de signo, pasando desde un máximo A_0 a un mínimo $-A_0$ en distintas formas. A igual amplitud A_0 e igual frecuencia ω , las oscilaciones difieren notablemente entre sí.

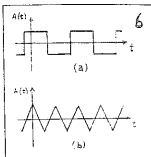
Una manera útil de caracterizarlas consiste en calcular sus momentos sucesivos, de modo análogo a las distribuciones aleatorias continuas: el conocimiento de todas los momentos de una función periódica $A(t)$ equivale a conocer dicha función en todo instante.

En general, nos interesa conocer unos pocos momentos, comenzando por el promedio temporal:

$$\bar{A} \approx \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A(t') dt' = \frac{1}{T} \int_0^T A(t') dt'$$

que obviamente es nulo para las corrientes y las tensiones sinusoidales, ya que

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt' \cos \omega t' = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt' \cos \omega t' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(\sin \omega t') = 0$$



Al segundo momento centrado (que conocemos también como dispersión σ^2) lo denominamos valor eficaz de $A(t)$. Está definido por la relación

$$\tau A_{ef}^2 = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' [A(t') - \bar{A}]^2 = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' A^2(t'),$$

o sea

$$A_{ef} = \left[\frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' A^2(t') \right]^{1/2} \quad (5.30)$$

A_{ef} también se conoce como promedio cuadrático de $A(t)$, para $\bar{A} = 0$, y como valor "r.m.s." de dicha cantidad (*).

Calculemos el valor eficaz de una tensión alterna de la forma

$$(5.1): \quad E_{ef}^2 = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt' E_0^2 \cos^2 \omega t' = \frac{E_0^2}{2\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d(\omega t') \cos^2 \omega t' = \frac{E_0^2}{2\tau} \cdot \tau = \frac{E_0^2}{2}$$

pues $\int_0^x \cos^2 u = \frac{1}{2} (\sin x \cos x + x);$

Luego

$$\begin{aligned} E_{ef} &= E_0 / \sqrt{2} \\ I_{ef} &= I_0 / \sqrt{2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

y análogamente

Ejercicio: Demostrar que los valores eficaces de:

(a) una onda cuadrada (fig. 6-a) y (b) una onda triangular (fig. 6-b), ambas con la misma amplitud E_0 , son:

(a) $E_{ef} = E_0$; (b) $E_{ef} = E_0 / \sqrt{3}$, respectivamente.

Enseguida veremos que las relaciones (5.31) son útiles para expresar la potencia disipada en un circuito de corriente alterna. Los valores numéricos de corriente y tensión que indican los instrumentos de medición de alterna son precisamente los eficaces. Así, cuando un equipo requiere una tensión de 110 V ó 220 V siempre se sobreentiende que se trata de voltios "eficaces" y que las amplitudes E_0 requeridas son $110\sqrt{2} = 156$ V ó 311 V, respectivamente.

(*) La expresión r.m.s., muy usada en Electrónica, se refiere a las iniciales inglesas del cálculo indicado en (5.30): Root (raíz cuadrada) - Mean (promedio sobre un ciclo) - Square (cuadrado de la cantidad).

CORRIENTE TRIFÁSICA

Supongamos que en el generador de alterna hay tres bobinas iguales (en lugar de la única de la fig. 34, Cap. III), que giran con la misma velocidad angular en un campo magnético uniforme. Si los planos de las bobinas están rotados entre sí en ángulos $2\pi/3 = 120^\circ$ (fig. 7-a), es fácil ver que las f.e.m. inducidas serán:

$$\mathcal{E}_a(t) = E_0 \cos \omega t$$

$$\mathcal{E}_b(t) = E_0 \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

$$\mathcal{E}_c(t) = E_0 \cos(\omega t + 4\pi/3),$$

donde hemos elegido arbitrariamente $\varphi_a = 0$ como referencia.

Con respecto al punto 0 de la fig. 7-b, llamado neutro, cada bobina provee una f.e.m. de igual amplitud y el mismo valor eficaz $E_{ef} = E_0 / \sqrt{2}$, pero la diferencia de potencial entre un par de puntos como los a y b vale

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(t) - \mathcal{E}_b(t) &= E_0 [\cos \omega t - \cos(\omega t + 2\pi/3)] = \\ &= E_0 [2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin(\omega t + 2\pi/3)] = E_0 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t + \pi/6) \\ \implies \mathcal{E}_a - \mathcal{E}_b &= \sqrt{3} E_0 \cos(\omega t + \pi/6), \end{aligned}$$

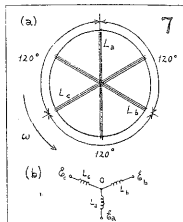
es decir que la amplitud y la tensión eficaz son mayores por un factor $\sqrt{3}$ que los valores monofásicos (para una sola bobina). Por ejemplo, para $E_{ef} = 220$ V monofásicos tenemos una tensión eficaz trifásica de $220\sqrt{3} = 380$ V.

POTENCIA DISIPADA EN UN CIRCUITO DE CORRIENTE ALTERNA

La potencia instantánea $P(t)$ disipada en un circuito de dos terminales está dada por la ley de Joule

$$P(t) = i(t) V(t) \quad (5.32)$$

donde i y V son los valores instantáneos de la corriente que



entra al circuito y de la diferencia de potencial entre los terminales. Generalmente hay un desfase φ entre ambas, de modo que

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) = I_0 (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(t) &= V_0 I_0 \cos \omega t (\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) = \\ &= V_0 I_0 (\cos \varphi \cos^2 \omega t + \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t). \end{aligned}$$

Empleando identidades trigonométricas conocidas obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos(2\omega t - \varphi) &= \cos \varphi \cos 2\omega t + \sin \varphi \sin 2\omega t = \\ &= 2 \cos \varphi \cos^2 \omega t - \cos \varphi + 2 \sin \varphi \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= 2 (\cos \varphi \cos^2 \omega t + \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t) - \cos \varphi \\ \Rightarrow P(t) &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(2\omega t - \varphi) + \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad (5.33) \end{aligned}$$

donde vemos que la potencia instantánea es una sinusoidal de amplitud

$$\frac{V_0 I_0}{2} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} = V_{ef} I_{ef},$$

$$\text{frecuencia } \omega_p = 2\omega \Rightarrow \text{período } T_p = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

y valor medio no nulo, ya que

$$\bar{P} = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} V_{ef} I_{ef} \cos \varphi dt = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi \quad (5.34)$$

La expresión (5.33) permite graficar fácilmente la potencia instantánea $P(t)$, como se ve en la fig. 8.

El factor $\cos \varphi$ en (5.34) se denomina factor de potencia. Si la impedancia de un circuito es $Z = R + jX$, vale

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

En general, todo circuito contiene elementos disipativos, de modo que $R \neq 0 \Rightarrow \cos \varphi \neq 0$. Para un circuito puramente resistivo:

$X = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 1$, y la potencia disipada en un ciclo será

$$\bar{P}(X=0) = V_{ef} I_{ef} = \frac{1}{2} V_0 I_0.$$

Vemos que en este caso los valores eficaces dan una expresión de la potencia media que es la misma que se obtiene para un circuito de corriente continua con los mismos parámetros pero con $V = V_{ef}$ en lugar de V_0 , $i = I_{ef}$ en lugar de I_0 .

Para un circuito puramente reactivo ($R \approx 0$) la potencia media disipada será nula. Esto sucede, por ejemplo, en el circuito LC ideal (Cap. IV, fig. 8) donde la energía que suministra la fuente sólo se emplea para generar el campo eléctrico en el condensador y el campo magnético en la bobina. A medida que transcurre un ciclo, el condensador recibe energía que después devuelve al generador. Lo mismo sucede (con un desfase o retardo de $\pi = 180^\circ$) con la bobina.

Un circuito real con R muy pequeña y por lo tanto con $|\cos \varphi| \approx 1$ crea un serio problema de suministro de energía, ya que durante el transitorio la potencia instantánea puede alcanzar valores muy elevados, que la línea de transmisión debe soportar (esto puede verse cada vez que arranca un motor de cierta potencia, por su efecto sobre la red domiciliar). Además, cuando se trata de entregar potencia a un motor, p.ej., éste funciona más eficientemente cuando la corriente y la tensión están aproximadamente en fase (puede recomendarse que $\cos \varphi \approx 0,8$ a $0,9$). Para aumentar el factor de potencia suele conectarse un condensador en paralelo con la máquina, que prácticamente no consume potencia neta, pero modifica convenientemente la fase del conjunto, y por lo tanto el $\cos \varphi$.

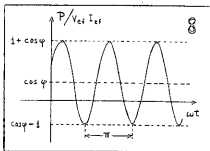
Es importante observar que en una línea de transmisión, esencialmente resistiva ($X \approx 0$) la tensión y la corriente están en fase, de modo que las pérdidas de potencia valen $R I_{ef}^2$. La potencia media efectivamente suministrada a una impedancia es $\bar{P} = I_{ef} V_{ef} \cos \varphi$, valor que denominamos potencia activa media.

El producto $I_{ef} V_{ef}$, independiente del desfase entre corriente y tensión, se denomina potencia aparente:

$$P_{ap} = I_{ef} V_{ef} \Rightarrow \cos \varphi = \bar{P} / P_{ap}.$$

La potencia instantánea (5.32) puede escribirse como

$$P(t) = V_0 I_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t + V_0 I_0 \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t.$$



El primer término, cuyo promedio en un ciclo es $\bar{P}$, representa la potencia activa

$$P_R(t) = V_0 I_0 \cos \varphi \cos^2 \omega t \quad ; \quad \bar{P}_R = \bar{P}$$

y el segundo, cuyo promedio es nulo, es la llamada potencia reactiva

$$P_X(t) = V_0 I_0 \sin \varphi \cos \omega t \sin \omega t \quad ; \quad \bar{P}_X = 0$$

que expresa la variación de la potencia entretenida en los campos (eléctricos) en los condensadores y (magnéticos) en las bobinas. Luego, en todo instante:

$$P(t) = P_R(t) + P_X(t).$$

Unidades: La unidad de potencia es, por supuesto, el vatio o watt (W).

Sin embargo, el vatio suele reservarse para expresar la potencia activa P , mientras que la potencia aparente se suele indicar en voltio-amperios, o sea

$$[P_{ap}] = V \cdot A \quad ; \quad [P] = W.$$

MEDICIÓN DE LA POTENCIA: WATÍMETRO

Para medir corrientes, tensiones y potencias se puede emplear un instrumento llamado electrodinámómetro, cuyo esquema se ve en la fig. 9. Consta de dos bobinas: la 1 (móvil, unida a una espiral elástica) con una aguja indicadora adosada, y la 2 (fija) que genera una cupla en la 1 cuando circulan corrientes por ambas espiras. Esta cupla puede calcularse a partir de la energía magnética de interacción entre las bobinas:

$$U_{12} = M i_1 i_2 \quad (3.134)$$

donde $M = M_{12}$ es la inductancia mutua entre ellas.

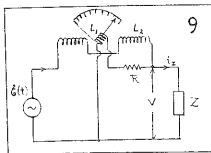
Si la cupla restauradora de la espiral es proporcional a la desviación θ :

$$M_e = \tau \theta$$

y calculamos la cupla magnética como en (1.87):

$$M_m = \partial U_{12} / \partial \theta = i_1 i_2 \partial M / \partial \theta,$$

en el equilibrio tenemos:



$$\theta = \frac{1}{C} \frac{\partial M}{\partial \theta} i_1 i_2 = k(\theta) i_1 i_2 \quad (5.35)$$

donde $k(\theta)$ se determina experimentalmente conectando las bobinas en serie, de modo que $i_1 = i_2$, con lo cual el instrumento queda calibrado. Para $i_1 = i_2$ la desviación θ es proporcional a $i^2(t)$ y, por lo tanto, tiene el mismo sentido cualquiera sea el signo de la corriente.

Para la conexión indicada en la fig. 9, donde la impedancia de carga Z es alimentada por una f.e.m., se elige $R \gg \omega L_1$, de modo que

$$|i_1(t)| = \frac{V_0}{R} |\cos \omega t|,$$

donde $V(t) = V_0 \cos \omega t$ es la caída de tensión sobre la carga.

Si $R \gg \omega L_2$ la corriente por la carga $i_z = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ es aproximadamente igual a $i_2(t)$, o sea

$$|i_z| \approx I_0 |\cos(\omega t - \varphi)| \approx |i_2(t)|$$

y la desviación (5.35) será

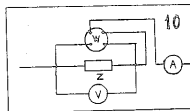
$$\theta(t) = k |i_1| |i_2| \approx \frac{k}{R} V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi) = \frac{k}{R} P(t),$$

donde la relación k/R queda fijada al construir el instrumento.

Como el conjunto bobina 1/aguja/espiral no puede moverse con la misma frecuencia angular de la potencia ($\omega_p = 2\omega = 4\pi \nu \approx 600 \text{ s}^{-1}$ con $\nu = 50 \text{ Hz}$ para corriente de línea), la desviación de la aguja toma un valor medio dado por (5.34):

$$\bar{\theta} = \frac{k}{R} V_{ef} I_{ef} \cos \varphi. \quad (5.36)$$

Conectando un amperímetro A , un voltímetro V y un watímetro W como se indica en la fig. 10, podemos medir simultáneamente I_{ef} , V_{ef} y $\bar{P}$, y así determinamos el valor del factor de potencia $\cos \varphi$ de una carga Z dada.



POTENCIA: CONDICIÓN DE MÁXIMA TRANSPARENCIA

Sea el circuito de la fig. 11, donde $\tilde{E}(t)$ es un generador ideal conectado a una impedancia $Z_g = R_g + jX_g$ (que incluye la propia del generador), que alimenta a una carga de impedancia $Z_c = R_c + jX_c$.

(+) Por la misma razón, aprovechando la inercia mecánica, los voltímetros y amperímetros comunes "de alterna" miden valores eficaces.

La corriente compleja será

$$I = \frac{E}{Z_g + Z_c} = \frac{E}{(R_g + R_c) + j(X_g + X_c)}$$

y la potencia media suministrada a la carga Z_c , como en (5.34), estará dada por

$$\bar{P}_c = V_{ef} I_{ef} \cos \varphi_c$$

donde $\cos \varphi_c = R_c / |Z_c|$; $V_{ef} = I_{ef} |Z_c|$

$$\Rightarrow \bar{P}_c = I_{ef}^2 R_c \quad (5.37)$$

Esta expresión general es completamente análoga a la correspondiente a corriente continua (2.26).

Luego,

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{[(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \bar{P}_c = \frac{R_c E_{ef}^2}{(R_g + R_c)^2 + (X_g + X_c)^2} = \frac{R_c E_{ef}^2}{|Z_t|^2} \quad (5.38)$$

donde Z_t es la impedancia total del circuito.

A diferencia de lo visto en el Cap. II, aquí la reactancia total $X_g + X_c$ se puede anular, de modo que para un valor fijo de Z_g podemos elegir

$$X_c = -X_g \Rightarrow \bar{P}_c = R_c E_{ef}^2 (R_g + R_c)^{-2},$$

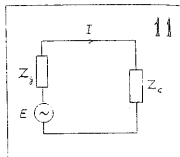
que es una expresión idéntica a la hallada para corriente continua. Como en aquel caso, el máximo de $\bar{P}_c$ para reactancia total nula se obtiene cuando

$$R_c = R_g.$$

Las dos expresiones se pueden resumir diciendo que la máxima transferencia de potencia a una carga en un circuito de alterna se logra cuando

$$Z_c = Z_g^* \quad (5.39)$$

es decir que las impedancias del generador y de la carga son conjugadas. O sea que si X_g es capacitiva, la carga debe ser inductiva, y viceversa.



No siempre es posible lograr que se cumplan ambas condiciones para optimizar la transmisión de potencia a la carga. La máxima potencia transferible es

$$P_m = \bar{P}_c (Z_c = Z_g^*) = \frac{E_{ef}^2}{4R_g}$$

y la eficiencia de la transmisión se mide por la relación adimensional

$$\eta = \frac{\bar{P}_c}{P_m} = \frac{R_c E_{ef}^2}{|Z_t|^2} \cdot \frac{4R_g}{E_{ef}^2} = \frac{4R_g R_c}{|Z_t|^2} < 1. \quad (5.40)$$

A menudo se utiliza la pérdida en decibelios, definida como

$$p = 10 \log |\eta| = 10 \log (P_m / \bar{P}_c) = 20 \log |Z_t| - 10 \log (4R_g R_c) \quad (5.41)$$

donde $\log x$ expresa el logaritmo decimal de x .

RESONANCIA DE UN CIRCUITO RLC SERIE

Volvamos al circuito RLC serie de la fig. 1. La corriente eficaz

I_{ef} vale, según vimos:

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{|Z_t|} = \frac{E_{ef}}{(R^2 + X^2)^{1/2}}$$

con $X(\omega) = \omega L - 1/\omega C$.

Al variar la frecuencia ω del generador, observamos que

$$X(\omega=0) \rightarrow \infty \Rightarrow I_{ef}(\omega=0) = 0$$

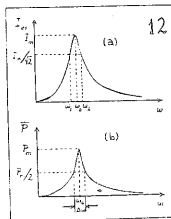
$$X(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \infty \Rightarrow I_{ef}(\omega \rightarrow \infty) = 0$$

y a la frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$X(\omega_0) = 0 \Rightarrow I_{ef} = E_{ef}/R = \max I_{ef}$$

La función $I_{ef} = I_{ef}(\omega)$ se representa en la fig. 12-a.

La condición $\omega = \omega_0$ para la cual se verifica que $X(\omega) = 0$, define la resonancia. Para esa frecuencia el circuito adquiere características especiales:



a) La reactancia $X(\omega)$ se anula, de modo que la impedancia es mínima y la corriente y la tensión están en fase (el circuito es puramente resistivo). Precisamente, la condición de que la excitación (f.e.m.) esté en fase con la respuesta (corriente) es la característica que define la resonancia.

b) $V_L(t) = -V_C(t) \Rightarrow E_L + E_C = 0$, es decir que las caídas sobre C y L están desfasadas en $\pi = 180^\circ$. Sin embargo, sus valores de pico pueden ser mucho mayores que la amplitud E_0 de la f.e.m. Para esta frecuencia dichas tensiones tienen la expresión

$$|E_L| = |E_C| = \frac{R_C}{2R} R_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} R_0 \quad ; \quad R_C = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

donde R_C es la resistencia crítica del circuito (Cap. IV).

c) En consecuencia, $E = E_R$ y la caída sobre la resistencia es igual a la f.e.m. aplicada.

La potencia disipada está dada por (5.37):

$$\bar{P} = P(\omega) = R I_{ef}^2(\omega) = \frac{R E_{ef}^2}{R^2 + X^2(\omega)} \quad (5.42)$$

Su variación como función de ω se muestra en la fig. 12-b. La máxima potencia disipada corresponde a la resonancia, donde

$$P_m = \bar{P}(\omega = \omega_0) = \frac{E_{ef}^2}{R}.$$

La forma de la curva $P = P(\omega)$ varía según los valores de los parámetros R , L y C . Una manera útil de describir dicha curva consiste en ubicar los valores de ω para los cuales la potencia disipada es la mitad de la máxima P_m . Estas frecuencias de potencia mitad, entendidas como ω_1 y ω_2 en la fig. 12, están definidas por la condición

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2} P_m = \frac{R E_{ef}^2}{2R}$$

$$\text{o sea, según (5.42): } \frac{R E_{ef}^2}{R^2 + X^2(\omega)} = \frac{R E_{ef}^2}{2R} \implies R^2 + X^2(\omega) = 2R^2$$

$$\implies (\omega L - 1/\omega C)^2 = R^2 \implies (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = (2\alpha\omega)^2, \quad (5.43)$$

después de haber multiplicado miembro a miembro por ω^2/L^2 .

Aquí $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$ y $\alpha = R/2L$ es la constante de amortiguamiento que hallamos al estudiar el transitorio.

La (5.43) es una ecuación de cuarto grado en la frecuencia, equivalente a

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\alpha\omega \implies \omega^2 \pm 2\alpha\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Las cuatro raíces de esta ecuación son:

$$\omega_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} < \omega_0; \quad \omega_2 = +\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2} > \omega_0;$$

$$\omega_3 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_1^2} < 0; \quad \omega_4 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \omega_2^2} < 0.$$

Las dos últimas carecen de significado físico. El intervalo entre las dos primeras, que son las que buscábamos, se denomina banda pasante y su diferencia

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\alpha = R/L \quad (5.44)$$

es el ancho de banda del circuito RLC.

Para caracterizar la forma de la curva definimos la cantidad adimensional

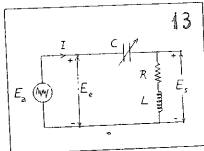
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{R_C}{2R} = \frac{|E_L|}{|E|} = \frac{|E_C|}{|E|} \quad (5.45)$$

llamado factor de mérito o de calidad del circuito. Este factor Q mide la selectividad del sistema para el suministro de potencia a R . En efecto, si $Q \gg 1 \implies \Delta\omega$ es muy pequeño y sólo se transmite la potencia en una banda muy estrecha $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. Por el contrario un Q bajo $\implies \Delta\omega$ grande y el circuito permite el paso de corrientes con frecuencias comprendidas en un rango muy amplio.

El principio de selectividad recién esbozado constituye la base de la sintonía de los equipos electrónicos. En la fig. 13 esquematizamos dicho principio para un circuito de sintonía muy sencillo:

E_a - tensión de entrada o señal
(p.ej. una antena)
 C - condensador variable
 R , L - parámetros de una bobina
 E_s - tensión de salida sintonizada.

Si la señal E_a es la superposición de tensiones de muchas frecuencias, la caída E_s sobre



la bobina será proporcional a la corriente I que admite el circuito RLC. Las frecuencias admitidas serán esencialmente las que se encuentran en la banda pasante (entre ω_1 y ω_2 , fig. 12), de modo que la tensión de salida E_H será una superposición de contribuciones con frecuencias muy próximas a la de resonancia ($\omega \approx \omega_0$) si el Q del circuito es alto. En los receptores comunes de radio, donde Q suele ser mayor que 100, la sintonización (variación de ω) se logra variando la capacidad C .

RESONANCIA EN UN CIRCUITO RLC PARALELO

Consideremos el circuito de la fig. 14, donde un condensador ideal está conectado en paralelo con una bobina con resistencia. En la misma figura vemos el diagrama vectorial correspondiente, donde tomamos como referencia la fase de la f.e.m., común a ambas ramas. Si el diagrama corresponde a $X_H = 0$ (resonancia).

Podemos calcular la impedancia del circuito pasivo empleando las relaciones (5.29) donde, en este caso:

$$R_1 = 0; X_1 = X_C; R_2 = R; X_2 = X_L$$

$$\Rightarrow |Z_H|^2 = X_C^2; |Z_2|^2 = R^2 + X_L^2$$

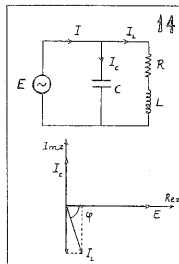
$$\Rightarrow R_H = \frac{R X_C^2}{R^2 + (X_L + X_C)^2};$$

$$X_H = \frac{X_L X_C^2 + X_C(R^2 + X_L^2)}{R^2 + (X_L + X_C)^2}.$$

La condición de resonancia $X_H = 0$, que implica que la f.e.m. está en fase con la corriente que genera, se cumple para una frecuencia $\omega = \omega_0'$ tal que

$$X_L^2 + R^2 + X_C X_L = L^2 \omega^2 + R^2 - \frac{L}{C} = 0 \quad (5.46)$$

$$\Rightarrow \omega_0'^2 = \frac{1}{LC} - (R/L)^2 = \omega_0^2 - \Delta\omega^2 = \omega_0^2 (1 - Q^{-2})$$



$$\Rightarrow \omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (5.47)$$

Esta frecuencia es siempre menor que la ω_0 de la resonancia serie, aunque para el caso más común de $Q \gg 1$ resulta $(1 - Q^{-2})^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2Q^2} \approx 1$. (La condición $X_C = -1/\omega C = 0$, que también anula X_H , carece de interés).

En general $|Z_H|^2 = \left| \frac{X_C(R + jX_L)}{R + j(X_L + X_C)} \right|^2 = \frac{X_C^2(R^2 + X_L^2)}{R^2 + (X_L + X_C)^2}$ se anula para $\omega \rightarrow 0$ y para $\omega \rightarrow \infty$ (verificarlo).

En resonancia (5.46) $\Rightarrow R^2 + X_L^2 = -X_C X_L$ con $\omega = \omega_0'$

$$\therefore |Z_H| = R_H = \frac{R X_C^2}{R^2 + X_L^2 + 2 X_L X_C} = \frac{R X_C^2}{X_L X_C + X_C^2} = \frac{R}{1 + X_L/X_C}$$

$$\Rightarrow |Z_H| = \frac{R}{1 - \omega^2 LC} = \frac{R}{1 - \omega_0'^2/\omega_0^2} = \frac{R}{1 - (1 - Q^{-2})} = Q^2 R.$$

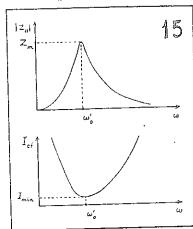
Normalmente $Q \gg 1$, de modo que este valor de $|Z_H|$ suele ser enorme.

En la fig. 15-a se representa $|Z_H|$ en función de la frecuencia. En la fig. 15-b se muestra la variación de la corriente eficaz

$$I_{ef} = \frac{E_{ef}}{|Z_H|} = \frac{R^2 + (X_L + X_C)^2}{X_C^2 (R^2 + X_L^2)} E_{ef}$$

en función de la frecuencia.

Vemos que en el circuito paralelo se presentan las situaciones opuestas a las del circuito serie: a los máximos de un caso le corresponden los mínimos del otro. Por ello la resonancia en paralelo se conoce como antirresonancia.



TRANSPERENCIA EN CIRCUITOS DE CUATRO TERMINALES: FILTROS

El circuito RLC de la fig. 13 es un caso particular de dispositivo de cuatro terminales que se conoce como filtro: permite el paso

de las corrientes con frecuencias comprendidas en la banda pasante, e impide el paso de las demás.

Un circuito de cuatro terminales puede esquematizarse como en la fig. 16, donde V_e es la tensión de entrada y V_s la de salida. A menudo interesa más conocer el comportamiento externo del circuito (visto desde afuera de la caja que se indica) que las corrientes o tensiones en su interior.

Para analizar cómo varía este comportamiento al variar la frecuencia de la tensión de entrada, conviene definir una función compleja de la frecuencia ω llamada

transferencia: $T(\omega) = \frac{E_s}{E_e} \equiv |T| e^{j\varphi}$ (5.48)

donde E_e y E_s son las amplitudes complejas de las tensiones de entrada y de salida, respectivamente. El módulo y la fase de la transferencia están dados por

$$|T| = |E_s|/|E_e| \quad \text{y} \quad \varphi = \arg T = \arg E_s - \arg E_e$$

Calcularemos la transferencia de los filtros más sencillos:

a) Pasa-altos:

La fig. 17 muestra un circuito RC utilizado como filtro. Es fácil ver que

$$E_s = RI = \frac{RE_e}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} E_e$$

$$\Rightarrow T = \frac{E_s}{E_e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito (Cap. IV).

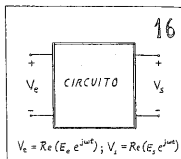
Luego,

$$|T| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau.$$

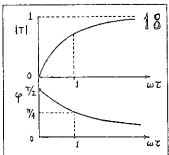
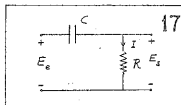
Para $\omega \rightarrow 0$: $|T| \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow \pi/2$

$\omega = 1/\tau$: $|T| = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$

$\omega \rightarrow \infty$: $|T| \rightarrow 1$, $\varphi \rightarrow 0$.



$$V_e = R_e(E_e e^{j\omega t}); \quad V_s = R_s(E_s e^{j\omega t})$$



En la fig. 18 se ven los gráficos de $|T|$ y φ en función de la variable adimensional $\omega\tau$. Para frecuencias altas el condensador se comporta como un cortocircuito, de manera que $V_s = V_e$, mientras que las frecuencias bajas son totalmente bloqueadas.

b) Pasa-bajas:

La fig. 19 muestra un circuito LR utilizado como filtro. Se ve fácilmente que

$$E_s = \frac{R}{R + j\omega L} E_e$$

$$\Rightarrow T = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo (Cap. IV).

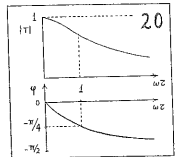
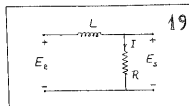
Luego,

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \quad \varphi = -\arctg \omega\tau.$$

Para $\omega \rightarrow 0$: $|T| \rightarrow 1$, $\varphi \rightarrow 0$

$\omega = 1/\tau$: $|T| = 1/\sqrt{2}$, $\varphi = -\pi/4$

$\omega \rightarrow \infty$: $|T| \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow -\pi/2$.



La fig. 20 muestra el gráfico de $|T|$ y φ en función de $\omega\tau$. Para frecuencias bajas la bobina se comporta como un cortocircuito ($V_s = V_e$), mientras que las frecuencias altas son bloqueadas.

Ejercicio: Calcular el módulo y la fase de la transferencia del filtro RLC de la fig. 13 ($E_a = E_e$). Expresar las relaciones halladas en variables dimensionales convenientes y analizar las variaciones en la transferencia (módulo y fase) al variar el factor de mérito del circuito.

La **transferencia de potencia** se mide por la relación:

$$T_P = \frac{P_s}{P_e} = \frac{I_{s,ef}^2 R_s}{I_{e,ef}^2 R_e} = \frac{E_s^2 \operatorname{Re} R_s / |Z_s|^2}{E_e^2 \operatorname{Re} R_e / |Z_e|^2},$$

donde hemos empleado la expresión (5.37) para las potencias activas de entrada P_e y de salida P_s . La impedancia de salida del circuito

depende de la carga conectada, la cual varía de un circuito al otro. Por ello, en la práctica se suele ignorar el factor que contiene a las impedancias y se define

una transferencia de tensión: $T_v = \frac{E_{s,ef}^2}{E_{s,ef}^2} \cdot \frac{|E_s|^2}{|E_s|^2} = |T|^2 \quad (5.49)$

Para los circuitos lineales pasivos $|T| \leq 1$, de modo que T_v representa una pérdida que solemos expresar en decibels:

$$p = 10 \log T_v = 20 \log (|E_s|/|E_s|) < 0 \quad (5.50)$$

donde, como en (5.41), se emplean logaritmos decimales.

TRANSITORIO DE DOS CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

Estudiaremos el sistema sencillo de la fig. 21, donde vemos dos circuitos RL cuyas bobinas están arrolladas sobre un núcleo de material ferromagnético, de modo que el flujo concatenado por una bobina no difiere mucho del concatenado por la otra.

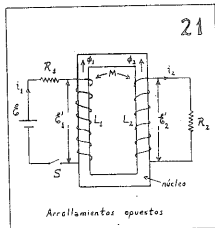
L_1 y L_2 son las autoinductancias y M es la inducción mutua; R_1 y R_2 son las resistencias totales de ambos circuitos. El circuito activo se llama primario, y el pasivo secundario. Veremos enseguida que, a pesar de no contener una f.e.m. propia, una variación del flujo magnético a través de la bobina del secundario puede inducir una corriente $i_2(t)$ la cual, por la ley de Lenz, modificará la corriente en el primario. Es decir que, estrictamente hablando, el secundario no es pasivo.

El flujo magnético total ϕ_1 a través de la bobina del primario es la suma de las contribuciones ϕ_{11} (debida al campo generado por la corriente propia i_1) y ϕ_{12} (debida al campo generado por i_2):

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}.$$

Análogamente, el flujo en el secundario vale

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$$



donde ϕ_1 es la contribución del primario y ϕ_{12} el flujo debido a la corriente propia. Estas distintas contribuciones valen, según (3.41)

$$\text{y (3.44): } \phi_{11} = L_1 i_1; \quad \phi_{12} = \pm M i_2; \quad \phi_{21} = \pm M i_1; \quad \phi_{22} = L_2 i_2$$

donde, según vimos en el Cap. III (fig. 16), el signo (+) se aplica cuando los arrollamientos de las bobinas alrededor del núcleo son del mismo sentido y el signo (-) cuando son de sentidos opuestos, como en la fig. 21.

Luego,

$$\phi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2$$

$$\phi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2.$$

Cuando, ya sea por efecto de la llave S o por una variación de la f.e.m. $\mathcal{E}$, las corrientes varían en el tiempo, y con ellas los flujos $\phi_{1,2}$, se generan en las bobinas las fuerzas electromotrices inducidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_1 &= - \frac{d\phi_1}{dt} = - L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}'_2 &= - \frac{d\phi_2}{dt} = \mp M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt}, \end{aligned}$$

dadas por la ley de Faraday (3.113). Luego, la ley de Kirchhoff de las tensiones da (con la notación $p = d/dt$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} + \mathcal{E}'_1 &= R_1 i_1 \implies (R_1 + L_1 p) i_1 \pm M p i_2 = \mathcal{E} \\ 0 + \mathcal{E}'_2 &= R_2 i_2 \implies \pm M p i_1 + (R_2 + L_2 p) i_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

con un signo para cada tipo de arrollamiento.

Analizaremos el transitorio de este sistema cuando en el instante $t=0$ se cierra la llave S, con las condiciones iniciales:

$$i_1 = i_2 = 0 \quad \text{en } t = 0.$$

El método más directo de resolución es la sustitución algebraica. Por ejemplo, suponiendo arrollamientos opuestos (signos - en 5.51), despejamos de la primera ecuación:

$$p i_2 = \frac{1}{M} (R_1 + L_1 p) i_1 - \frac{\mathcal{E}}{M}$$

$$\implies (L_1 L_2 - M^2) p i_1 + L_2 R_1 i_1 - L_2 \mathcal{E} + M R_2 i_2 = 0.$$

Derivando con respecto al tiempo, con $\mathcal{E} = \text{const.}$, y definiendo $a \equiv L_1 L_2 - M^2 > 0$ (ver 3.45), resulta

$$a p^2 i_1 + L_2 R_1 p i_1 + M R_2 p i_2 = 0 \implies -M p i_2 = \frac{a}{R_2} p^2 i_1 + L_2 \frac{R_1}{R_2} p i_1$$

la cual sustituimos en la primera de (5.51):

$$L_1 p i_1 + R_1 i_1 - M p i_2 = \frac{a}{R_2} p^2 i_1 + \frac{L_2 R_1 + L_1 R_2}{R_2} p i_1 + R_1 i_1 = \mathcal{E}.$$

Definiendo $b \equiv L_2 R_1 + L_1 R_2$; $c \equiv R_1 R_2$; y multiplicando miembro a miembro por R_2 obtenemos

$$(a p^2 + b p + c) i_1(t) = R_2 \mathcal{E}. \quad (5.52)$$

Para resolver esta ecuación es conveniente conocer la primera derivada de i_1 en $t=0$. Para ello escribimos las (5.51) en $t=0$, recordando que $i_1(0) = i_2(0) = 0$:

$$L_1 i_1' + M i_2' = \mathcal{E}; \quad L_2 i_2' - M i_1' = 0, \text{ siendo } i_k' \equiv (di_k/dt)_{t=0}$$

Resolviendo este par de ecuaciones lineales resulta

$$i_1' = (L_2/a) \mathcal{E}; \quad i_2' = (M/a) \mathcal{E}.$$

Ejercicio: Resolver la ecuación diferencial (5.52) empleando los métodos del Cap. IV. Verificar que resulta

$$i_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left\{ 1 + e^{-\alpha t} \left[\frac{(R_1 L_2 - R_2 L_1)}{2 a \beta} \operatorname{sh} \beta t - \operatorname{ch} \beta t \right] \right\} \quad (5.53)$$

$$\text{donde } \alpha = \frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

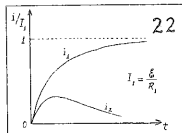
Repetiendo el procedimiento empleado para calcular i_1 , demostrar que

$$i_2(t) = \mathcal{E} \frac{M}{a \beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t. \quad (5.54)$$

La constante α en las exponenciales de (5.53) y (5.54) es el coeficiente de **amortiguamiento**, tal que $\alpha > \beta$

$$\implies i_1 \rightarrow \mathcal{E}/R_1; \quad i_2 \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow \infty.$$

En la fig. 22 se dan los gráficos de $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para el caso particular en que $R_1 L_2 = R_2 L_1$.



Ejercicio: Verificar que el máximo de la corriente i_2 en el secundario se produce en un instante t tal que $\operatorname{th} \beta t = \beta/\alpha$. Demostrar que la carga total que circula por el secundario vale

$$Q_2 = \int_0^\infty dt i_2(t) = \frac{M \mathcal{E}}{R_1 R_2}.$$

Observemos que en el caso ideal de acoplamiento perfecto ($a = 0$, o sea $L_1 L_2 = M^2$) las ecuaciones del tipo (5.52) son de primer orden, y la forma de las soluciones varía de manera esencial.

TRANSFORMADORES

Recién hemos visto un ejemplo en el cual se transfiere energía desde un circuito activo (primario) a otro pasivo (secundario), a pesar de que ambos no están en contacto. La inducción mutua dada por M es responsable del acoplamiento magnético entre los dos circuitos.

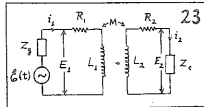
Los dispositivos basados en este principio se llaman **transformadores**. Sus principales aplicaciones prácticas son:

- La transformación de la tensión de un generador en otro voltaje más conveniente para su uso, con la menor pérdida posible de potencia en el proceso. Esto implica la posibilidad de transmitir energía eléctrica a través de grandes distancias a **tensiones muy altas y corrientes muy bajas**. Como hemos visto en (5.37) la potencia disipada en una línea de transmisión de impedancia $Z_0 = R_0 + jX_0$ es $P_0 = R_0 I_0^2$, de modo que un objetivo esencial de las estaciones transformadoras de potencia es reducir la corriente a la salida de la central generadora, y reducir la tensión a la entrada de la red domiciliar de distribución.

- El ajuste de impedancias entre el generador y la carga, de modo de optimizar la transferencia de potencia a éstas (con o sin dependencia de la frecuencia).

- El acoplamiento eficiente en corriente alterna entre dos más circuitos que se encuentran a distintos potenciales de continua.

La fig. 23 muestra el esquema de un transformador en cuyo primario Z_0 es la impedancia del generador, L_1 es la inductancia y R_1 la resistencia de la bobina. En el secundario L_2 y R_2 son los parámetros de la bobina y Z_c es la



impedancia de la carga.

Supondremos que las capacidades de cada bobina y entre las bobinas son despreciables, de modo que podemos calcular las impedancias totales:

- Con el secundario abierto ($Z_C = \infty$) el primario tiene

$$Z_{11} = Z_G + R_1 + j\omega L_1.$$

- Análogamente, con el primario abierto, el secundario tiene

$$Z_{22} = Z_C + R_2 + j\omega L_2.$$

- La impedancia de acoplamiento es $Z_{12} = Z_{21} = j\omega M$ para arrollamientos de las bobinas iguales u opuestos, respectivamente.

Si expresamos la tensión del generador y las corrientes en el primario y el secundario, respectivamente, como:

$$\xi(t) = \operatorname{Re}(E e^{j\omega t}); \quad i_{1,2}(t) = \operatorname{Re}(I_{1,2} e^{j\omega t})$$

las caídas de tensión debidas a las impedancias del generador y de la carga serán:

$$V_G(t) = \operatorname{Re}(Z_G I_1 e^{j\omega t}); \quad V_C(t) = \operatorname{Re}(Z_C I_2 e^{j\omega t}).$$

Luego, las (5.51) toman aquí la forma:

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= \xi(t) - V_G(t) \\ \pm M \frac{di_1}{dt} + R_2 I_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + V_C(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

En lo que sigue supondremos que los arrollamientos son del mismo sentido. Para el caso contrario debemos cambiar el signo de M en las expresiones donde ésta aparece.

Las amplitudes complejas en (5.55) verifican:

$$\left. \begin{aligned} (R_1 + j\omega L_1 + Z_G) I_1 + j\omega M I_2 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 = E \\ j\omega M I_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_C) I_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Este sistema algebraico se resuelve en forma inmediata:

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{D} E; \quad I_2 = -\frac{Z_{12}}{D} E \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \text{siendo } D &= Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 = (R_{11} + jX_{11})(R_{22} + jX_{22}) - (j\omega M)^2 = \\ &= (R_{11} R_{22} - X_{11} X_{22} + \omega^2 M^2) + j(R_{11} X_{22} + R_{22} X_{11}) \end{aligned}$$

con $R_{11} = R_1 + R_G$; $X_{11} = \omega L_1 + X_G$; $R_{22} = R_2 + R_C$; $X_{22} = \omega L_2 + X_C$.

Entonces, el cociente de las corrientes vale, en general:

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{Z_{22}}{Z_{12}} \quad (5.58)$$

Definiendo como en (2.57) la impedancia efectiva vista desde la fuente, ésta puede calcularse empleando la expresión (5.57):

$$\bar{Z}_1 = \frac{E}{I_1} = \frac{D}{Z_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \quad (5.59)$$

donde Z_{11} es la impedancia propia del primario, y el segundo término

$$Z_r = -\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} \equiv R_r + jX_r \quad (5.60)$$

se debe a la presencia del secundario con carga finita y se denomina impedancia reflejada. El efecto del secundario visto desde la fuente es el mismo que produciría una impedancia Z_r conectada en serie con el primario.

Las componentes de la impedancia reflejada son

$$R_r = \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{|Z_{22}|^2}; \quad X_r = -\frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{|Z_{22}|^2}$$

con $|Z_{22}|^2 = (R_2 + R_C)^2 + (\omega L_2 + X_C)^2$. Vemos que el signo de la reactancia del secundario es opuesto al de la reactancia reflejada.

Las amplitudes E_1 y E_2 indicadas en la fig. 23 representan las tensiones de entrada y de salida del transformador. En general, valen

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E - Z_G I_1 = E - \frac{Z_G Z_{22}}{D} E = \left\{ \frac{(R_1 + j\omega L_1) Z_{22} - Z_{12}^2}{D} \right\} E \\ E_2 &= Z_C I_2 = -\frac{Z_C Z_{12}}{D} E \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Luego,

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_{12}^2 - (R_1 + j\omega L_1) Z_{22}}{Z_C Z_{12}} \quad (5.62)$$

En general, aun sin considerar las pérdidas ni los efectos capacitivos, los parámetros de un transformador real varían con la frecuencia de la f.e.m., y las expresiones que resultan al tener en cuenta estas variaciones pueden ser muy complicadas. El estudio de los distintos casos es una rama importante de la teoría de circuitos, donde las distintas formas de acoplamiento varían esencialmente según los valores del coeficiente $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$.

TRANSFORMADOR IDEAL

Para en núcleo "de aire" (sin material ferromagnético dentro de las bobinas) el coeficiente k es muy pequeño y el acoplamiento varía mucho con la frecuencia ω del generador. Esto no sucede con núcleos "de hierro" (materiales ferromagnéticos), donde $k \approx 1$. A continuación estudiaremos un modelo elemental que aproxima bastante bien el comportamiento de este tipo de transformador, que es el más utilizado en la práctica.

Decimos que un transformador es ideal cuando cumple las siguientes condiciones:

- $k = 1$ (acoplamiento perfecto).
- Las reactancias de sus bobinas son mucho más grandes que la carga:
 $\omega L_1, \omega L_2 \gg |Z_c|$.
- Las otras impedancias del circuito son mucho menores que la carga:
 $R_1, R_2, |Z_g| \ll |Z_c|$.

En tales condiciones valen las aproximaciones:

$$Z_{11} \approx j\omega L_1; \quad Z_{22} \approx j\omega L_2.$$

Si las bobinas del primario y del secundario tienen N_1 y N_2 vueltas, respectivamente, las inductancias valen

$$L_i = \frac{\mu A}{l} N_i^2 \quad (i=1, 2) \quad \text{y} \quad M = \frac{\mu A}{l} N_1 N_2$$

donde μ es la permeabilidad del núcleo del transformador y la condición (a) implica que la relación A/l = sección/longitud de las bobinas es la misma.

$$\text{Luego, } \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad \text{y} \quad \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = n^2. \quad (5.63)$$

Si cociente $N_1/N_2 = n$ se denomina razón o relación de transformación.

Para un transformador ideal las aproximaciones en las impedancias nos permiten expresar la relación general (5.58) entre las corrientes como

$$\frac{I_1}{I_2} = - \frac{Z_{22}}{Z_{12}} \approx - \frac{j\omega L_2}{\pm j\omega M} = \mp \frac{L_2}{M} = \mp \frac{1}{n} \quad (5.64)$$

donde el signo inferior corresponde a arrollamientos opuestos, en cuyo caso las corrientes i_1 e i_2 están en fase. Para arrollamientos iguales el desfase entre ellas es de $\pi = 180^\circ$ ($-1 = e^{j\pi}$).

La relación (5.62) entre las tensiones se convierte en:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{-\omega^2 M^2 - (R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + Z_c)}{\pm j\omega M Z_c} \approx \frac{-\omega^2 M^2 - j\omega L_1(j\omega L_2 + Z_c)}{\pm j\omega M Z_c}$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} \approx \frac{-j\omega L_1 Z_c}{\pm j\omega M Z_c} = \mp \frac{L_1}{M} = \mp n \quad (5.65)$$

con la misma convención de (5.64) para los signos e igual relación entre las fases de las tensiones de entrada y de salida. Cuando $n < 1$ (o sea que la tensión de salida es mayor que la de entrada) se dice que el transformador es de subida o elevador; en caso contrario se llama de bajada ($n > 1$).

Los valores instantáneos de las tensiones y las corrientes tienen las mismas relaciones que las amplitudes:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\operatorname{Re}(I_1 e^{j\omega t})}{\operatorname{Re}(I_2 e^{j\omega t})} = \mp \frac{1}{n}; \quad \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{\operatorname{Re}(E_1 e^{j\omega t})}{\operatorname{Re}(E_2 e^{j\omega t})} = \mp n,$$

de modo que los productos $i_1 \mathcal{E}_1$ e $i_2 \mathcal{E}_2$, que representan las potencias de entrada y de salida, son iguales:

$$P_1(t) = i_1 \mathcal{E}_1 = i_2 \mathcal{E}_2 = P_2(t) \quad (5.66)$$

Este importante relación expresa la conservación de la energía, implícito en las hipótesis (a-c), que expresan que no hay pérdida de flujo magnético (n) ni disipación resistiva (R_i despreciables).

Uno de los efectos más útiles del dispositivo es la transformación de impedancias. Vista desde la entrada del transformador, la impedancia de la carga vale, según (5.57) y (5.61):

$$Z'_c = \frac{E_1}{I_1} = \frac{(R_1 + j\omega L_1) Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{22}} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2 + Z_c) - (j\omega M)^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_c}$$

$$\Rightarrow Z'_c \approx \frac{(j\omega L_1)(j\omega L_2) + j\omega L_1 Z_c - (j\omega M)^2}{j\omega L_2} = \frac{L_1}{L_2} Z_c$$

$$\Rightarrow \frac{Z'_c}{Z_c} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = n^2 \quad (5.67)$$

Notemos que la reactancia de entrada tiene el mismo signo que la de la carga Z_c , ya que $n^2 > 0$.

Cuando en un circuito se desea maximizar la transferencia de potencia de un generador a una carga (cuyas impedancias son distintas), se puede introducir un transformador con una relación n adecuada, de modo que el circuito equivalente visto desde la fuente es el de la fig. 24. La condición de máxima transferencia de potencia (5.39) se cumple si elegimos n tal que

$$Z'_c = n^2 Z_c = Z_g^*$$

En general, es difícil que se logre ajustar los valores de las impedancias a esta condición. Suponiendo que la impedancia del generador tiene un valor fijo, se tratará de ajustar la impedancia de la carga. Si, como sucede aproximadamente en las bobinas, se puede variar Z_c de manera que se conserve una relación constante entre Z_c y R_c (o sea $Z_c/R_c = \text{const.}$), es fácil demostrar que la potencia P_c transferida a la carga, dada por (5.38), es máxima para

$$|Z'_c| = |Z_g| \quad (5.68)$$

Para que se verifique esta condición, el transformador de ajuste deberá tener una relación $n = \sqrt{|Z_g|/|Z_c|}$.

TRANSFORMADORES REALES

Uno de los transformadores más comúnmente utilizados es el llamado autotransformador que se esquematiza en la fig. 25.

El primario es la bobina entera AB y el secundario es el tramo CB de la bobina. Si las longitudes $|AB|$ y $|CB|$ son tales que

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{|AB|}{|CB|} = n > 1 \quad \text{resulta} \quad \frac{E_2}{E_1} \approx n^{-1} < 1.$$

El contacto C puede desplazarse, variando así la relación n , lo cual puede realizarse automáticamente de modo de mantener $E_2 = \text{const.}$, en cuyo caso el dispositivo funciona como un estabilizador de tensión. Los dispositivos controlables con E_2 variable suelen denominarse "Variac" (es una marca comercial). Obviamente, el autotransformador no permite aislar el primario del secundario con respecto a tensiones continuas.

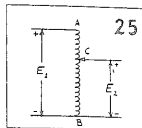
Los transformadores reales más comúnmente empleados, de núcleo de hierro, permiten alcanzar rendimientos P_2/P_1 muy altos, de más del 90%. Las pérdidas de potencia inevitables se deben a:

a) Corrientes de Foucault: Estas corrientes aparecen en todo conductor donde el flujo magnético ϕ varía en el tiempo. El campo eléctrico inducido hace girar a los electrones libres en órbitas planas cerradas, normales a la dirección del campo magnético en el núcleo. Estas órbitas son del tipo descrito en la fig. 32 del Cap. III. Para evitar estas corrientes es necesario emplear materiales de la mayor resistividad, cortando el núcleo en láminas aisladas entre sí mediante un barniz especial que evita el paso de los electrones. El espesor de las láminas se elige menor que el radio de giro de los electrones, calculado para un valor típico del campo magnético.

b) Efectos de histéresis: Como vimos en el Cap. III (fig. 38) un campo magnético que varía en el tiempo hace que el hierro recorra en cada período $T = 2\pi/\omega$ de la corriente un ciclo de histéresis completo, con una disipación de energía por ciclo y por unidad de volumen del hierro igual al área encerrada por la curva de histéresis. Para reducir esta pérdida es necesario emplear aleaciones ferromagnéticas de ciclo estrecho, como los aceros al silicio.

c) Pérdidas en las bobinas: Las bobinas conductoras tienen una resistencia inevitable. Esta debe disminuirse aumentando la sección del cable de las bobinas, pero ello implica aumentar el peso del sistema o disminuir el número de vueltas disponibles.

d) Pérdidas de flujo magnético: Estas pueden reducirse mediante un bobinado denso que rodee totalmente al núcleo.



INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	1
<u>ANALISIS VECTORIAL</u>	3
Campos vectoriales	7
Operadores vectoriales	8
Gradiente	11
Divergencia	13
Rotor	15
Laplaciano	16
Identidades útiles	17
Fórmulas integrales	21
Definiciones intrínsecas	23
Angulo sólido	26
Campos irrotacionales y solenoidales	27
Coordenadas curvilíneas	30
APENDICE: IDENTIDADES VECTORIALES	30
Capítulo I: <u>ELECTROSTATICA</u>	31
Introducción	32
Cuerpos cargados	35
Ley de Coulomb	38
Sistemas de unidades	40
Campo eléctrico	42
Teorema de Gauss: expresión integral	45
Forma local del teorema de Gauss	46
Fuerzas sobre cuerpos cargados	47
Potencial electrostático	49
Campos conservativos. Condición electrostática	52
Diferencia de potencial	54
Momentos de una distribución finita de cargas	58
Dipolo eléctrico	59
Fuerzas y momentos sobre un dipolo en un campo exterior	61
Energía potencial de un dipolo	62
Ecuaciones de Poisson y de Laplace	64
Líneas de campo y superficies equipotenciales	66
Teorema de Earnshaw	66

Indice	Pág.
Energía de un sistema de cargas	67
Densidad de energía electrostática	70
Conductores ideales	72
Campo eléctrico en conductores en equilibrio	73
Tensión electrostática	76
Método de imágenes	77
Conductores extensos: relación entre potenciales y cargas	80
Simetría de los coeficientes de inducción	82
Coefficientes de capacidad y de inducción	84
Condensador	86
Energía y fuerzas en un condensador: voltímetros electros- táticos	87
Conexiones simples de condensadores	91
Dielectricos	93
Rigidez dieléctrica	95
Distribución continua de dipolos puntuales	96
Teorema de Gauss: el desplazamiento eléctrico	98
Dielectricos isotropos y anisotropos: susceptibilidad eléc- trica	99
Energía electrostática en dieléctricos	101
Condensador con dieléctrico	103
Condiciones de contorno en la superficie que separa dos dieléctricos	104
Campo interior en un dieléctrico	105
Polarizabilidad molecular: relación de Clausius-Mossetti ..	107
Electretes y ferroeléctricos	109
Piezoelectricidad y piroelectricidad	110
Capítulo II: <u>CORRIENTE ELECTRICA</u>	111
Corriente y densidad de corriente	111
Conservación de la carga: ecuación de continuidad	114
Fuerza electromotriz	116
Potencia: ley de Joule	118
Ley de Ohm: modelo elemental	120
Valores de la resistividad	124
Tabla de resistividades y de coeficientes térmicos para conductores y dieléctricos típicos	126
Variación térmica de la resistividad	127

Índice	Pág.
Fuentes de tensión continua	129
Potencia: condición de máxima transferencia	131
Leyes de Kirchhoff	132
Fuentes de corriente	134
Conexiones simples de resistencias	136
Resolución de circuitos: método general	138
Conexiones simples entre fuentes	140
Método de las mallas	142
Método de los nudos	145
Teoremas de superposición y de reciprocidad	148
Teoremas de Thévenin y de Norton	149
Capítulo III: <u>MAGNETISMO</u>	
A) <u>MAGNETOSTÁTICA</u>	
Introducción	153
Fuerzas sobre cargas en movimiento: definición del campo magnético	154
Principio de superposición e invariancia de la fuerza de Lorentz	155
Ley de Ampère	157
Definición del amperio. Unidades internacionales y gaussianas	159
Campo magnético de una espira: superficie orientada y momento magnético	162
Fuerzas y momentos sobre una espira en un campo magnético exterior	164
Teorema de Gauss: conservación del flujo y potencial vectorial	165
Energía de una espira conductora en un campo magnético exterior	169
Teorema circuital de Ampère	171
Inducción magnética: inductancia, teorema de Neumann	174
Acoplamiento magnético	175
Momento magnético de una espira puntual: potencial vectorial	177
Distribuciones discretas y continuas de corrientes: densidades, potenciales y campos	179
Distribución continua de momentos magnéticos puntuales: densidades equivalentes de corriente	181
Fuerza magnetomotriz e intensidad magnética H	184

Índice	Pág.
Potencial escalar magnético	185
Medios magnéticos: susceptibilidad magnética	186
Momento magnético orbital y espín	189
Diamagnetismo: modelo semiclásico	191
Paramagnetismo	194
Ferromagnetismo	196
Condiciones de contorno en la superficie que separa dos medios. Blindaje magnético	198
Circuitos magnéticos. Electroimanes	200
Imanes permanentes	203
Ferrimagnetismo: ferritas	206
B) <u>CORRIENTES VARIABLES</u>	
Introducción	207
Inducción electromotriz: ley de Faraday	208
Ejemplos	210
Efecto Hall	215
Histerésis	217
Energía magnética	218
Densidad de energía en medios magnéticos	221
Movimiento de cuerpos para- y diamagnéticos en un campo no uniforme	223
Corriente de desplazamiento	224
Descarga de un condensador	227
Ecuaciones de Maxwell	229
Propagación de ondas electromagnéticas en el vacío	231
Capítulo IV: <u>TRANSISTORES</u>	
A) <u>ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS A COEFICIENTES CONSTANTES</u>	
Definición y existencia de soluciones	234
Soluciones particulares y condiciones iniciales	235
Propiedades generales de las soluciones	238
Método operacional. Propiedades de la exponencial	239
Ecuación lineal homogénea. Raíces simples del polinomio característico	241
Caso de raíces múltiples	242
Ecuación lineal inhomogénea	245
Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Método de eliminación	248

Índice	Pág.
B) <u>ANÁLISIS DE TRANSITORIOS EN CIRCUITOS SIMPLES</u>	251
Circuito RC serie	253
Circuito RL serie	257
Circuito LC serie	259
Amplitudes y fases	261
Circuito RLC serie	263
Capítulo V: <u>CORRIENTE ALTERNA</u>	
Introducción	268
Amplitudes complejas	269
Resonancia esencial	271
Tensiones, corrientes e impedancias: Ley de Ohm	273
Teoremas generales de circuitos	277
Diagramas vectoriales	279
Valor eficaz de una cantidad periódica	281
Corriente trifásica	283
Potencia disipada en un circuito de corriente alterna	283
Medición de la potencia: watímetro	286
Potencia: condición de máxima transferencia	287
Resonancia de un circuito RLC serie	289
Resonancia de un circuito RLC paralelo	292
Transferencia en circuitos de cuatro terminales: filtros ...	293
Transitorio de dos circuitos magnéticamente acoplados	296
Transformadores	299
Transformador ideal	302
Transformadores reales	304

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de octubre de 1984
en los Talleres Gráficos LITODAR
Viel 1444 - Capital Federal