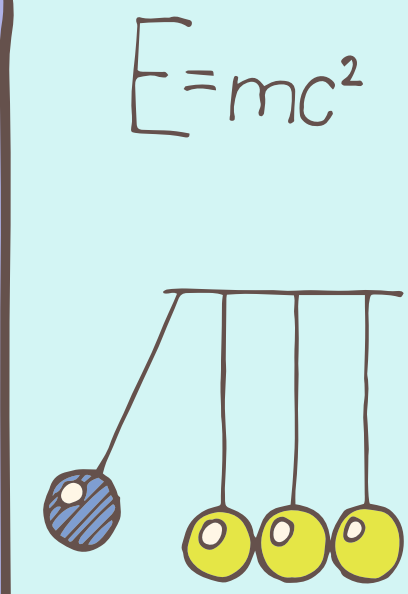
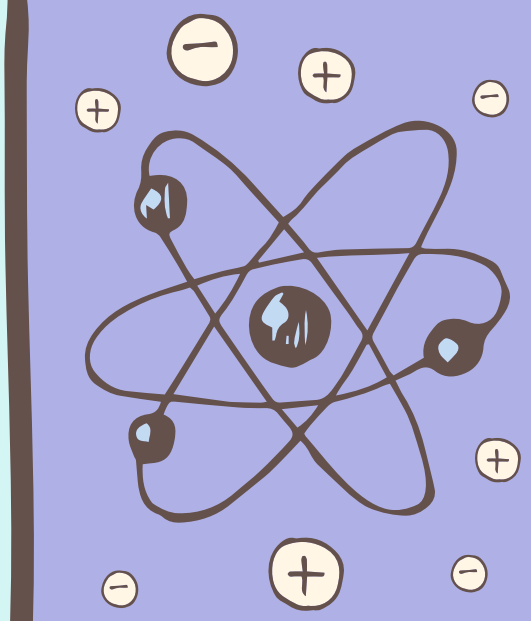
SUPERGUIA Enem

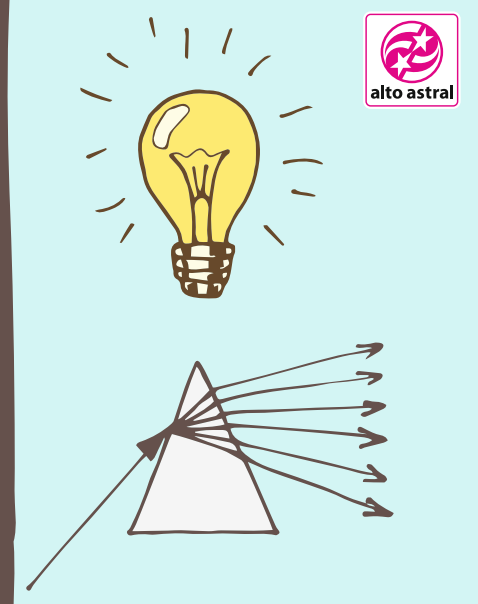
ATUALIZADO ATÉ O ENEM 2019

Conteúdo produzido por PROFESSORES experientes na área





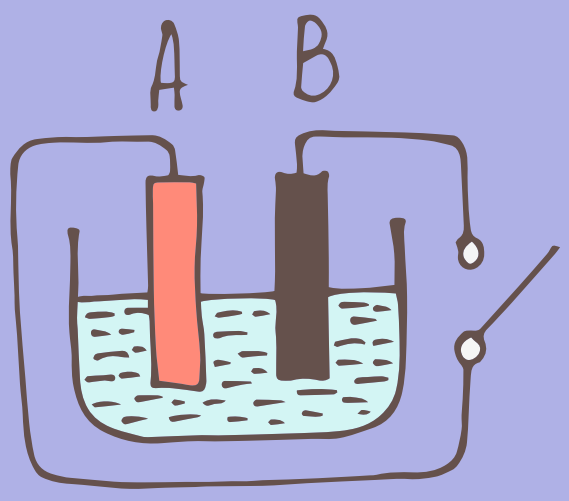


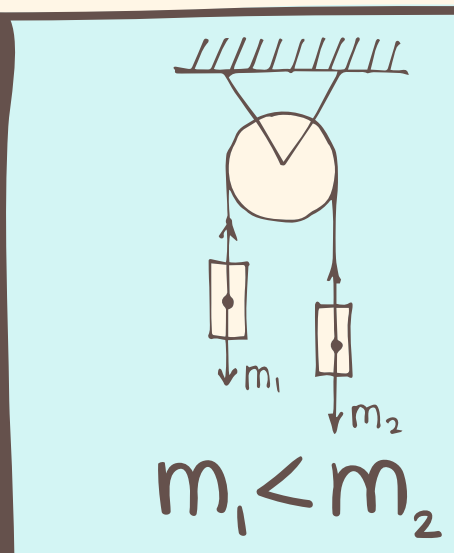


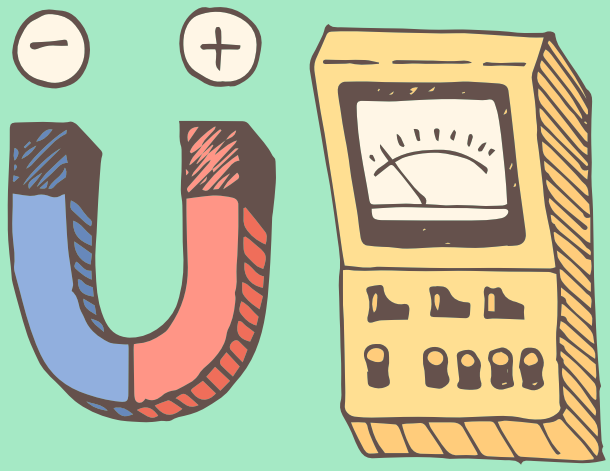
MATEMÁTICA E FÍSICA











LEMBRE-SE
AS FÓRMULAS E TEORIAS ESSENCIAIS PARA MANDAR BEM NA PROVA

APRENDA FÁCIL
EXPLICAÇÕES COM EXEMPLOS PARA VOCÊ ENTENDER

FIQUE ATENTO
REGRA DE TRÊS, PORCENTAGEM E OUTROS TEMAS QUE MAIS CAEM

SUPERGUIA

Enem

SUPERGUIA Enem

Superguia Enem Matemática e Física - Edição 3 - 2018 – ISBN 978-85-8246-811-1

Editora-Chefe Viviane Campos **Editor** Ricardo Piccinato **Redação** Giovane Rocha
Design Josemara Nascimento **Imagens de capa** Getty Images **Imagens do conteúdo F**ull Case **Impressão** MAR MAR Gráfica **Distribuição** DINAP

Fica proibida a reprodução parcial ou total de qualquer texto ou imagem deste produto sem autorização prévia dos responsáveis pela publicação.

ESTA É UMA PUBLICAÇÃO DA

alto astral editora

©2018 EDITORA ALTO ASTRAL LTDA. TODOS OS DIREITOS RESERVADOS

PRESIDENTE João Carlos de Almeida
DIRETOR EXECUTIVO Pedro José Chiquito
DIRETOR COMERCIAL Silvino Brasolotto Junior
DIRETOR DE REDAÇÃO Sandro Paveloski

EDITORIAL **Gerente** Mara De Santi

PUBLICIDADE **Gerente** Samantha Pestana **Equipe Comercial** Ana Paula Maia, José Santos e Marcio Costa
Mercado Regional (DF) ARMAZÉM DE COMUNICAÇÃO (61) 3321- 3440, (RJ) PLUS REPRESENTAÇÃO (21) 2240- 9273
Brand Lab Vanessa Neves **Opec / Programático** Walessa Gimenes e Thiago Zanqueta.
Fone (11) 3048-2900 / **E-mail** publicidade@astral.com.br

MARKETING **Gerente** Flaviana Castro **E-mail** marketing@astral.com.br

SERVIÇOS GRÁFICOS **Gerente** José Antonio Rodrigues

ADMINISTRATIVO/FINANCEIRO **Gerente** Jason Pereira

ENDEREÇOS **BAURU** Rua Gustavo Maciel, 19-26, CEP 17012-110, Bauru, SP. Caixa Postal 471, CEP 17015-970, Bauru, SP.
Fone (14) 3235-3878, Fax (14) 3235-3879 **SÃO PAULO** Rua Tenerife, Nº 31, Conj. 21 e 22, Bloco A, CEP 04548-904,
Vila Olímpia, São Paulo, SP, Fone/Fax (11) 3048-2900

ATENDIMENTO AO LEITOR ✆ **(14) 3235-3885** De segunda a sexta, das 8h às 18h **E-mail** atendimento@astral.com.br
Caixa Postal 471, CEP 17015-970, Bauru, SP

LOJA www.loja.editoraastral.com.br
E-mail lojaonline@astral.com.br

Conteúdo produzido por

FULL CASE
Produtos Editoriais

Edição de Conteúdo: Mara Magaña
Coordenação Editorial: Juliana Klein
Supervisão Geral: Angel Fragallo
Revisão: Adriana Giusti
Ilustrações: Bruno Castro

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

S956

Superguia ENEM : matemática e física / [Ricardo Piccinato]. - [3. ed.] - São Paulo : Alto Astral, 2018.
84 p. : il. ; 27 cm.

ISBN 978-85-8246-811-1

1. Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil). 2. Ensino médio - Avaliação - Brasil. 3. Exames - Manuais, guias, etc. I. Piccinato, Ricardo.

18-51230 CDD: 373.0981
CDU: 373.5(81)

Vanessa Mafra Xavier Salgado - Bibliotecária - CRB-7/6644

17/07/2018 24/07/2018

APRESENTAÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio, conhecido popularmente como Enem, foi criado no ano de 1998 a fim de avaliar habilidades básicas dos estudantes brasileiros. E, com o passar do tempo, a prova acabou se tornando um dos principais meios de se ingressar em uma universidade e, assim, conquistar o diploma do Ensino Superior. Para isso, os alunos que prestam a avaliação podem, caso atinjam uma determinada nota, optar por entrar em uma instituição pública que aceite os resultados do Enem no processo seletivo ou, ainda, uma faculdade particular pelo Programa Universidade Para Todos, o ProUni. Conforme informa o edital: "Os resultados do Enem 2018 poderão ser utilizados como mecanismo único, alternativo ou complementar de acesso à educação superior, desde que exista adesão por parte das Instituições de Educação Superior (IES). A adesão não supre a faculdade legal concedida a órgãos públicos e a instituições de ensino de estabelecer regras próprias de processo seletivo para ingresso na educação superior".

Para se ter uma ideia da importância dessa alternativa para alcançar uma vaga na universidade, 7.603.290 de pessoas se inscreveram no Enem de 2017, superando a estimativa do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) de 7,5 milhões de inscritos. Deste número, 59,3% já concluíram o Ensino Médio, 31,9% completariam o nível escolar em 2017 e 7,8% finalizariam posteriormente. Na edição de 2018, segundo dados do Inep, mais de 5,5 milhões de estudantes tiveram suas inscrições confirmadas para realizar a prova nos dias quatro e 11 de novembro.

Com a reformulação da prova feita em 2009, cresceu o número de faculdades que passaram a aceitar o exame como meio de ingresso em seus cursos. Por isso, quem prestou o Enem 2017, concorreu a 239.601 vagas referentes à 130 instituições públicas de Ensino Superior, tanto federais quanto estaduais, para o primeiro semestre de 2018. Lembrando que a relação de quantidade de vagas e instituições disponíveis é realizada pelo Sistema de Seleção Unificada (Sisu), podendo ser acessada em *sisu.mec.gov.br*.

Nesta coleção **SUPERGUIA ENEM**, preparamos o conteúdo necessário para o aluno que deseja garantir uma das 239.601 vagas disponíveis, buscando reforçar tudo aquilo que aprendeu em sala de aula ou estudando em casa. Nas próximas páginas, você poderá conferir uma seleção das principais teorias explicadas e exercícios comentados por professores especialistas. Ao todo, são seis apostilas que abrangem os temas trabalhados no Enem: Ciências Humanas e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

Em cada edição você encontrará dicas especiais e teorias bem explicadas que vão abrir caminho para seu ingresso no Ensino Superior, garantindo uma posição de destaque no mundo profissional. Bons estudos!

Números do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP, vinculado ao Ministério da Educação – MEC.

DICAS PARA REVISÃO

1. Organize sua rotina de estudos e, se necessário, faça um cronograma para não deixar passar nenhum conteúdo e conseguir dar conta das atividades cotidianas.

2. Livre-se de distrações na hora dos estudos. Celular, redes sociais, televisão ou rádio podem ser empecilhos para a concentração e o foco.

3. Faça simulados ou provas de anos anteriores. Dessa forma, você ficará habituado com o estilo da avaliação e não terá surpresas na hora.

4. Treine seu tempo, pois a prova é longa e o período para sua realização é curto. Em 2018, no primeiro domingo de exame, os candidatos terão cinco horas e meia para a realização das 90 questões de linguagens e ciências humanas, além da redação. No segundo, serão 30 minutos a mais do que em 2017: cinco horas para as 90 perguntas de matemática e ciências da natureza.

5. Foque no seu objetivo. Tenha consciência da nota necessária para ingressar na universidade e curso desejados, assim poderá se esforçar visando sua meta.

6. Leia os enunciados com atenção. Interpretar aquilo o que se pede na pergunta é essencial para escolher a resposta certa.

7. Responda primeiro às perguntas mais fáceis, aquelas que você sabe a opção correta.

8. Leia. O hábito da leitura constrói um vocabulário melhor, auxilia a interpretação de texto e desenvolve o raciocínio crítico.

9. Mantenha-se informado. Notícias atuais são temas de redação em potencial.

10. Descanse e durma bem. A mente precisa de um tempo para que os conteúdos sejam assimilados.

MATEMÁTICA

LEANDRO DOS SANTOS DA COSTA

Formado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), é professor de Matemática e Física de diversos cursos vestibulares de São Paulo.

SUMÁRIO

1. Conjuntos 8
2. Noções básicas de Matemática 9
3. Equação do 1º grau 13
4. Regra de três 14
5. Conjuntos numéricos 15
6. Potenciação 16
7. Radiciação 17
8. Produtos notáveis 17
9. Geometria plana 18
10. Volumes 22
11. Análise combinatória 23
12. Probabilidade 24
13. Noções de estatística 24
14. Funções 25
15. Logaritmos 27
16. Progressões 28
17. Juros 28
18. Trigonometria 29
Bibliografia 30
Exercícios comentados 31

1. CONJUNTOS

Assumimos que conjunto é uma coleção de elementos, por exemplo:

1) Conjunto de vogais;
2) Conjunto de números pares;
3) Conjunto de frutos nacionais.

Indicamos um conjunto com letras maiúsculas do nosso alfabeto e escrevemos seus elementos entre chaves. Por exemplo, se A é o conjunto de vogais: A = {a, e, i, o, u}.

Para indicar que um elemento pertence a um conjunto, escrevemos a $\in$ A (lê-se a pertence a A), caso o elemento não pertença ao conjunto, escrevemos w $\in$ A (lê-se w não pertence a A).

Exemplo:

Seja A o conjunto de vogais e B o conjunto de números pares.

(I) $1 \notin B$ (II) $1 \notin A$ (III) $c \notin A$ (IV) $c \notin B$

Podemos representar o conjunto B dos números pares do seguinte modo:

1º) B = {0, 2, 4, 6...};

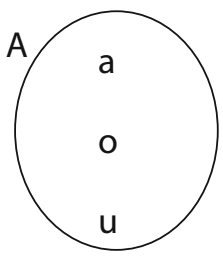
2º) B = {x | x é par}. Lê-se B é igual ao conjunto dos elementos x tal que x é par.

Podemos representar o conjunto A das vogais da seguinte forma:

1º) A = {a, e, i, o, u};

2º) A = {x | x é vogal} (X é uma variável e não a consoante X);

3º) Diagrama de Venn



1.1 Conjuntos iguais

Dizemos que um conjunto A é igual ao conjunto B e escrevemos A=B quando todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.

Exemplos:

1) A = {1, 2, 3} , B = {1, 1, 1, 2, 2, 3, 3}

   A = B, pois todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.

2) A = {1, 2}, B = {1}

   A ≠ B (A é diferente de B) 2 $\in$ A, mas 2 $\in$ B

1.2 Conjunto Vazio e conjunto unitário

Chamamos A de conjunto vazio se não tem elementos e escrevemos A = { } ou A = O.

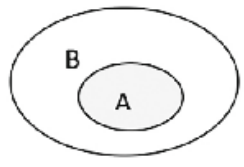
Chamamos A de conjunto unitário quando possui apenas um elemento.

Exemplos:

1) A = {1, 1} é um conjunto unitário, seu único elemento é 1, e mais, A = { 1, 1 } = { 1 };
2) Cuidado, A = { Ø } é um conjunto unitário, cujo único elemento é o vazio.

1.3 Subconjuntos

Dizemos que um conjunto A é subconjunto de B quando todo elemento de A é elemento de B por meio do diagrama de Venn:



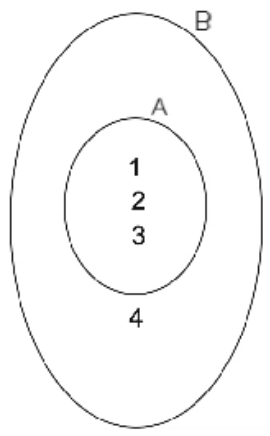
Escrevemos A $\subset$ B (lê-se A está contido em B).

Cuidado! Não escrevemos A $\in$ B, o símbolo $\in$ será usado para relacionar elemento a conjunto.

Exemplo:

A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4, 5}

A $\subset$ B, pois todo elemento de A é também elemento de B



Podemos escrever também B $\supset$ A, lê-se B contém A. Repare ainda que B $\not\subset$ A (lê-se B não está contido em A), pois 4 $\in$ B, mas $4 \notin$ A.

Obs: $\varnothing \subset$ A, sendo A qualquer conjunto.

1.4 União de conjuntos

Se temos dois conjuntos A e B, chamamos de união de A e B

e escrevemos A U B o conjunto de todos elementos de A e B.

Exemplo:

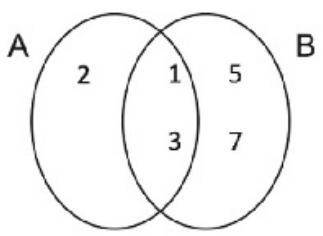
A = {1, 2, 3} e B = {1, 3, 5, 7} então A U B = {1, 2, 3, 5, 7}

1.5 Interseção de conjunto

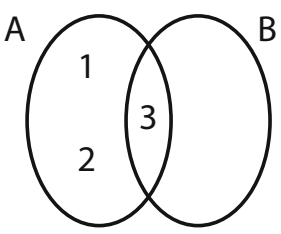
Se temos dois conjuntos A e B, chamamos de interseção de A e B e escrevemos AnB o conjunto de elementos que pertencem a A e B.

Exemplos:

1) A = {1, 2, 3} e B = {1, 3, 5, 7}, então:



2) A = {1, 2} e B = {3, 4}, então AnB = Ø



1.6 Diferença de conjunto

Se temos dois conjuntos A e B, chamamos de diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertence a B. Escrevemos A – B.

Exemplo:

A = {a, b, c}; B = {a, e, c, g}

A – B = {b}

1.7 Conjunto de partes

Se temos um conjunto A, chamamos de partes de A e escrevemos P (A) o conjunto cujos elementos são subconjuntos de A.

Obs: os elementos do conjunto P (A) são conjuntos.

Exemplo:

A = {1, 2, 3}, lembre-se que vazio é subconjunto de qualquer conjunto e claro que A é subconjunto de A.

P (A) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, A}

Obs: se A tem n elementos, então P(A) tem 2^n elementos.

2. NOÇÕES BÁSICAS DE MATEMÁTICA

2.1 Soma, subtração, multiplicação e divisão

Relembremos as operações básicas com exemplos:

- Soma: 1) 130 + 132 = 262; 2) 199 + 299 = 498; 3) 123,22 + 13,2 = 136,42; 4) 0,321 + 10,2 = 10,521

Para memorizar: "Vírgula embaixo de vírgula"

- Subtração:

1) 999 - 111 = 888; 2) 432 - 249 = 183; 3) 12,3 - 9,8 = 02,5; 4) 100 – 200 = - 100

- Multiplicação:

1) 110 x 2 = 220; 2) 33 x 11 = 33 + 363 = 363; 3) 2 x (-3) = - 6; (-3) x (-3) = 9

- Divisão inteira:

1) 13 | 2 → 1 | 6

dividendo | divisor → resto | quociente → a | b → r | q

Ao fazer uma divisão inteira, queremos que o dividendo, divisor, resto e quociente sejam números inteiros (sem vírgula).

Repare que 13 = 2 x 6 + 1, em geral a = b x q + r.

- Divisão exata:

13 | 2 → 6,5; 3 | 2 → 1,5; 1 | 3 → 0,333...

Na divisão exata, não queremos deixar resto.

Obs: ambas divisões são importantes, dependendo da situação.

Exemplos:

1) Tenho 13 carros para dividir entre 2 filhos. Nesse caso, usamos a divisão inteira, já que não tem sentido real 6,5 carros;
2) Tenho 13 litros de água para dividir entre duas pessoas. Aqui faz sentido utilizarmos a divisão exata de 6,5 litros.

Para regra de sinais:

1) (-10) x 10 = -100
2) 10 x 10 = 100
3) 10 + (-10) = 0
4) 3 : (-1) = - 3

(ENEM 2015)

O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm. Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa. Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

Solução:

É necessário tomar cuidado com a quantidade de zeros após a vírgula. Ordenando em ordem crescente, temos 68; 68,001; 68,012; 68,02; 68,102; 68,21; portanto o dono da oficina deverá comprar o pistão com diâmetro de 68,001mm. (Alternativa E).

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos
<acesso em 03.05.2018>

2.2 Expressões numéricas

Expressões numéricas são uma sequência de operações que devem ser efetuadas seguindo um critério que vamos estabelecer:

1) Potenciação e radiciação;
2) Multiplicação e divisão;
3) Soma e subtração.

Usamos ainda nas expressões:
• parênteses ( );

• colchete [ ];

• chaves { }.

Exemplos:

Efetue:

1) 2 + 2 x 2 = 2 + 4 = 6
2) 2 + 2 x 2 / 2 + 4 = 2 + 4 / 2 + 4 = 2 + 2 + 4 = 8
3) 2 + [2 x (3 x 5 + 3) / 2] + 3
   2 + [2 x (15 +3) / 2] + 3
   2 + [2 x 18 / 2] + 3
   2 + [36 / 2] + 3
   2 + 18 + 3
   23

2.3 Múltiplos e divisores

Seja a um número inteiro, chamamos de múltiplos de a o produto (multiplicação) de a por inteiros positivos, isto é:

a, 2 x a, 3 x a, 4 x a...

Dizemos que um número n inteiro é divisor de b outro número inteiro, quando a divisão inteira de b por n tem resto zero.

Exemplos:

1) Múltiplos de 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12...;
2) Múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12...;
3) Divisores de 2: 2 e 1;
4) Divisores de 3: 3 e 1;
5) Divisores de 12: 2, 3, 4, 6, 12.

2.4 Números primos

Dizemos que um número inteiro positivo é primo quando possui apenas dois divisores inteiros positivos distintos.

Os números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...

Obs: existem infinitos números primos.

2.5 MMC (mínimo múltiplo comum)

Dados dois números inteiros positivos n e p, o menor múltiplo que é comum a n e p, chamamos de MMC (n, p).

Exemplos:

1) MMC (2, 3) = 6 pois
   2: 2, 4, **6**, 8, 10...
   3: 3, **6**, 9, 12...

2) MMC (10, 12) = 60
   10: 10, 20, 30, 40, 50, **60**, 70, 80...
   12: 12, 24, 36, 48, **60**, 72...

Para calcular o MMC (p, n), podemos usar um artifício:

Fatore n e p em números primos.

Exemplos:

(1) MMC (2, 3) = 6

2,3	2
1,3	3
1,1	

2 x 3 = 6

(2) MMC (10, 12) = 60

10, 12	2
5, 6	2
5, 3	3
5, 1	5
1,1	

2x2x3x5=60

3) MMC (15, 24) = 120

15, 24	2	
15, 12	2	
15, 6	2	2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 120
15, 3	3	
5, 1	5	
1, 1		

2.6 MDC (máximo divisor comum)

Dados dois inteiros positivos n e p, o maior divisor comum a n e p chamamos de MDC.

Exemplos:

1) MDC (8, 12) = 4
   8: 1, 2, **4**, 8
   12: 1, 2, 3, **4**, 6, 12

2) MDC (15, 17) = 1
   15: **1**, 3, 5, 15
   17: **1**, 17 (17 é primo)

Quando o MDC entre dois inteiros positivos é 1, dizemos que são primos entre si.

Para calcular o MDC (p, n), podemos usar um recurso:

Fatore n e p em número primo, verificando quais primos dividem p e n simultaneamente.

Exemplos:

MDC (8, 12) = 4

1)

8, 12	2	
4, 6	2	2 x 2: 4
2, 3	2	
1, 3	3	
1, 1		

2) MDC (15, 17) = 1

15, 17	3
5, 17	5
1, 17	17

Propriedade: se a e b são números inteiros positivos a x b = MMC (a, b) x MDC (a, b).

2.7 Frações

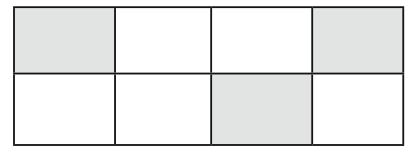
Representamos parte de um inteiro usando frações, desde que essas partes sejam iguais.

Exemplos:

1) A parte destacada da pizza representa 1/4 da pizza inteira.



2) Os pedaços destacados da barra representam 3/8 do chocolate.



Uma fração é uma representação do tipo a/b, onde a e b são números inteiros e b ≠ 0.

a -> numerador

b -> denominador

Interpretamos a/b como a : b.

Exemplos: 1) 0,5 = 1/2 2) 0,17 = 17/10 3) -8 = -16/2

2.8 Frações equivalentes

Repare que, multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador por um mesmo número inteiro, obtemos frações que representam um mesmo número decimal.

Exemplos:

1)

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{4} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{12} \xrightarrow{\times 10} = 0{,}5$$

2)

$$\frac{20}{30} \xrightarrow{/10} \frac{2}{3} = 0{,}6666$$

2.9 Soma e subtração de frações

Para somar e subtrair frações, precisamos igualar os denominadores.

Exemplos:

1) 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4;
2) 5/3 – 2/4 = 20/12 – 6/12 = 14/12.

2.10 Multiplicação e divisão de frações

Para multiplicar a/b por c/d, fazemos:

a/b . c/d = a.c / b.d

Para dividir a/b por c/d, fazemos:

a/b / c/d = a/b . d/c = a.d/b.c

Exemplos:

1) 3/2 x 4/9 = 12/18 = 2/3;
2) 3/2 / 4/9 = 3/2 x 9/4 = 27/8.

2.11 Cálculo com frações

Para calcular a/b de uma quantidade X, multiplicamos a/b . x, lembrando que podemos escrever a/b . x/1 = a.x/b.1.

1) 1/3 de 300: 1/3 . 300/1 = 300/3 = 100;

2) 2/8 de 400: 2/8 . 400/1 = 300/8 = 100;
3) 4/7 de 28,5: 4/7 . 28,5/1 = 114/7 = 16,2857 (aproximado).

2.12 Porcentagem

Chamamos de porcentagem frações com denominador 100 e representamos com %.

Exemplos:

1) 2/100 = 2% 2) 30/100 = 30%

Cálculo de porcentagem:

1) 35% de 100: 35/100. 100/1 = 3500/100 = 35
2) 28,5 de 250: 28,5/100. 250/1 = 7125/100 = 71,25

2.13 Acréscimo

Se um carro é vendido a um valor de X_0 reais e sofre um acréscimo de n%, então o novo valor será: X_0 + n% de X_0.

2.14 Decréscimo

Se um carro é vendido a um valor de X_0 reais e sofre um desconto de n%, então o novo valor será: X_0 – n% de X_0.

Exemplos:

Uma televisão que custa inicialmente R$800,00 passará a custar quanto se:

1) Sofrer acréscimo de 12%:

   800 + 12% de 800 = 800 + 800 .12/100 = 800 + 96 = 896

   A televisão custará R$896,00.

2) Sofre um desconto de 10%:

   800 – 10% de 800 = 800 – 800. 10/100 = 800 – 80 = 720

   A televisão custará R$720,00.

Obs: se vendemos um produto por um valor V e esse produto nos custou um valor C, definimos L= V- C. Se L for maior ou igual a zero 0, chamamos tal valor de lucro. E, caso L seja menor que 0, chamamos tal valor de prejuízo.

2.15 Razão e proporção

- Razão é o quociente (divisão) entre dois números.

Exemplo:

João tem 32 anos e Maria tem 18 anos, a razão da idade de João para a idade de Maria é 32/18 = 1,77... Já a razão da idade de Maria para de João é 18/32 = 0,5625.

- Proporção é a igualdade entre duas razões.

2 pedreiros constroem uma casa em 20 dias, 4 pedreiros constroem duas casas em 20 dias.

Repare que o número de pedreiros e a quantidade de casas construídas são proporcionais.

$$\frac{2 \text{ pedreiros}}{4 \text{ pedreiros}} = \frac{1 \text{ casa}}{4 \text{ casas}}$$, repare que 2/4 = ½.

São frações equivalentes. Dizemos que essas são grandezas diretamente proporcionais.

Ou seja: 2 pedreiros constroem uma casa em 20 dias, 4 pedreiros constroem a mesma casa em 10 dias.

$$\frac{2 \text{ pedreiro}}{4 \text{ pedreiro}} \times \frac{10 \text{ dias}}{20 \text{ dias}}$$, repare 2/4 = 10/20.

Dizemos que são grandezas inversamente proporcionais.

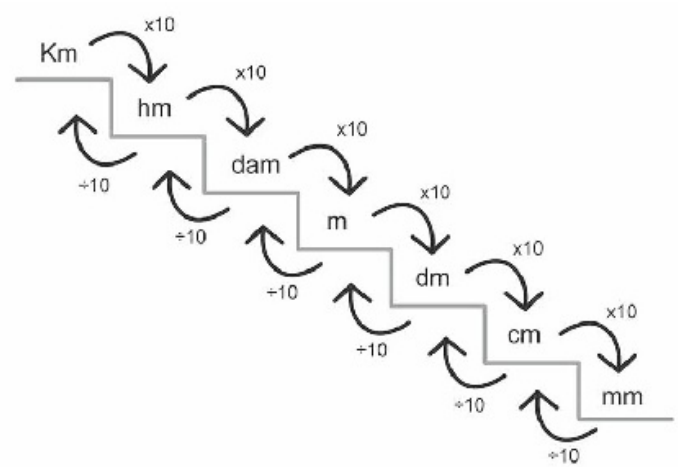
2.16 Sistema métrico decimal (comprimento, área e volume)

Para trabalhar com medidas de comprimento, temos uma unidade básica para medir o comprimento: o metro (m). Porém, quando nos referimos a um comprimento muito grande ou muito pequeno, precisamos pensar em múltiplos e submúltiplos. Um exemplo concreto é a régua que utilizamos na escola, em que a escala não está em metro, mas em um submúltiplo do metro, o centímetro. Precisamos ter em mente:

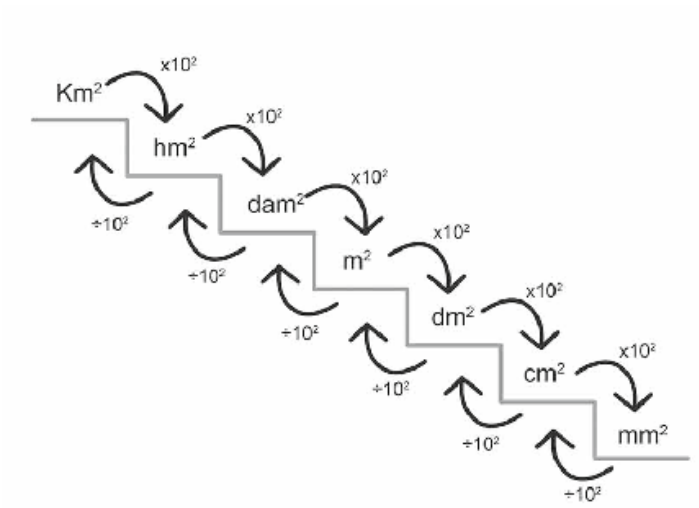
• 1 metro = 10 decímetros(dm) = 100 centímetros(cm) = 1000 milímetros(mm);

• 1 Quilômetro(km) = 10 hectômetros(hm) = 100 decâmetros (dam)= 1000 metros.

Sabendo disso, podemos utilizar um conhecimento que já temos para converter entre múltiplos e submúltiplos: a regra de três simples. Por exemplo, para converter 2m para km, basta lembrar que 1km equivale a 1000m. Usando a regra de três, chegamos que 2m= 0,002 km – isso será muito útil em Física. Podemos fazer um pequeno diagrama para lembrarmos:



O diagrama também nos fornece um método de conversão, multiplicando ou dividindo sucessivamente por 10. Com o mesmo intuito de medir comprimento, estabelecemos uma unidade básica para quantificar superfície (área). Nossa unidade básica para medir área será um quadrado de lado 1m, sendo que cada unidade de área chamamos de 1 metro quadrado e abreviamos $1m^2$. Novamente aparecem os múltiplos e submúltiplos, que vamos retratar com o diagrama mais uma vez:



Repare que, na conversão de unidade medida de área, multiplicamos e dividimos por 10^2. Para converter $5km^2$ em m^2, temos que multiplicar três vezes por 10^2 de acordo com nosso diagrama $5km^2 = 5 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2\ m^2 = 5000000m^2$.

Além disso, estabelecemos uma unidade básica para medir volume. Para tal, usamos um cubo de lado 1m, sendo que cada unidade de volume chamamos 1 metro cúbico e abreviamos $1m^3$. Temos o mesmo diagrama, mas agora multiplicando e dividindo por 10^3.

2.17 Sistema métrico decimal (litros e massa)

Um litro é a capacidade de um cubo de lado (aresta) $1dm^3$. Para facilitar, pense que 1 litro de água é a quantidade de água que cabe em tal cubo. Assim estabelecemos os múltiplos e submúltiplos, como que fizemos com o comprimento:

1 litro(l) = 10 decilitro(dl) =100 centilitro (cl)= 1000 mililitro (ml)
1 quilolitro(kl)= 10 hectolitro(hl) = 100 decalitro(dal) = 1000 litros (l)

O mesmo diagrama que fizemos para conversão de comprimento pode ser feito para conversão de unidades de litro.

Tal lógica ainda pode ser aplicada para a massa. A unidade básica para medição de massa é o grama (g), também apresentando a noção de múltiplos e submúltiplos:

- 1 grama(g) = 10 decigrama(dg) = 100 centigramas(cg) = 1000 miligrama(mg);
- 1 quilorama(kg) = 10 hectograma(hg) = 100 decagramas(dag) = 1000 gramas(g).

Novamente cabe aqui o diagrama que fizemos para conversão de unidade de comprimento, facilitando o processo.

3. EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Equação é a igualdade entre expressões.

Exemplos:

1) x + y = 3 é uma equação;

2) a + b + c não é uma equação (não tem o símbolo =).

Equação do 1º grau é toda equação que pode ser escrita na forma ax + b = 0 , onde a e b são números reais (veremos adiante o que são números reais) e a ≠ 0. Chamamos X de incógnita.

Exemplos:

(1) 2x + 3 = 0 é uma equação do 1º grau;

(2) 8x + 12 = 3 é uma equação do 1º grau, então basta escrever como 8x + 9 = 0.

3.1 Solução de equações do 1º grau

Estamos interessados em descobrir o valor de X.

Exemplos:

1) 2/x-2 = 4/x à 2x = 4(x - 2) à 2x = 4x – 8 à 2x – 4x = 8 à - 2x = 8 à X= 8/-2 à X = - 4.

(ENEM 2010)

O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia

primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

a) 4,0 m e 5,0 m. b) 5,0 m e 6,0 m.

c) 6,0 m e 7,0 m. d) 7,0 m e 8,0 m.

e) 8,0 m e 9,0 m.

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos <acesso em 03.05.2018>

Solução:

Podemos equacionar, chamando x de alcance do primeiro passo:

X+ (x-1,2) + (x-1,2 – 1,5) = 17,4
3x – 3,9 = 17
3x = 21,3
X = 7,1m

4. REGRA DE TRÊS

A regra de três é um dispositivo prático para resolver problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, aliando nosso conhecimento sobre equações do 1º grau.

4.1 Regra de três simples

Podemos encontrar um 4º valor tendo apenas outros três valores e sabendo que as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Para tanto:

1º) Montar tabela de grandezas;

2º) Analisar se é diretamente ou inversamente proporcionais;

3º) Montar a equação e resolver.

Exemplos:

1) Maria come 2 bolos em 3 horas, quantos bolos Maria come em 12 horas?

   Bolos tempo

   2 --------- 3

   X -------- 12

Quanto maior o número de bolos, maior é o tempo gasto por Maria, portanto as grandezas são diretamente proporcionais.

2/x = 3/12 à 3x = 24 à X = 8.

Maria come 8 bolos em 12 horas.

2) 5 pedreiros constroem uma casa em 12 dias, 12 pedreiros constroem em quantos dias?

   Pedreiros tempo

   5 ---------- 12

   12---------- X

Quanto maior o número de pedreiros, maior é o tempo de construção, logo são grandezas inversamente proporcionais.

5/12 = x/12 → 12x = 60 –> X = 5.

12 pedreiros constroem em 5 dias. Repare que se fizer 5/12 = 12/x → X = 28,8 dias, o que não faz sentido, há mais pedreiros e o tempo aumenta.

(ENEM 2009)

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de diesel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br.
Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao diesel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final diesel/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros.
b) 37,00 milhões de litros.
c) 231,25 milhões de litros.
d) 693,75 milhões de litros.
e) 888,00 milhões de litros.

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos
<acesso em 03.05.2018>

Solução:

Montamos a tabelinha padrão da regra de três e analisamos se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais:

4% .....925 milhões

3% X

As grandezas são diretamente proporcionais, possibilitando a "multiplicação em cruz", então 4x = 3 . 925 → x = 693,75 milhões.

4.2 Regra de três composta

Na regra de três composta, nossa tabela terá três ou mais colunas e nossa análise das grandezas será mais cuidadosa. Em geral a confusão ocorre na hora de analisar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais – é preciso tomar cuidado e não esquecer de fazer tal avaliação. Se 10 pedreiros constroem uma casa em 20 dias trabalhando 8 horas por dia, em quantos dias 12 pedreiros constroem a mesma casa trabalhando 6 horas por dia?

Pedreiros	dias	horas por dia
10	20	8
12	x	6

Analisemos separadamente:

Quanto maior o número de dias trabalhados, menor é a quantidade de pedreiros necessários:

Pedreiros	dias
10	20
12	x

Quanto maior o número de dias trabalhados, menor é a carga de horas por dia:

Dias	horas por dia
20	8
X	6

Fica:

Pedreiro	dias	horas por dia
10	20	8
12	x	6

$20/x = 12/10 \cdot 6/8 \rightarrow 20/x = 12.6 / 10.8 \rightarrow 20/x = 72/80 \rightarrow 72x = 1600 \rightarrow$

$X = 1600/72 = 22{,}22...$

Logo 12 pedreiros constroem em 23 dias trabalhando 6 horas por dia.

(ENEM 2013)

Uma indústria tem reservatório de água com capacidade de $900m^3$. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando reservatório está cheio. Está indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de $500m^3$, cujo escoamento de água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos já existentes. A quantidade de ralos novos será igual a:

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos <acesso em 03.05.2018>

Solução:

Usando regra de três composta, temos:

Ralos	volume	tempo
6	$900m^3$	6
X	$500m^3$	4

Analisando a proporcionalidade:

Ralos	volume
6	$900m^3$
X	$500m^3$

Ralos	tempo
6	6
X	4

Conclui-se que:

Rolos	volume	tempo
6	900	6
X	500	4

Montando a equação:
$6/x = 900/500 . 4/6 \rightarrow 6/x = 9/5 . 4/6 \rightarrow 6/x = 36/30 \rightarrow 36x = 180 \rightarrow X = 180/36 = 5$.
Logo a quantidade de ralos é 5, alternativa C.

(ENEM 2010)

Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas Veja (ed.2055), Cláudia (ed. 555), National Geographic (ed. 93) e Nova Escola (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^5 e) 10^9

Solução:

10L (óleo) ------ 10^7L (água)
10^3L (óleo) ----- X L (água)
Analisando as grandezas, verificamos que são diretamente proporcionais, então resolvemos a seguinte equação:

$10x=10^3.10^7=10^{10}$, logo $x= 10^{10}/10 = 10^9$, valor encontrado na alternativa E.

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos <acesso em 03.05.2018>

5. CONJUNTOS NUMÉRICOS

5.1 Números naturais

Os números naturais são aqueles que usamos para contagem, incluindo o zero. E representamos esse conjunto como:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

5.2 Números inteiros

Os números inteiros são todos os naturais, incluindo agora os negativos. Representamos:

Z = {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}

5.3 Números racionais

Os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos a/b, onde a e b são inteiros e b ≠.

Representamos Q = {a/b : a, b ϵ Z, b ≠ 0}.

Repare que qualquer número inteiro é também racional (-2 = -4/2).

5.4 Números irracionais

Os números irracionais no contexto do vestibular serão todos os números que não são racionais. Representamos:

II = {√2, √3, -√2, π, √7...}

5.5 Números reais

O conjunto dos números reais será a união dos racionais Q com os irracionais II. Representamos:

R = Q U II

5.6 Números complexos

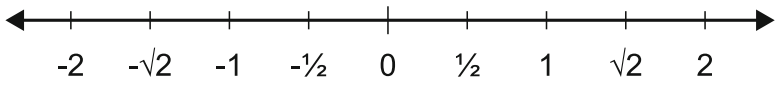
O conjunto dos números complexos é definido da seguinte forma:

C = {a + bi : a, b ϵ R e $i^2 = -1$}

No nosso estudo, restringiremos aos números reais.

5.7 Intervalos

Podemos representar os números reais em uma reta:



Repare que, entre dois números reais, há infinitos números reais. Entre 0 e 1, temos 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6...

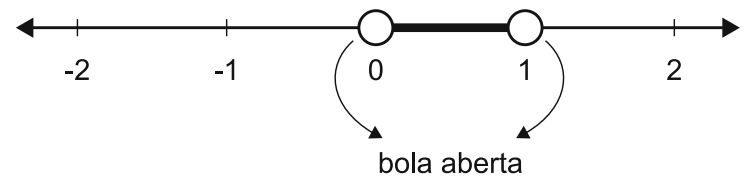
5.8 Intervalo aberto

Um intervalo aberto é um subconjunto dos números reais, o subconjunto de todos os números reais entre dois números reais.

Exemplo:

Representamos por] 0, 1[o conjunto de todos os números reais maiores que o 0 e menores que 1.

Podemos representar:



A bola aberta indica que 0 não está no intervalo e 1 não está no intervalo.

Podemos escrever:] 0, 1 [= { x ϵ R : 0 < x < 1 }.

O intervalo aberto de zero até um é igual ao conjunto de todo X número real tal que, X é maior que zero e X é menor que 1.

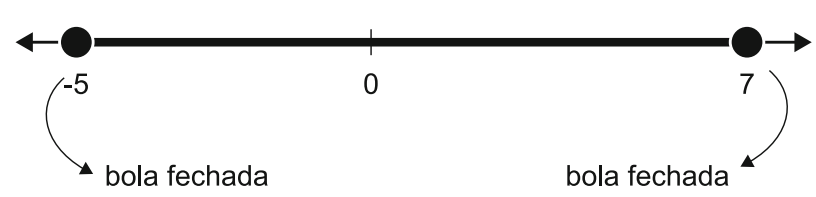
5.9 Intervalo fechado

Um intervalo fechado é um subconjunto dos números reais, o subconjunto de todos os números reais entre dois números reais incluindo os extremos.

Exemplos:

1) Representamos por [- 5, 7] o conjunto de todos números maiores ou igual a – 5 e menores ou iguais a 7.

Podemos representar [- 5, 7] = {X ϵ R : -5 ≤ x ≤ 7 }



2) Temos outro intervalo que são abertos ou fechados.

Apenas em um dos extremos:

] a, b [= { X ϵ R : a < x ≤ b }

[a, b] = { X ϵ R : a ≤ x < b }



6. POTENCIAÇÃO

Sendo a ϵ R (a é um número real) e n ϵ N (n é natural), definimos:

$a^0 = 1$ quando a ≠ 0, $a^1 = a$ e a^n = a . a . a ....a (n vezes) — a^n ->expoente

Por exemplo:

1) $2^3 = 2. 2. 2 = 8$;

2) $5^2 = 5.\ 5 = 25$;
3) 0^0 = não está definido.

- Propriedades:

Se a e b são números reais, n e m são números naturais

- Exemplos:

1) $a^m \cdot a^m = a^{m+m}$
$3^{10} \cdot 3^{15} = 3^{25}$

2) $a^m/a^m = a^{m-n}$
$2^{20}/2^5 = 2^{15}$

3) $a^{-m} = 1/a^m$
$12^{-2} = 1/12^2 = 1/144$

4) $(a/b)^n = a^n/b^n$
$(3/4)^2 = 9/16$

5) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$(2 \cdot 3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$
6) $(a^n)^m = a^{n.m}$
$(2^2)^3 = 2^6$

6.1 Potências de 10

As potências de base 10 são importantes para simplificar a representação numérica.

Exemplos:

1) $10^2 = 100$;
2) $10^n = 1000...0$, onde n ϵ N;
3) $10^{-2} = 1/10^{-2} = 0{,}01$;
4) $10^{-n} = 1/10^n = 0{,}00...0{,}1$.

7. RADICIAÇÃO

Em uma expressão do tipo $\sqrt[n]{a} = b$, sendo n ϵ N, n ≠ o e a ϵ R, $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$:

índice ->$\sqrt[n]{a}$ à radicando = b à raiz

Obs: a raiz de índice par de um número real positivo é um número real positivo.

Não existe raiz real de $\sqrt[n]{a}$, onde n é par e a é negativo.

Exemplos:

1) $\sqrt[2]{(-2)^2} = 2$;
2) $\sqrt[2]{2^2} = 4$;
3) $\sqrt[2]{-4}$ = não é um número real.

7.1 Propriedades

Sejam Y, X ϵ R, n, m ϵ N.
1) $\sqrt[n]{X^m} = X^{m/n}$ à $\sqrt[3]{9^2} = 9^{2/3}$;
2) $(\sqrt[n]{x})^n = X$ à $(\sqrt[3]{9}) = 9$;
3) $\sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ à $\sqrt[7]{5.4} = \sqrt[7]{5} \cdot \sqrt[7]{4}$;
4) $\sqrt[n]{x/y} = \sqrt[n]{x} / \sqrt[n]{y}$ à $\sqrt[3]{5/3} = \sqrt[3]{5} / \sqrt[3]{3}$;
5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m-n]{x}$ à $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Exemplos:

1) $\sqrt[3]{343}$. Uma técnica para achar a raiz de um n-ésimo de um número é fatorar em número primo:

343	7
49	7
7	7
1	

$343 = 7.\ 7.\ 7 = 7^3$, logo $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} =$

2) $\sqrt{8}$ pode ser simplificada:

8	2
4	2
2	2
1	

$8 = 2^3$, portanto $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Pode ser interessante substituir $\sqrt{8}$ por $2\sqrt{2}$.

3) Em frações, evitamos deixar raízes aparecerem no denominador.

$1/\sqrt{2}$ pode ser reescrita multiplicando a fração por $\sqrt{2} / \sqrt{2} = 1$

$1 / \sqrt{2} = 1 / \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} / \sqrt{2} = \sqrt{2} / (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} / 2$

4) Vamos agora reescrever $2 / 2+\sqrt{2}$ a fim de eliminar a raiz do denominador, multiplicando por $2-\sqrt{2} / 2-\sqrt{2} = 1$.

Lembre-se que multiplicar por 1 não altera o número.

$$\frac{2}{(2+\sqrt{2})} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{4-2} = \frac{4-2\sqrt{2}}{2}$$

8. PRODUTOS NOTÁVEIS

Lembre-se que, para efetuar o produto (2+3).(3+4), podemos usar a distributiva

(2+3).(3+4) = 6 + 8 + 9 + 12 = 35

Usando a distributiva, concluímos que, se a, b ϵ R:

1) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a+b).(a-b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$
4) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3^2b + b^3$
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplos:

1) Simplifique a expressão

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2}$$

Se observarmos que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, verificamos que o numerador e denominador são iguais, portanto:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} = 1$$

2) Simplifique:

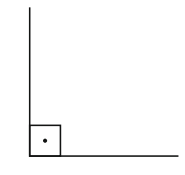
$$\frac{3x^2 - 12}{6x + 12}$$

Repare que $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$, $x^2 - 4 = (x+2).(x-2)$ e $6x + 12 = 6(x + 2)$.

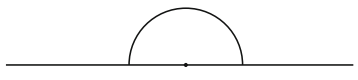
$$\frac{3x^2 - 12}{6x + 12} = \frac{3(x^2 - 4)}{6(x + 2)} = \frac{3(x + 2)(x - 2)}{6(x + 2)} = \frac{3(x - 2)}{6} = \frac{(x - 2)}{2}$$

9. GEOMETRIA PLANA

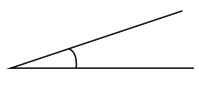
- Ângulos: figura formada por duas semirretas de mesma origem.



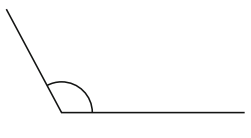
Ângulo de 90º
ou
Ângulo reto



Ângulo de 180º
ou
Ângulo raso

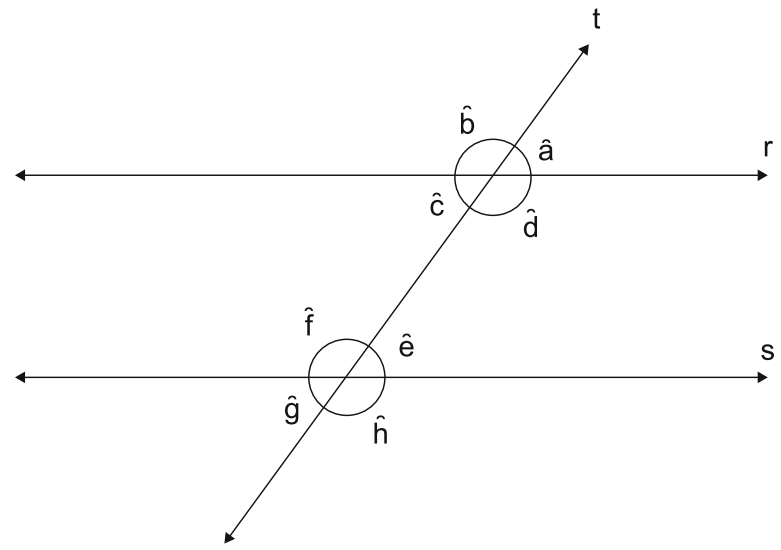


Ângulo menor que 90º
ou
Ângulo agudo



Ângulo maior que 90º
ou
Ângulo obtuso

Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal:



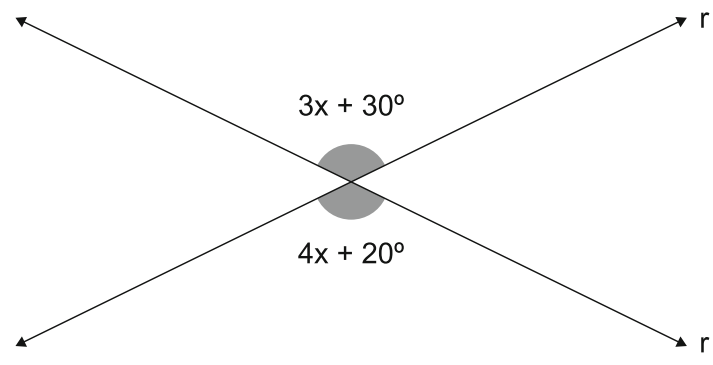
Onde:
- r e s: retas paralelas;
- t: reta transversal;
- â e ĉ: ângulos opostos pelo vértice;
- â e ê: ângulos correspondentes;
- ĉ e ê: ângulos alternos internos;
- â e ĝ: ângulos alternos externos.

- Ângulos opostos pelo vértice tem mesma medida;
- Ângulos alternos internos tem mesma medida;
- Ângulos alternos externos tem mesma medida.

Temos: $\hat{a} = \hat{c}$ $\hat{b} = \hat{d}$
$\hat{a} = \hat{e}$ $\hat{b} = \hat{f}$ e assim por diante.
$\hat{a} = \hat{g}$ $\hat{b} = \hat{h}$

Exemplos:

1) Calcule o valor de X de acordo com a figura:



Repare que os ângulos destacados são opostos pelo vértice, logo têm mesma medida.

$3x + 30º = 4x + 20º$

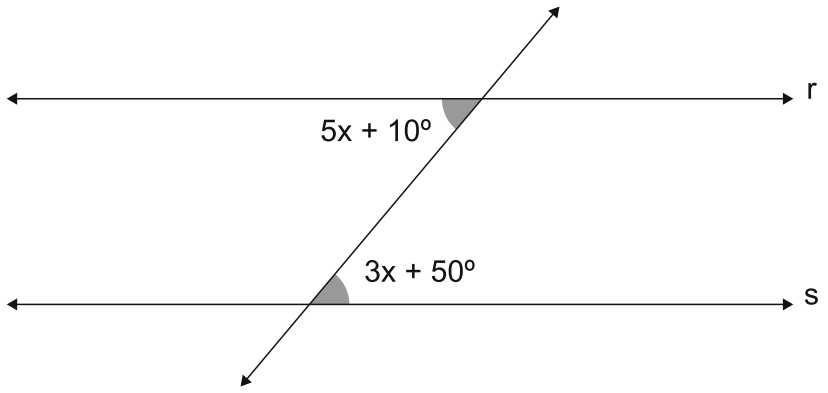
$3x + 30º - 20º = 4x$

$3x + 10º = 4x$

$10º = 4x - 3x$

$X = 10º$

2) Calcule o valor de x de acordo com a figura:



Repare que os ângulos destacados são alternos internos.

5x + 10 = 3x + 50º
2x + 10 = 50º
2x = 40º
X = 20º

9.1 Triângulos

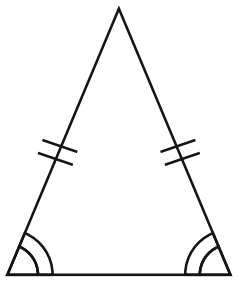
Polígono de três lados.

Classificação dos triângulos:

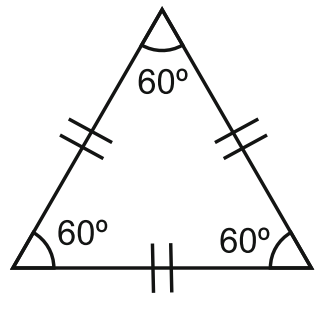
Quanto aos lados	**Quanto aos ângulos**
Equilátero: tem os três lados com a mesma medida;	Retângulo: possui um ângulo reto;
Escaleno: tem os três lados com medidas diferentes entre si;	Acutângulo: tem os três ângulos agudo;
Isósceles: tem somente 2 lados de mesma medida.	Obtusângulo: tem um lado obtuso.

- Propriedades:

Isósceles

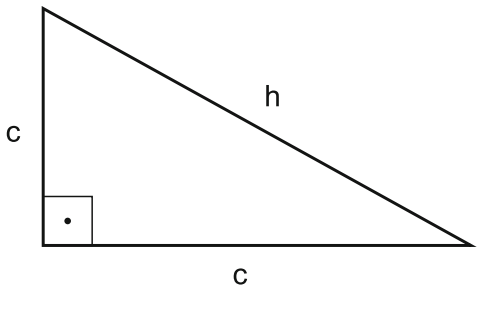


Equilátero



Os ângulos da base são iguais. Os três ângulos medem 60º.

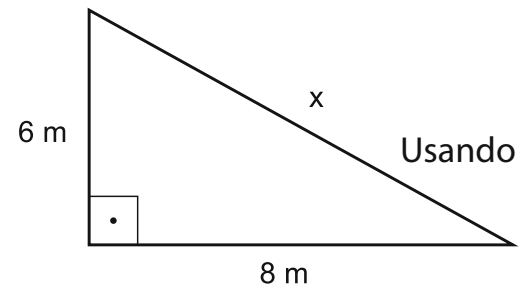
- Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo, chamamos o lado oposto ao ângulo reto de hipotenusa e os dois outros lados de catetos.



$h^2 = c^2 + c^2$

Exemplos:

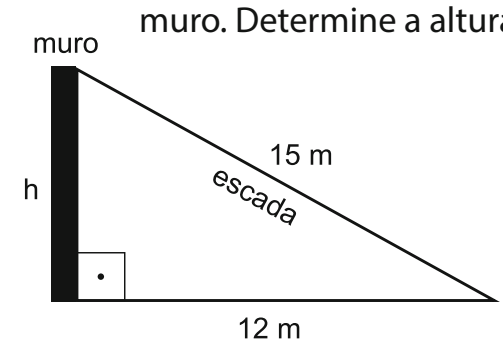
1) Calcule a hipotenusa do triângulo retângulo



Usando teorema de Pitágoras
$X^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$
$X^2 = 100$
$X = 100$

A hipotenusa mede 10m.

2) Uma escada de 15m de comprimento está apoiada no muro. A base da escada está distante 12m do muro. Determine a altura do muro.

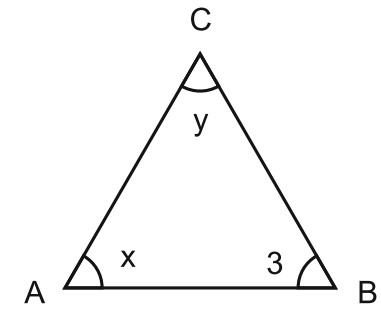


Usando teorema de Pitágoras:
$15^2 = h^2 + 12^2$
$225 = h^2 + 144$
$h^2 = 81$
$h = 9$
O muro tem 9m de altura.

9.2 Soma dos ângulos internos de um triângulo

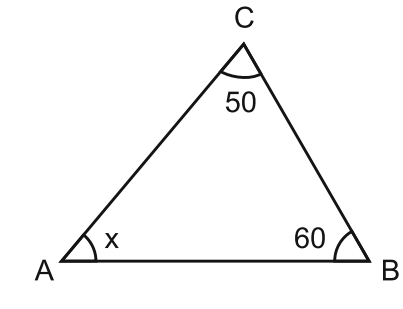
Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180º

No triângulo ABC: x + y + 3 = 180º



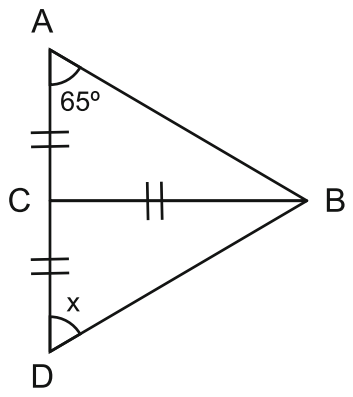
Exemplos:

1) Calcule o valor de x:

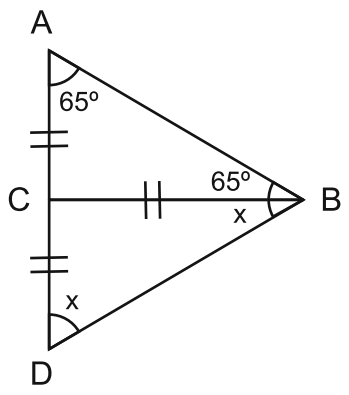


X + 50 + 60 = 180º
X + 110 = 180º
X = 70º

2) Determine o valor de X



Solução: repare que o triângulo ABC é isósceles.
CBO também é isósceles.
Logo os ângulos da base são iguais



Agora somamos os ângulos internos no triângulo ABD.
$65º + 65º + x + x = 180º$
$130 + 2x = 180º$
$2x = 50$
$X = 25º$

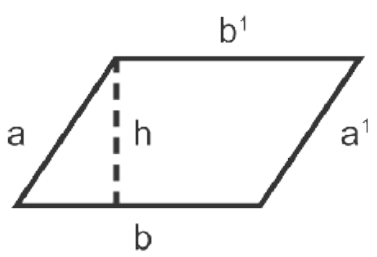
9.3 Áreas

Já discutimos em sistema métrico decimal o conceito de área, que é, basicamente, a quantificação da superfície por meio de quadrados de lado 1. Conseguimos estabelecer algumas fórmulas básicas para quantificar a superfície sem ter que contar o número de quadrados de lado 1. Para isso, algumas definições se fazem necessárias:

1) Polígono é uma figura plana fechada formada pelo mesmo número de ângulos e lados;

2) Um quadrilátero é um polígono de quatro lados.

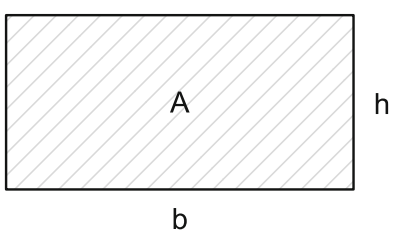
- Paralelogramo: quadrilátero com dois pares de lados paralelos que, para calcular a área, usamos a seguinte fórmula: (Onde b é a base e h a altura).



A=bh

Obs: os lados a e a' são paralelos e os lados b e b' são paralelos.

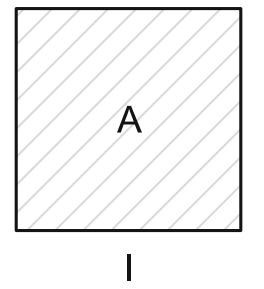
- Retângulo: um quadrilátero com os quatros ângulos medindo 90°. Para calcular a área de tal figura:



A = bh

Obs: para calcular a medida da diagonal de um retângulo, basta usar o teorema de Pitágoras. Todo retângulo é um paralelogramo.

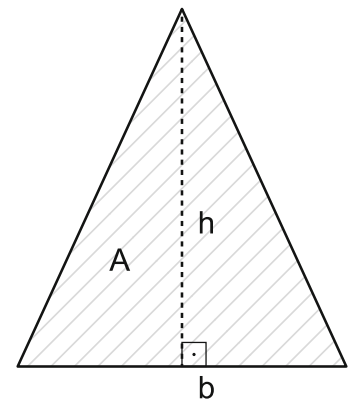
- Quadrado: um retângulo que, além dos quatro ângulos medindo 90°, tem todos os quatro lados com a mesma medida. Para calcular a área, usamos a fórmula anterior, mas lembrando que os lados têm mesma medida:



$A = l^2$

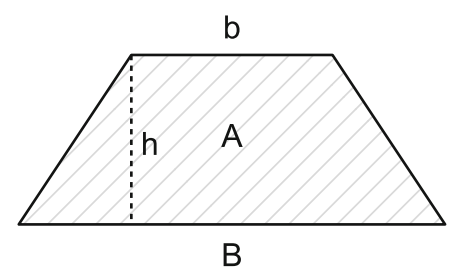
Obs: para calcular a medida da diagonal de um quadrado, basta usar o teorema de Pitágoras. Todo quadrado é um paralelogramo

- Triângulo: polígono de três lados e três ângulos. A altura (h) de um triângulo é o segmento que parte de um vértice e "vai" para o lado oposto (chamamos de base), formando um ângulo de 90º. Portanto é possível ter três alturas e bases diferentes, mas a área é sempre a mesma. Para calcular a área:



$A = (bh)/2$

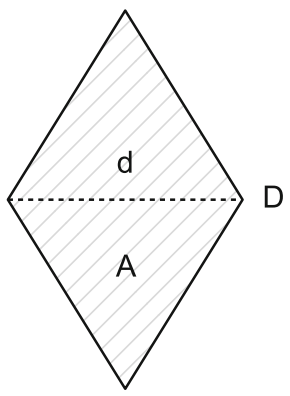
- Trapézio: um quadrilátero com apenas um par de lados paralelos. Na figura abaixo, b e B são segmentos paralelos, que chamamos de base menor e base maior, respectivamente. A altura parte de uma base e "vai" para outra base formando um ângulo de 90°.



$A=(B+b).h/2$

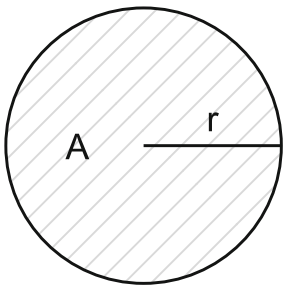
- Losango: quadrilátero com os quatro lados de mesma medida. Mas, tome cuidado, existe diferença entre quadrado e losango: o quadrado, além de lados de mesma medida,

tem todos os ângulos medindo 90º. A relação que temos é que todo quadrado é losango, porém nem todo losango é quadrado. Chamamos d de diagonal menor e D de diagonal maior. Para calcular a área:



$A = D.d / 2$

- Círculo: primeiramente vamos diferenciar círculo de circunferência. Circunferência será o contorno externo e o círculo, além do contorno externo, possui o "recheio". Podemos definir circunferência como: dado um centro e uma medida r que chamamos de raio, o conjunto de pontos que estão a mesma distância r do centro chamamos de circunferência. Então a distância do centro até a circunferência é sempre r (raio). Para calcular a área do círculo:



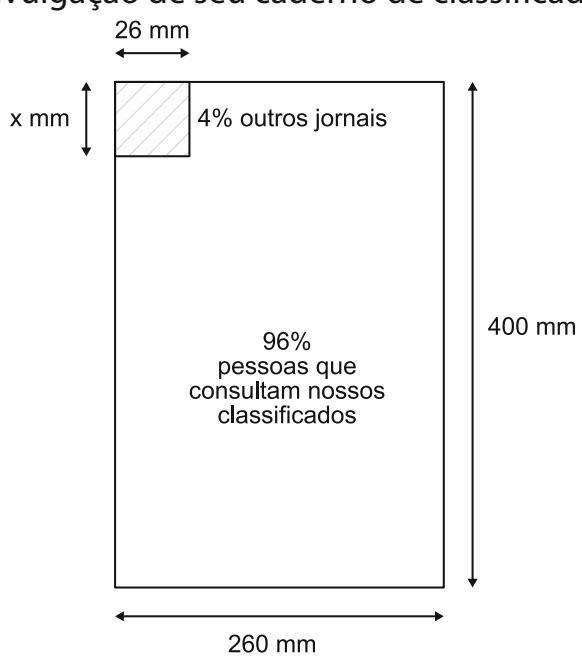
$A = \pi r^2$

Obs: π é um número irracional e é aproximadamente 3,14159.

Exemplos:

(ENEM 2010)

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser aproximadamente?

a) 1mm b)10mm c)17mm
d)160mm e)167mm

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos
<acesso em 03.05.2018>

Solução:

A área da página interna é:

$400mm \times 260mm = 104\,000mm^2$

4% dessa área é $4/100 \times 104\,000 = 416000 / 100 = 4160mm^2$.

Um dos lados do retângulo menor é 26mm, então:

$26.X = 4160$ à $X = 4160 / 26 = 160mm$

A medida do lado é 160mm, alternativa D.

(ENEM 2014)

Uma fotografia tirada em uma câmera digital é formada por um grande número de pontos, denominados pixels. Comercialmente, a resolução de uma câmera digital é especificada indicando os milhões de pixels, ou seja, os megapixels de que são constituídas as suas fotos. Ao se imprimir uma foto digital em papel fotográfico, esses pontos devem ser pequenos para que não sejam distinguíveis a olho nu. A resolução de uma impressora é indicada pelo termo dpi (*dot per inch*), que é a quantidade de pontos que serão impressos em uma linha com uma polegada de comprimento. Uma foto impressa com 300 dpi, que corresponde a cerca de 120 pontos por centímetro, terá boa qualidade visual, já que os pontos serão tão pequenos, que o olho não será capaz de vê-los separados e passará a ver um padrão contínuo. Para se imprimir uma foto retangular de 15 cm por 20 cm, com resolução de pelo menos 300 dpi, qual é o valor aproximado de megapixels que a foto terá?

a) 1,00 megapixel.
b) 2,52 megapixels.
c) 2,70 megapixels.
d) 3,15 megapixels.
e) 4,32 megapixels.

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos
<acesso em 03.05.2018>

Solução:

Atenção:
Antes da solução, lembremos que os prefixos

Kilo=10^3	Mili=10^{-3}
Mega=10^6	Micro= 10^{-6}
Giga=10^9	nano=10^{-9}
Terá= 10^{12}	Pico=10^{-12}

Fazendo regra de três:
1cm.....120p
15cm.....x Logo x=1800 pontos
E
1cm.....120p
20cm.....y
y= 2400 pontos

Para descobrir o total, basta fazer:
1800x2400 = 4 320 000 = $4,32.10^6$ = 4,32 Mega. Alternativa E.

10. VOLUMES

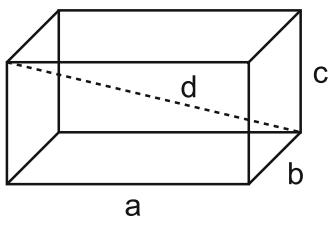
Já discutimos em sistema métrico decimal o conceito de volume, que é basicamente quantificar o espaço por meio de cubos de aresta 1. Conseguimos estabelecer algumas fórmulas básicas para quantificar o volume sem ter que contar o número de arestas. Algumas definições se fazem necessárias:

1) Poliedro é um sólido limitado por polígonos;

2) Prisma é um poliedro limitado lateralmente por paralelogramos.

10.1 Paralelepípedo reto retângulo

Um poliedro de faces retangulares é normalmente o formato de uma sala ou uma caixa de sapato – é bom ter alguns exemplos na cabeça, isso facilita na resolução de exercícios. Para calcular o volume e a diagonal, usamos a seguinte fórmula:

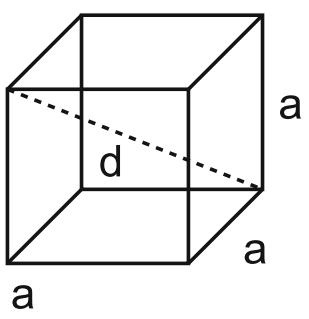


V = a.b.c

Diagonal = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

10.2 Cubo

É um paralelepípedo reto retângulo, mas com todas as arestas de mesma medida. Para calcular a área e o volume, usamos mesma fórmula acima – lembrando que todas as arestas têm mesma medida.

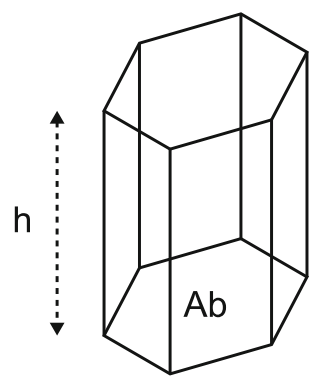


V = a^3

Diagonal = $a\sqrt{3}$

10.3 Prisma regular

É um prisma cuja base é um polígono regular, isto é, um polígono com todos os lados de mesma medida. Para calcular o volume, precisamos calcular a área da base. Uma técnica que pode ser útil quando estamos com dificuldade de calcular a área da base é dividir a base em triângulos, tentar calcular as áreas dos triângulos e depois somar. O volume do prisma regular pode ser calculado da seguinte forma:

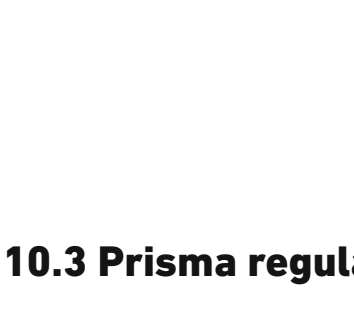


V = Ab.h à altura

Área da base

10.4 Pirâmide regular

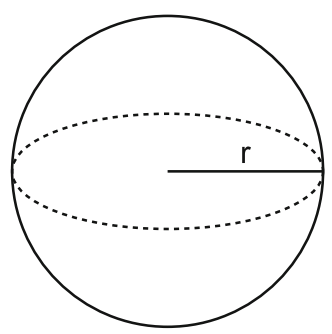
Pirâmide é um polígono cujas faces laterais são triângulos e compartilham um mesmo vértice: "o topo da pirâmide". Quando a base é um polígono regular, chamamos a figura de pirâmide regular e, para calcular o volume, utiliza-se a seguinte fórmula:



V = (Ab.h)/3

10.5 Esfera

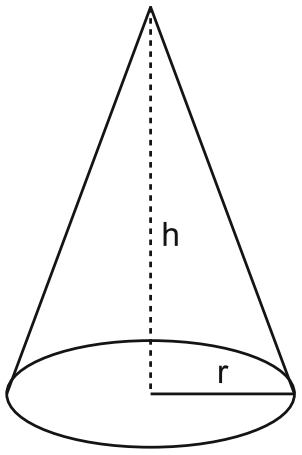
Podemos definir esfera de modo análogo à circunferência, mas não é necessário – basta ter a noção de que existe um centro na esfera e que a distância do centro a qualquer ponto da casca exterior tem a mesma medida. Para calcular o volume, temos:



V = 4/3 (π r^3)

10.6 Cone

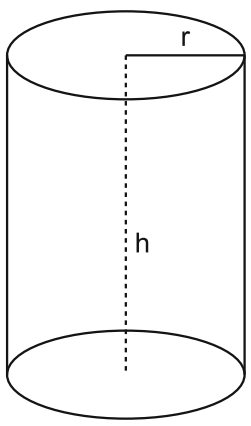
Para o cone, lembre-se sempre da casquinha de sorvete que a base é um círculo. Para calcular o volume, faça:



$V = 1/3 (\pi r^2 h)$

10.7 Cilindro

Já em relação ao cilindro, lembre-se do rolinho de papel higiênico e de que a base também é um círculo. Para calcular o volume, resolva:



$V = \pi R^2 h$

Exemplos:

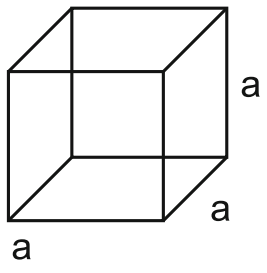
(ENEM 2009)

Uma empresa fabrica esferas de aço, de 6cm de raio e utiliza caixas de madeira na forma de cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é 13 824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

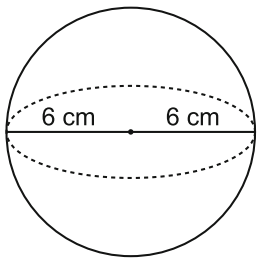
a) 4 b) 8 c)16 d)24 e)32

Solução:

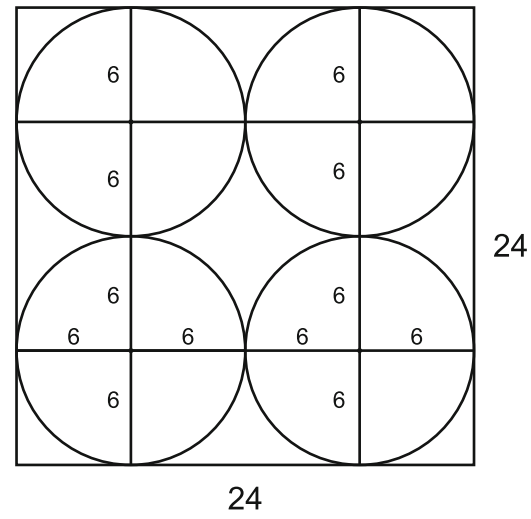


Sabemos que o volume da caixa é de 13.824 cm^3, logo:
$a^3 = 13\,824$ à $a = 24$
(lembre-se: $24^3 = 13.824$)

Cada esfera tem um raio de 6 cm.



Olhando a caixa de cima:



Repare que cabem 2 camadas de bolas na caixa, assim cabem 8 bolas na caixa. Alternativa B.

11. ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é um ramo da Matemática responsável por determinar o conjunto de possibilidades constituído de elementos finitos. Apesar de parecer distante, a análise combinatória nos ajuda em situações cotidianas, por exemplo, em um restaurante que tem 3 tipos de carnes, 5 variedades de saladas e 2 sobremesas. Quantas opções diferentes podem ser oferecidas no cardápio se cada opção tiver 1 tipo de carne, 1 tipo de salada e 1 tipo de sobremesa? Para esse cálculo, basta multiplicar o número de opções 3x5x2= 30 possibilidades. Já para o estudo da análise combinatória, precisamos da noção de fatorial:

- Fatorial: para um número n natural, definimos:

$0! = 1$; $1!=1$; $n! = n.(n-1) . (n-2) ...2.1$

Exemplo: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

11.1 Permutação simples

Em um conjunto de n elementos, de quantas maneiras distintas podemos trocar de posição esses elementos? Para realizar esse cálculo, utiliza-se a seguinte fórmula:

$Pn = n!$

Exemplo:

Quantos números de 3 dígitos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Repare que podemos formar: 1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 2 1 e 3 1 2.

Basta permutar todos algarismos nas posições possíveis para descobrir quantos números podemos formar:

$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$ (permutação de três elementos).

11.2 Arranjo simples

Um arranjo de n elementos tomados p a p são os agrupamentos ordenados diferentes que podemos formar com p elementos do total de n elementos.

$A_{n,p} = n! / (n-p)!$

11.3 Combinação simples

Uma combinação de n elementos tomados p a p são os subconjuntos com exatamente p elementos que podemos formar com os n elementos totais:

$C_{n,p} = n! / p! (n-p)!$

Exemplos:

Dado o conjunto A = {1, 2, 3}, os agrupamentos de dois elementos do conjunto A são:

{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)}

Repare que, em cada arranjo, a ordem importa.

$(1,2) \neq (2,1)$

$A_{3,2} = 3! / (3-2)! = 3! / 1! = 6$

Se considerarmos só os subconjuntos com dois elementos de A, { {1,2}, {1,3}, {2,3}}, nesse caso, a ordem não importa: {1,2} = {2,1}.

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3.2.1}{2!\,1!} = \frac{3.2.1}{2.1}$$

12. PROBABILIDADE

A probabilidade p de um evento ocorrer, onde P = número de resultados favoráveis / número total de resultados.

Exemplo:

Jogando uma moeda, qual a probabilidade de dar cara?

O número de casos possíveis são 2 (cara ou coroa) e os favoráveis é 1 (cara).

P = 1 / 2 = 0,5 ou 50%.

12.1 Evento impossível e certo

Jogando um dado aleatoriamente, o espaço amostral, isto é, todos os resultados possíveis, é {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se o evento A é sair um número maior que 90, chamamos esse evento de impossível, já que não faz parte do espaço amostral. Se o evento B é sair um número menor que 100, chamamos de evento certo, uma vez que isso com certeza acontecerá.

12.2 Eventos independentes

Se A e B são eventos independentes, ou seja, um não influencia no outro, a probabilidade de ocorrer A e B é o produto das probabilidades. E a probabilidade de ocorrer A ou B é a soma das probabilidades.

$P (A \cap B) = p(A) . p(B)$

$P (A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exemplos:

No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de sair 1 no primeiro dado e 2 no segundo? Qual a probabilidade de sair 1 no primeiro ou sair 2 no segundo?

O dado tem 6 faces, apenas uma face com número 1 e uma face com número 2.

Chamando de A: sair 1 no primeiro dado; e B: sair 2 no segundo dado.

Probabilidade de sair 1 e 2 é $P (A \cap B) = 1/6.1/6 = 1/36$.

Probabilidade de sair 1 ou 2 é $P (A \cup B) = 1/6 + 1/6 = 2/6$.

Cuidado: nem sempre compensa montar todas as possibilidades, é preciso ser cauteloso e analisar cuidadosamente cada caso. As questões de probabilidade são sempre desafiadoras, por isso é necessário treinar bastante. Nas questões de probabilidade, é comum ter que usar técnicas de análise combinatória.

13. NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

As noções de estatística são importantes no nosso cotidiano. Lendo jornais, por exemplo, frequentemente nos deparamos com pesquisas de opinião e precisamos saber interpretar os dados e termos as noções de média, moda e mediana. Os conceitos de média e média ponderada também são utilizados, por exemplo, no cálculo de notas em provas.

13.1 Média aritmética

$MA = (a_1 + a_2 + ...a_{n)} / n$

Onde cada a_1, $a_{2, ..., }$ a_n são números reais.

13.2 Média aritmética ponderada

Atribuímos peso para cada valor.

$MP = (p_1.a_1 + p_2.a_2 + \ldots + p_n.a_n) / (p_1 + p_2 + ... + p_{n)}$

Onde p_1,...p_n são os pesos – em geral, números reais.

13.3 Moda

A moda é o valor mais frequente em um grupo de valores observados.

13.4 Mediana

Em um grupo de valores, em que é possível ordená-los de forma crescente, a mediana será:

- O número que ocupa a posição central se o número de valores for ímpar;

- A média aritmética de dois valores centrais se o número de valor for par.

Exemplos:

Em um colégio, há duas turmas de 1º ano e as notas da prova de cada turma são:

1º A = {5; 4; 3,5; 7; 10; 7; 6,5}

1º B = {5; 5; 4,5; 10; 10; 10}

Vamos calcular a média aritmética, moda e mediana de cada turma.

1º A: $MA = \frac{5 + 4 + 3{,}5 + 7 + 10 + 7 + 6{,}5}{7} = 6{,}142$

Moda = 7 (aparece duas vezes);

Mediana: 3,5; 4; 5; 6,5; 7; 7; 10.

Mediana

1º B: $MA = \frac{5 + 5 + 4{,}5 + 10 + 10 + 10}{6} = 7{,}416$

Moda: 10 (aparece 3 vezes);

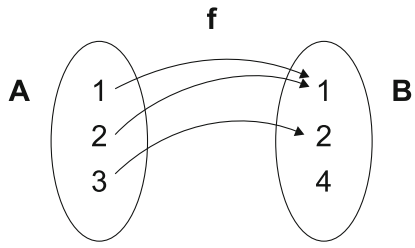
Mediana: 4,5; 5; 5; 10; 10; 10;

Mediana = 5 + 10 / 2 = 7,5.

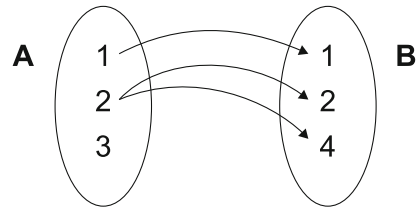
14. FUNÇÕES

As funções são importantes objetos de estudo que aparecem frequentemente na modelagem de problemas biológicos, geográficos e principalmente físicos. Em qualquer curso de exatas, o conceito de funções é amplamente estudado. Quando estudarmos Física, esse conceito aparecerá em cinemática e veremos que é de grande utilidade, apesar de teoricamente não parecer tão aplicado.

Dado dois conjuntos A e B, uma função F de A em B, F: A → B é uma relação que associa cada elemento de A a um único elemento de B.



F é função.



F não é função.

Obs: chamamos A de domínio e B de contra-domínio.

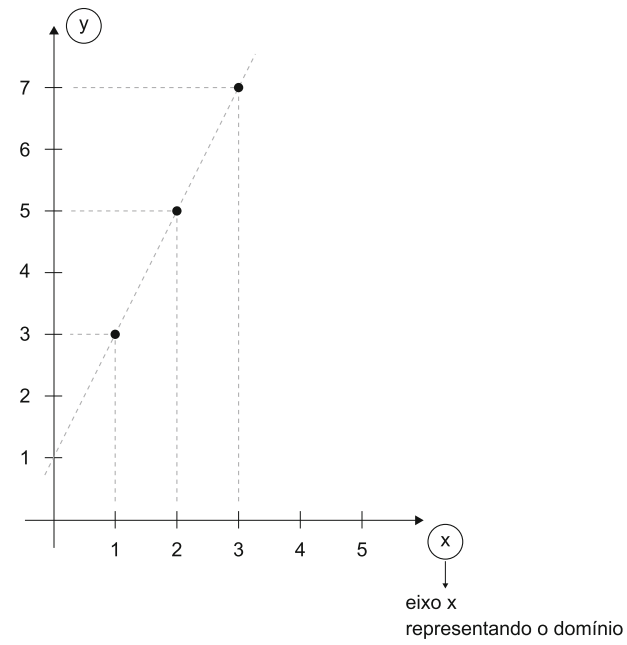
14.1 Função afim

Uma função F: R →R é uma função afim ou uma função do 1º grau quando existe a,b números reais, tal que F(x) = ax + b.

Exemplo:

Seja F: R → R uma função, tal que F(x) = x + 2. Podemos montar a tabela:

x	F(x)
1	3
2	5
3	7



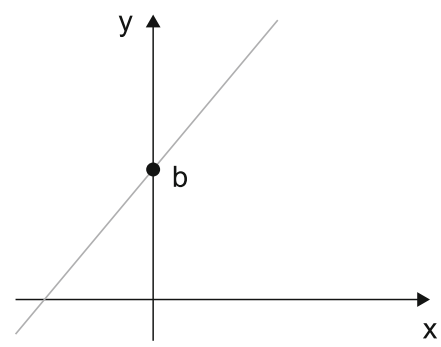
Obs: é comum escrever F(x) = Y.

O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

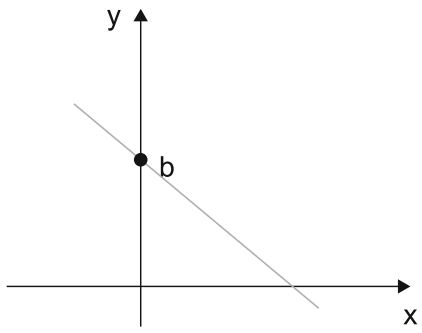
14.2 Informações da função afim

Sendo F: R → R uma função afim F(x) = ax + b com a e b números reais.

- Quando a > 0, a função é crescente:



- Quando a < 0, a função é decrescente:



Exemplo:

(ENEM 2011)

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão é:

a) y = 4300x
b) y = 884 905x
c) y = 872 005 + 4300x
d) y = 876 305 + 4300x
e) y = 880 605 + 4300x

Disponível em http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos <acesso em 03.05.2018>

Solução:

Essa é uma questão tranquila que podemos rapidamente obter a expressão que relaciona a quantidade y de trabalhadores e o número de meses x partindo de x: y = (880 605 – 4 300) + 4300. (x – 1) ⇔ y = 872 005 + 4300x. Alternativa C.

14.3 Equação do 2º grau

Chamamos de equação do 2º grau toda equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

Para achar as raízes de tal equação, ou seja, os valores de x que a satisfazem, usamos a seguinte fórmula:

Exemplo:

Encontre as raízes de: $X^2 - 3x + 2 = 0$
a = 1; b = -3; c= 2

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x = \frac{- (-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.(1).(2)}}{2.(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Logo:

X′ = 2 e X″ = 1.

Repare que $2^2 - 3.2 + 2 = 0$ e $1^2 - 3.1 + 2 = 0$. Portanto a equação tem duas soluções.

- Discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$, chamamos de discriminante. Podemos escrever agora a fórmula de resolução da equação do 2º grau, fica:

$$x = \frac{- b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

- Se Δ > 0, a equação tem duas soluções reais;

- Se Δ < 0, a equação não tem soluções reais;

- Se Δ = 0, a equação tem exatamente uma solução real.

Quando você for resolver uma equação do segundo grau, sempre comece analisando o discriminante, isso pode economizar muito tempo, principalmente nos vestibulares. Se o discriminante for negativo e no contexto só importar soluções reais, então já pode parar por ali, pois fica comprovado que a equação não tem solução real.

14.4 Função quadrática

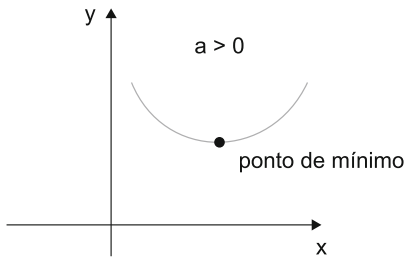
Chamamos F: R → R de função do 2º grau ou função quadrática quando é da forma $F(x) = ax^2 + bx + c$.

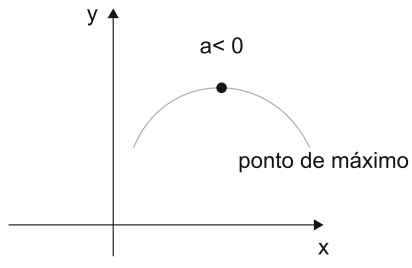
Para encontrar as raízes da função, resolvemos por meio da fórmula, lembrando que pode ou não ter a solução.

$F(x) = ax^2 + bx + c$

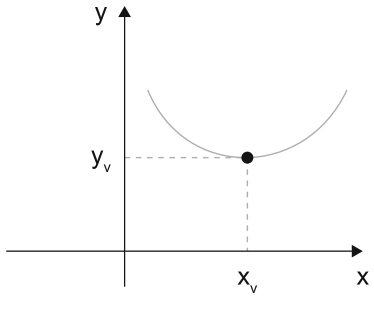
- Gráfico da função quadrática:

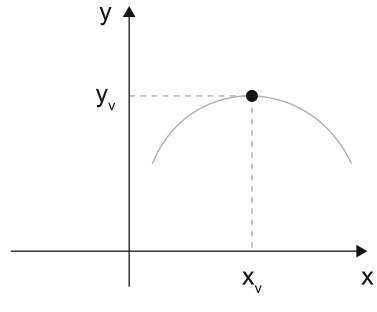
O gráfico da função do 2º grau ou quadrática é sempre uma parábola:
$F(x) = ax^2 + bx + c$





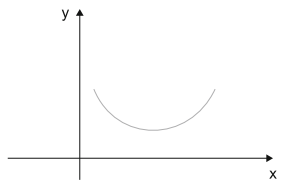
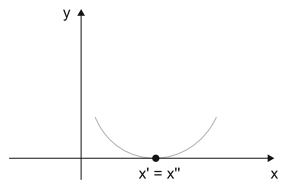
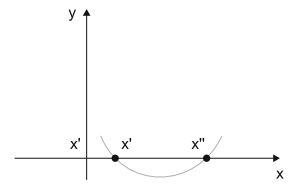
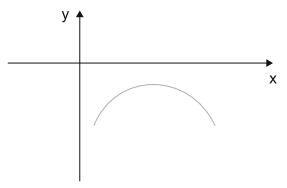
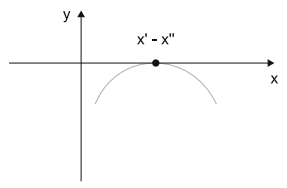
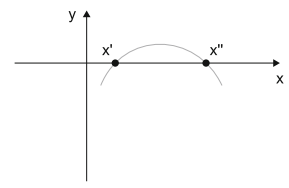
Podemos encontrar o vértice da parábola, seu ponto de máximo ou de mínimo.





$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

Se a parábola interceptar o eixo x, temos:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Exemplo:

Construa o gráfico de $F(x) = X^2 - 3x + 2$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Raízes: $X^2 - 3x + 2 = 0$

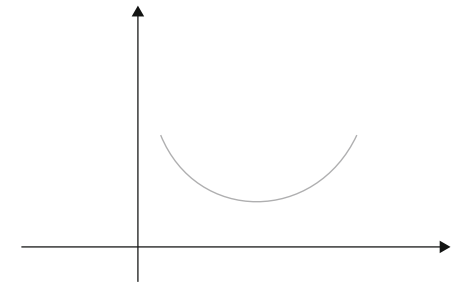
$a = 1, b = -3, c = 2$

Já vimos que $X' = 2$ e $X'' = 1$. $x_v = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$

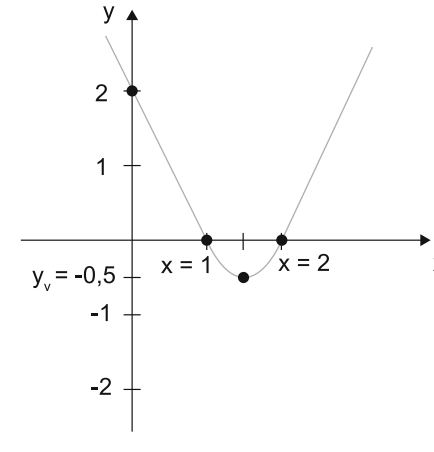
- Vértice:

$$y_v = \frac{\Delta}{4a} = \frac{-((-3)^2 - 4\,(1)\,(2))}{2} = \frac{-1}{2}$$

- Concavidade: a > 0 então é a forma.



- Construindo o gráfico:



Para esboçar o gráfico da função do segundo grau, muitas vezes, você pode se deparar com uma equação do 2º grau. Quando o discriminante é negativo, significa que o gráfico não intercepta o eixo x, porém esse gráfico existe, o que permite achar o vértice, analisar a concavidade e esboçar o gráfico.

15. LOGARITMOS

O desenvolvimento do logaritmo se deu a muito tempo e surgiu para facilitar cálculos, já que não existiam máquinas de calcular eficientes como hoje – eram usadas grandes tábuas de logaritmos com o valor do logaritmo de milhares de números. Temos a noção desde muito cedo que somar é "mais fácil" do que multiplicar e é por isso que o logaritmo se tornou tão importante. Nas propriedades de logaritmo, você perceberá que a multiplicação é transformada em soma.

Dizemos que x é logaritmo de b na base a quando $a^x = b$.

$\log_a b = x$ se, e somente se, $a^x = b$.

Para fazer sentido, consideramos a maior que zero e diferente de um e b maior que zero, ou seja, só existem logaritmo de número positivo.

15.1 Propriedades

1) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;
2) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;
3) $\log_n a^n = n$, pois $a^n = a^n$;
4) Se $0 < a < 1$ e $b > 1$, $\log^a$ é negativo;
5) $\log_a (bxc) = \log_a b + \log_a c$;
6) $\log_a (b/c)$;
7) $\log_a (b^n) = n \log (b)$;
8) $\log_a b = \log_c b / \log_c a$.

Quando omitimos a base, está implícito que o valor desta é 10, ou seja, $\log^{100} = \log_{10}{}^{100} = 2$. A técnica para calcular logaritmo é igualar a x e usar a regrinha, depois disso temos que usar as propriedades de potenciação. Se reparar, o logaritmo é a operação inversa do exponencial (diferente de potenciação).

Exemplos:

Calculemos:

(a) $\text{Log}_2{}^{32}$, para calcular iguale a x e use a definição:

$\text{Log}_2{}^{32} = x$ se $2^x = 32$, portanto sabemos que $2^5 = 32$, logo $\log_2{}^{32} = 5$.

(b) $\text{Log}_9{}^{243}$, usando a mesma tática anterior. $\text{Log}_9{}^{243} = x$ se $9^x = 243$,

Logo, como $9 = 3^2$, podemos escrever $(3^2)^x = 3^{3x} = 243 = 3^5$. Então $2x = 5$ e $\log_9{}^{243} = 5/2$.

16. PROGRESSÕES

16.1 Progressão aritmética:

Uma sequência de números (a_1; a_2...; a_n...) será chamada de P.A. quando cada termo for obtido do anterior somado a r. Chamamos de r a razão da progressão aritmética.

Exemplo: 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... é uma P.A., já que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre 2, chamamos o 2 de razão da P.A.

Propriedades

(1) Para obter um termo qualquer de uma P.A., sabendo o primeiro termo a_1 e um outro termo a_k que pode ser o a_1: $a_n = ak + (n-k)\, r$, onde r é a razão da P.A.;

(2) Para obter a soma dos n primeiros termos de uma P.A: $S = (a_1 + a_n).n / 2$.

16.2 Progressão Geométrica

Uma sequência (a_1, a_2, ..., na...) será chamada de P.G. quando cada termo for obtido pela multiplicação do termo anterior por um $q \in R$. Chamamos q de razão da P.G.

Exemplo:

1, 4, 16, 64... é uma P.G., uma vez que cada termo é o anterior multiplicado por 4.

- Propriedades:

(1) O quociente de dois termos consecutivos é sempre igual a razão: $q \cdot a_{n+1} / a_n = q$;

(2) Para obter o termo na da P.G. usamos: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$;

(3) Para somar os n primeiros teremos de uma P.G. usamos: $S = a_1 (q^n _ 1) / q\text{-}1$.

17. JUROS

17.1 Juros simples

Juros são o rendimento de uma aplicação financeira, valor que é cobrado devido a atrasos ou a quantia a mais que se paga ao tomar um empréstimo.

Considerando os juros simples, os juros são calculados com base no valor emprestado ou aplicado. Temos a seguinte fórmula:

J = C.i.t, onde:
J = juros;
C = Capital;
i = taxa de juros;
t = tempo de operação (dias, meses, anos).
e
M = C + J, onde:
M = montante final;
C = capital;
J = juros.

Exemplo:

(UFPI)

Uma quantia foi aplicada a juros simples de 6% ao mês durante 5 meses e, em seguida, o montante foi aplicado durante mais 5 meses, a juros simples de 4% ao mês. No final dos 10 meses, o novo montante foi de R$ 234,00. Qual o valor da quantia aplicada inicialmente?

1º aplicação:

i = 6% ao mês = 0,06
t = 5 meses
Usando a fórmula, tem-se:
J = C.i.t
J = C.0,06.5
J = C.0,3
M = C + 0,3.c +1,3c

2º aplicação:

Capital = 1,3.c
i = 4% ao mês = 0,04
t = 5
Logo J = 0,26.c
M = C + J
M = 1,3.c + 0,26.c
Substituindo:
234 = 1,56.c
Então C = 234 / 1,56 = 150.

17.2 Juros compostos

Os juros compostos, diferentemente dos juros simples, são calculados com o juro incidindo no valor anterior. Vamos usar os sistemas de juros compostos para deixar clara a diferença dos juros simples. Se uma pessoa aplica R$100,00 durante 3 meses em um banco que paga 5% de juros ao mês, então:

Mês	Capital	Juros	Montante
1	R$100	5% de 100 = 5	R$105
2	R$105	5% de 105 = 5,25	R$110,25
3	R$ 105,25	5% de 105,25=5,5125	R$115,7625

Repare que os juros compostos rendem mais do que os juros simples.

A fórmula para os juros compostos é:

$M = C.(1+i)^t$
M = montante;
C = capital;
i = taxa de juros;
t = tempo.

Ao fazer empréstimos ou parcelar compras, normalmente estamos trabalhando com juros compostos, porém o cálculo é feito de modo que as parcelas tenham mesmo valor, assim a pessoa não se assusta com o crescimento constante das parcelas.

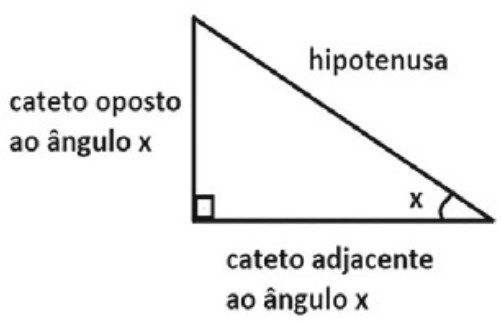
Exemplos:

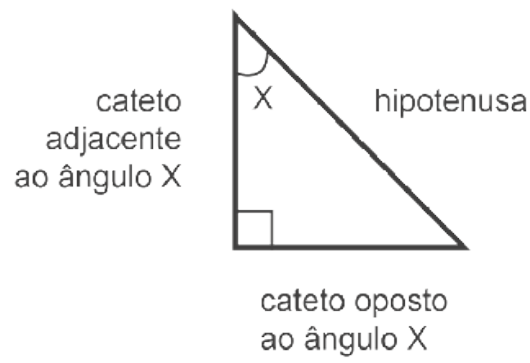
Calcule o valor do capital que, aplicado a uma taxa de 1% ao mês, renda em 4 meses uma quantia de R$1000.

$M = C.(1+i)^t$
$1000 = C.(1+0,01)^4$
$1000 = C.(1,001)^4 = C.\ 1,004006$
$C = 1000 / 1,004006 = 996,009.$

18. TRIGONOMETRIA

A trigonometria tenta estabelecer relações entre lados e ângulos de triângulos. O primeiro passo é olhar para os triângulos retângulos. Vamos estabelecer algumas nomenclaturas. Dado um ângulo x diferente do ângulo reto, temos:





Com base na notação acima, definimos as seguintes constantes do ponto de vista de ângulo (i). E quando nos referirmos ao seno de 30°, será um número constante que mais tarde descobrirá ser igual a 0,5. Determina-se:

- Seno do ângulo x = cateto oposto / hipotenusa: Sen(x)= CO/HI;

- Cosseno do ângulo x = cateto adjacente / hipotenusa: Cos(x)= CA/HI;

- Tangente do ângulo x = cateto oposto / hipotenusa: Tang(x)= CO/CA.

Logo, da definição, é possível ver que:

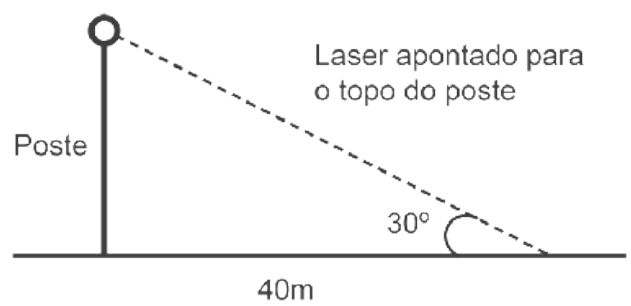
Sen(x)/Cos(x) = (CO/HI) / (CA/HI) = (CO/CA) = Tang(x)

Ou seja, se você tem sen(x) e cos(x), facilmente obtém-se tang(x) = sen(x) / cos(x).

É preciso ter em mente o seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis:

	30º	45º	60º	90º
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tang	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1	não existe

Apesar de esses conceitos parecerem ingênuos, na verdade são ferramentas muito poderosas para problemas cotidianos. Se, por exemplo, quisermos medir um poste muito alto e não temos uma escada, mas dispomos de um laser que podemos mirar para o topo do poste, como na imagem:



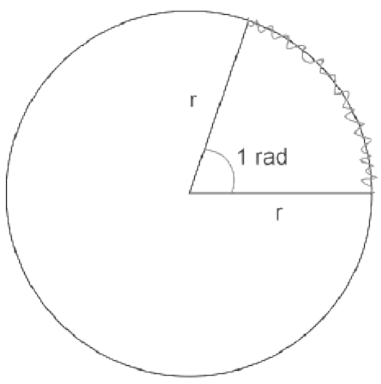
Repare que o poste forma um ângulo de 90º com o solo. Para medir o ângulo entre o solo e o laser, podemos usar um transferidor. Agora chame de x a altura do poste. Usando a definição de tangente, temos:

Tang(30º) = CO/CA = x/40 e sabemos pela tabela que tang(30º) = √3 / 3, logo x/40 = √3/3. Resolvendo a equação, x = (40√3)/3.

Usando 1,73 como aproximação para √3, temos que a altura aproximada do poste é de 23,06 m.

Vamos apresentar um novo método de medir ângulo que, geralmente, é mais usado em trigonometria, o radiano (rad).

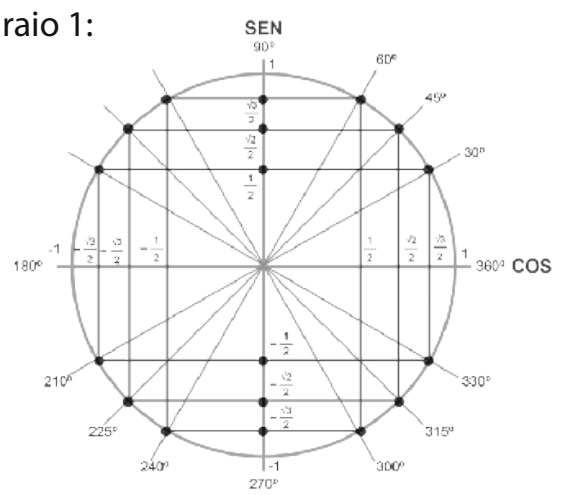
Tome uma circunferência de raio r. O ângulo que corresponde a um arco de comprimento r é um radiano.



O que você precisa se lembrar é que **π rad = 180°**. Por meio da regra de três, é possível montar a seguinte tabela:

0º	→ 0 rad	180º	→ π rad
30º	→ π/6 rad	210º	→ 7π/6 rad
45º	→ π/4 rad	240º	→ 4π/3 rad
60º	→ π/3 rad	270º	→ 3π/2 rad
90º	→ π/2 rad	300º	→ 5π/3 rad
120º	→ 2π/3 rad	330º	→ 11π/6 rad
150º	→ 5π/6 rad	360º	→ 2π rad

Isso é importante, pois agora vamos generalizar o conceito de seno, cosseno e tangente para ângulos de qualquer medida olhando para o ciclo trigonométrico, que é uma circunferência de raio 1:

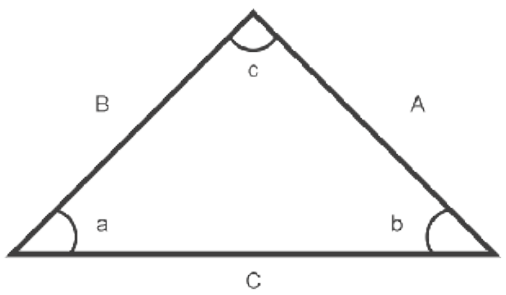


Usando esse círculo trigonométrico, expandimos o conceito.

Repare que o eixo vertical é o eixo do seno e o eixo horizontal é o cosseno. Assim, sen(210°) = -1/2. Claramente não se deve decorar tudo, apenas a tabela com os ângulos 30°,45° e 60° – você pode obter todo o resto partindo desses valores.

18.1 Lei dos senos

Uma importante aplicação da trigonometria é a lei dos senos:

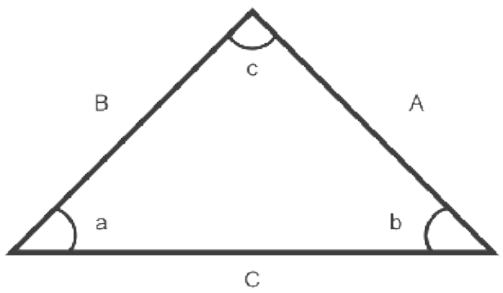


$$\frac{A}{SEN(a)} = \frac{B}{SEN(b)} = \frac{C}{SEN(c)}$$

Onde A, B e C são as medidas dos lados e a, b e c a medida dos ângulos. Repare que não pegamos o seno de ângulos aleatórios, mas os opostos aos lados correspondentes.

18.2 Lei dos cossenos

Temos aqui uma generalização do teorema de Pitágoras – lembre-se que este pode ser usado apenas em triângulos retângulos. A lei dos cossenos nos fornece uma fórmula parecida com a de Pitágoras, mas pode ser usada em quaisquer triângulos:



$$A^2 = B^2+C^2-2BC\ (Cos(a))$$
$$B^2 = A^2+C^2-2AC\ (Cos(b))$$
$$C^2 = B^2+A^2-2BA\ (Cos(c))$$

Para efeito de memorização, lembre-se que o cosseno que aparece na fórmula é o do ângulo oposto ao lado que está à esquerda da operação. As três fórmulas são basicamente as mesmas, mas aplicadas para cada um dos lados.

Bibliografia

Luiz Roberto Dante – Matemática Volume único – 1° edição, 2009 – Editora ática – ISBN: 978 85 08 09801 9

PAIVA, Manoel. *Matemática - Paiva.* 1a ed. 3 vols. São Paulo: Moderna, 2009.

SOUZA, Joanir Roberto de. *Matemática*. Editora FTD, 2010, São Paulo.

DINIZ, Maria Ignez, SMOLE Kátia Stocco. *Matemática Ensino Médio.* Editora Saraiva, 2010, São Paulo.

EXERCÍCIOS
DE MATEMÁTICA

(VUNESP)

1. A expressão $\frac{4x+8}{x^2+3x+2}+\frac{3x-3}{x^2-1}$ para $x\neq\pm1$, $x\neq-2$ é equivalente a:

a) $\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}$

b) $\frac{1}{x+1}$

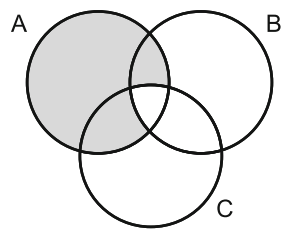
c) $\frac{7}{x+1}$

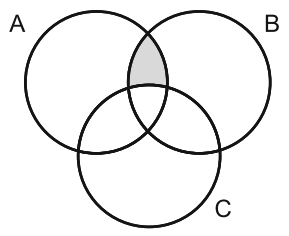
d) $\frac{4}{x+1}+\frac{3}{x-1}$

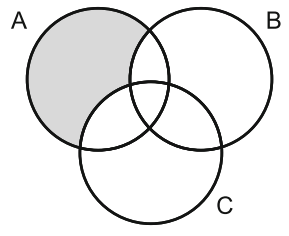
e) $\frac{1}{x-1}$

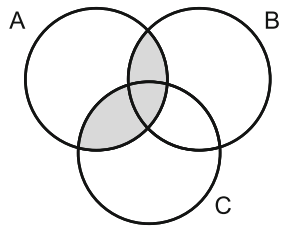
(UFJF – MG)

2. A parte colorida no diagrama que melhor representa o conjunto D = A - (B ∩ C) é:

a)


c)


b)


d)


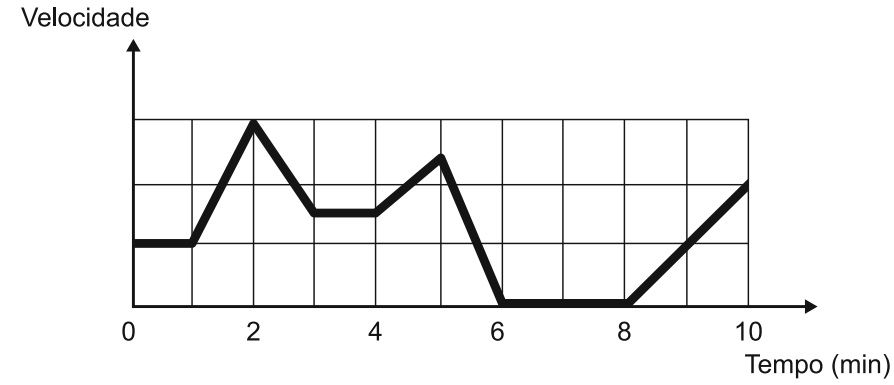
(PUC – MG)

3. Se A = [-2;3] e B = [0;5], então os números inteiros que estão em B – A são:

a) -1 e 0.
b) 1 e 0.
c) 4 e 5.
d) 3, 4 e 5.
e) 0, 1, 2 e 3.

(ENEM 2017)

4. Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

5. Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola. Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30. Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de:

a) 1,20
b) 0,90
c) 0,60
d) 0,40
e) 0,30

6. Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico, de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:
• Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
• Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
• Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
• Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior. A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

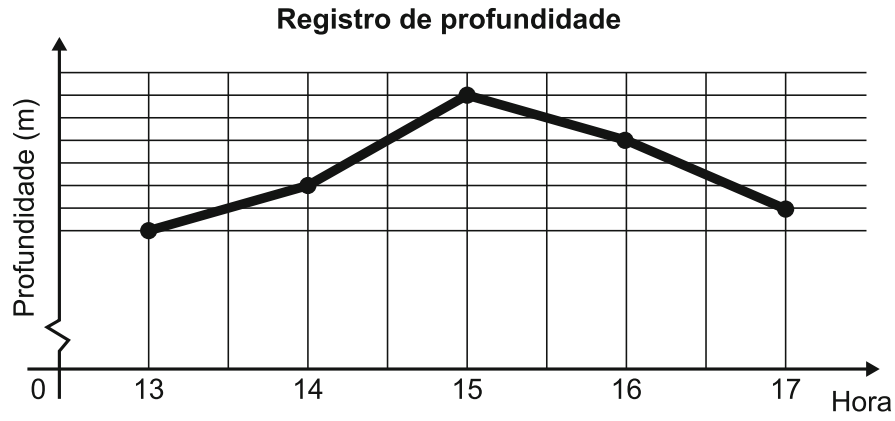
7. Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1 000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

a) 11,25.
b) 27,00.
c) 28,80.
d) 32,25.
e) 49,50.

8. Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minuto e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho A partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho B, que havia saído do topo da montanha. Quantos segundos após a partida do bondinho B partiu o bondinho A?

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20 e) 25

9. Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.



Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%. Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros?

a) 18
b) 20
c) 24
d) 36
e) 40

10. A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas *(M)*
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte. Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação "Bom" ou "Excelente" conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

a) 7,00.
b) 7,38.
c) 7,50.
d) 8,25.
e) 9,00.

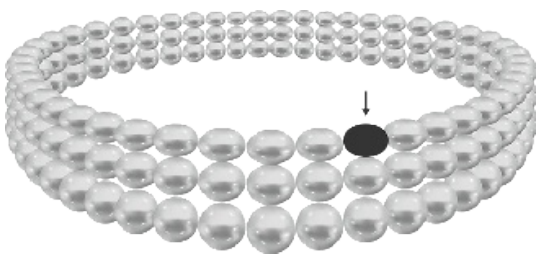
11. Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

a) apenas o aluno Y.
b) apenas o aluno Z.
c) apenas os alunos X e Y.
d) apenas os alunos X e Z.
e) os alunos X, Y e Z.

12. Uma pessoa ganhou uma pulseira formada por pérolas esféricas, na qual faltava uma das pérolas. A figura indica a posição em que estaria faltando esta pérola.



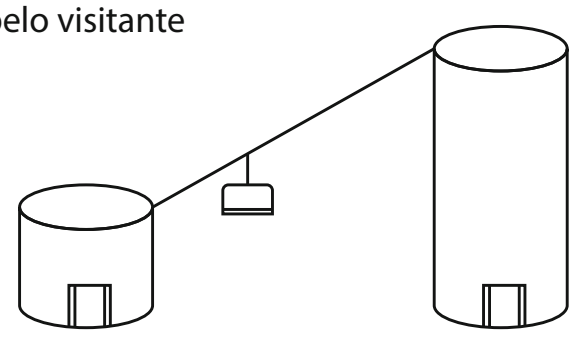
Ela levou a joia a um joalheiro que verificou que a medida do diâmetro dessas pérolas era 4 milímetros. Em seu estoque, as pérolas do mesmo tipo e formato, disponíveis para reposição, tinham diâmetros iguais a: 4,025 mm; 4,100 mm; 3,970 mm; 4,080 mm e 3,099 mm. O joalheiro então colocou na pulseira a pérola cujo diâmetro era o mais próximo do diâmetro das pérolas originais. A pérola colocada na pulseira pelo joalheiro tem diâmetro, em milímetro, igual a

a) 3 099.
b) 3,970.
c) 4,025.
d) 4,080.
e) 4,100.

13. Em uma de suas viagens, um turista comprou uma lembrança de um dos monumentos que visitou. Na base do objeto há informações dizendo que se trata de uma peça em escala 1:400, e que seu volume é de 25 cm^3. O volume do monumento original, em metro cúbico, é de

a) 100.
b) 400.
c) 1 600.
d) 6 250.
e) 10 000.

14. Em um parque, há dois mirantes de alturas distintas que são acessados por elevador panorâmico. O topo do mirante 1 é acessado pelo elevador 1, enquanto que o topo do mirante 2 é acessado pelo elevador 2. Eles encontram-se a uma distância possível de ser percorrida a pé, e entre os mirantes há um teleférico que os liga que pode ou não ser utilizado pelo visitante

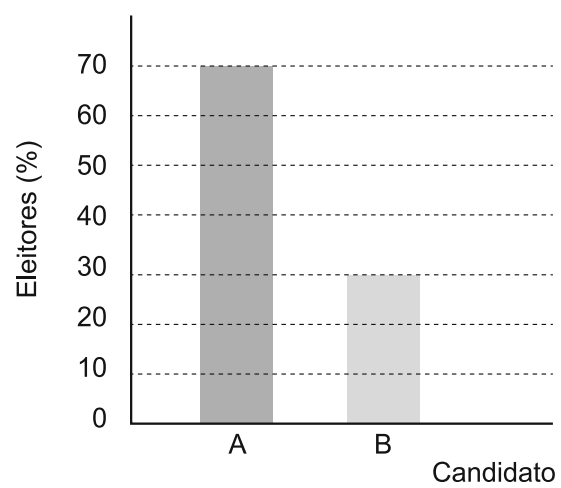


Mirante 1 Mirante 2

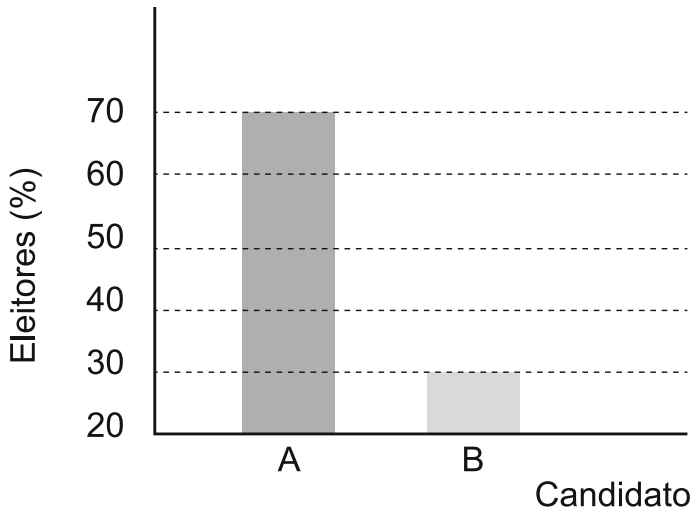
O acesso aos elevadores tem os seguintes custos:
• Subir pelo elevador 1: R$ 0,15:
• Subir pelo elevador 2: R$ 1,80;
• Descer pelo elevador 1: R$ 0,10;
• Descer pelo elevador 2: R$ 2,30.
O custo da passagem do teleférico partindo do topo mirante 1 para o topo do mirante 2 é de R$ 2,00, e do topo do mirante 2 para o topo do mirante 1 é de R$ 2,50. Qual é o menor custo em real para uma pessoa visitar os topos dos dois mirantes e retornar ao solo?

a) 2,25 b) 3,90 c) 4,35 d) 4,40 e) 4.45

15. O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.



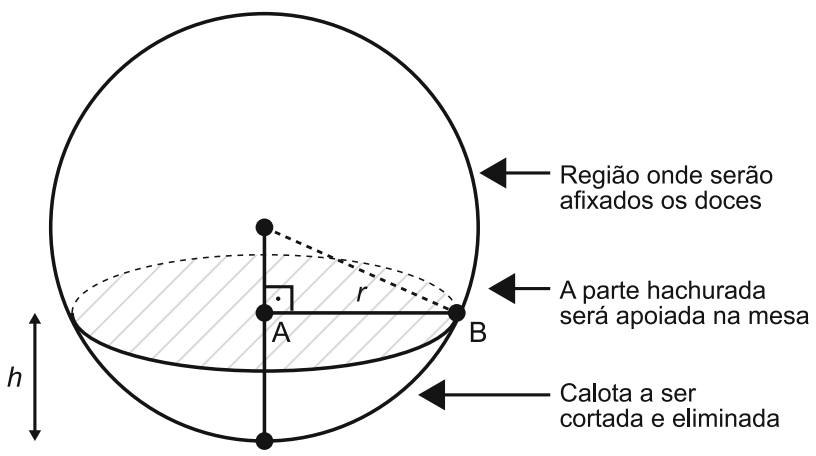
Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.



Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B. A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{15}$
e) $\frac{8}{35}$

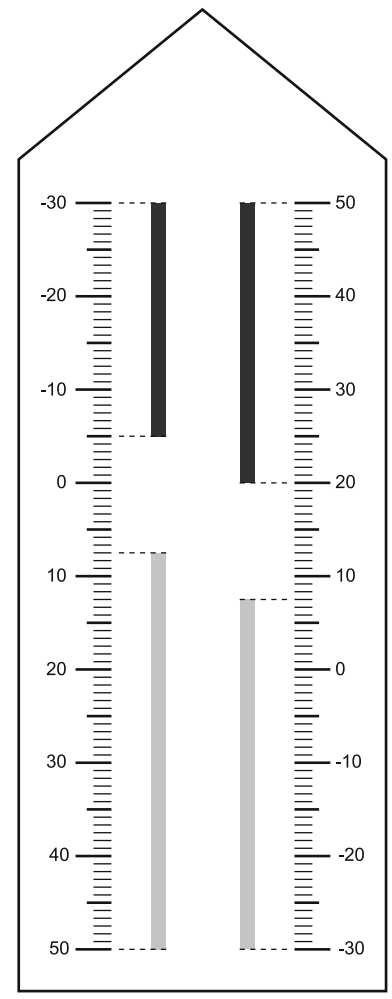
16. Para decorar uma mesa de festa infantil, um chefe de cozinha usará um melão esférico com diâmetro medindo 10 cm, o qual servirá de suporte para espetar diversos doces. Ele irá retirar uma calota esférica do melão, conforme ilustra a figura, e, para garantir a estabilidade deste suporte, dificultando que o melão role sobre a mesa, o chefe fará o corte de modo que o raio r da seção circular de corte seja de pelo menos 3 cm. Por outro lado, o chefe desejará dispor da maior área possível da região em que serão afixados os doces.



Para atingir todos os seus objetivos, o chefe deverá cortar a calota do melão numa altura h, em centímetro, igual a:

a) $5 - \frac{\sqrt{91}}{2}$
b) $10 - \sqrt{91}$
c) 1
d) 4
e) 5

17. Neste modelo de termômetro, os filetes na cor preta registram as temperaturas mínimas e máximas do dia anterior e os filetes na cor cinza registram a temperatura ambiente atual, ou seja, no momento da leitura do termômetro.



Por isso ele tem duas colunas. Na da esquerda, os números estão em ordem crescente, de cima para baixo, de –30 ºC até 50 ºC. Na coluna da direita, os números estão ordenados de forma crescente, de baixo para cima, de –30 ºC até 50 ºC. A leitura é feita da seguinte maneira:
• a temperatura mínima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da esquerda;
• a temperatura máxima é indicada pelo nível inferior do filete preto na coluna da direita;
• a temperatura atual é indicada pelo nível superior dos filetes cinza nas duas colunas.

Qual é a temperatura máxima mais aproximada registrada nesse termômetro?

a) 5 °C
b) 7 °C
c) 13 °C
d) 15 °C
e) 19 °C

18. Para uma temporada das corridas de Fórmula 1, a capacidade do tanque de combustível de cada carro passou a ser de 100 kg de gasolina. Uma equipe optou por utilizar uma gasolina com densidade de 750 gramas por litro, iniciando a corrida com o tanque cheio. Na primeira parada de reabastecimento, um carro dessa equipe apresentou um registro em seu computador de bordo acusando o consumo de quatro décimos da gasolina originalmente existente no tanque. Para minimizar o peso desse carro e garantir o término da corrida, a equipe de apoio reabasteceu o carro com a terça parte do que restou no tanque na chegada ao reabastecimento.

A quantidade de gasolina utilizada, em litro, no reabastecimento, foi

a) $\frac{20}{0,075}$

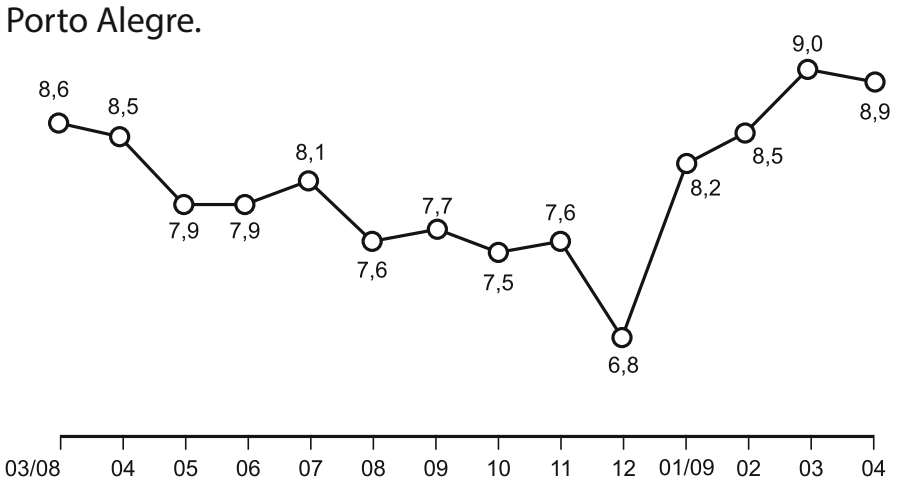
b) $\frac{20}{0,75}$

c) $\frac{20}{7,5}$

d) 20 x 0,075

e) 20 x 0,75

19. O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.



IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em www.ibge.gov.br Acesso em 30 jul. 2012 (adaptado),

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

a) 8,1%
b) 8,0%
c) 7,9%
d) 7,7%
e) 7,6%

20. Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos. Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

a) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$

b) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$

c) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

d) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

e) $\frac{2}{3^{10}}$

21. Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

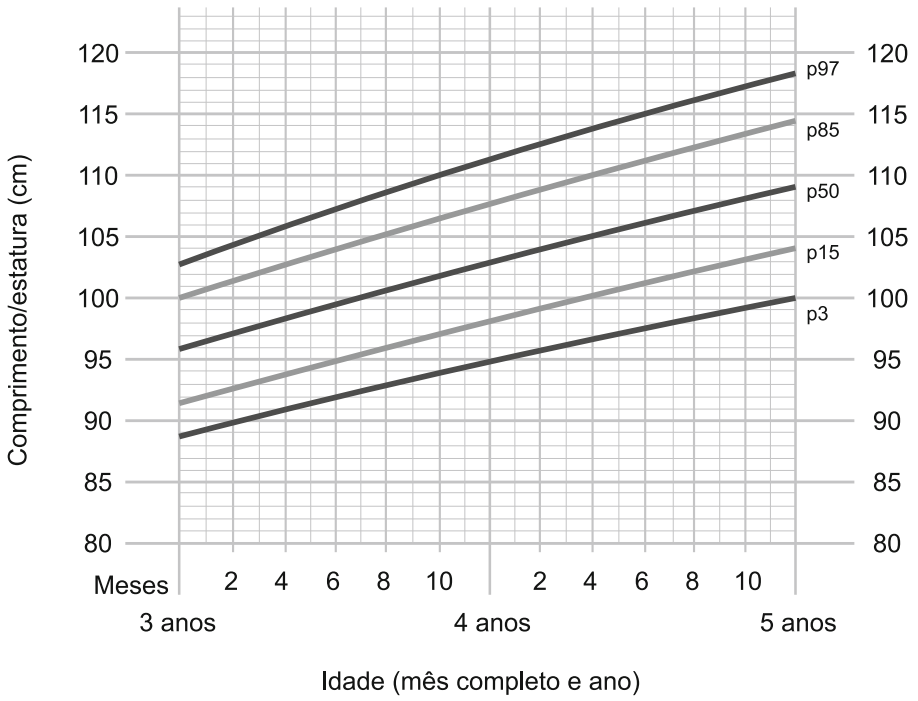
Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64
b) 56
c) 49
d) 36
e) 28

(ENEM 2016)

22. A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS. O gráfico apresenta o crescimento de meninas, cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50. Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

a) 23,5%
b) 21,2%
c) 19,0%
d) 11,8%
e) 10,0%

23. O procedimento de perda rápida de "peso" é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três "pesagens" antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro:

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta. A primeira luta foi entre os atletas

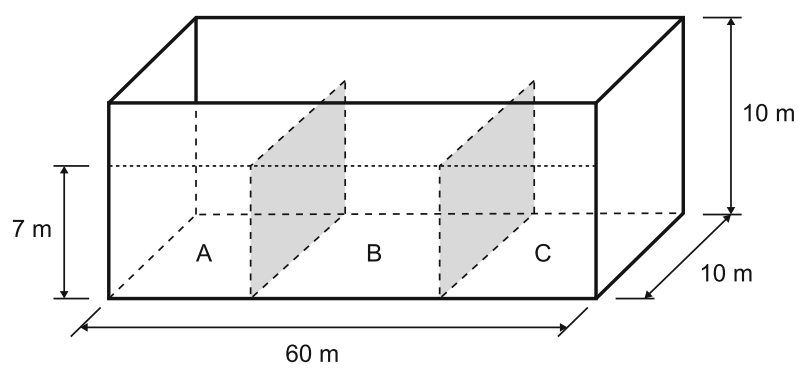
a) I e III.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

24. Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:
• 1° mês: 21;
• 2° mês: 22;
• 3° mês: 25;
• 4° mês: 31;
• 5° mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.
Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é

a) 156.
b) 180.
c) 192.
d) 264.
e) 288.

25. Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias. Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de:

a) 1,4 x103 m^3
b) 1,8 x 103 m^3
c) 2,0 x 103 m^3
d) 3,2 x 103 m^3
e) 6,0 x 103 m^3

26. Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:
10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.
7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.
Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59
b) 65
c) 68
d) 71
e) 80

27. Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):
• Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
• Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
• Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
• Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
• Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.
Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.
A marca a ser escolhida é

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

28. Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

29. Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.
Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectiva mente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18
b) 20
c) 36
d) 45
e) 54

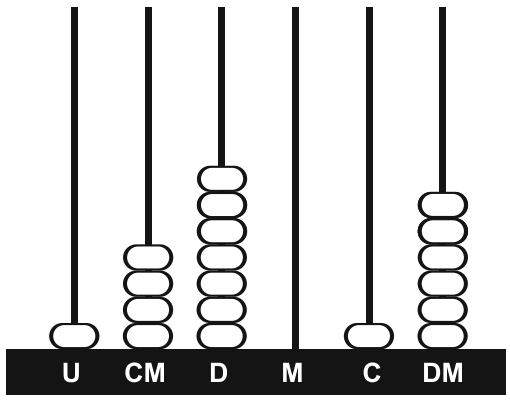
30. O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei no. 8.213/91, que dispõe: Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5% (cinco por cento) dos seus cargos com beneficiários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:
• até 200 empregados 2%;
• de 201 a 500 empregados 3%;
• de 507 a 1 000 empregados 4%;
• de 1 001 em diante . . . . . 5%.
Constatou-se que a empresa possui 1 200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados. Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93. O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é

a) 74. b) 70. c) 64. d) 60. e) 53.

31. Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.
Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.
Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser

a) R$ 0,96.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,40.
d) R$ 1,50.
e) R$ 1,56

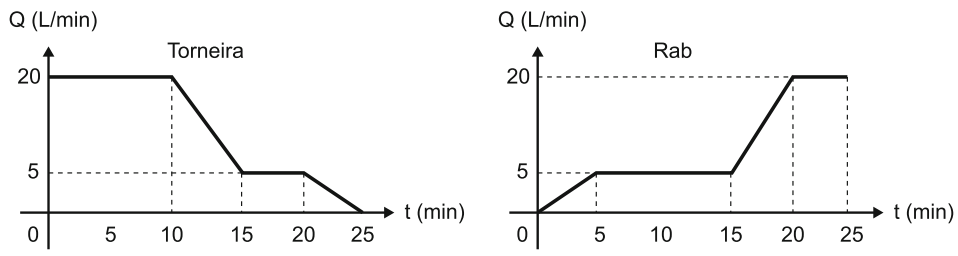
32. O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda. Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.



Nessa disposição, o número que está representado na figura é

a) 46 171.
b) 147 016.
c) 171 064.
d) 460 171.
e) 610 741.

33. Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q, em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo, em função do tempo t, em minuto.



Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

a) De 0 a 10.
b) De 5 a 10.
c) De 5 a 15.
d) De 15 a 25.
e) De 0 a 25.

34. Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

a) I. b) II. c) IV. d) V. e) VII.

35. No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.



Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida. Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

a) 570 b) 500 c) 450 d) 187 e) 150

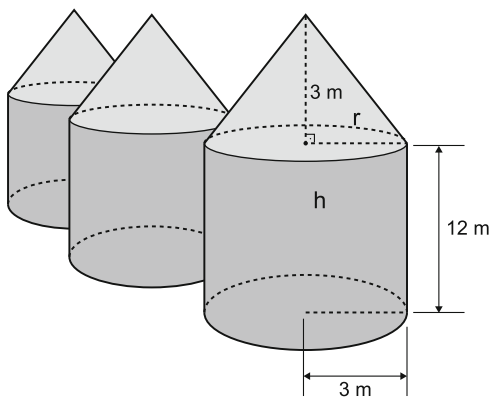
36. Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água. Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização. Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes períodos, em dia, como segue:

- Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;
- Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;
- Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;
- Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;
- Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com a maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.
O filtro descartado é o

a) F1. b) F2. c) F3. d) F4. e) F5.

37. Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de $20m^3$. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



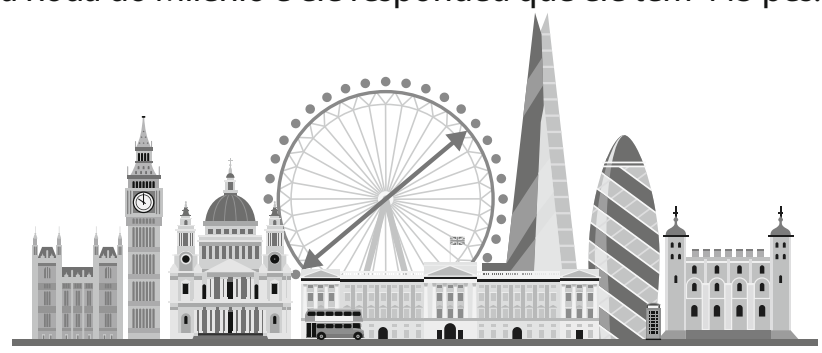
Utilize 3 como aproximação para π. O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6. b) 16. c) 17. d) 18. e) 21.

38. Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1:8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação.
No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.
A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente:

a) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.
b) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm.
c) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.
d) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.
e) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

39. A London Eye é urna enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.



Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53 b) 94 c) 113 d) 135 e) 145

40. A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostro o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26 b) 29 c) 30 d) 31 e) 35

GABARITO
E COMENTÁRIOS

CONSULTORIA: Leandro dos Santos da Costa, professor de Matemática e Física de diversos cursos vestibulares de São Paulo.

(VUNESP)

1. C

$$\frac{4x+8}{x^2+3x+2}+\frac{3x-3}{x^2-1}=\frac{4(x+2)}{(x+2)(x+1)}+\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{4}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)}=\frac{7}{(x+1)}$$

(UFJF – MG)

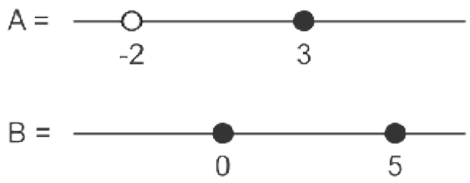
2. A

Primeiramente, encontre B ∩ C. Depois fica mais simples concluir qual é A - (B ∩ C).

(PUC – MG)

3. C

A=]-2,3] e B=[0,5]



B-A =]3,5] os inteiros nesse intervalo é 4 e 5.

(ENEM 2017)

4. C

Repare que no intervalo [6,8] o veículo fica parado, logo o tempo que o veículo permaneceu imóvel foi de 2 minutos.

5. E

Chame de x o preço de redução na embalagem da polpa de morango. Então podemos montar a equação:

$$\frac{2}{3}\cdot 18+\frac{1}{3}\cdot 14{,}70=\frac{2}{3}\cdot(18-x)+\frac{1}{3}\cdot 15{,}30$$

Resolvendo a equação, achamos x = 0,30.

6. C

Repare que a caixa 2 tem uma das arestas 75cm < 80cm, então esta já não serve.
Agora:
Volume da caixa 1: 86x86x86 = 636.056 cm^3
Volume da caixa 3: 85x82x90 = 627.300 cm^3
Volume da caixa 4: 82x95x82 = 638.780 cm^3
Volume da caixa 5: 80x95x85 = 646.000 cm^3
Para que caiba e sobre o menor espaço possível, o casal deve escolher a caixa 3.

7. B

Lembre-se que 1.000 L = 1 m^3.
O volume da água na piscina = 3 m x 5 m x (1,7 - 0,5) m = 18 m^3. A quantidade de produto a ser adicionada é 18 x1,5 ml = 27ml.

8. B

Chame de D a distância entre os pontos de partida no nível do mar e no topo da montanha. O tempo de percurso de cada bonde é 1,5 minutos, isso equivale a 90 segundos. (Lembre-se da fórmula de velocidade média da física $V_B=V_A=\frac{D}{\Delta t}$)

Conseguimos calcular entre a distância percorrida Δ em 40s: $\frac{D}{90}$ x 40

Pensando em frações, B percorre $\frac{5}{9}$ x D e o tempo de deslocamento será $\frac{\frac{5}{9}\times D}{\frac{D}{90}}=\frac{90\times 5\times D}{9\times D}=50$.

Portanto a partir de 10 segundos depois de B.

9. A

Chame de X a profundidade do rio às 13h. Então às 15h a profundidade é de x+6 e às 16h x+4, 10% a menos do que às 15h de acordo com enunciado.

Montando a equação:
$x+4=0{,}9(x+6)=\frac{90}{100}(x+6)=0{,}9(x+6)$

Resolvendo a equação: x+4=0,9(x+6) achamos x=14m. Portanto x+4=18m.

10. D

Chame de X a nota da disciplina I. Faça a média ponderada de acordo com o número de créditos. Lembrando que a nota mínima seria 7.

$$\frac{12x+4\times 8+8\times 6+8\times 5+10\times 7{,}5=7}{12+4+8+8+10}$$

$$\frac{12x+32+48+40+75=7}{42}$$

Resolvendo a equação, x=8,25. Assim a nota mínima que ele deve conseguir é de 8,25.

11. B
Basta calcular a média de cada aluno:

$$\text{Média de x} = \frac{5+5+5+10+6}{5} = 6{,}2$$

$$\text{Média de y} = \frac{4+9+3+9+5}{9} = 6$$

$$\text{Media de z} = \frac{5+9+8+5+6}{5} = 5{,}8$$

Só o aluno z foi reprovado.

12. C
Basta olhar as diferenças e analisar qual a menor.
4,025-4=0,025
4,100-4=0,1
4,080-4=0,08
4-3,099=0,901

A menor diferença é com o diâmetro 4,025.

13. C
A escala é de $\frac{1}{400}$ e o volume 25cm³. Para o volume, utilizamos $\left(\frac{1}{400}\right)^3$. Usando a regra de três: $(400)^3 \times 25 = 1600000\text{cm}^3$ ou 1600 m³.

14. C
Teste as possibilidades e conclua que o menor custo é quando a pessoa sobe e desce por um dos elevadores, anda a pé de um mirante ao outro e sobe e desce pelo outro elevador.
0,15+0,10+1,80+2,30=4,35

15. E
Veja:
$\frac{30}{70} - \frac{10}{50} = \frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{8}{35}$

16. C
Repare que o triangulo OAB é retângulo e podemos usar o teorema de Pitágoras. Como o diâmetro da esfera é de 10cm, OB = 5cm.
$OB^2 = R^2 + OA^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + OA^2 \Rightarrow OA = 4$

17. E
A temperatura máxima mais aproximada registrada que olhamos no nível inferior do filete preto na coluna da direita é de 19ºC.

18. B
Na primeira parada, houve um consumo de $\frac{4}{10} \times 100 = 40$ kg.
Resta, então, 100 - 40 = 60 kg e $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ kg. Usando a regra de três para transformar de kg para litros e a densidade dada:
750g ⟶ 1l
20 000g ⟶ x

Então achamos $x = \frac{20}{0{,}75}$.

19. B
Organizando em ordem crescente: 6,8; 7,5; 7,6; 7,7; 7,9; 8,1; 8,2; 8,5; 8,5; 8,6; 8,9; 9,0:
Mediana = $\frac{7{,}9 + 8{,}1}{2} = 8{,}0$ (%)

20. A
Temos 9 vermelhas e 1 verde. Podemos calcular a probabilidade (lembrando de combinação):
$P = c10{,}1 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^9} = 10 \times \frac{2}{3^{10}}$

21. E
Escolha um jogador dentre os 8. Combinação de 8 tomando 2 a 2.
$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = 28$

(ENEM 2016)

22. A
O crescimento de uma menina segue P^{50}, sendo que com 4 anos e 4 meses tem 105cm de altura. Com 3 anos, essa menina tinha 85 cm, ou seja, ela teve um crescimento de (105-85)=20cm. Em porcentagem: $\frac{20}{85} \cong 0{,}23529 \cong 23{,}5\%$.

23. C
O atleta mais regular é aquele com menor desvio padrão, que é o atleta III. O atleta menos regular é aquele que possui maior desvio padrão, que é o atleta II. Logo II e III lutaram.

24. C
Calculando a média: $\frac{21 + 22 + 25 + 31 + 21}{5} = \frac{120}{5} = 24$

Do estoque inicial, sobraram 228 – 120 = 108 vacinas, então o posto deve adquirir 12 x 24-108=180 vacinas.

25. D
Volume do reservatório é $(60 \times 10 \times 10) = 6000\text{m}^3$.
Só não é derramado o que está em A e B, o volume desses dois compartimentos é $(40 \times 10 \times 7) = 2800\ \text{m}^3$. Logo o volume derramado é de $6000\ \text{m}^3 - 2800\ \text{m}^3 = 3200\ \text{m}^3$. Usando notação cientifica: $3{,}2 \times 103\ \text{m}^3$.

26. D
Calculando a média: $\frac{237 + 262 + 158 + 159 + 160 + 278 + 300 + 378}{8} = \frac{225}{}$

Nas regiões oeste, centro, leste, centro oeste e centro sul, o número de casos é maior que a média. Logo 10 x 5 + 3 x 7 = 50 + 21 = 71.

27. B

Fazendo o quociente da quantidade de fibras em g pela quantidade de pão em g:

Marca A = $\frac{2}{50}$ = 0,04; Marca B = $\frac{5}{40}$ = 0,125; Marca C = $\frac{5}{100}$ = 0,05; Marca D = $\frac{6}{90}$ = 0,066..; Marca E = $\frac{7}{10}$ = 0,1

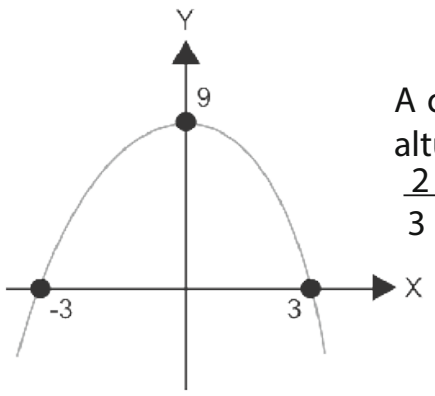
O maior valor é de 0,125, logo a marca B deve ser a escolhida.

28. D

O número de pessoas no elevador nos respectivos andares é 4, 5, 5, 5, 7 e 1. A moda é 5.

29. C

Esboçando o gráfico de y = 9 – x2:



A distância de -3 a 3 é igual 6 e altura do túnel é de 9.

$\frac{2}{3}$ x 6 x 9 = 36

30. E

Chame de x o número de empregados reabilitados. Montamos a equação:

10 + x = 5% (1200 + x) = $\frac{5}{100}$ (1200+x)

Resolvendo a equação, encontramos: x = $\frac{5000}{100}$ ≅ 52,6

Como o número de funcionários reabilitados é um número natural, o número mínimo é 53.

31. C

4 caixas de picolé custam 4x16=64 reais. Queremos um lucro superior a 20% do lucro anterior e, portanto, deverá ter um lucro de 1,20 x40 = 48 reais.

Então o faturamento do segundo dia deve ser: R$ 48,00 + R$ 64,00 = R$ 112,00. Se a caixa tem 20 picolés, logo 4 caixas têm 80 picolés. Portanto: $\frac{\text{R\$ 112}}{\text{80 picolés}}$ = R$ 1,40

32. D

O número é 1 + 70 + 100 + 60 000+ 400 000 = 460 171.

33. B

Para a vazão de enchimento ser constante, a quantidade de água saindo da torneira e escorrendo pelo ralo devem ser constantes. Isso ocorre no intervalo de 5 a 10.

34. D

Calculando a média dos lucros mensais = $\frac{37 + 33 + 35 + 22 + 30 + 35 + 25}{7} = \frac{217}{7} = 31$

A média se aproxima mais do mês V.

35. B

O tanque cheio tem 50L, o marcador indica $\frac{3}{4}$ do tanque $\frac{3}{4}$ x 50 = 37,5 litros. O rendimento é de 15 Km/L. Fazendo a regra de três:

1⟶15

3,75⟶x

x=37,5 x 15 = 562,5 km, logo deverá parar no posto a 500km do ponto de partida.

36. B

Calcule as razões entre a medida de contaminantes não capturados e o número de dias. Verifique que no filtro 2: $\frac{15\text{mg}}{3\text{ dias}}$ será a maior razão e o filtro de pior desempenho.

37. D

Para calcular o volume do silo, basta calcular o volume do cilindro e somar com o volume do cone.

Vsilo = Vcilindro + Vcone

Vsilo = $\pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 x H$

Vsilo = $3 \times 3^2 \times 12 + \frac{1}{3} \times 3^{2^1} = 351$

Como o caminhão tem capacidade de 20 m^3 $\frac{351}{20}$, logo precisa de 18 viagens.

38. A

As dimensões do guarda roupa na escala 1:8 são $\frac{220}{8}$= 27,5 cm; $\frac{120}{8}$ =15 cm; $\frac{50}{8}$= 6,25cm diminuindo em 20%.

80% de 27,5 = 22 cm, 80% de 15 = 12 cm e 80% de 6,25 = 5 cm. Temos, então, 22 cm de altura, 12 cm de largura e 5 cm de profundidade.

39. D

1 pé = 12 polegadas e 1 polegada =2,54 cm, logo 1 pé = 12 X 2,54 cm = 30,48 cm = 0,3048 m, portanto o diâmetro da roda gigante é de 443 X 0,3048 ≅ 135m.

40. E

Chame de x o lucro mensal no mês de junho. O mínimo da média é 30 mil reais $\frac{21 + 35 + 21 + 30 + 38 + x}{6}$ = 30, resolvendo a equação.

FÍSICA

JORGÊNIO MIRANDA COSTA

Formado pela Faculdade Oswaldo Cruz, físico pela Universidade de São Paulo (USP), mestre em ciências com concentração em infectologia em saúde pública e professor de vários cursinhos universitários em São Paulo.

SUMÁRIO

1. Mecânica 44
2. Energia 46
3. Hidrostática 47
4. Impulso e quantidade de movimento 51
5. Óptica 53
6. Eletricidade 57
7. Eletromagnetismo 63
8. Ondulatória 65
9. Radioatividade 67

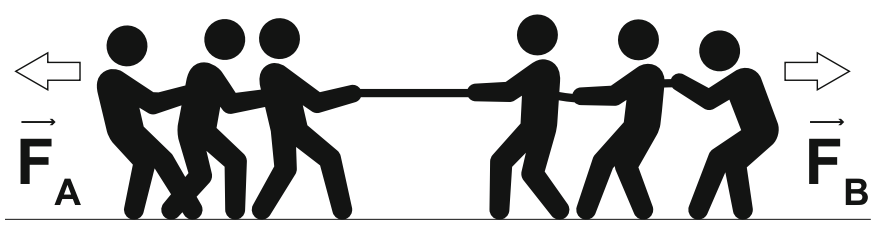
Bibliografia 68
Exercícios comentados 69

1. MECÂNICA

A mecânica clássica ou newtoniana é a parte da Física que estuda os movimentos dos corpos, sua evolução temporal e as equações matemáticas que os determinam.

De acordo com esta área de estudos, as leis matemáticas permitem a descrição completa do movimento de qualquer corpo no espaço e no tempo, conceitos estes que são absolutos. O sistema newtoniano foi contestado com o surgimento da teoria da relatividade e da teoria quântica, que abordaram, respectivamente, a relatividade do tempo e do espaço e o estudo de sistemas físicos em dimensões atômicas.

Um movimento, por exemplo, pode ser descrito pela cinemática analisando a velocidade do móvel, a distância percorrida, o tempo e a aceleração. Se investigarmos suas causas, ou seja, as forças que justificam o movimento, tem-se um sistema dinâmico. Caso as forças que atuam no corpo estejam em equilíbrio e a aceleração seja nula, o sistema estará em equilíbrio estático.



$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \text{equilíbrio estático} \rightarrow \text{repouso} \\ \text{equilíbrio dinâmico} \rightarrow \text{M.R.U.} \end{cases}$$

Caso ocorra o equilíbrio dinâmico e a resultante das forças seja nula, ou seja, o corpo esteja com velocidade constante **V** em **movimento uniforme**, a posição **s** do móvel pode ser determinada no instante **t** por meio da seguinte expressão matemática: $S = S_0 + vt$. Com essa fórmula, partindo da posição atual do corpo e conhecendo a sua velocidade, é possível determinar a posição futura.

No movimento uniforme, o valor do módulo da velocidade é constante e não nulo, isto é, o móvel percorre espaços iguais em intervalos de tempo iguais. Se além da velocidade apresentar valor constante e a trajetória for retilínea, o movimento é dito movimento retilíneo uniforme **(MRU)**.

Para o caso de velocidade positiva (**v > 0**), teremos:

- As posições crescem algebricamente com o tempo, ou seja, o corpo caminha no sentido positivo da trajetória. Dizemos que o movimento é **progressivo.**

Para o caso de velocidade negativa (**v < 0**), teremos:

- As posições decrescem algebricamente com o tempo, ou seja, o corpo caminha no sentido contrário ao positivo da trajetória. Nessa circunstância, dizemos que o movimento é **retrógrado**.

A representação das forças que atuam sobre um corpo pode ser feita por um vetor. Os vetores são representações matemáticas por meio de uma seta que indicam módulo, direção e intensidade.



- Intensidade (módulo): | F |= 20 N;
- Direção: horizontal;
- Sentido: para a direita.

Observe que:

$$\vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \Delta v \rightarrow \text{variação de velocidade} \\ \Delta t \rightarrow \text{variação de tempo} \end{cases}$$

Sistema Internacional de Unidade (SI)

- Força resultante (R): Newton (N);
- Aceleração (a): metros por segundo ao quadrado (m/s2);
- Massa (m): quilograma (kg).

Importante observar: a massa é uma grandeza escalar porque ela fica caracterizada quando conhecemos um número ou um número e uma unidade. Grandezas escalares somente possuem intensidade ou módulo. São grandezas escalares: massa, variação de tempo, temperatura, volume e índice de refração.

Grandezas vetoriais são determinadas por uma direção, um sentido, um número e uma unidade. A representação de uma grandeza vetorial é por meio de um segmento orientado de uma reta:



São grandezas vetoriais: força, aceleração, velocidade, impulso e quantidade de movimento.

Função horária dos espaços

É a função que determinará a posição que um móvel vai apresentar em qualquer instante de tempo.

O movimento uniforme (UM) tem como principal característica a velocidade escalar constante.

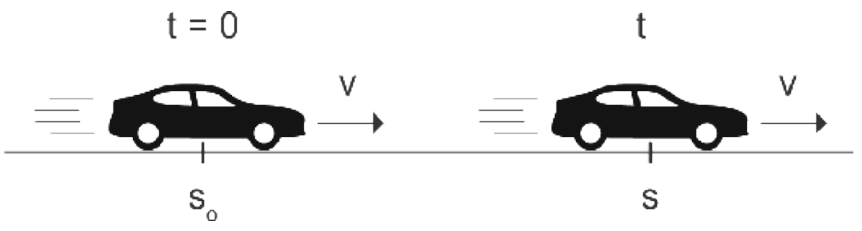
Isso porque, quando qualquer móvel em movimento com velocidade escalar constante, não apresenta variação da velocidade escolar, portanto a aceleração escalar é nula. Isso pode causar estranheza ao aplicarmos o conceito em nosso dia a dia, já que devemos acelerar o motor quando queremos que o carro ande mais rápido. Tal pensamento também acontece nas subidas, uma vez que temos de acelerar para que a velocidade do carro permaneça a mesma, ou seja, mantenha-se constante.

Explicando: em Física, aceleração tem a ver com somente um significado: a variação da velocidade por unidade de tempo. Então, se não há variação de velocidade, não há aceleração. Isso quer dizer que, se um automóvel está em um movimento uniforme, existirão deslocamentos iguais em intervalos de tempos iguais também.

Ou seja, quando um corpo está em movimento uniforme, sua posição varia no decorrer do tempo em relação a um referencial.

A função que relaciona a posição **s** com o tempo **t** é denominada **função horária das posições do movimento** e é representada por: **s = f(t)** (lê-se: s é uma função de t).

Para obter essa função, considere um corpo percorrendo com velocidade constante a trajetória da figura:



Nesse caso:
- s_1: s_0 é a posição inicial do corpo $t_1 = t_0$ é o instante inicial ($t_0 = 0$);
- t_2: t é o instante final;
- s_2: s é a posição do corpo no instante final t.

Usando a fórmula da velocidade média, temos:

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \longrightarrow v_m = \frac{s - s_0}{t} \longrightarrow s - s_0 = vt$$

Desta última, resulta:

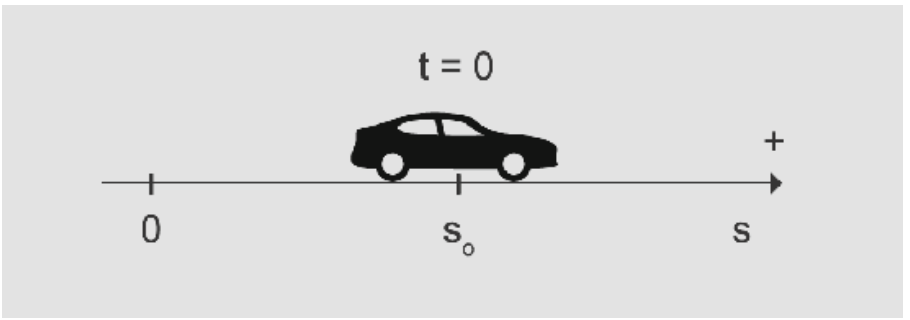
$$s = s_{0 + vt}$$

Como a função $s = s_{0 + vt}$ é do 1° grau em relação ao tempo, o seu gráfico é representado por uma reta.

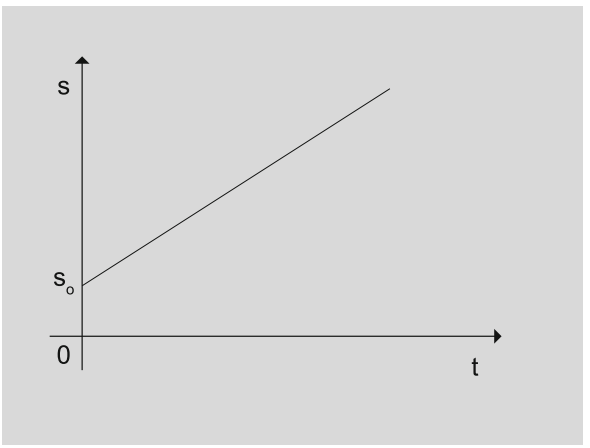
1° caso: velocidade positiva (**v > 0**).

Neste caso, as posições crescem algebricamente com o tempo, isto é, o corpo caminha no sentido positivo da trajetória. Dizemos que o movimento é **PROGRESSIVO.**

Representação da trajetória:



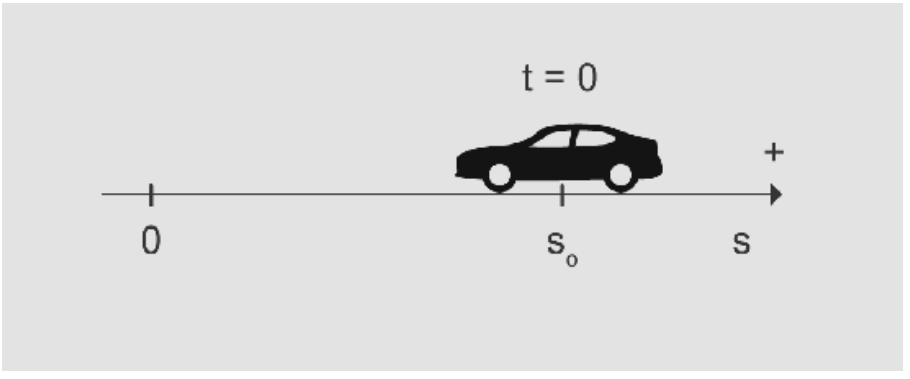
O gráfico representativo é:



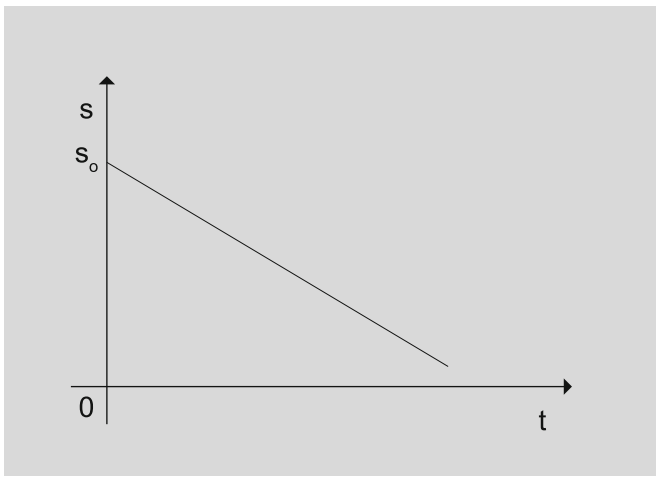
2° caso: velocidade negativa (**v < 0**).

Nesta situação, as posições decrescem algebricamente com o tempo, isto é, o corpo caminha no sentido contrário ao positivo da trajetória. Dizemos que o movimento é **RETRÓGRADO**.

Representação da trajetória:



O gráfico representativo é:



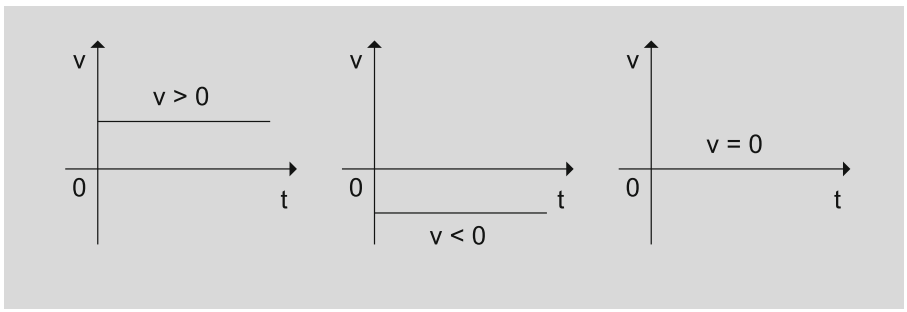
Notas:
No movimento uniforme:
• a velocidade escalar é sempre constante:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t} = cte \neq 0$$

• a aceleração escalar é sempre zero, ou seja, enquanto o móvel se desloca, não alteração da aceleração nele:

$$a = a_m = constante = 0$$

No movimento uniforme, o diagrama da velocidade em função do tempo v x t é uma reta paralela ao eixo dos tempos devido à velocidade ser constante e não variar ao longo do tempo.



Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - MRUV

Um movimento é chamado uniformemente variado quando a relação espaço-tempo é do 2º grau, isto é:

$$f(x) = c + bx + ax^2$$

Se a aceleração escalar de um móvel for constante e não nula em uma trajetória retilínea, então ele estará em movimento retilíneo uniformemente variado.

a) função horária do espaço no MUV;

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

b) função horária da velocidade no MUV;

$$v = v_0 + at$$

c) a aceleração escalar.

O movimento pode ser classificado em:

Movimento acelerado	Movimento retardado
O módulo da velocidade aumenta.	O módulo da velocidade diminui.
v e ***a*** com mesmo sinal.	***v*** e ***a*** com sinais postos.

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = constante \neq 0$$

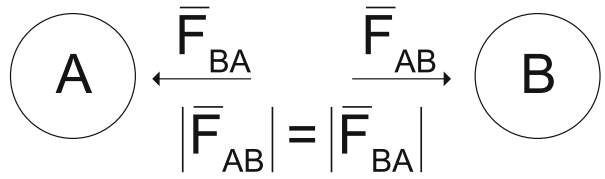
Equação de Torricelli

A importância da equação de Torricelli se justifica por ser a única que relaciona espaço percorrido, velocidade e aceleração de um móvel, mas sem depender do tempo**.** Ganhou o nome do físico italiano Evangelista Torricelli, cientista atuante no século 17, responsável por várias descobertas cientificas.

No exercício seguinte, observamos a aplicação alguns dos conceitos de dinâmica:

Importante observar:

"As forças de ação e reação são forças trocadas entre dois corpos, por isso, nunca se equilibram."



2. ENERGIA

A unidade utilizada para quantificar a energia no sistema internacional é o joule (J), mas usualmente se utiliza a caloria (cal) – um joule equivale a 0,24 cal. Nas ciências biológicas e na nutrição, utiliza-se a "caloria nutricional" porque a caloria é uma unidade muito pequena. Uma xícara pequena de café com açúcar possui 33 kcal ou 33.000 cal ou 33 "cal nutricionais". O joule e o quilo joule (KJ) são mais utilizados quando são necessários cálculos em sistemas físicos.

Os sistemas que não transformam energia são chamados de conservativos. Nesse modelo, a energia final é igual à energia inicial. Nesses sistemas, não ocorrem perdas de energia. Assim, a soma das energias cinética (Ec) e potencial (Ep) é constante e é denominada energia mecânica.

$$E_C + E_P = Constante$$

A energia cinética está relacionada ao movimento de um corpo e é definida pelo produto de sua massa (m) com sua velocidade (v):

$$E_C = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

A energia potencial gravitacional (E_p) é a energia armazenada que um corpo possui por estar situado a uma certa altura (**h**) em relação a um plano horizontal de referência:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

A rapidez da transformação da energia por um dispositivo para cumprir determinada função é denominada potência. A potência média (Pm) será a quantidade de energia transferida em um intervalo de tempo $P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

A unidade utilizada para quantificar a potência no sistema internacional é o $\frac{\text{Joule}}{\text{segundo}} = \left(\frac{J}{s}\right) = \text{Watt} = (W)$. Como (W) é uma unidade muito pequena, usamos seus múltiplos: 1 kW , 1000 W = 103 W: Megawatt (MW): 1 MW = 106 W; Gigawatt (GW): 1 GW = 109 W.

Transformação de energia

As fontes de energia podem ser renováveis e não renováveis. As renováveis vêm de recursos naturais que são naturalmente reabastecidos, como o sol, o vento, a chuva e as marés. Já as não renováveis têm recursos limitados que dependem da disponibilidade de riquezas naturais do nosso planeta. São recursos não renováveis: petróleo, carvão, gás natural, minérios e substâncias radioativas.





Fonte: Ministério de Minas e energia//portal Brasil Publicação: 17/03/2017; Petrobrás blog: fatos e fotos. Publicação: 28/03/2014

O método de transformação de energia ocorre continuamente tanto no mundo como nos organismos vivos. A energia solar que chega até a terra é decorrente do processo de fusão nuclear. Nos telhados de algumas casas, podem haver painéis de células fotovoltaicas para captação de energia solar e conversão em energia elétrica. Nas usinas nucleares, ocorre a transformação da energia produzida por fissão nuclear em energia elétrica. Já aerogeradores transformam a energia mecânica dos ventos em energia elétrica.

Energia solar

O sol é a fonte primordial de energia para nós, humanos. Fornece luz, calor e parte dela também é assimilada pelos organismos vivos e armazenada em substâncias orgânicas. Em um segundo momento, essa energia absorvida pode ser disponibilizada como nutrientes para outros seres vivos ou se torna matéria-prima de combustíveis, como o petróleo e o álcool. Uma de suas principais vantagens é não causar danos ambientais diretos. Mas há métodos mais simples de captar a energia do sol. Por exemplo, se você enrolar metros e metros de mangueira preta expostos ao sol, a cor escura 'absorve' a energia no feitio de calor, que pode esquentar a água no interior da mangueira.

Energia nuclear

É produzida nas usinas termonucleares, que tem o urânio e outros elementos como combustível. Com ela, produzimos eletricidade por meio de vários processos físico-químicos.

Energia eólica

É aquela que capta a energia do ar em movimento e, com isso, transforma o vento, ou melhor, sua energia em energia elétrica. Isso é feito por meio de aerogeradores. Está muito presente em fazendas, chamadas de fazendas de energia eólica. O norte e nordeste do país concentram o maior número delas.

Biogás

Quando os resíduos orgânicos se decompõem, por meio de bactérias, produzem o combustível biogás, que se apresenta em estado gasoso. Em sua composição, encontram-se o metano, dióxido de carbono e também se detecta a presença de outros gases em proporções ínfimas. Entre as diversas transformações energéticas que a obtenção do biogás faz, uma delas é a mecânica, alcançada pelo método de combustão. E, por meio da energia mecânica, chegamos à energia elétrica, que é ativada por gerador.

Mas o processo que transforma a energia ocorre continuamente tanto no mundo como nos organismos vivos. Por exemplo, ao ingerirmos alimentos, acontecem transformações bioquímicas por ações de enzimas que os convertem em subprodutos utilizados por nosso corpo.

Por meio da combustão da gasolina e de outros derivados do petróleo, libera-se energia térmica na forma de energia térmica, que pode ser transformada em energias cinética (energia de movimento) ou elétrica. Esta última, por sua vez, presente no interior das lâmpadas, converte-se em energia luminosa.

Atenção: foi o empresário estadunidense Thomas Edison (1847-1931) que organizou as primeiras instalações para a produção de energia elétrica. Ele desenvolveu o que ficou conhecido como usinas termelétricas, que transformam o calor da combustão do carvão e do petróleo (energia química) em energia elétrica. A maior parte da produção mundial de energia elétrica – cerca de 65% – é feita por usinas termelétricas.

3. HIDROSTÁTICA

É o campo da Física que estuda os fluidos que estão em repouso. Apesar de o termo hidrostática significar "fluido da

água", na Física, fluidos se referem a líquidos e gases. As forças que atuam nos fluidos em repouso são perpendiculares. São estudados na hidrostática: massa específica, densidade, densidade absoluta, densidade relativa, pressão, força e empuxo.

Densidade (d)

A razão entre a massa e o volume de uma substância resulta em sua massa específica **(μ)**:

$$\mu = \frac{m}{V}$$

- μ = massa específica da substância;
- m = massa da substância;
- V = volume da substância.

No sistema internacional de unidades, temos kg/m^3 como unidade de massa específica e empregamos esse conceito quando há **corpos homogêneos.**

A quantidade da massa que o corpo possui**,** dividida pelo volume da massa, determina sua **densidade absoluta (d)**:

$d = \frac{m}{V}$, unidade no SI ($kg/m^{3)}$

$d_{água}$ = 1000 kg/m3

Já a razão das densidades absolutas de duas substâncias definem a **densidade relativa**:

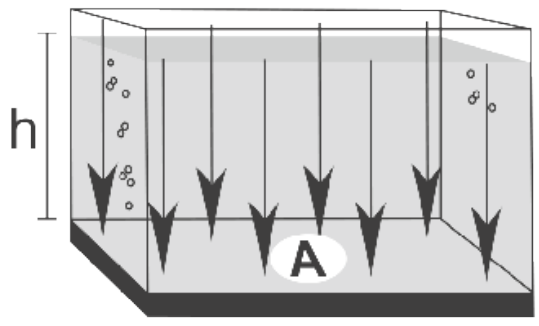
$d_{1,2} = \frac{d_1}{d_2}$, d2 é normalmente escolhida como padrão.

Considera-se a água como padrão pois a maior parte das substâncias se contrai à medida que a temperatura diminui. Ao ser resfriada entre 4 e 0 °C, porém, a água se expande. À temperatura ambiente de 25 °C, uma determinada massa de água tem densidade máxima (1 g/cm3).

Pressão hidrostática

É a força da gravidade que o líquido exerce. Ou seja, ao mergulharmos em uma piscina, sentimos a pressão da água sobre nós. E, quanto mais fundo vamos, maior ela será. Se o líquido for mais denso que a água, maior ainda será essa pressão.

Entenda: a pressão hidrostática depende da profundidade, da densidade do líquido e da gravidade local. Então considere um recipiente munido de um líquido homogêneo, conforme a ilustração abaixo:



- A = área da base do recipiente;
- h = altura da coluna do líquido.

Como podemos perceber, o líquido exerce, devido ao seu peso (P), uma pressão (P_H) sobre a área da base (A) do recipiente. Assim sendo:

$$P_H = \frac{P}{A}$$

Entretanto vimos que P = m.g e que d = m/V, portanto o peso do líquido pode ser expresso por:

$$P = d.V.g$$

Onde:
- d é a densidade do líquido;
- V é o volume do líquido.

Além disso, o volume do liquido no recipiente pode ser encontrado da seguinte forma.

$$V = A.h$$

Em que:
- A = área da base;
- H = altura da coluna.

Assim temos que:

$$P = d.A.h.g$$

Portanto:

$$P_H = \frac{P}{A} = \frac{d \cdot h \cdot \cancel{A} \cdot g}{\cancel{A}}$$

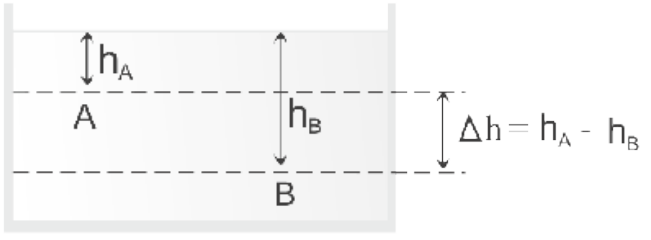
$$P_H = d \cdot g \cdot h$$

Importante: quanto maior a profundidade (h), maior será a pressão hidrostática realizada.

Teorema de Stevin

Foi o físico Simão Stevin que, em 1586, calculou pela primeira vez a pressão de um líquido em repouso e superfície livre no contato com a atmosfera. Seu teorema diz: "A diferença entre as pressões de dois pontos de um fluido em equilíbrio é igual ao produto entre a densidade do fluido, a aceleração da gravidade e a diferença entre as profundidades dos pontos".

Vejamos na ilustração:



Calculemos agora a diferença da pressão entre os pontos A e B.

$$P_A = d_E \cdot g \cdot h_A$$

$$P_B = d_E \cdot g \cdot h_B$$

A diferença da pressão entre estes pontos é dada por:

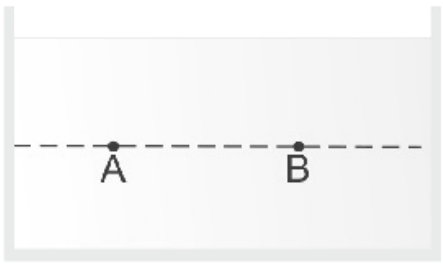
$$P_A - P_B = d_E \cdot g \cdot h_A - d_E \cdot g \cdot h_B$$

$$P_A - P_B = d_E \cdot g \cdot (h_A - h_B)$$

$$\boxed{P_A - P_B = d_E \cdot g \cdot \Delta h}$$

Isto nos mostra que a diferença de pressão entre os dois pontos de um líquido homogêneo e em equilíbrio é igual ao produto de peso específico (d_{Eg}) do fluido pela diferença no nível entre os pontos.

Assim sendo, para dois pontos no mesmo nível, temos:



$$P_A - P_B = d_E \cdot g \cdot \Delta h\ ,\quad \Delta h = 0\ \text{, porém } \Delta h = 0$$

$$P_A - P_B = d_E \cdot g \cdot 0$$

$$P_A - P_B = 0 \quad \therefore$$

$$\boxed{P_A = P_B}$$

Ou seja, para todos os pontos situados no mesmo nível (na mesma profundidade), há uma mesma pressão (isobárica), pois $P_A = P_B$.

Pressão atmosférica

É a pressão exercida por vários gases sobre a superfície da terra. Esses gases realizam pressão em todos os corpos. Pelo teorema de Stein, vimos que as pressões exercidas por fluidos em equilíbrio são iguais para todos os pontos no mesmo nível.

$$P_A = P_B$$

$$\boxed{P_{Atm} = d_{Hg} \cdot g \cdot h}$$

A pressão atmosférica em nível do mar é de 1×105 Pa.

$1\ atm \cong 10^5\ Pa$

Pressão absoluta

Consideremos agora um liquido homogêneo em equilíbrio em um recipiente exposto à pressão atmosférica.

Segundo o teorema de Stevin, temos que:

$$P_A - P_B = d_L \cdot g \cdot \Delta h$$

Entretanto o ponto B está sujeito à pressão atmosférica e, portanto, PB = Patm. Assim temos:

$$P_A = P_{atm} + d_L \cdot g \cdot \Delta h$$

Porém Δh representa exatamente a profundidade h na qual o ponto B está situado. Portanto:



Em outras palavras, podemos dizer que o ponto A está sujeito a duas pressões: a pressão exercida pelo líquido mais a pressão externa que, nesse caso, é a pressão atmosférica. Apresentando a expressão acima de maneira diferenciada, temos:

$$P_T = P_{EXT} + P_{LIQ}$$

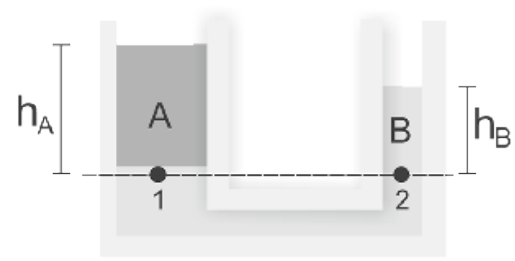
$$\boxed{P_T = P_{EXT} + d_E \cdot g \cdot h}$$

- P_T = pressão total;
- P_{EXT} = pressão externa;
- $d_E \cdot g \cdot h$ = pressão hidrostática.

Vasos comunicantes

São recipientes geralmente em formato de U para se estudar a pressão e a relação de densidades de líquidos imiscíveis.

Considere um vaso comunicante na forma de "U" contendo dois líquidos não miscíveis de densidades d_A e d_B, respectivamente, conforme a figura abaixo:



Onde $d_A < d_B$

- d_A = densidade do liquido A;

- d_B = densidade do liquido B.

Ao analisarmos os pontos 1 e 2 veremos que estes possuem a mesma pressão, pois pertencem ao mesmo plano horizontal. Sendo assim, temos:

$$P_1 = P_2$$

$$P_{atm} + d_A \cdot g \cdot h_A = P_{atm} + d_B \cdot g \cdot h_B$$

$$d_A \cdot h_A = d_B \cdot h_B$$

Ou simplesmente:

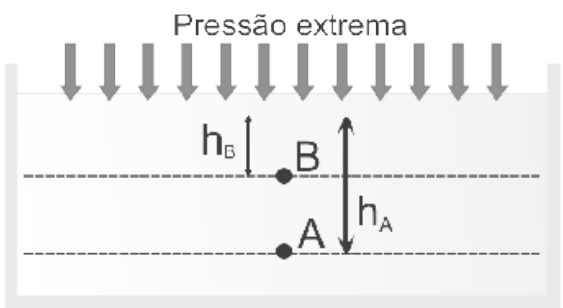
$$\boxed{\frac{h_A}{h_B} = \frac{d_B}{d_A}}$$

Isso nos mostra que as alturas são inversamente proporcionais às suas densidades.

Ou seja, quanto maior a densidade, maior será a coluna do líquido.

O **teorema de Pascal** estabelece que a variação da pressão exercida num ponto em um líquido ideal em equilíbrio se transmite integralmente a todos os pontos desse líquido e às paredes do recipiente que o contém.

Considere dois pontos distintos situados em um liquido de densidade **d** homogêneo contido em um recipiente, conforme a ilustração abaixo:



A pressão em **A** é dada por:

$$P_A = P_{EXT} + d \cdot g \cdot h_A$$

A pressão em **B** é representada por:

$$P_B = P_{EXT} + d \cdot g \cdot h_B$$

Suponhamos agora que a pressão externa aumente para P_{EXT}. Apesar da mudança, a densidade dos líquidos não é alterada, pois estes são praticamente incompressíveis (volume permanente). Assim, temos:

$$P'_A = P'_{EXT} + d \cdot g \cdot h_A$$

$$P'_B = P'_{EXT} + d \cdot g \cdot h_B$$

$$\Delta P_A = P_A - P'_A \text{ e } \Delta P_B = P_B - P'_B$$

$$\Delta P_A = P_{EXT} + \cancel{d \cdot g \cdot h_A} - (P'_{EXT} + \cancel{d \cdot g \cdot h_A})$$

$$\boxed{\Delta P_A = P_{EXT} - P'_{EXT}}$$

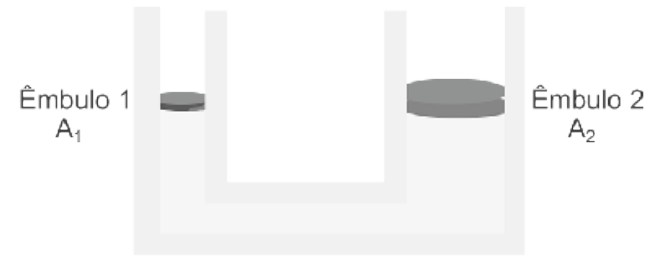
$$\Delta P_B = P_{EXT} + \cancel{d \cdot g \cdot h_B} - (P'_{EXT} + \cancel{d \cdot g \cdot h_B})$$

$$\boxed{\Delta P_B = P_{EXT} - P'_{EXT}} \quad \therefore$$

$$\boxed{\Delta P_A = \Delta P_B}$$

Prensa hidráulica

Esta é constituída de dois cilindros ligados entre si cujas secções transversais possuem áreas diferentes. No interior desse cilindro, existe um líquido incompressível e homogêneo que sustenta dois êmbolos de áreas (A_1 e A_2) coincidentes com as áreas das secções transversais dos cilindros, conforme a figura abaixo.



A aplicação de uma força F_1 no êmbolo de menor área (A1) resultará em uma variação de pressão dada por:

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1}$$

Conforme a lei de Pascal, a variação de pressão também deve ser transferida ao outro ramo do vaso.

Logo:

$$\Delta P = \frac{F_2}{A_2}$$

Igualando as duas expressões temos que:

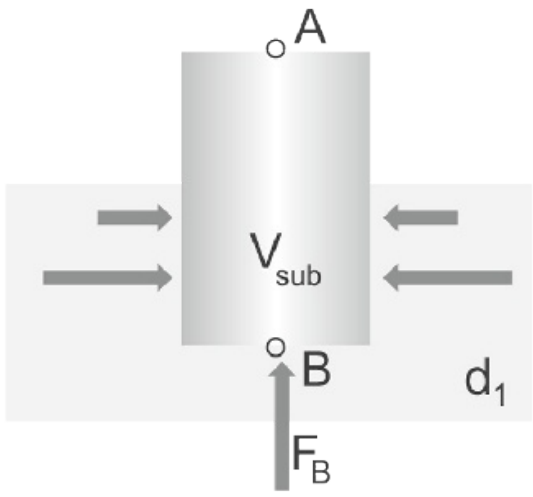
$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}}$$

Empuxo

Segundo Arquimedes, "a força de empuxo de um corpo imerso em fluido é igual ao peso do fluido deslocado". Essa é

a definição a força de empuxo gerada por um corpo imerso em um fluido.

O empuxo pode ser observado em corpos que estejam parcialmente ou totalmente imersos ou ainda boiando. É descrito pelo princípio fundamental da dinâmica $\vec{R} = m.\vec{a}$ e pela 3ª lei de Newton (da ação e reação).



Sendo que $V_{sub.}$ é o volume submerso do bloco, o volume total do objeto somente é utilizado nos cálculos quando este estiver totalmente imerso no fluido.

Caso não exista nenhuma pressão agindo de cima para baixo, a força FB provocada pela pressão hidrostática no ponto B empurra o bloco para cima $E = F_B$.

$$E = P_b . A$$

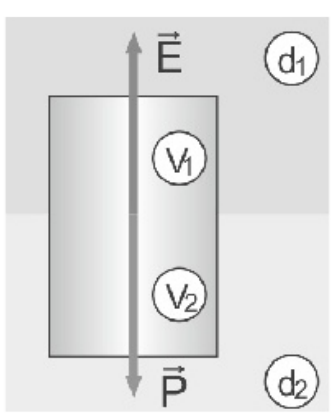
$$E = d_L . g . h. A$$

Note que h corresponde à altura submersa do bloco. Dessa forma:

$$E = d_L . g. h_{sub} . A$$

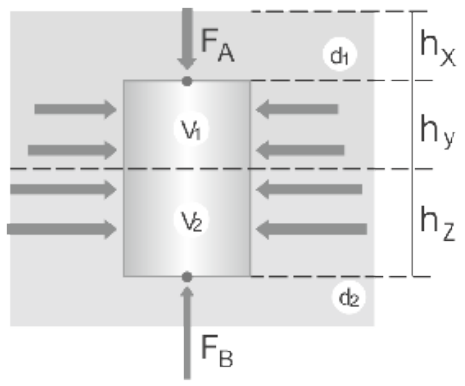
$$E = d_L . g . V_{sub}$$

Empuxo resultante em um corpo submerso entre dois fluidos não miscíveis entre si de densidades diferentes.



Vejamos agora a expressão que determina o valor de empuxo em casos onde o objeto está submerso entre dois fluidos não miscíveis entre si de densidades diferentes.

Suponha um sistema constituído de um bloco totalmente imerso sobre dois fluidos de densidades $d_1 < d_2$, homogêneo, não miscíveis entre si, onde V1 representa o volume do bloco imerso no fluido 1 e V_2 representa o volume do bloco imerso no fluido 2, conforme a ilustração abaixo.



Qual a expressão que determina o empuxo total realizado pelos dois fluidos?

Na figura, podemos notar novamente que as forças horizontais provocadas pelas pressões dos líquidos se cancelam, mas as forças horizontais não, pois a força aplicada na parte inferior do bloco (F_B) é maior que a utilizada na área superior do bloco (F_A).

Sendo assim, podemos perceber que o empuxo pode ser calculado por meio da resultante dessas forças da seguinte forma:

$$E = F_B - F_A = P_B \cdot A - P_A \cdot A$$
$$E = A \cdot (P_B - P_A)$$
$$E = A \cdot [(\cancel{d_1 \cdot g \cdot h_X} + d_1 \cdot g \cdot h_Y + d_2 \cdot g \cdot h_Z) - \cancel{d_1 \cdot g \cdot h_X}]$$
$$E = A \cdot (d_1 \cdot g \cdot h_Y + d_2 \cdot g \cdot h_Z)$$
$$E = d_1 \cdot g \cdot h_Y \cdot A + d_2 \cdot g \cdot h_Z \cdot A$$
$$\boxed{E = E_1 + E_2}$$

Note que a expressão acima nos mostra que o empuxo total provocado pela imersão de um bloco entre dois fluidos distintos é igual na soma entre os empuxos provocados por cada fluido. Este fato também pode ser observado por objetos imersos entre três ou mais fluidos:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

4. IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Quantidade de movimento linear $\vec{Q}$ é a grandeza física que estuda as transferências de movimento de um objeto para outro, como ocorre com as bolas em um jogo de bilhar. É também conhecida como quantidade de movimento ou movimento linear e relaciona a massa do corpo com sua velocidade.

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

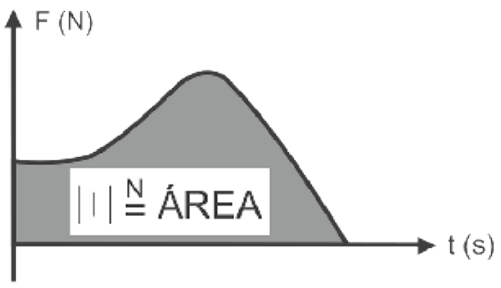
O impulso é provocado pela ação de uma força durante

um intervalo de tempo. Ele mede a variação da quantidade de movimento. Por definição, impulso da força no intervalo de tempo Δt é a grandeza vetorial $\vec{I}$ dada por:

$$\vec{I} = \vec{F}.\Delta t$$

No SI, o módulo do impulso é medido em N.s (Newton vezes segundo).

Para forças variáveis, é possível demonstrar que a área sob o gráfico determina a projeção do impulso no mesmo eixo.

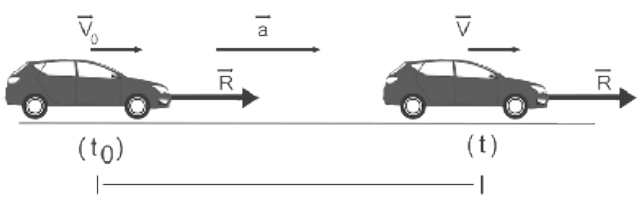


A quantidade do movimento é uma grandeza instantânea porque envolve velocidade vetorial instantânea.

$$\vec{Q} = m \cdot \vec{v}$$

No SI, a unidade de módulo da quantidade de movimento é Kg.m/s. Esta unidade é equivalente à unidade de impulso: $N.s = kg \cdot m/s^2$.

Teorema do impulso (TI)



Na figura acima, temos uma partícula de massa (m) sujeita à ação da força resultante $\vec{R}$, constante e de mesma orientação que o movimento, sendo $\vec{a}$ (aceleração) comunicada por $\vec{R}$, $\vec{V}_0$ (velocidade inicial) da partícula no instante t_0 e $\vec{v}$ e sua velocidade final no instante t. O impulso R que imprime à partícula no intervalo de tempo ($\Delta t = t - t_0$) é dado por:

$$\vec{I}_R = \vec{F}\,\Delta t \quad (I)$$

Como $\vec{R}$ é a resultante, a aplicação do princípio fundamental da dinâmica, tem-se:

$$\vec{R} = m \,.\, \vec{a} \quad (II)$$

Sendo $\vec{R}$ e $\vec{a}$ constantes, é possível escrever que:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

Substituindo (III) em (II):

$$\vec{F} = m \cdot \frac{(\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} \quad (IV)$$

Trocando (IV) em (I):

$$\vec{I}_R = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} \,.\, \Delta t$$

Onde:

$$\vec{I}_R = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

Entretanto os produtos **mv** e **mv0** nada mais são do que as quantidades de movimento da partícula nos instantes final (t) e inicial (t_0), respectivamente.

Logo:

$$\vec{I}_{res} = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

$$\vec{I} = \Delta\vec{Q}$$

Princípio de conservação da quantidade de movimento (CQM)

Tal princípio estabelece que, em um sistema mecanicamente isolado, a quantidade de movimento total permanece constante. Segundo o teorema do Impulso (TI), o impulso resultante é igual à variação da quantidade de movimento.

Como $\vec{I}_R = \vec{R} \,.\, \Delta t$ e no sistema mecanicamente isolado $\vec{R}_{ext} = \vec{0}$, tem-se:

$$0 = \vec{Q}_{final} - \vec{Q}_{inicial}$$

$$\vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}$$

Colisões

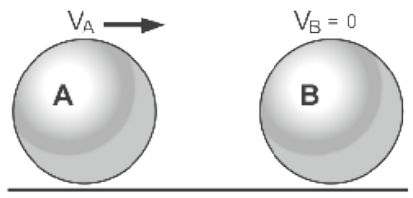
Sempre que dois ou mais corpos colidem, há um choque mecânico. Na análise dos choques mecânicos, a energia mecânica pode ou não se conservar. Mas a quantidade do movimento do sistema formado pelos corpos que colidem sempre se mantém nos choques.

Quando a energia mecânica é preservada durante a colisão, os choques são chamados choques perfeitamente elásticos. Já nos casos em que há a máxima dissipação de energia mecânica, são chamados choques perfeitamente inelásticos (ou anelásticos).

Choque perfeitamente elástico (CPE)

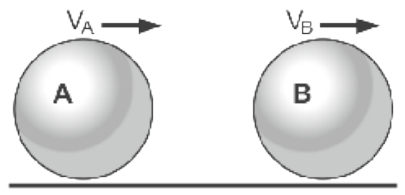
Em um choque perfeitamente elástico, a conservação da

quantidade de movimento, juntamente com a conservação de energia, permite montar duas equações relacionando as velocidades dos corpos antes e após as colisões:



Antes do choque

$$Q_{ant} = m_A \cdot v_A + 0$$



Depois do choque

$$Q_{dep} = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B$$

Pela conservação da quantidade de movimento:

$$Q_{ant} = Q_{dep}$$

$$m_A V_A = m_A V_A' + m_B V_B'$$

Conservação da energia cinética

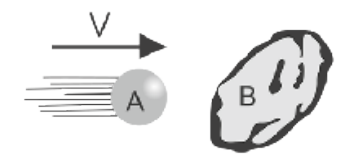
$$E_{ant} = E_{dep}$$

$\frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m_A v_A^{2'}}{2} + \frac{m_B v_B^{2'}}{2}$, teremos:

$$m_A v_A^2 = m_A v_A^{2'} + m_B v_B^{2'}$$

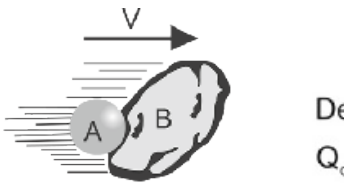
Choque perfeitamente inelástico (CPI)

Nos choques perfeitamente inelásticos, os corpos ficam unidos após o choque, de modo que a perda de energia mecânica é máxima, mas ainda há a conservação da quantidade de movimento.



Antes do choque:

$$Q_{ant} = m_A \cdot v_A + 0$$



Depois do choque:

$$Q_{dep} = (m_A + m_B) \cdot v'$$

$$\vec{Q}_{antes} = \vec{Q}_{depois}$$

$$m_A \cdot v_A + 0 = (m_A + m_B) \cdot v'$$

Geralmente, os choques são parcialmente elásticos e a energia mecânica não é conservada, mas se dissipa parcialmente. Para se ter uma ideia dessa perda de energia em cada colisão parcialmente elástica, define-se uma grandeza denominada **coeficiente de restituição de colisão (e):**

$$e = \frac{|\text{velocidade relativa depois da colisão}|}{|\text{velocidade relativa antes da colisão}|}$$

Principais tipos de choque	Coeficiente de restituição	Energia	Quantidade de movimento
Choque perfeitamente inelástico	e = 0	máxima dissipação Eci > Ecf	constante Qantes = Qdepois
Choque parcialmente elástico	0 < e < 1	dissipação parcial Eci > Ecf	constante Qantes = Qdepois
Choque perfeitamente elástico	e = 1	conservação da energia cinética Eci = Ecf	constante Qantes = Qdepois

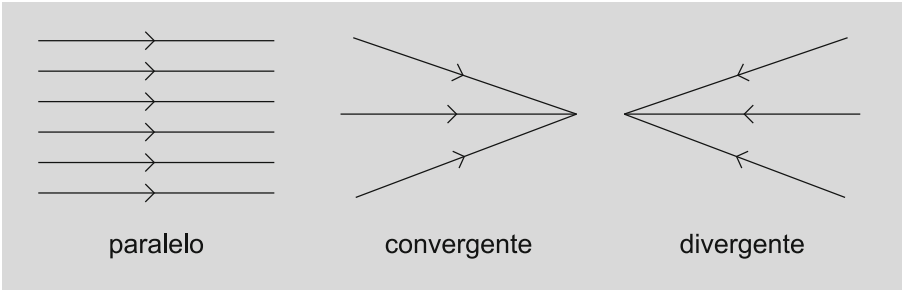
5. ÓPTICA

É a parte da Física que estuda os fenômenos relacionados à luz. No Enem, são mais abordados os seguintes conteúdos de óptica: fenômenos da refração, reflexão e lentes.

Alguns fenômenos luminosos são estudados sem que se conheça anteriormente a natureza da luz. Para tal análise, basta conhecer a informação de raios de luz, os princípios fundamentais e geometria básica.

Raios de luz

A direção e o sentido do desenvolvimento da luz são representadas por linhas. Essas linhas, quando juntas, formam um conjunto que dá origem às linhas de luz. Este pode ser **paralelo, convergente ou divergente.**

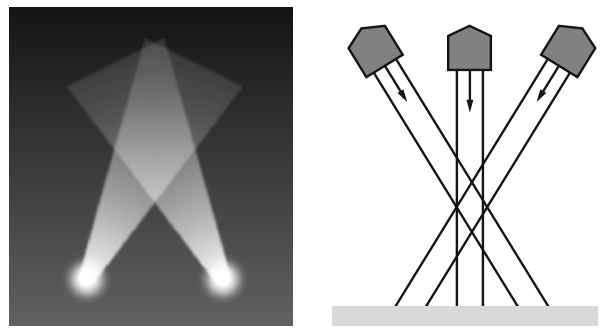


Fontes de luz

Dividem-se em:

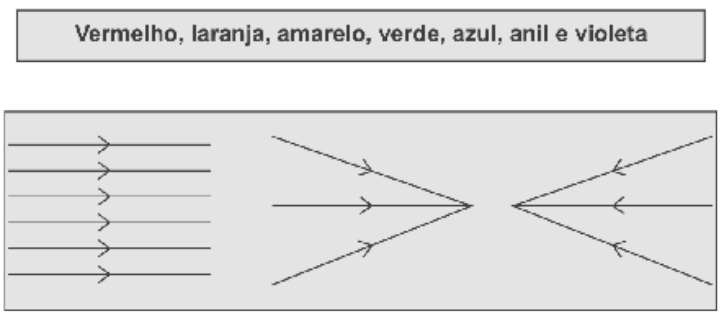
• **Monocromática ou simples:** luz de uma cor única;

• **Policromática ou composta:** é o resultado da superposição de luzes de cores diversas.



Cor dos objetos

Uma luz branca (emitida pelo sol ou por uma lâmpada comum) é constituída por uma infinidade de luzes monocromáticas, as quais são divididas em sete cores principais:



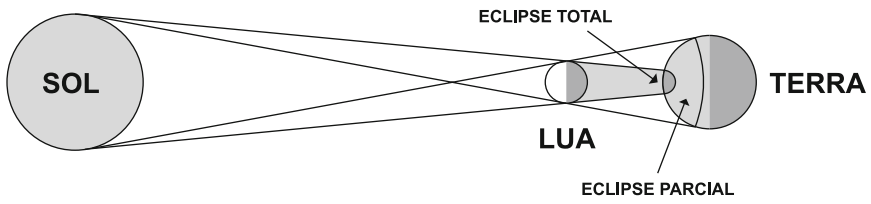
Os objetos refletem uma parte da luz que os atinge. Suas cores dependem da frequência da luz que é refletida. Um corpo iluminado pela luz branca se apresenta branco porque reflete todas as luzes, enquanto outro corpo, também iluminado por luz branca, mostra-se negro porque as absorve completamente.

Princípios

Princípio da propagação retilínea da luz

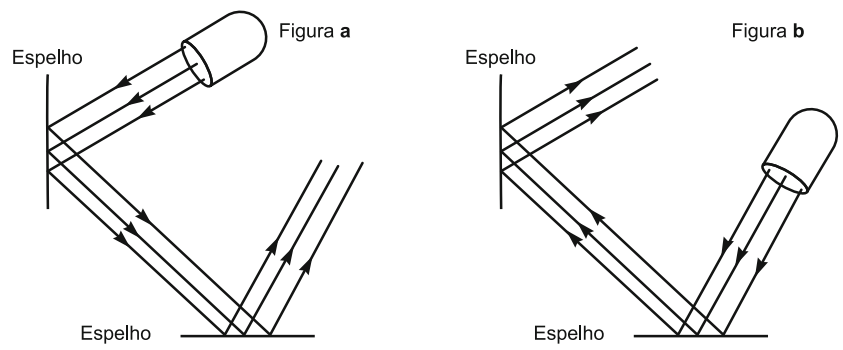
A luz se propaga em linha reta nos meios homogêneos e transparentes. Graças à consequência da propagação, temos:

• **Eclipses:**



• **Princípio da reversibilidade dos raios de luz**

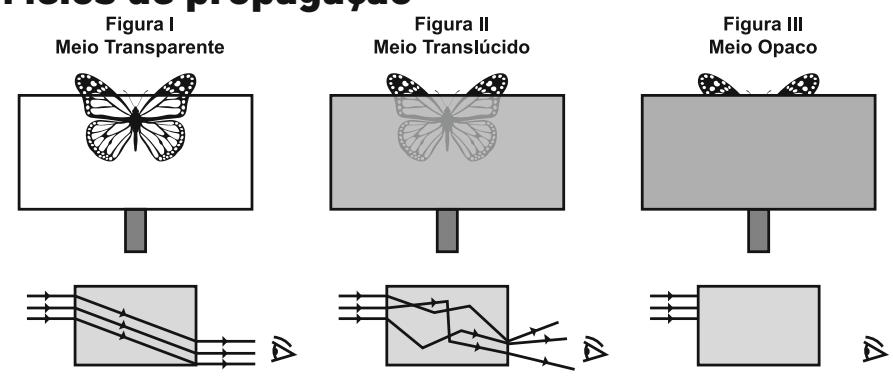
A trajetória seguida pela luz independe do sentido do percurso.



Princípio da independência dos raios de luz:

Quando raios de luz se cruzam, cada um deles segue seu trajeto como se os outros não existissem.

Meios de propagação



I - Meio transparente

Permite a propagação da luz de modo regular, com visão nítida dos objetos. São transparentes: ar, água limpa em poucas camadas, vidro comum, etc.

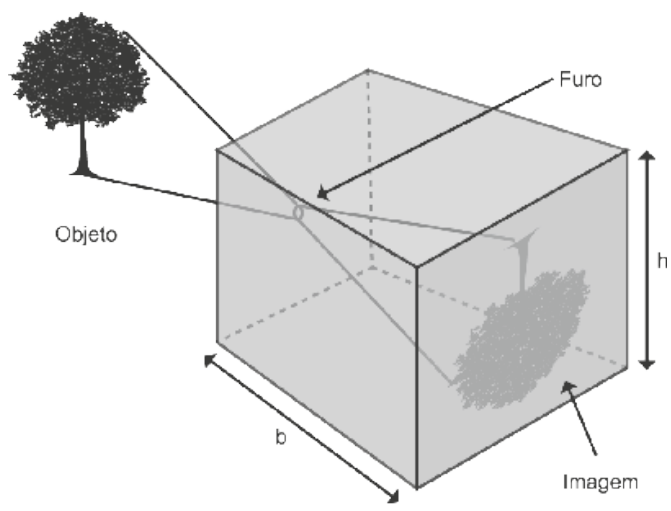
II - Meio translúcido

Permite a propagação da luz de modo irregular, sem visão nítida dos objetos. São eles: vidro jateado, neblina, papel vegetal, etc.

III - Meio opaco

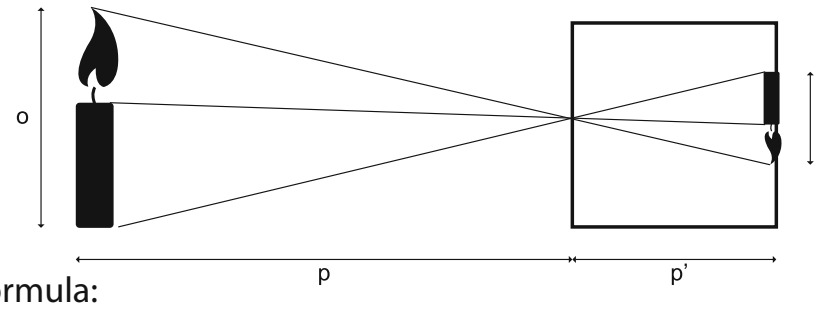
Aqueles que impedem a propagação da luz. São meios opacos: madeira, concreto, chapas metálicas espessas, água em camadas bastante espessas, etc.

Câmara escura



Ao pegarmos uma caixa de paredes opacas com um orifício e a submetermos à exposição de um corpo luminoso ou iluminado, veremos que, do lado oposto ao orifício, teremos a imagem invertida desse corpo.

Relação trigonométrica



Fórmula:

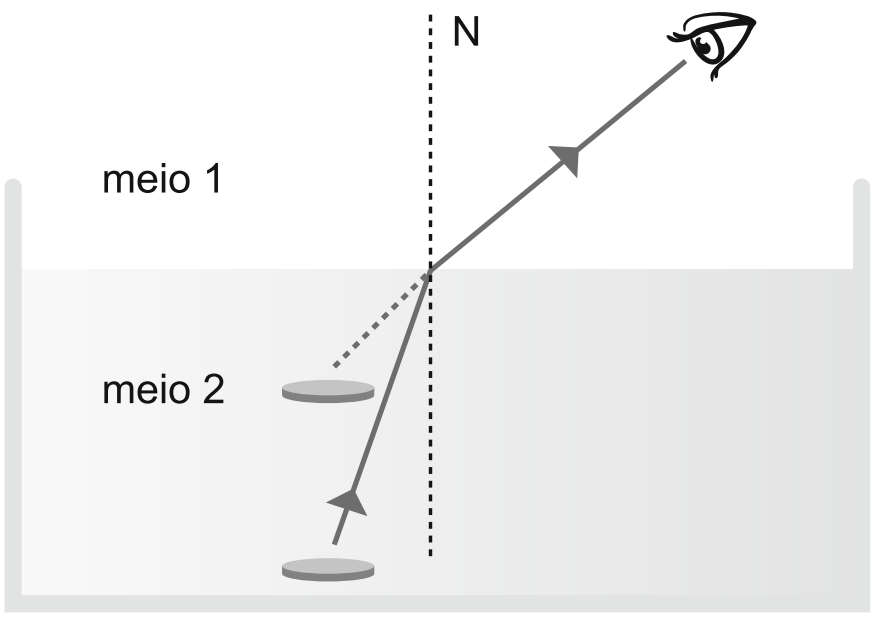
$$\frac{o}{p} = \frac{i}{p'}$$

Onde:

- o = tamanho do objeto;
- i = tamanho da imagem;
- p = distância do objeto à câmara;
- p' = distância da imagem à câmara.

Refração

É um fenômeno óptico que ocorre com a luz quando ela muda de meio de propagação. A condição para ocorrer a refração é a mudança da velocidade da luz nos dois meios. As miragens no deserto, a visão de poças d'água em estradas nos dias ensolarados, o fato de um lápis parecer quebrado quando imerso na água e o de a profundidade de uma piscina parecer menor do que realmente é devem-se a refração da luz. Quanto menor for a densidade do meio, menor será o índice de refração. A visão do sol e da lua avermelhados no horizonte ocorrem porque a atmosfera não é um meio homogêneo e possui diferentes densidades.



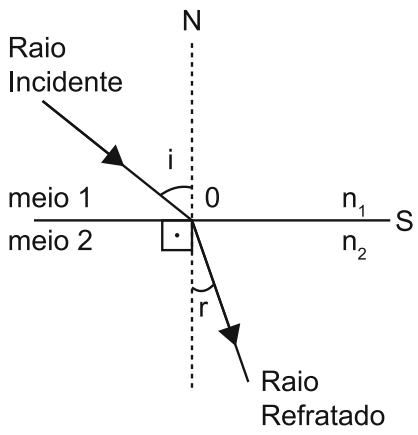
Observando a figura, verifica-se a posição aparente do objetivo no meio 2. Devido ao desvio sofrido pelo raio de luz ao atravessar um meio, ele aparenta se encontrar numa posição acima da real.

Snell e Descartes enunciaram que, "*na refração, o produto do índice de refração do meio, no qual se encontra o raio pelo seno do ângulo que esse raio forma com a reta normal à interface no ponto de incidência, é constante*".

Analiticamente, a lei de Snell-Descartes pode ser escrita da seguinte forma:

$$n_1 . \text{sen } i = n_2 . \text{sen } r$$

Considerando dois meios homogêneos e transparentes (1) e (2), com os respectivos índices de refração absolutos n_1 e n_2 para uma determinada luz monocromática entre a superfície dada, tem-se:

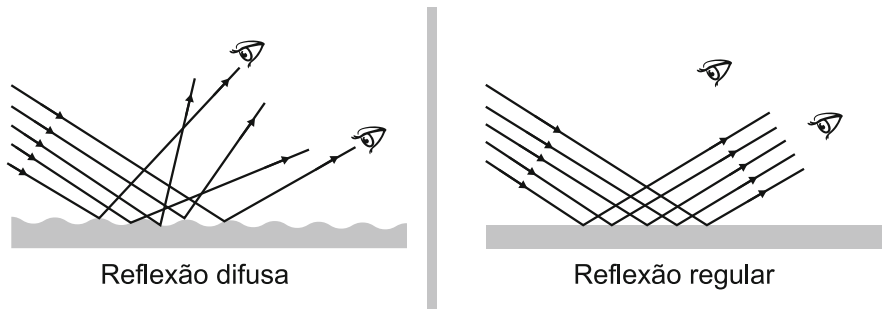


Onde:
- S: superfície de separação entre os meios 1 e 2;
- N: reta normal à superfície no ponto O;
- O: ponto de incidência da luz;
- i: ângulo de incidência da luz, como sendo o ângulo formado entre o raio incidente e a normal N;
- r: ângulo de refração da luz, como sendo o ângulo formado entre o raio refratado e a reta normal N.

Conclui-se que o raio incidente, a reta normal e o raio refratado são coplanares e que a luz, ao passar de um meio menos refringente para um meio mais refringente, tem sua velocidade reduzida e o raio luminoso se aproxima da reta normal.

Reflexão da luz

A reflexão da luz de forma difusa é responsável pela visão dos objetos que nos cercam. A visão dos objetos de uma sala, o espelho, a transmissão de informação por meio de fibra óptica são alguns exemplos do seu próprio fenômeno. Na reflexão, a luz acerta a superfície de separação entre dois meios e retorna ao meio original de propagação.



Observando a figura anterior, verificam-se três princípios da

óptica geométrica: o princípio da propagação retilínea dos raios de luz, da independência dos raios de luz (que podem se cruzar sem mudar a direção) e da reversibilidade. Estes são consequências do princípio da propagação retilínea dos raios de luz, a sombra e o eclipse.

Princípio de propagação retilínea

Nos meios homogêneos e transparentes, a luz se propaga em linha reta. Uma observação bem simples deste fenômeno pode ser feita através da abertura de uma janela em um dia ensolarado. Como podemos perceber na figura abaixo, a luz penetra no cômodo da casa de forma retilínea.



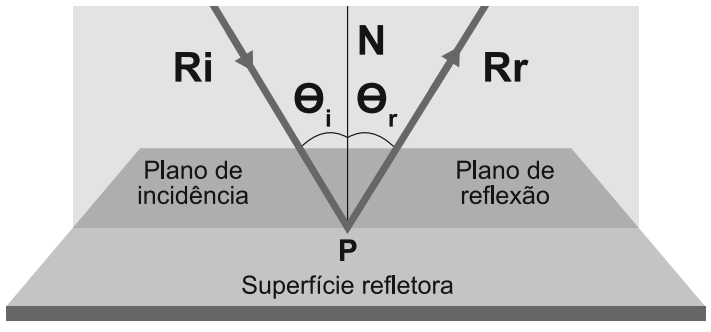
Princípio da independência

Quando os raios de luz se cruzam, cada um deles segue seu trajeto como se os outros não existissem.

Princípio da reversibilidade

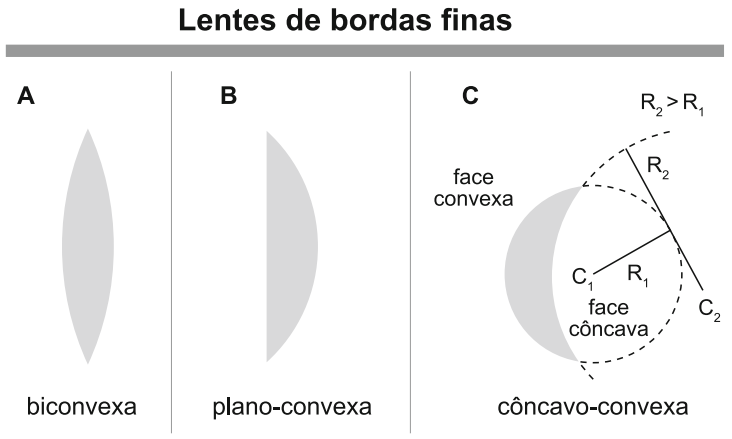
O trajeto de um raio de luz não é alterado quando se trocam posições entre a fonte e observador.

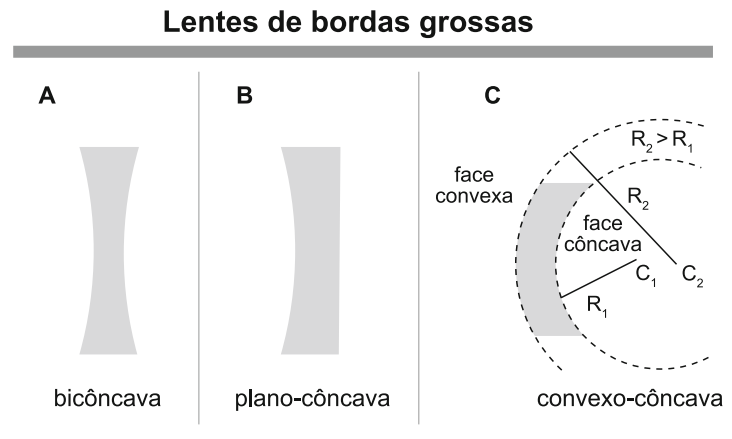
A **reflexão** sempre ocorre segundo duas leis. A 1ª diz que o raio incidente, a reta normal e o raio refletido estão contidos em um mesmo plano. E a 2ª estabelece que o ângulo de reflexão é congruente ao ângulo de incidência ($\theta_I = \theta_R$).



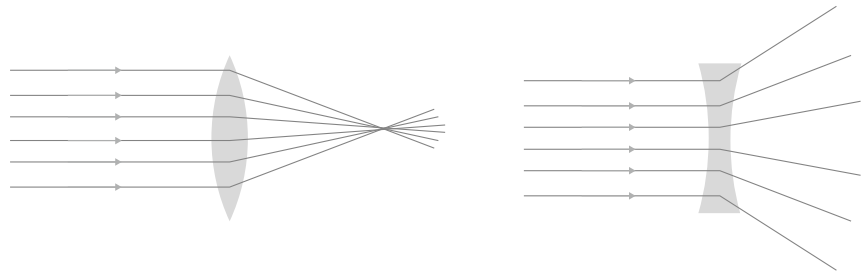
Lentes

Lente esférica é um sistema óptico constituído por três meios homogêneos e transparentes separados por duas superfícies esféricas ou por uma superfície esférica e outra plana. As lentes são utilizadas em óculos, câmeras, filmadoras, etc. Elas podem ser classificadas de acordo as suas formas em bordas finas ou grossas.





Em relação aos raios de luz paralelos que incidem sobre a lente, as que refratam os raios de luz para um único ponto são convergentes. Já as que refratam os raios de luz paralelos para direções diferentes são divergentes.

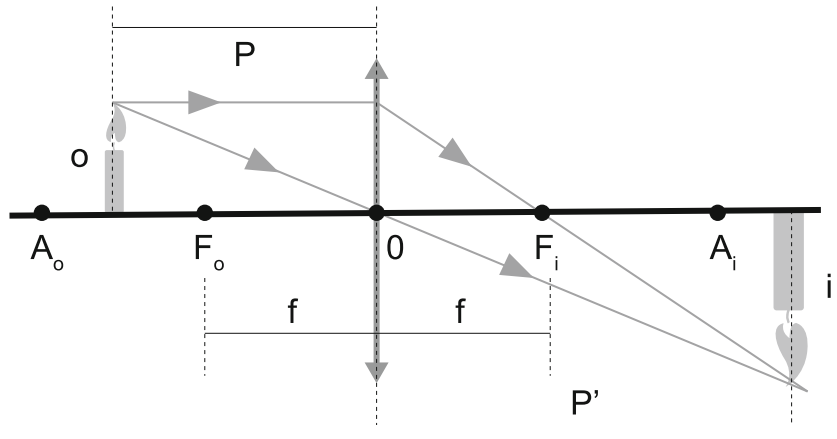


Lente convergente Lente divergente

Equação de Gauss

Podemos determinar analiticamente a posição da imagem de um objeto, dadas a distância focal e sua posição, graças à equação de Gauss.

Considere a seguinte figura, onde está exemplificada a formação de uma imagem em uma lente esférica.



Nesta imagem, são utilizadas as seguintes representações:

- f: distância focal, isto é, a distância de um foco principal

até a lente, com o seguinte sinal convencional:

f > 0; lente convergente
f < 0; lente divergente

- p: distância do objeto até o espelho ou lente:
p > 0: objeto real
p < 0: objeto virtual

- p: distância da imagem até o espelho (ou lente) com um sinal algébrico convencional, de modo que:
p' > 0; imagem real
p' < 0; imagem virtual

- o: tamanho (altura) do objeto.

- i: tamanho (altura) da imagem com o seguinte sinal convencional:
i > 0; imagem direita
i < 0; imagem invertida
Para lentes esféricas, valem as seguintes relações:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} \quad e \quad \frac{i}{o}=\frac{-p'}{p}$$

6. ELETRICIDADE

O crédito da descoberta da eletricidade é dado a Tales de Mileto, filósofo grego que viveu entre os anos 625 a.C. - 547 a.C. considerado o "pai da ciência". Tal evidenciação – que, posteriormente, revolucionou a história – ocorreu quando o estudioso esfregou âmbar e pele de animal e em seguida percebeu que pequenos objetos se movimentavam da mesma maneira que o efeito magnético.

Foram vários anos de pesquisa sobre o assunto. O físico alemão Otto von Guericke, por exemplo, inventou uma máquina de cargas elétricas, enquanto o físico inglês Stephen Gray buscou estudar a diferença do comportamento dos condutores e isolantes elétricos.

Mas foi o cientista estadunidense Benjamin Franklin que inventou o para-raios no século 18. Já no século 19, o italiano Luigi Galvani apresentou ao mundo a pilha voltaica. Foi um grande passo para que o dinamarquês Hans Christian Ørsted chegasse à relação da eletricidade e o magnetismo. E, com isso, surgiu a hidrelétrica.

A eletricidade é a parte da Física que estuda os fenômenos elétricos. Estes podem ocorrer com as cargas elétricas em repouso (eletrostática) ou em movimento (eletrodinâmica). Os fenômenos elétricos que ocorrem em nosso cotidiano são facilmente reconhecíveis: as correntes elétricas nos fios e os relâmpagos ocorrem devido ao movimento dos elétrons. Em um dia seco, é possível ouvir pequenos estalos ao manusearmos um tecido de lã sintética devido às descargas elétricas que ocorrem nos fios (eletrostática).

A carga elétrica é que determinará o processo da interação entre os corpos eletrizados. A eletrização poderá ser por atrito, contato ou indução.

Energia elétrica

A equação par cálculos para a energia elétrica é a seguinte:

$E_{el} = P \cdot \Delta t$

Onde:

- E_{el}: energia elétrica;
- P: potência;
- Δt: variação do tempo.

A próxima equação demonstra o cálculo de um consumo de energia elétrica (dos nossos aparelhos domésticos, por exemplo).

$$K = \frac{T \cdot P}{1000}$$

Onde:

- K: quilowatt hora;
- T: tempo;
- P: potência.

Entenda:

Quer saber quanto consome um chuveiro com potência de 5000 watts sendo utilizado diariamente por 30 minutos?

Primeiro, deve-se calcular a quantidade dos minutos no mês, que serão 900 minutos mensais, totalizando 15 horas.

Aplicando a fórmula:

$$K = \frac{T \cdot P}{1000}$$

Teremos:

$K = (15.5000)/1000$
$K = 75$ kWh

Lei de Ohm

Foi o alemão Georg Simon Ohm quem descobriu e formulou a lei que leva seu nome. Ela relaciona três grandezas elétricas principais, demonstrando como estão intrinsicamente ligadas. Georg realizou um experimento simples, em que ligou a fonte de tensão elétrica a um material, quando notou que corria eletricidade nessa passagem. Mudando a tensão, percebeu a variação da corrente elétrica, então constatou que

as tensões e correntes se relacionavam em uma razão constante. O alemão anotou em seus documentos que, quando dividia uma tensão pela respectiva corrente elétrica, obtia o mesmo número, chamado por ele de resistência elétrica.

Portanto resistência elétrica é a oposição à passagem de corrente elétrica por um material.

Esses estudos propiciaram a Ohm sintetizar uma fórmula matemática para sua lei.

Representando as grandezas temos:
- V: tensão elétrica – volt (V);
- I: corrente elétrica – ampere (A);
- R: resistência elétrica – Ohm (Ω).

Portanto temos como fórmula da lei de Ohm:

$$V = I * R$$

São suas variantes

$$I = \frac{V}{R} \qquad R = \frac{V}{I}$$

Encontramos variações da mesma unidade em diversos cálculos em eletricidade quando convertemos as unidades de medidas para múltiplos e submúltiplos.

Potência elétrica

Entendemos potência elétrica como a rapidez com que um trabalho é realizado – a medida do trabalho realizado por uma unidade de tempo.

O **watt (W)** é a unidade de potência adotada pelo sistema internacional de medidas em homenagem a James Watts, engenheiro e matemático escocês que se dedicou a aprimorar a máquina a vapor.

Vamos entender melhor esse conceito de potência elétrica:

Em equipamentos, irá indicar quanta energia elétrica foi transformada em outro tipo de energia por unidade de tempo.

Exemplo:

Temos a lâmpada incandescente que, em 1 segundo, transforma 100 joules de energia elétrica em energia térmica e luminosa e tem a potência elétrica de 100.

Utilizando a fórmula:
$P = U . i$

Sendo,
- P: potência (W);
- i: corrente elétrica (A);
- U: diferença de potencial (V).

Exemplo:
Determine a potência elétrica desenvolvida por um motor sabendo a diferença de potencial (ddp) nos seus terminais que é de 110 V, além de a corrente que o atravessa ter intensidade de 20A.

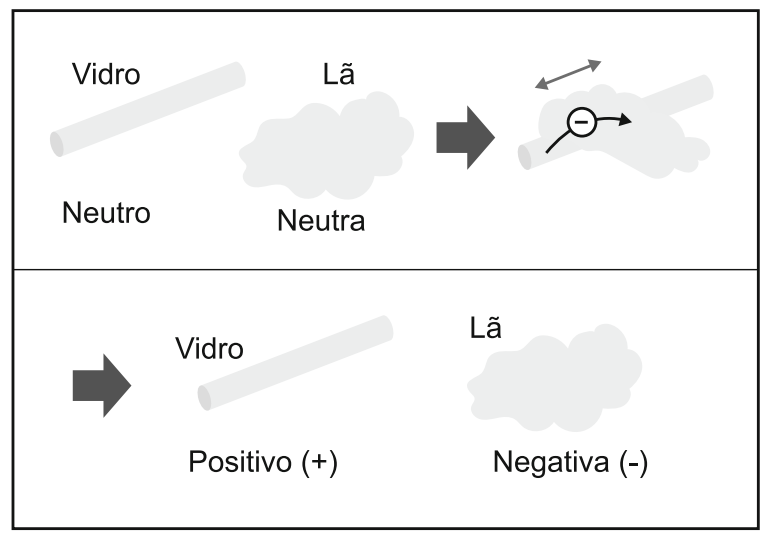
Solução:

$P = 20.110 = 2200$ W

A potência é expressa em kW, múltiplo do W, de forma que 1 kW = 1000 W. Sendo assim, a potência do motor possui 2,2 kW**.**

Eletrização por atrito

Quando dois corpos neutros de substâncias diferentes são atritados, percebe-se que um deles adquire uma carga positiva e outra negativa. Isso acontece porque alguns elementos químicos têm uma tendência maior para ceder elétrons do que outros. Por exemplo, quando atritamos a lã com o vidro.

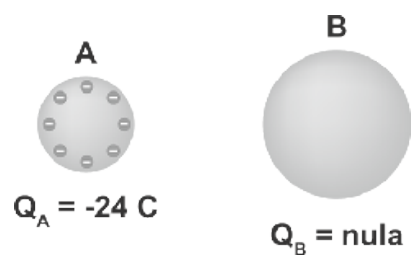


Eletrização por contato

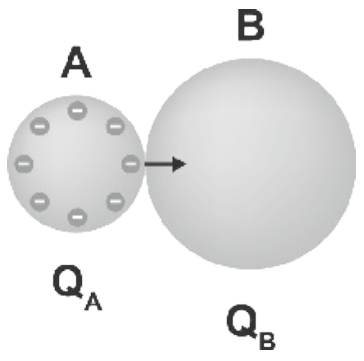
Este fenômeno pode ocorrer tanto em materiais condutores quanto em não condutores, mas estudaremos como este processo acontece no primeiro tipo. A eletrização por contato ocorre quando dois corpos, um inicialmente com carga nula e o outro com uma carga positiva ou negativa, são postos em contato entre si. Vejamos as seguintes experiências:

Experiência 1:

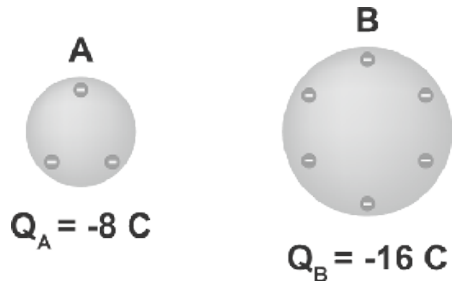
Temos duas esferas metálicas condutoras A e B de raios respectivamente iguais a $R_A = R$ e $R_B = 2R$. A esfera A possui carga $Q_A = -24$ C e a B está inicialmente nula, conforme a figura abaixo:



Se colocarmos os dois corpos em contato, devido à repulsão mutua entre as cargas, haverá uma migração dos elétrons da esfera A para esfera B.



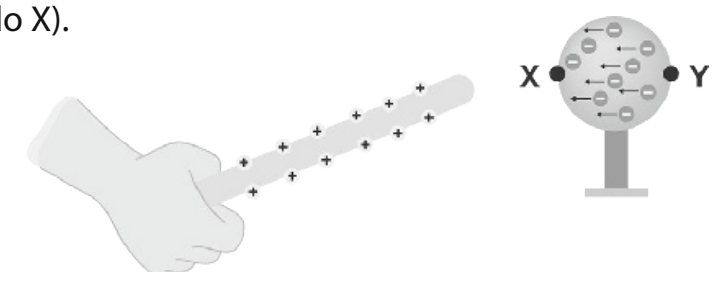
Em contato:



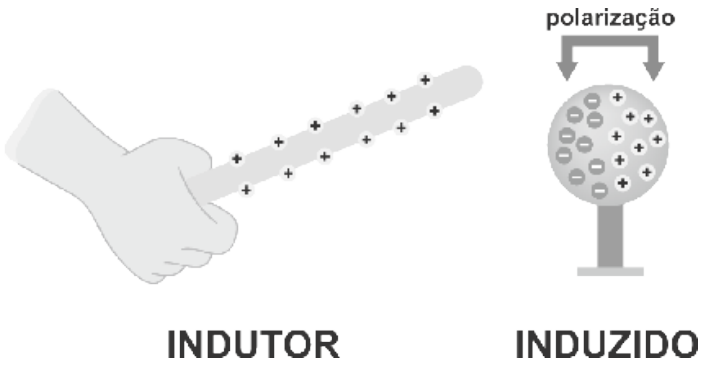
Eletrização por indução e fio terra

• Indução e polarização

Como vimos anteriormente, cargas de sinais iguais se repelem e de sinais contrários se atraem. Na ilustração abaixo, um bastão positivamente carregado é aproximado de uma esfera metálica neutra apoiada em um suporte isolante. Ao aproximar o bastão, os elétrons da esfera são induzidos a se movimentarem para próximo do bastão (do lado Y para o lado X).



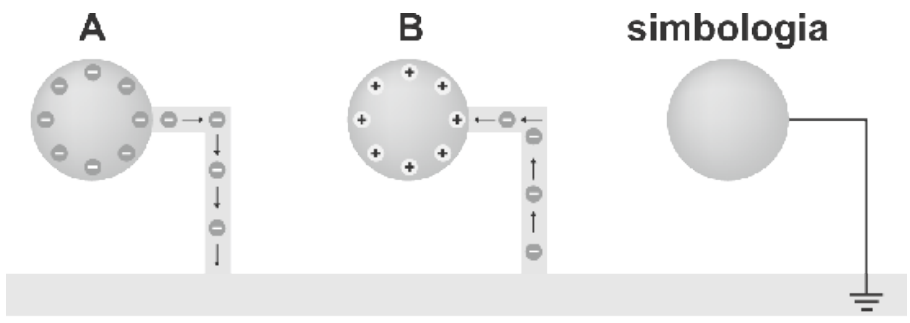
Ao migrarem para o lado X, os elétrons deixam "sozinhos" os prótons que estão do lado Y. Assim o X fica com excesso de elétrons e o Y com excesso de prótons, resultando em uma polarização na esfera, ou seja, um lado fica positivo e o outro negativo. Observe a ilustração:



• Fio terra

Para sabermos a finalidade do fio terra, considere que a Terra seja uma enorme esfera condutora. Como vimos, a distribuição de cargas entre dois corpos esféricos em contato é proporcional ao raio da esfera condutora. Entretanto, como o raio da Terra é muito superior ao de esferas e outros materiais eletrizados, haverá uma distribuição de forma que praticamente toda a carga em excesso no condutor passará para a Terra. Dessa maneira, podemos concluir que todo condutor isolado ligado ao planeta tem suas cargas neutralizadas.

Portanto, para descarregar um material condutor, basta que o objeto seja colocado junto à Terra. Tal contato pode ser feito de forma direta, encostando o condutor no solo ou por meio de um fio condutor. Quando executamos um desses processos, dizemos que o condutor está aterrado.



Na ilustração acima, o caso A nos mostra o sentido da corrente elétrica que passa pelo fio em direção à Terra. Neste caso, o chão está agindo na forma de neutralizar as cargas negativas em excesso.

No caso B, a Terra está atuando no sentido de neutralizar as cargas positivas em excesso no condutor. O fio por onde passa essa corrente elétrica é chamado de fio terra, cuja simbologia é descrita na terceira ilustração.

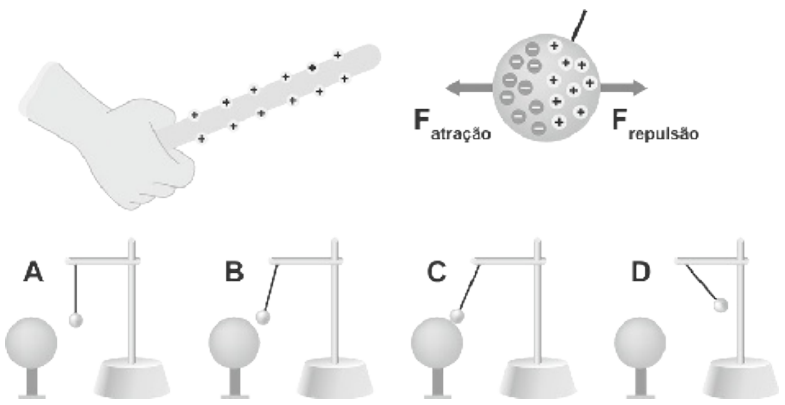
Pêndulo eletrostático

O pêndulo eletrostático é constituído de uma esfera de um material leve, sustentado por uma base feita de material isolante por meio de um fio de seda (não condutor), conforme o desenho abaixo:

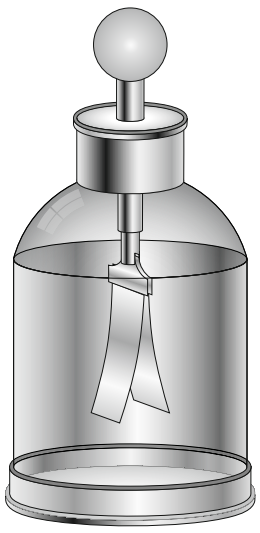


Seu funcionamento se baseia na indução eletrostática. Ao aproximarmos qualquer corpo carregado (adotaremos nesse caso um corpo de carga positiva) a uma esfera metálica, por exemplo, obteremos uma polarização na esfera. Essa polarização permite que a força de atração seja maior que a força de repulsão. Observe a ilustração.

Para determinar se um corpo tem ou não carga elétrica, basta aproximá-lo do pêndulo. Se a esfera do pêndulo permanecer parada, o corpo está neutro (figura A). Mas, se a esfera for atraída (figura B), é sinal de que está carregado. Note, entretanto, que o eletroscópio descrito não consegue determinar se o corpo está com carga positiva ou negativa. Um outro fator importante de ser comentado é que, se encostarmos o corpo na esfera do pêndulo (figura C), os dois (a esfera e o corpo) passarão a ter o mesmo sinal e, portanto, se repelirão (Figura D).

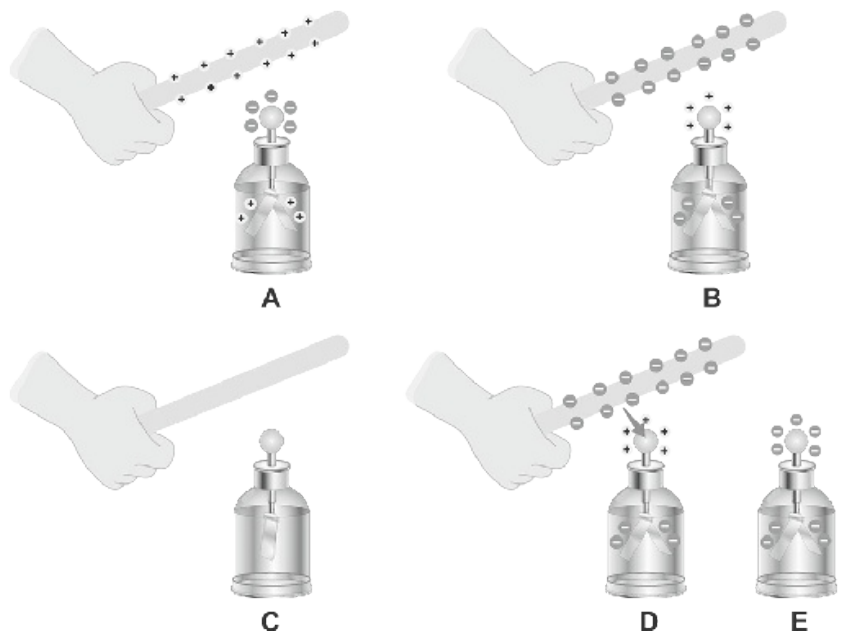


Eletroscópio de folhas



O eletroscópio de folhas é constituído de uma garrafa transparente isolante fechada por uma tampa de material isolante. Na parte de cima do eletroscópio, é colocada uma esfera condutora ligada por uma haste, também condutora, a duas lâminas de papel de alumínio, conforme ilustrado acima.

Seu princípio de funcionamento é o seguinte: a aproximação da esfera superior a um corpo carregado com carga positiva induz os elétrons a subirem, deixando polarizado o sistema esfera + folhas de alumínio. Assim, as folhas passam a ter cargas positivas e elas se repelem entre si (Figura A). Contudo, se o objeto possuir carga negativa, o sistema esfera + folhas de alumínio passa a possuir uma polarização inversa da primeira. Ou seja, a esfera fica com excesso de carga positiva e as folhas ficam com excesso de cargas negativas, voltando a se repelirem entre si (Figura B). Se o objeto não possuir carga, não haverá polarização e, desse modo, não existirá repulsão entre as folhas de alumínio (Figura C). Entretanto, se encostarmos o corpo carregado no eletroscópio (Figura D), a carga do sistema fica diferente de zero e, ao afastar o corpo carregado, perceberemos que o eletroscópio ainda permanece com as folhas abertas (figura E).



No Sistema Internacional de Unidades, a unidade de carga elétrica é o Coulomb (C). O valor de carga de um próton (+) ou um elétron (-) é $1{,}6.10^{-19}$ C.

A lei de Coulomb descreve a interação eletrostática entre partículas eletricamente carregadas:

$$F = \frac{k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$$

A força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as duas cargas Q_1 e Q_2. A constante eletrostática (k) no vácuo é obtida utilizando o valor de força em Newtons (N) da distância em metros (m) das cargas em Coulomb (C): $k = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$.

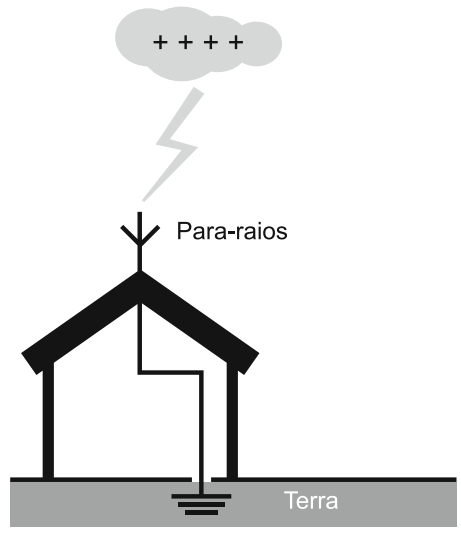
A região do espaço em que os corpos carregados eletricamente ficam sujeitos à ação de uma força elétrica é denominada campo elétrico. A intensidade do campo é dada pela relação: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{|q|}$.

São aplicações do campo elétrico: o eletrocardiograma, utilizado para identificar arritmias cardíacas, e a eletroforese, que é um processo usado em pesquisas para separar partículas muito pequenas.

O poder das pontas

Nas regiões com pontas e muitas curvas, há um grande acúmulo de cargas elétricas, portanto a densidade de cargas é sempre maior nessas regiões do que nas partes não pontudas. Essa área se eletriza e perde cargas elétricas mais facilmente, além de atuar com maior intensidade sobre outros

corpos. O poder das pontas é utilizado nos para-raios que são instalados no alto dos edifícios para proteção contra as descargas elétricas (raios).



Geradores e receptores

Os geradores são dispositivos que geram energia, enquanto que receptores recebem essa energia, transformando-a em outra forma.

Gerador

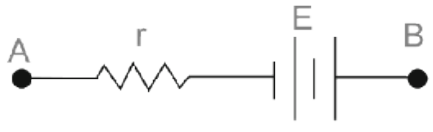
O gerador elétrico é um dispositivo capaz de transformar diferentes tipos de energia em energia elétrica. Todo gerador tem dois terminais ou polos – um positivo e outro negativo. Nestes, são conectados os extremos dos fios condutores que o ligam no circuito elétrico e o gerador que mantém a corrente elétrica nos fios condutores e no circuito elétrico. Portanto é a fonte de energia que cria a diferença do potencial elétrico (ddp) entre os dois pontos de um circuito, causando o deslocamento de cargas elétricas de um lugar para outro.

A corrente elétrica deixa de existir se a relação de potencial for nula. A diferença de potencial ou voltagem tem por símbolo a letra *U,* e a medida de voltagem no SI é o volt (V). O voltímetro é o aparelho que mede a voltagem ou a diferença do potencial elétrico (ddp).

Força eletromotriz (fem) é a mesma razão de um trabalho realizado e a carga transportada no gerador.

$$E = \frac{W}{q}$$

Essa força é sempre constante e não depende da corrente elétrica que atravessa. A equação do gerador é a seguinte:



$V_B - V_A = E - r \cdot I$

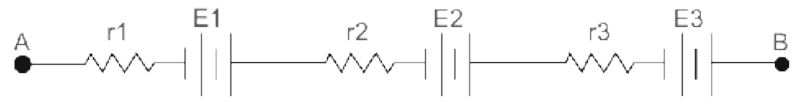
Onde:

- $V_B - V_A$: é a d.d.p. mantida entre os pólos do gerador;
- E: é a força eletromotriz do gerador;
- r . I : é a queda de tensão interna.

Associação de geradores:

- **Em série**

Associam-se os geradores de forma que o polo positivo de um se ligue diretamente ao polo negativo do outro.

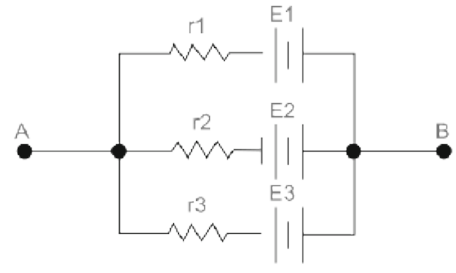


- **Circuito elétrico**

O circuito elétrico conectado em série é aquele no qual os componentes estão colocados em sequência. Dessa forma a corrente que passa por um componente é a mesma que passará pelo seguinte. Assim é possível dizer que existe apenas um caminho para a corrente elétrica.

- **Associação em paralelo**

No circuito conectado em paralelo, todos os componentes estão ligados nos dois pontos conhecidos. Nesse caso, como os elétrons livres têm mais de um caminho a seguir, a corrente que passa por um elemento pode não ser a mesma que passa pelos outros. A ligação residencial deve ser feita em paralelo, pois, se um dos elementos falhar, os outros continuarão funcionando.



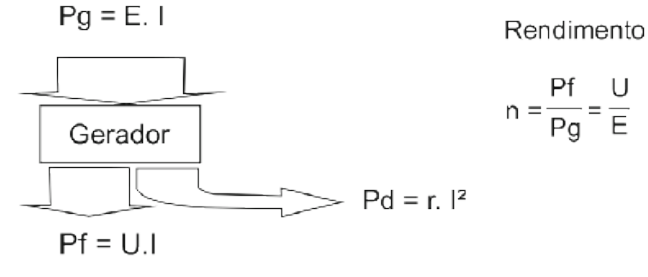
- **Rendimento do gerador (η)**

A corrente vai do polo de menor potencial ao de maior no interior de um gerador. Há três formas de potência: gerada,fornecida e dissipada, conforme as fórmulas abaixo.

$P_{gerada} = E \cdot I$
$P_{fornecida} = U \cdot I$
$P_{dissipada} = r \cdot I^2$

Onde U é $V_B - V_A$

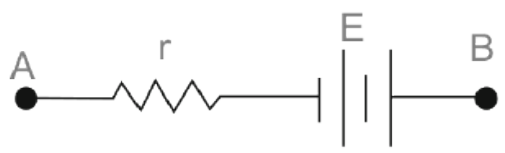
O rendimento do gerador é razão entre a Pf e a Pg, assim como entre a ddp e a FEM do mesmo.



Receptor

Receptores transformam energia elétrica em qualquer outra forma de energia. Parte dessa energia se dissipa na resistência interna, exatamente como acontece no gerador. Representa-se a tensão necessária por E' ou força contra-eleromotriz (fcem).

É retratada pela seguinte equação:

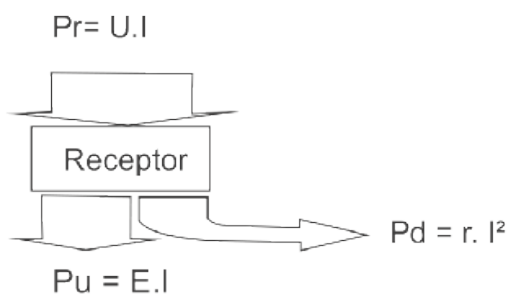


Onde:

- $V_B - V_A$: é a d.d.p. mantida entre os polos do receptor;
- E': é a força contra-eletromotriz do receptor;
- r' . I: é a queda de tensão interna.

Rendimento elétrico do receptor (η')

O receptor trabalha com três formas de potência: recebida (fornecida para o receptor), útil (transformada em trabalho) e dissipada internamente.



Rendimento

$$n = \frac{Pu}{Pr} = \frac{E}{U}$$

Eletrodinâmica

É a parte da Física que estuda o aspecto dinâmico da eletricidade, ou seja, o movimento constante das cargas elétricas.

O primeiro tema de estudo da eletrodinâmica é a corrente elétrica, isso porque corrente elétrica é a carga elétrica que está em movimento.

Esse movimento é ordenado e inserido dentro de um sistema condutor, cujas cargas apresentam diferença de potencial (ddp). Isso quer dizer que há cargas positivas e negativas, sem as quais não existe corrente elétrica.

Corrente elétrica

Há corrente elétrica quando não existe o equilíbrio estático entre as partículas eletricamente carregadas, o que provoca o deslocamento ordenado das cargas num condutor. Esse deslocamento ocorre devido à diferença de potencial entre as extremidades do condutor.

A unidade padrão no sistema internacional para medida de intensidade de corrente é o ampère (A).

Resistência elétrica

A oposição à passagem de corrente é conhecida como resistência elétrica. Interferem nesta: o comprimento do condutor – quanto maior for seu comprimento, maior será sua resistência; a sua área ou seção transversal – quanto mais fino o condutor, maior a resistência; e o tipo de material que o condutor é feito, ou seja, sua resistividade. Ohm estabeleceu que a resistência elétrica de um material é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à sua área de secção transversal

Um condutor ôhmico é aquele que mantido a temperatura constante respeita a relação: .

$$R = \frac{U}{i} \Rightarrow U = R \cdot i$$

Potência elétrica

Define-se potência elétrica como quantidade de energia elétrica produzida em um determinado período de tempo.

Sua medição se dá por meio da fórmula abaixo:

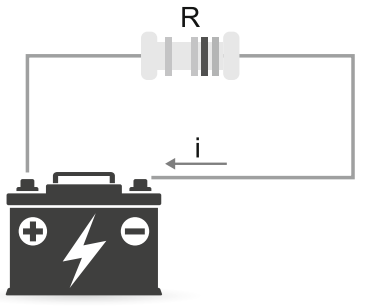
Pot = U.i

Onde:
- Pot: potência;
- U: tensão;
- i: intensidade da corrente elétrica.

Circuito elétrico

É um caminho fechado para passar a corrente elétrica. Ele pode ser constituído por um gerador, condutores, capacitores, resistores ou um receptor elétrico. Os condutores são os materiais nos quais as cargas elétricas circulam com maior facilidade. Os resistores ou resistências dificultam a passagem da corrente elétrica pelo controle da voltagem e transformam energia elétrica em térmica. Os capacitores armazenam as cargas elétricas – as máquinas fotográficas, por exemplo, acumulam cargas para o flash. Os geradores elétricos mantêm uma diferença de potencial no circuito por mais tempo – podem ser geradores químicos (pilhas e baterias), luminosos (placas solares), mecânicos (usinas hidrelétricas) e térmicos, que transformam energia térmica em elétrica. Os receptores elétricos fazem o contrário dos geradores: transformam a energia elétrica em outros tipos de energia. Os chuveiros, as lâmpadas e as geladeiras, por exemplo, são receptores utilizados no nosso cotidiano

O circuito é simples quando possui um único caminho:



7. ELETROMAGNETISMO

Em 1819, durante um experimento com circuito elétrico simples em sala de aula, Ørsted observou desvios na agulha de uma bússola localizada próxima ao circuito. Normalmente a bússola se orienta na direção norte-sul magnética e, como não havia nenhuma espécie de imã próximo ao experimento, o cientista tentou compreender e estabelecer em que condições aquilo ocorria.

Ele observou que a agulha se desviava no momento em que o circuito estava fechado, ou seja, quando havia passagem da corrente elétrica. Durante o tempo que o circuito estava aberto, a agulha não se desviava. Ørsted concluiu, então, que toda corrente elétrica produzia um efeito magnético como se fosse um imã, isto é, que as correntes elétricas geram campos magnéticos ao seu redor, podendo interferir em materiais ferromagnéticos.

Assim foi estabelecida a primeira relação entre a eletricidade e o magnetismo, e a essa associação foi dado o nome eletromagnetismo.

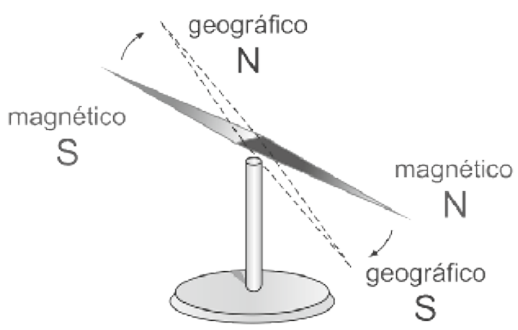
O magnetismo está associado aos fenômenos de atração ou repulsão observados entre determinados objetos.

• Principais fenômenos magnéticos:

• Limalha de ferro no contato com um imã adere apenas em certas partes do objeto. No caso de um ímã na forma de barra, tal aderência ocorre nas regiões próximas às extremidades, regiões essas denominadas polos.

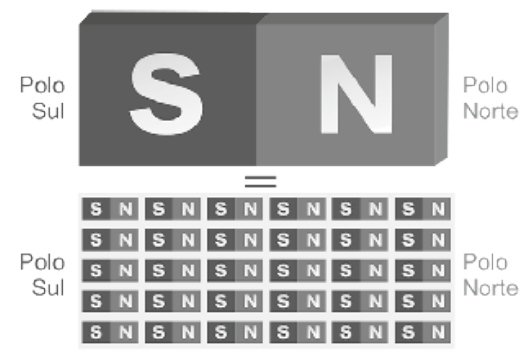


• Suspendendo um ímã pelo seu centro de massa de modo que ele possa girar livremente, ele toma a direção norte-sul geográfica do lugar. O ímã que se orienta para o norte geográfico recebe o nome de polo norte magnético, já o que se orienta para o sul geográfico ganha o nome de polo sul magnético. Como aplicação desse fenômeno, surgiu a bússola.

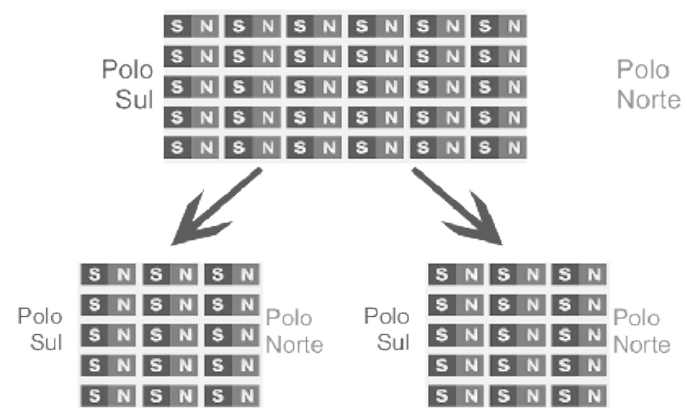


• Os ímãs interagem entre si com forças de atração e repulsão. Realizando-se experiências, chega-se à propriedade básica do magnetismo: polos de mesmo nome se repelem e polos de nomes contrários se atraem.

• Um imã pode ser interpretado como um conjunto de ímãs menores, conforme a figura abaixo.



• Os polos não existem separadamente. Se seccionarmos um ímã, as partes constituem um novo par de ímãs, que, mesmo sendo menores, têm sempre dois polos.



• Classificação dos materiais magnéticos:

• **Ferromagnéticos:** são intensamente atraídos pelos ímãs e podem ser imantados, aproximando outros materiais no mesmo sentido em que foram atraídos. Exemplos: ferro, níquel e cobalto.

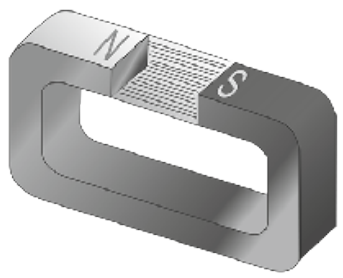
• **Paramagnéticos:** fracamente atraídos, imantados, de forma pouco intensa. Exemplos: alumínio, cromo e estanho.

• **Diamagnéticos**: repelidos pelos ímãs, se imantam em sentido contrário. Exemplos: antimônio, bismuto, cobre e chumbo.

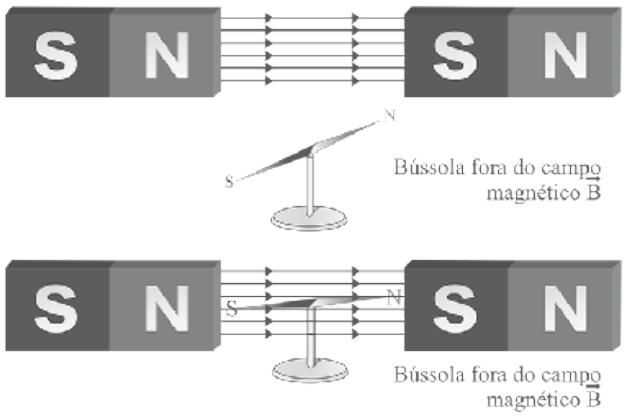
Campo magnético

É a região próxima a um ímã onde ocorrem as interações magnéticas. O fenômeno de imantação de um corpo por meio de um ímã é chamado indução magnética devido ao campo magnético criado pelo ímã em torno dele.

A cada ponto do campo magnético, associamos um vetor B, denominado vetor indução magnética ou vetor campo magnético. Por convenção, o sentido do campo magnético (sentido das linhas de indução) é do polo norte para o polo sul.



Uma bússola dentro de um campo magnético se orienta na mesma direção do campo.



Força magnética

Se uma carga elétrica se movimenta com velocidade V em uma direção diferente da definida pelas linhas de indução magnética, surge nesta carga uma força perpendicular ao campo e à direção do movimento da carga, denominada força magnética de Lorentz.

A intensidade da força é proporcional à carga elétrica, à intensidade do campo e ao seno do ângulo formado pelas direções de B e V.

$$F_m = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\theta$$

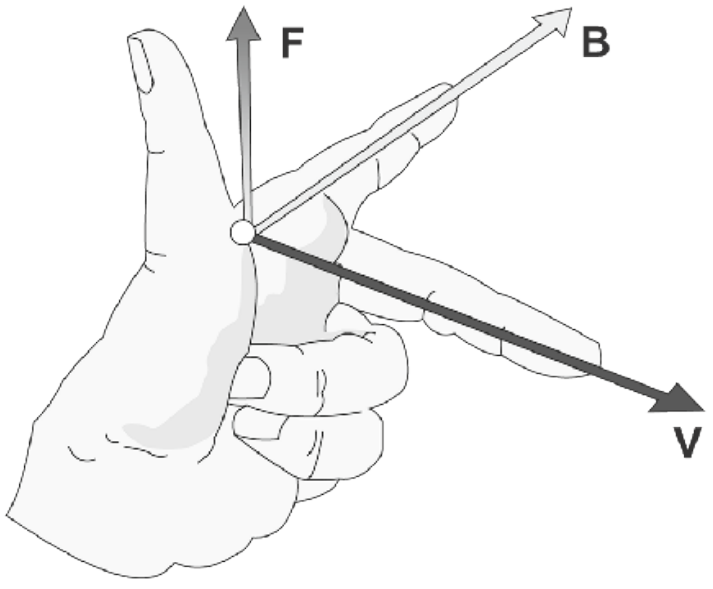
$$B = \frac{F_m}{q.v.\text{sen}\theta} = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}.\frac{\text{metro}}{\text{segundo}}} = \frac{N}{C.\frac{m}{s}}$$

Porém vimos que:

$$\frac{C}{s} = \text{ampere} \Rightarrow B = \frac{N}{A.m} = \text{Tesla}(T)$$

Tesla é a unidade de intensidade de um campo de indução magnética no Sistema Internacional de Unidades.

O sentido da força magnética é determinado pela regra da mão esquerda.



Importante: para cargas negativas, o sentido da força será o oposto ao apontado por esta regra.

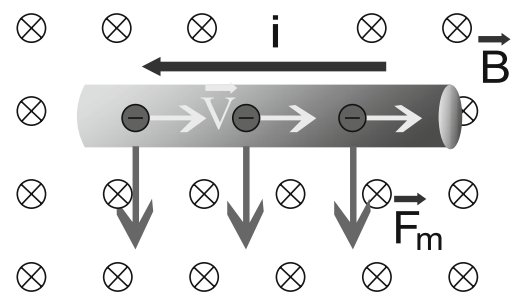
Por trabalharmos tridimensionalmente em eletromagnetismo, adotamos a seguinte convenção para vetares perpendiculares ao plano do papel:

⊙ vetor saindo ⊗ vetor entrando

Como a força magnética é sempre perpendicular à velocidade e ao campo, não vai alterar o módulo da velocidade, somente sua direção.

Fio condutor

A figura abaixo ilustra o movimento dos elétrons dentro de um fio condutor percorrido pela corrente elétrica i.



Cada elétron fica submetido a uma força magnética F_m. Entretanto, quando as forças possuem a mesma direção, a soma de todas as forças sofridas por cada elétron apresentará a intensidade da força resultante sobre o condutor.

Sendo:

- q = |e|: módulo da carga elementar;
- B: intensidade do campo magnético;
- V: velocidade relativa do elétron em relação ao fio;
- θ: ângulo formado entre o sentido da velocidade V do elétron e o campo magnético B.

Teremos que cada elétron sofre uma força magnética descrita por: $F_m = e \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\theta$

Suponha agora que existam n elétrons em um pedaço de comprimento do fio igual a L. A força resultante de todos esses elétrons é igual a: $F_T = n \cdot e \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\theta$

Entretanto a velocidade, relativa ao condutor, de cada elétron pode ser expressa por:

$$V = \frac{L}{\Delta t}$$

Junto à expressão acima, temos:

$$F_T = n \cdot e \cdot \frac{L}{\Delta t} \cdot B \cdot \text{sen}\theta$$

Resultando em:

$$F_T = i \cdot L \cdot B \cdot \text{sen}\theta$$

Ou simplesmente: $F_T = B \cdot i \cdot L \cdot \text{sen}\theta$

Campo de uma espira circular

Uma espira circular (condutor dobrado segundo uma circunferência) de centro O e raio R apresenta as seguintes características:

- **Direção:** perpendicular ao plano da espira;
- **Sentido:** dado pela regra da mão direita;
- **Intensidade:** dado pela lei de Biot-Savart.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot R}$$

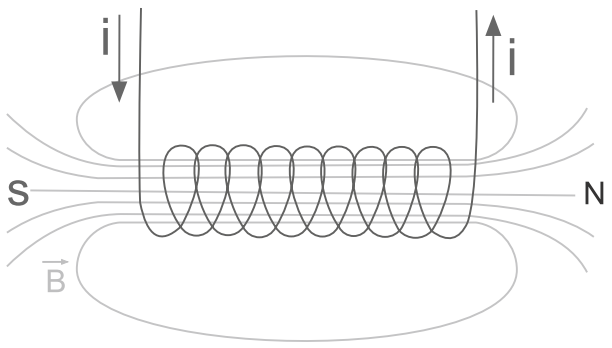
Justapondo N espiras iguais, temos a denominada "bobina chata", em que a intensidade de B no centro vale:

$$\vec{B_b} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2 \cdot R} \cdot N$$

Campo de um solenoide

Solenoide é um fio condutor enrolado em espiras iguais. Cada volta completa do fio é uma espira e estas espiras são igualmente espaçadas. No interior do solenoide, o campo é praticamente uniforme e, externamente, é nulo.

Campo magnético de um solenoide:



No interior do solenoide, o vetor indução B tem as características:

- **Direção:** do eixo geométrico do solenoide;
- **Sentido:** dado pela regra da mão direita;
- **Intensidade:**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{L} \cdot N$$

- **N:** n° de espiras;
- **L:** comprimento do solenoide.

Lei de Faraday

Quando existir variação do fluxo magnético por meio de um círculo, gerando nele força eletromotriz induzida, teremos a lei de indução eletromagnética ou lei de Faraday. O inglês Michael Faraday estabeleceu esse princípio em 1831 depois de realizar vários experimentos. A determinação foi importante para a construção de dínamos e para a produção de energia elétrica em larga escala.

Mas foi o físico alemão Franz Ernst Neumann que concebeu a fórmula para a lei de Faraday, como demonstrada abaixo.

- ε: força eletromotriz induzida (fem) (V);
- ΔΦ: variação do fluxo magnético (Wb);
- Δt: intervalo de tempo (s).

O sinal negativo da fórmula indica que o sentido da fem induzida é oposta à variação do fluxo magnético.

Lei de Lenz

Graças à lei de Faraday, em 1834, o físico estoniano Heinrich Lenz, baseado em seus trabalhos, chegou a uma regra para definir o sentido da corrente induzida, partindo do conhecimento prévio de que uma corrente elétrica cria ao seu redor um campo magnético – mesmo fenômeno ocorrido com a corrente induzida.

O que Lenz percebeu foi que o sentido deste campo dependia do aumento ou da diminuição do fluxo magnético. Ele estabeleceu que o sentido do campo magnético produzido pela corrente induzida é contrário à variação do fluxo magnético. Essa é a lei de Lenz.

8. ONDULATÓRIA

A ondulatória estuda as características, propriedades e fenômenos relacionados às ondas.

Movimentos ondulatórios

Quando se sacode uma das extremidades de uma corda longa e flexível, é possível notar um movimento em forma de onda se deslocando pelo objeto. Seguindo a lógica desse exemplo, a mão provoca ondas ao sacudir a corda. Ao ser sacudida, a extremidade da corda gera uma perturbação que se propaga por toda sua extensão.

Quando uma pedra cai sobre a superfície lisa da água, proporciona uma perturbação: a água sobe e desce. Essa perturbação não permanece onde é produzida, mas se propaga por toda a superfície do líquido. Ela se afasta na forma de um círculo, do ponto onde a pedra caiu, tendo o raio aumentado. Se a superfície da água é tocada várias vezes no mesmo ponto, formam-se diversos círculos consecutivos no mesmo centro.

Classificação das ondas

São divididas quanto à natureza, direção de vibração e de propagação.

- **Natureza:** mecânicas ou eletromagnéticas;
- **Direção de vibração:** transversais ou longitudinais;
- **Direção de propagação:** unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Grandezas

Elas podem se subdividir em:

- **Frequência**: são geradas em um intervalo de tempo específico. A unidade de medida para frequência indicada pelo Sistema Internacional de Unidades é o Hz (Hertz), que significa ondas por segundo;
- **Período**: trata-se do tempo necessário para a geração de uma onda completa;
- **Comprimento de onda**: é representado pela letra grega *lambda (*λ);
- **Velocidade da onda**: determinada pelo produto do comprimento de onda e a frequência.

Fenômenos ondulatórios

São eles:

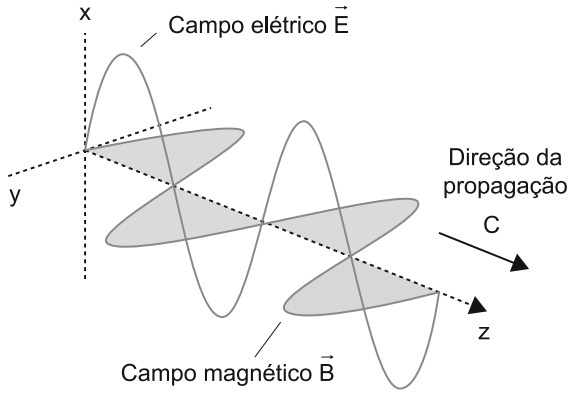
- Reflexão;
- Refração;
- Interferência;
- Ressonância;
- Eco;
- Polarização;
- Efeito Doppler.

Ondas mecânicas e eletromagnéticas

As ondas mecânicas precisam de um meio para se propagarem, portanto não se irradiam no vácuo. Alguns exemplos de ondas mecânicas ocorrem com as cordas, molas, nas superfícies dos líquidos e com o som.

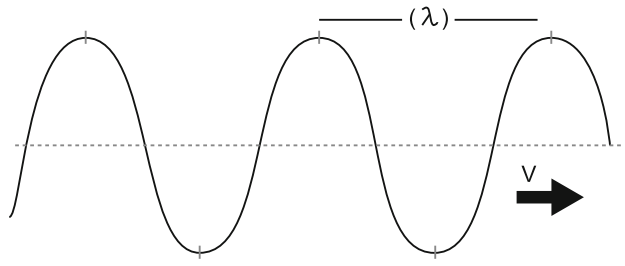
Já as ondas eletromagnéticas são capazes de se propagarem no vácuo e também em alguns meios materiais. São exemplos dessas ondas os raios X, a luz ultravioleta e a luz visível.

Quanto à direção de propagação, as ondas são classificadas em transversais e longitudinais. Nas ondas longitudinais, a direção da vibração das partículas é paralela ao deslocamento. A vibração de uma mola e as ondas sonoras são exemplos de ondas longitudinais. Nas ondas transversais, a vibração é perpendicular à propagação da onda. As ondas eletromagnéticas e a corda do violão tensionada são exemplos de ondas transversais.



Onda eletromagnética tridimensional

Como as ondas não transportam matéria e somente energia, é previsível que se desloquem com velocidade constante. Logo sua velocidade pode ser expressa por $v = \lambda \cdot f$.



Onde:

• **λ:** é a menor distância entre dois pontos que vibram em concordância de fase;

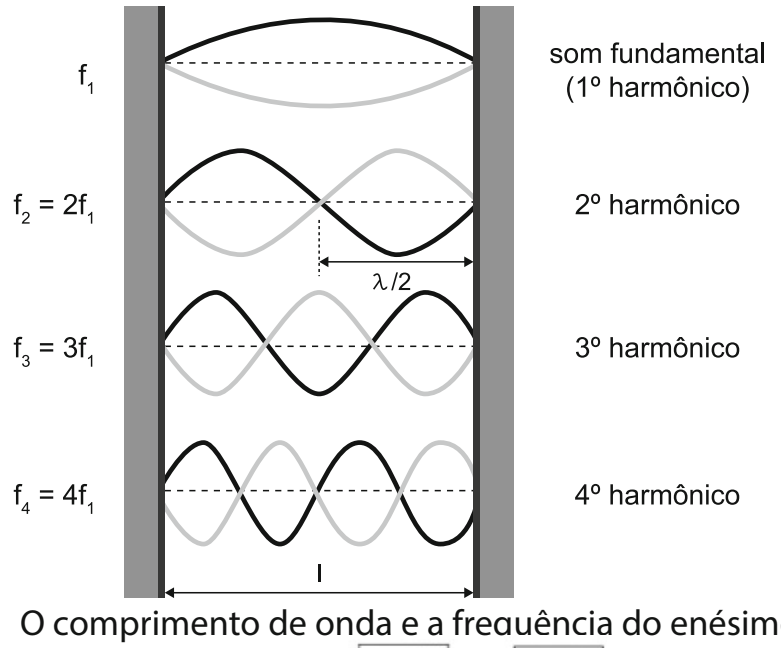
• f: é o número de ciclos por segundo ou o número de cristas por segundo. Um ciclo é também denominado por 1 Hertz = 1 Hz, medida visual de frequência.

Ondas longitudinais e tridimensionais

As ondas sonoras são mecânicas longitudinais e tridimensionais que não se propagam no vácuo. A velocidade de propagação das ondas sonoras depende do meio e da temperatura. Por exemplo, a velocidade do som no ar a 25°C é de 340 m/s e a velocidade do som no ferro é de 3170 m/s.

Diferentes instrumentos musicais produzem ondas com o mesmo comprimento (λ), ou seja, sons da mesma altura e intensidade, porém com diferentes timbres – o formato da onda produzido por cada instrumento é distinto e, portanto, produzirá um som variado. Quanto maior a frequência de vibração (a altura), mais agudo será o som e, quanto menor for a frequência, mais grave será o som. A intensidade do som, seu volume, será influenciada pela amplitude – um som com maior volume terá maior amplitude.

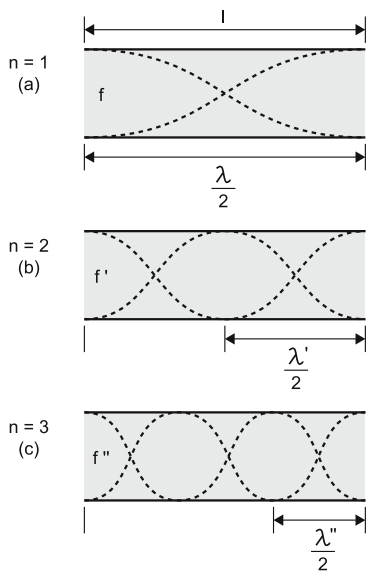
A maneira mais simples da corda de um instrumento musical vibrar se chama primeiro harmônico ou frequência fundamental. O segundo harmônico possui dois ventres e mais um nó além dos dois das extremidades.



O comprimento de onda e a frequência do enésimo harmônico serão dados por: $\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n}$ e $f_n = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$.

Onde:
- f_n: frequência do enésimo harmônico;
- λ: comprimento da corda;
- v: velocidade das ondas na corda.

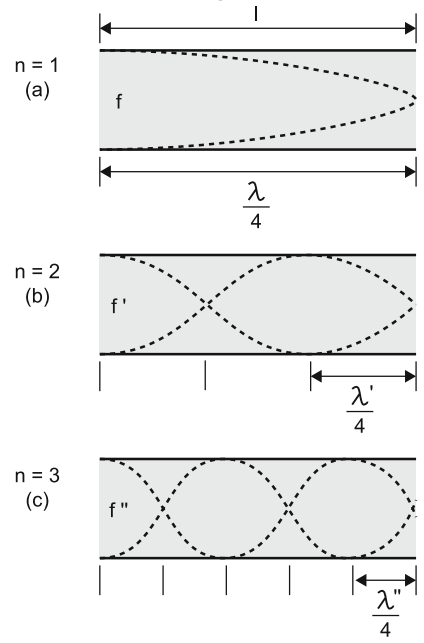
Para tubos sonoros abertos, o primeiro harmônico possuirá um nó meio do tubo e as extremidades dois ventres:



O comprimento de onda e a frequência do enésimo harmônico serão dados por: $\lambda_n = \frac{2 \cdot l}{n}$ e $f_n = \frac{n \cdot v}{2 \cdot l}$.

Onde:
– f_n: frequência do enésimo harmônico
– λ: comprimento da corda
– v: velocidade das ondas na corda

No tubo sonoro fechado mais simples, existe apenas um nó na extremidade do tubo. Esta configuração menos complexa é conhecida como o primeiro harmônico ou frequência fundamental.



O comprimento de onda e a frequência do enésimo harmônico serão dados por: $\lambda_{(n-1)} = \frac{4 \cdot l}{(2n - 1)}$ e $f_{(n-1)} = (2n - 1) \cdot \frac{v}{4 \cdot l}$.

Onde:
- f_n: frequência do enésimo harmônico (Hz);
- v: velocidade do som (m/s);
- t: comprimento do tubo (m).

9. RADIOATIVIDADE

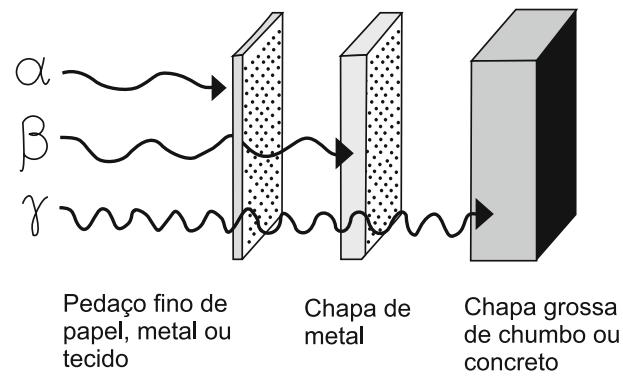
Núcleos atômicos instáveis emitem ondas eletromagnéticas e partículas radioativas para se tornarem estáveis. Um número muito grande de prótons torna o núcleo instável. Assim, são radioativos os elementos com número atômico alto (Z > 83), ou seja, com muitos prótons e, consequentemente, muitos nêutrons. Quanto à natureza, as radiações podem ser classificadas em:

• **Radiação beta (b):** denominada partícula beta, tem as características de um elétron. Possui massa desprezível e carga negativa. Sua velocidade é 9/10 da velocidade da luz, ou seja, cerca de 270.000 km/s ou $c = 2{,}7 \times 10^8$ m/s;

• **Radiação gama (g):** também conhecida como raio gama, são ondas eletromagnéticas de alta energia (outros exemplos de ondas eletromagnéticas são a luz, as microondas e os raios-X). Tratando-se de ondas eletromagnéticas, não possui massa e tem carga zero. Sua velocidade é igual a da luz (c = 300.000 km/s ou c = 3 × 108 m/s). São muito perigosas, pois atravessam até paredes de aço ou chumbo com alguns centímetros de espessura;

• **Radiação alfa (α):** ou partícula alfa, é constituída por partes formadas pelo agrupamento de dois prótons e dois nêutrons. Tem carga positiva, sendo a mais pesada e lenta (sua velocidade é 1/10 da velocidade da luz, ou seja, cerca de 30.000 km/s ou c = 3 × 107 m/s) e a menos perigosa das três, pois pode ser detida por tecido ou papel.

O poder de penetração das radiações:



Leis da radioatividade

• **Lei de Soddy (emissão de partículas α)**

"Quando um elemento emite uma partícula a seu número atômico (Z), decresce de duas unidades e seu número de massa (A) decresce de quatro unidades".

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{A-4}_{Z-2}D$$

Exemplo:

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{234}_{90}Th$$

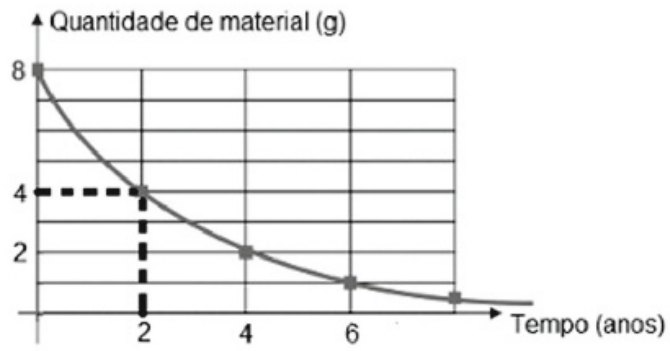
• **Lei de Soddy, Fajans e Russell (emissão de partículas β)**

"Quando um elemento químico radiativo emite uma partícula beta, seu número atômico (Z) cresce de uma unidade e seu número de massa (A) permanece constante."

Exemplo: $^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{0}_{-1}\beta + {}^{234}_{91}Pa$

Meia-vida ou período de meia-vida (P ou t 1/2)

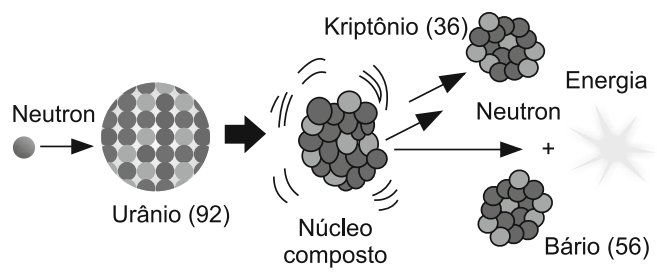
É o tempo necessário para que a quantidade de núcleos radioativos de uma amostra se reduza à metade.



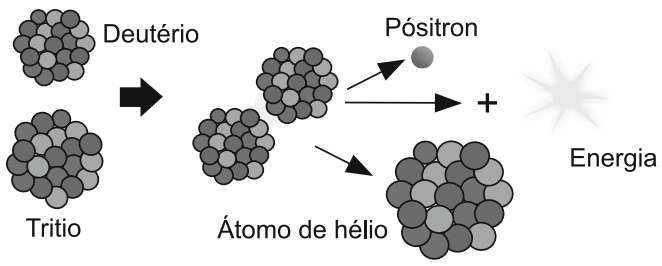
Note que, a partir do gráfico, pode-se obter o período de meia-vida: basta procurar o instante no qual a quantidade de matéria radioativa se reduz à metade do valor inicial, 8 gramas. Assim, para uma massa de 4 gramas, temos o tempo P de 2 anos.

Fissão e fusão nucleares

• **Fissão nuclear:** é a divisão (quebra) de um núcleo atômico em duas ou mais partes, com liberação de grande quantidade de energia. Usos: usinas nucleares e bomba atômica.



• **Fusão nuclear:** é a junção de dois núcleos atômicos formando um único, com liberação de energia muito maior do que na fissão nuclear. É a fonte de energia do sol (nele, hidrogênio é transformado em hélio). Usos: bomba de hidrogênio e usina de fusão nuclear (atualmente, ainda não existe nenhuma em operação).



Além de ser uma fonte de energia, a radiação também pode ser utilizada no tratamento de doenças (radioterapia do câncer, por exemplo), em exames diagnósticos médicos e na datação arqueológica (por exemplo, carbono-14).

Bibliografia

Halliday, Resnik. Fundamentos da Física. Mecânica. Volume 1, 2018.

Halliday, Resnik. Fundamentos da Física. Gravitação, Ondas e Termodinâmica. Volume 2,
2018.

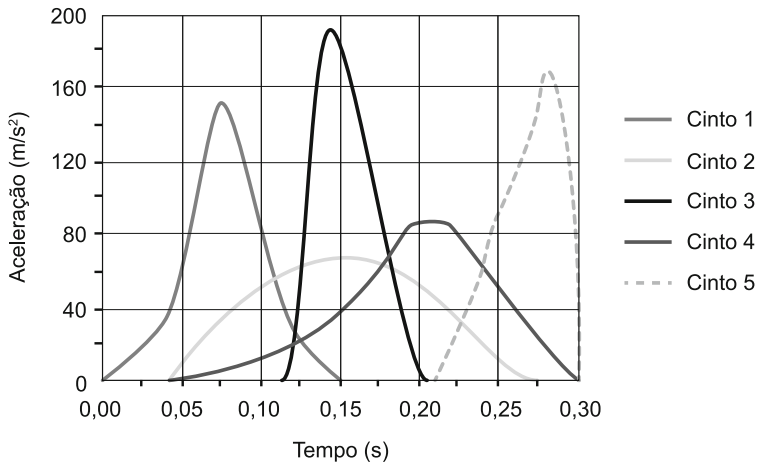
Ministério de Minas e Energia// portal Brasil. Publicação: http://www.mme.gov.br/web/guest/publicacoes-e-indicadores;jsessionid=638372B98B22A76E732A68EE47B6E7E2.srv155

Teodoro, Roberto. Curso Med Vestibulares. Física, 2018.

EXERCÍCIOS
DE FÍSICA

(ENEM 2017)

1. Em uma colisão frontal entre dois automóveis, a força que o cinto de segurança exerce sobre o tórax e abdômen do motorista pode causar lesões graves nos órgãos internos. Pensando na segurança do seu produto, um fabricante de automóveis realizou testes em cinco modelos diferentes de cinto. Os testes simularam uma colisão de 0,30 segundo de duração, e os bonecos que representavam os ocupantes foram equipados com acelerômetros. Esse equipamento registra o módulo da desaceleração do boneco em função do tempo. Os parâmetros como massa dos bonecos, dimensões dos cintos e velocidade imediatamente antes e após o impacto foram os mesmos para todos os testes. O resultado final obtido está no gráfico de aceleração por tempo.



Qual modelo de cinto oferece menor risco de lesão interna ao motorista?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

2. Um motorista que atende a uma chamada de celular é levado à desatenção, aumentando a possibilidade de acidentes ocorrerem em razão do aumento de seu tempo de reação. Considere dois motoristas, o primeiro atento e o segundo utilizando o celular enquanto dirige. Eles aceleram seus carros inicialmente a 1,00 m/s^2 Em resposta a uma emergência, freiam com uma desaceleração igual a 5,00 m/s^2 O motorista atento aciona o freio à velocidade de 14,00 m/s enquanto o desatento, em situação análoga, leva 1,00 segundo a mais para iniciar a frenagem.

Que distância o motorista desatento percorre a mais do que o motorista atento, até a parada total dos carros?

a) 2,90 m

b) 14,0 m

c) 14,5 m

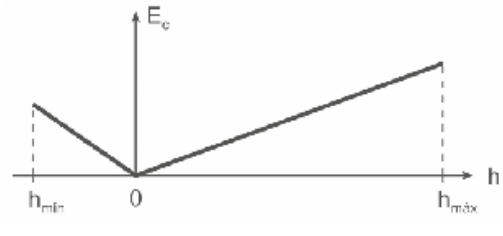
d) 15,0 m

e) 17,5 m

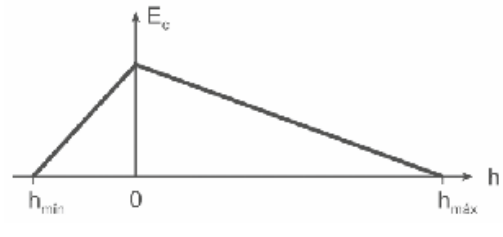
3. O brinquedo pula-pula (cama elástica) é composto por uma lona circular flexível horizontal presa por molas à sua borda. As crianças brincam pulando sobre ela, alterando e alternando suas formas de energia. Ao pular verticalmente, desprezando o atrito com o ar e os movimentos de rotação do corpo enquanto salta, uma criança realiza um movimento periódico vertical em torno da posição de equilíbrio da lona (h = 0) passando pelos pontos de máxima e de mínima altura, hmáx e hmín respectivamente.

Esquematicamente, o esboço do gráfico da energia cinética da criança em função de sua posição vertical na situação descrita é:

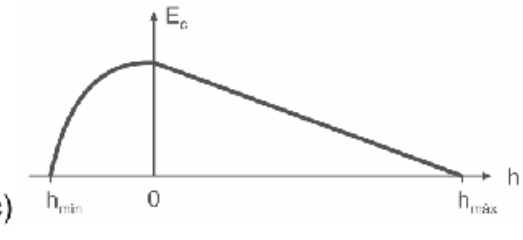
a)

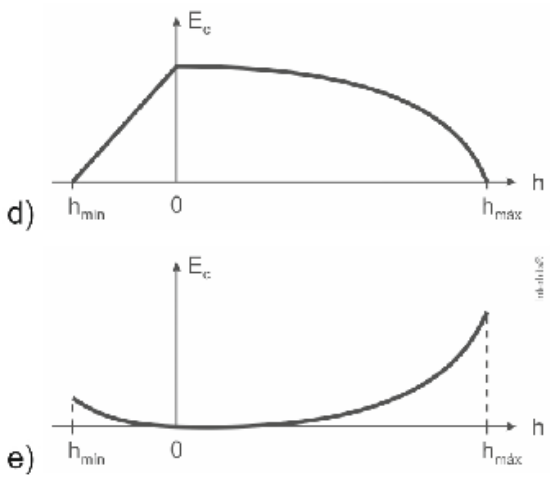


b)

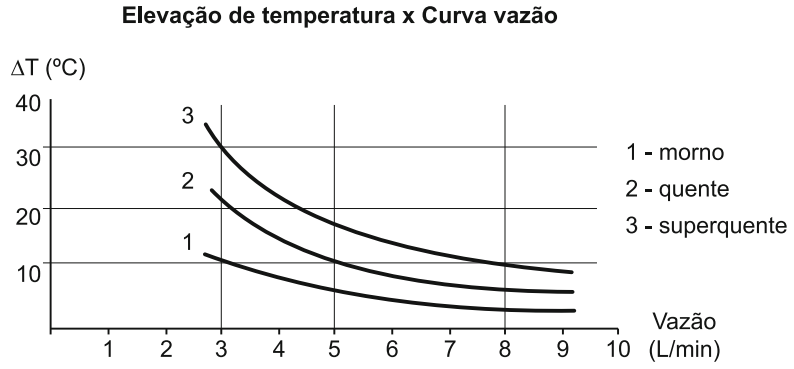


c)





4. No manual fornecido pelo fabricante de uma ducha elétrica de 220 V é apresentado um gráfico com a variação da temperatura da água em função da vazão para três condições (morno, quente e superquente). Na condição superquente, a potência dissipada é de 6.500 W Considere o calor específico da água igual a 4200 J/(kg°C) e densidade da água igual a 1 kg/L.



Com base nas informações dadas, a potência na condição morno corresponde a que fração da potência na condição superquente?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{3}{5}$

d) $\frac{3}{8}$

e) $\frac{5}{8}$

5. Em algumas residências, cercas eletrificadas são utilizadas com o objetivo de afastar possíveis invasores. Uma cerca eletrificada funciona com uma diferença de potencial elétrico de aproximadamente 10.000 V. Para que não seja letal, a corrente que pode ser transmitida através de uma pessoa não deve ser maior do que 0,01 A. Já a resistência elétrica corporal entre as mãos e os pés de uma pessoa é da ordem de 1000 Ω.

Para que a corrente não seja letal a uma pessoa que toca a cerca eletrificada, o gerador de tensão deve possuir uma resistência interna que, em relação à do corpo humano, é

a) praticamente nula.

b) aproximadamente igual.

c) milhares de vezes maior.

d) da ordem de 10 vezes maior.

e) da ordem de 10 vezes menor.

6. Para demonstrar o processo de transformação de energia mecânica em elétrica, um estudante constrói um pequeno gerador utilizando:

- um fio de cobre de diâmetro D enrolado em N espiras circulares de área A;

- dois ímãs que criam no espaço entre eles um campo magnético uniforme de intensidade B;

- um sistema de engrenagens que lhe permite girar as espiras em torno de um eixo com uma frequência f.

Ao fazer o gerador funcionar, o estudante obteve uma tensão máxima V e uma corrente de curto-circuito i.

Para dobrar o valor da tensão máxima V do gerador mantendo constante o valor da corrente de curto i, o estudante deve dobrar o(a)

a) número de espiras.

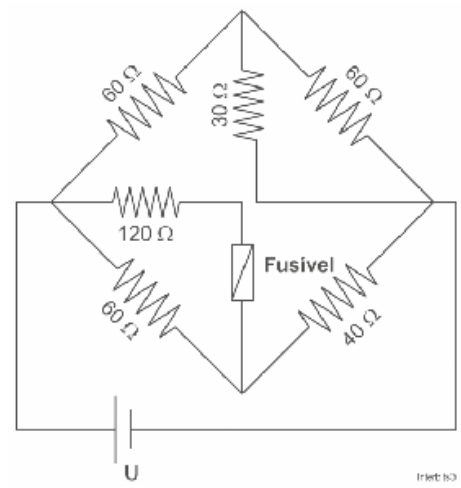
b) frequência de giro.

c) intensidade do campo magnético.

d) área das espiras.

e) à diâmetro do fio.

7. Fusível é um dispositivo de proteção contra sobrecorrente em circuitos. Quando a corrente que passa por esse componente elétrico é maior que sua máxima corrente nominal, o fusível queima. Dessa forma, evita que a corrente elevada danifique os aparelhos do circuito. Suponha que o circuito elétrico mostrado seja alimentado por uma fonte de tensão U e que o fusível suporte uma corrente nominal de 500mA.



Qual é o máximo valor da tensão U para que o fusível não queime?

a) 20 V.

b) 40 V.

c) 60 V.

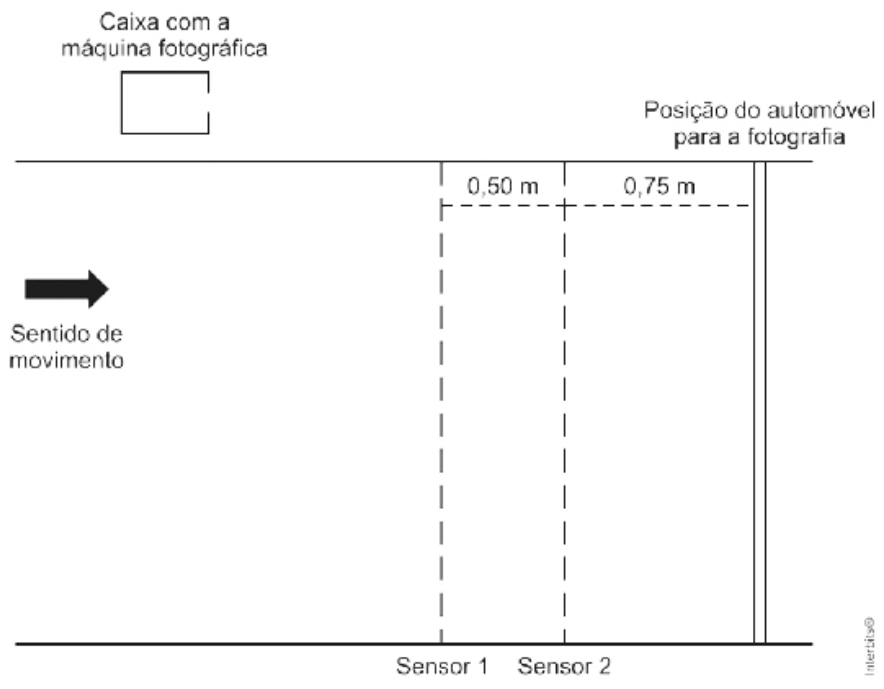
d) 120 V.

e) 185 V.

(ENEM LIBRAS 2017)

8. No Brasil, a quantidade de mortes decorrentes de acidentes por excesso de velocidade já é tratada como uma epidemia. Uma forma de profilaxia é a instalação de aparelhos que medem a velocidade dos automóveis e registram, por meio de fotografias, os veículos que trafegam acima do limite de velocidade permitido. O princípio de funcionamento desses aparelhos consiste na instalação de dois sensores no solo, de forma a registrar os instantes em que o veículo passa e, em caso de excesso de velocidade, fotografar o veículo quando ele passar sobre uma marca no solo, após o segundo sensor.

Considere que o dispositivo representado na figura esteja instalado em uma via com velocidade máxima permitida de 60 km/h.



No caso de um automóvel que trafega na velocidade máxima permitida, o tempo, em milissegundos, medido pelo dispositivo é

a) 8,3

b) 12,5

c) 30,0

d) 45,0

e) 75,0

9. Um experimento bastante interessante no ensino de ciências da natureza constitui em escrever palavras em tamanho bem pequeno, quase ilegíveis a olho nu, em um pedaço de papel e cobri-lo com uma régua de material transparente. Em seguida, pinga-se uma gota d'água sobre a régua na região da palavra, conforme mostrado na figura, que apresenta o resultado do experimento. A gota adquire o formato de uma lente e permite ler a palavra de modo mais fácil em razão do efeito de ampliação.



Qual é o tipo de lente formada pela gota d'água no experimento descrito?

a) Biconvexa.

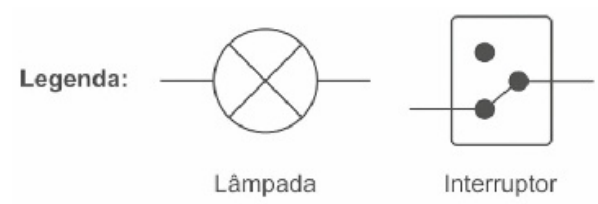
b) Bicôncava.

c) Plano-convexa.

d) Plano-côncava.

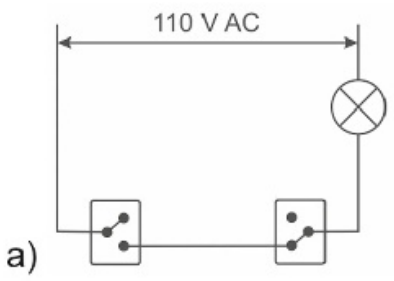
e) Convexa-côncava.

10. Durante a reforma de sua residência, um casal decidiu que seria prático poder acender a luz do quarto acionando um interruptor ao lado da porta e apagá-la com outro interruptor próximo à cama. Um eletrotécnico explicou que esse sistema usado para controlar uma lâmpada a partir de dois pontos é conhecido como circuito de interruptores paralelos.

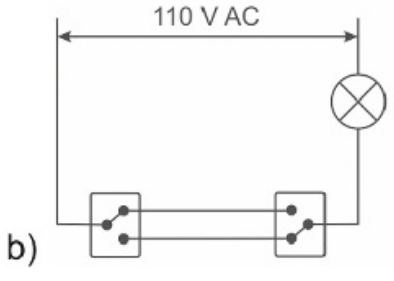


Como deve ser feita a montagem do circuito da lâmpada no quarto desse casal?

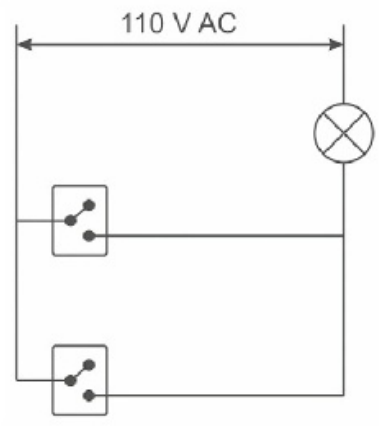
a)



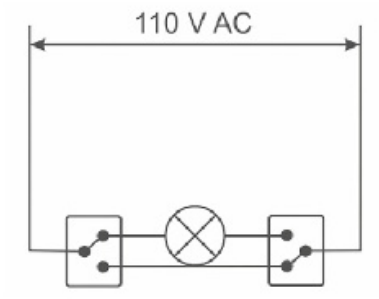
b)



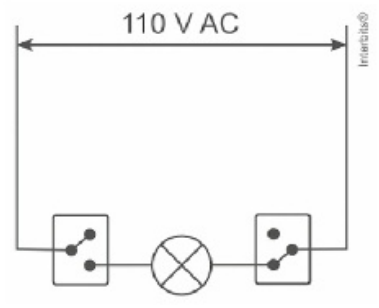
c)



d)



e)



11. As células fotovoltaicas transformam luz em energia elétrica. Um modelo simples dessas células apresenta uma eficiência de 10% Uma placa fotovoltaica quadrada com 5 cm de lado, quando exposta ao sol do meio-dia, faz funcionar uma pequena lâmpada, produzindo uma tensão de 5,0 V e uma corrente 100 mA. Essa placa encontra-se na horizontal em uma região onde os raios solares, ao meio dia, incidem perpendicularmente à superfície da Terra, durante certo período do ano.

A intensidade da luz solar, em W/m^2, ao meio-dia, nessa região é igual a

a) 1×10^2.

b) 2×10^2.

c) 2×10^3.

d) 1×10^6.

e) 2×10^6.

12. O Brasil vive uma crise hídrica que também tem trazido consequências na área de energia. Um estudante do ensino médio resolveu dar sua contribuição de economia, usando para isso conceitos que ele aprendeu nas aulas de física. Ele convence sua mãe a tomar banho com a chave do chuveiro na posição verão e diminuir o tempo de banho para 5 minutos, em vez de 15 minutos. Sua alegação baseou-se no seguinte argumento: se a chave do chuveiro estiver na posição inverno (potência de 6.000 W), o gasto será muito maior do que com a chave na posição verão (potência de 3.600 W).

A economia por banho, em kWh apresentada pelo estudante para sua mãe foi de

a) 0,3.

b) 0,5.

c) 1,2.

d) 1,5.

e) 1.8.

(ENEM PPL 2017)

13. A aquisição de um telescópio deve levar em consideração diversos fatores, entre os quais estão o aumento angular, a resolução ou o poder de separação e a magnitude limite. O aumento angular informa quantas vezes mais próximo de nós percebemos o objeto observado e é calculado como sendo a razão entre as distâncias focais da objetiva (F_1) e da ocular (F_2) A resolução do telescópio (P) informa o menor ângulo que deve existir entre dois pontos observados para que seja possível distingui-los. A magnitude limite (M) indica o menor brilho que um telescópio pode captar. Os valores numéricos de P e M pelas expressões: $P = \frac{12}{D}$ e $M = 7{,}1 + 5(\log D)$, em que D é o valor numérico do diâmetro da objetiva do telescópio, expresso em centímetro.

Disponível em: www.telescopiosastronomicos.com.br.
Acesso em: 13 maio 2013 (adaptado).

Ao realizar a observação de um planeta distante e de luminosidade, não se obteve uma imagem nítida. Para melhorar a qualidade dessa observação, os valores de D, F1 e F2 devem ser, respectivamente,

a) aumentado, aumentado e diminuído.

b) aumentado, diminuído e aumentado.

c) aumentado, diminuído e diminuído.

d) diminuído, aumentado e aumentado.

e) diminuído, aumentado e diminuído.

14. A figura mostra a bateria de um computador portátil, a qual necessita de uma corrente elétrica de 2 A para funcionar corretamente.



Quando a bateria está completamente carregada, o tempo máximo, em minuto, que esse notebook pode ser usado antes que ela "descarregue" completamente é

a) 24,0

b) 36,7

c) 132

d) 333

e) 528

15. A capacidade de uma bateria com acumuladores, tal como a usada no sistema elétrico de um automóvel, é especificada em ampère-hora (Ah) Uma bateria de 12 V e 100 Ah fornece 12 J para cada coulomb de carga que flui através dela.

Se um gerador, de resistência interna desprezível, que fornece uma potência elétrica média igual a 600 W fosse conectado aos terminais da bateria descrita, quanto tempo ele levaria para recarregá-la completamente?

a) 0,5 h

b) 2 h

c) 12 h

d) 50 h

e) 100 h

16. As lâmpadas econômicas transformam 80% da energia elétrica consumida em luz e dissipam os 20% restantes em forma de calor. Já as incandescentes transformam 20% da energia elétrica consumida em luz e dissipam o restante em forma de calor. Assim, quando duas dessas lâmpadas possuem luminosidades equivalentes, a econômica apresenta uma potência igual a um quarto de potência da incandescente.

Quando uma lâmpada incandescente de 60W é substituída por uma econômica de mesma luminosidade, deixa-se de transferir para o ambiente, a cada segundo, uma quantidade de calor, em joule, igual a

a) 3

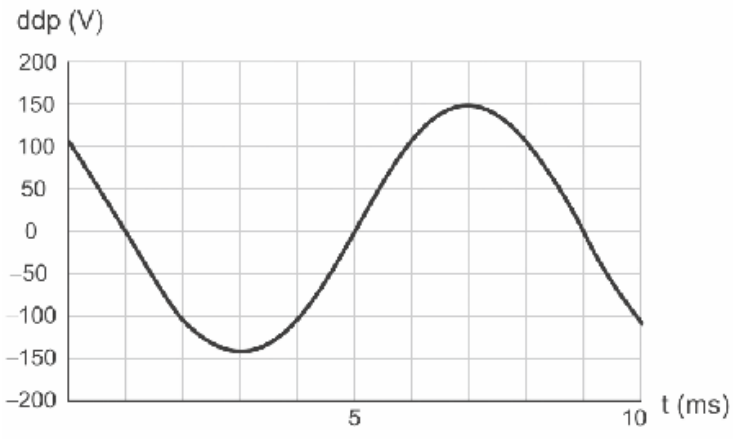
b) 12

c) 15

d) 45

e) 48

17. O osciloscópio é um instrumento que permite observar uma diferença de potencial (ddp) em um circuito elétrico em função de tempo ou em função de outra ddp. A leitura do sinal é feita em uma tela sob a forma de um gráfico tensão X tempo.



BOMFIM, M. Disponível em: www.ufpr.br. Acesso em: 14 ago. 2012 (adaptado).

A frequência de oscilação do circuito elétrico estudado é mais próxima de

a) 300 Hz

b) 250 Hz

c) 200 Hz

d) 150 Hz

e) 125 Hz

18.



DAVIS, J. Disponível em: http://garfield.com. Acesso em: 15 ago. 2014.

A faixa espectral da radiação solar que contribui fortemente para o efeito mostrado na tirinha é caracterizada como

a) visível.

b) amarela.

c) vermelha.

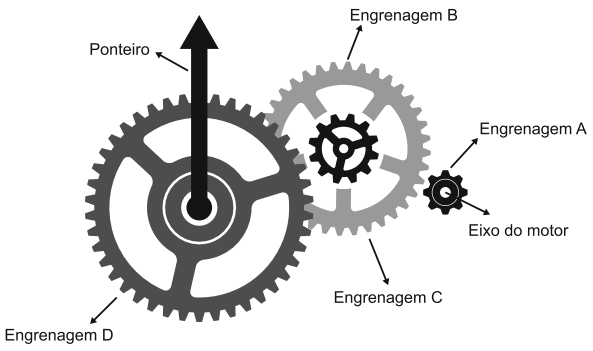
d) ultravioleta.

e) infravermelha.

(ENEM 2016)

19. A invenção e o acoplamento entre engrenagens revolucionaram a ciência na época e propiciaram a invenção de várias tecnologias, como os relógios. Ao construir um pequeno cronômetro, um relojoeiro usa o sistema de engrenagens mostrado. De acordo com a figura, um motor é ligado ao eixo e movimenta as engrenagens fazendo o ponteiro girar. A frequência do motor é de 18 rpm e o número de dentes das engrenagens está apresentado no quadro.

Engrenagem	Dentes
A	24
B	72
C	36
D	108



A frequência de giro do ponteiro, em rpm é

a) 1

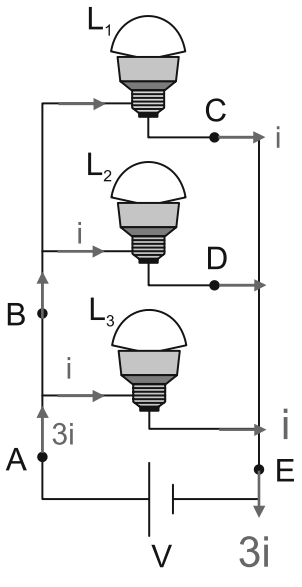
b) 2

c) 4

d) 81

e) 162

20. Três lâmpadas idênticas foram ligadas no circuito esquematizado. A bateria apresenta resistência interna desprezível, e os fios possuem resistência nula. Um técnico fez uma análise do circuito para prever a corrente elétrica nos pontos: A, B, C, D e E; e rotulou essas correntes de I_A, I_B, I_C, I_D e I_E, e respectivamente.



O técnico concluiu que as correntes que apresentam o mesmo valor são

a) $I_C = I_D$ $I_A = I_E$ e $I_C = I_D$.

b) $I_A = I_B = I_E$ e $I_C = I_D$.

c) $I_A = I_B$, apenas.

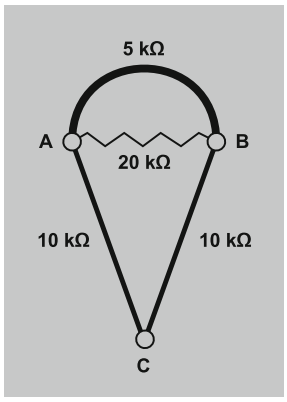
d) $I_A = I_B = I_E$, apenas.

e) $I_C = I_B$, apenas.

21. Por apresentar significativa resistividade elétrica, o grafite pode ser utilizado para simular resistores elétricos em circuitos desenhados no papel, com o uso de lápis e lapiseiras. Dependendo da espessura e do comprimento das linhas desenhadas, é possível determinar a resistência elétrica de cada traçado produzido. No esquema foram utilizados três tipos de lápis diferentes (2H, HB e 6B) para efetuar três traçados distintos.



Munida dessas informações, um estudante pegou uma folha de papel e fez o desenho de um sorvete de casquinha utilizando-se desses traçados. Os valores encontrados nesse experimento, para as resistências elétricas (R) medidas com o auxílio de um ohmímetro ligado nas extremidades das resistências, são mostrados na figura. Verificou-se que os resistores obedeciam a lei de Ohm.



Na sequência, conectou o ohmímetro nos terminais A e A do desenho e, em seguida, conectou-o nos terminais B e C, anotando as leituras RAB e RBC, respectivamente. Ao estabelecer a razão RAB/RBC, qual resultado o estudante obteve?

a) 1

b) 4/7

c) 10/27

d) 14/81

e) 4/81

(ENEM PPL 2016)

22. Durante a formação de uma tempestade, são observadas várias descargas elétricas, os raios, que podem ocorrer: das nuvens para o solo (descarga descendente), do solo para as nuvens (descarga ascendente) ou entre uma nuvem e outra. As descargas ascendentes e descendentes podem ocorrer por causa do acúmulo de cargas elétricas positivas ou negativas, que induz uma polarização oposta no solo. Essas descargas elétricas ocorrem devido ao aumento da intensidade do(a)

a) campo magnético da Terra.

b) corrente elétrica gerada dentro das nuvens.

c) resistividade elétrica do ar entre as nuvens e o solo.

d) campo elétrico entre as nuvens e a superfície da Terra.

e) força eletromotriz induzida nas cargas acumuladas no solo.

23. O choque elétrico é uma sensação provocada pela passagem de corrente elétrica pelo corpo. As consequências de um choque vão desde um simples susto até a morte. A circulação das cargas elétricas depende da resistência do material. Para o corpo humano, essa resistência varia de 1.000 Ω quando a pele está molhada, até 100.000 Ω quando a pele está seca. Uma pessoa descalça, lavando sua casa com água, molhou os pés e, acidentalmente, pisou em um fio desencapado, sofrendo uma descarga elétrica em uma tensão de 120 V.

Qual a intensidade máxima de corrente elétrica que passou pelo corpo da pessoa?

a) 1,2 mA

b) 120 mA

c) 8,3 A

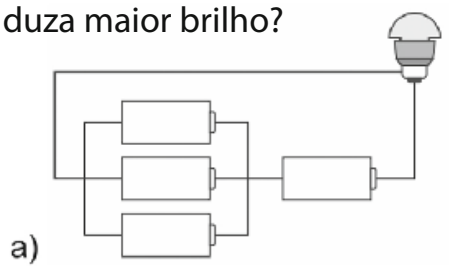
d) 833 A

e) 120 kA

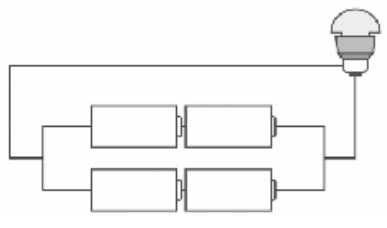
24. Em um laboratório, são apresentados aos alunos uma lâmpada, com especificações técnicas de 6 V e 12 W e um conjunto de 4 pilhas de 1,5 V cada.

Qual associação de geradores faz com que a lâmpada produza maior brilho?

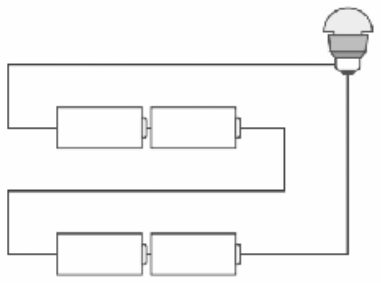
a)



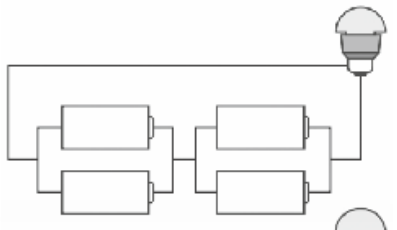
b)



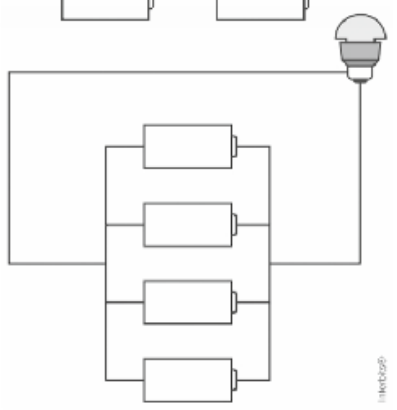
c)



d)



e)



25. Uma família adquiriu um televisor e, no manual do usuário, constavam as especificações técnicas, como apresentado no quadro. Esse televisor permaneceu 30 dias em repouso (stand-by). Considere que a eficiência entre a geração e a transmissão de eletricidade na usina é de 30%.

Tensão de entrada	AC 100-240V 50/60 Hz
Consumo de potência	45 W
Potência em repouso	1 W

Que quantidade de energia, em joules, foi produzida na usina para manter o televisor em stand-by?

a) 2,59 MJ

b) 8,05 MJ

c) 8,64 MJ

d) 117 MJ

e) 377 MJ

26. Todo ano, cresce a demanda mundial de energia com o aumento das populações e do consumo. É cada vez mais necessário buscar fontes alternativas que não degradem os recursos do planeta nem comprometam a sobrevivência das espécies. Ainda há muito o que se descobrir sobre o uso eficiente de recursos energéticos provenientes de fontes renováveis, mas elas estão mais próximas do que parece da adoção em larga escala.

BARBOSA, M. A sustentabilidade da energia renovável. Superinteressante, n. 102, 1996.

Os recursos energéticos do tipo citado são provenientes de

a) pilhas e baterias.

b) usinas nucleares e hidrelétricas.

c) células solares e geradores eólicos.

d) centrais geotérmicas e termoelétricas.

e) usinas maremotrizes e combustíveis fósseis.

27. Em 26 de dezembro de 2004, um tsunami devastador, originado a partir de um terremoto na costa da Indonésia, atingiu diversos países da Ásia, matando quase 300 mil pessoas. O grau de devastação deveu-se, em boa parte, ao fato de as ondas de um tsunami serem extremamente longas, com comprimento de onda de cerca de 200 km Isto é muito maior que a espessura da lâmina de líquido, d, típica do Oceano Índico, que é de cerca de 4 km. Nessas condições, com boa aproximação, a sua velocidade de propagação toma-se dependente de d, obedecendo à relação $v = \sqrt{gd}$. Nessa expressão, g é a aceleração da gravidade, que pode ser tomada como 10 m/s^2

SILVEIRA, F. L; VARRIALE, M. C. Propagação das ondas marítimas e dos tsunami. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, n. 2, 2005 (adaptado).

Sabendo-se que o tsunami consiste em uma série de ondas sucessivas, qual é o valor mais próximo do intervalo de tempo entre duas ondas consecutivas?

a) 1 min.

b) 3,6 min.

c) 17min.

d) 60 min.

e) 216 min.

28. A telefonia móvel no Brasil opera com celulares cuja potência média de radiação é cerca de 0,6 W. Por recomendação do ANSI/IEEE, foram estipulados limites para exposição humana à radiação emitida por esses aparelhos. Para o atendimento dessa recomendação, valem os conselhos: segurar o aparelho a uma pequena distância do ouvido, usar fones de ouvido para as chamadas de voz e utilizar o aparelho no modo viva voz ou com dispositivos bluetooth. Essas medidas baseiam-se no fato de que a intensidade da radiação emitida decai rapidamente conforme a distância aumenta, por isso, afastar o aparelho reduz riscos.

COSTA, E. A. F. Efeitos na saúde humana da exposição aos campos de radiofrequência. Disponível em: www.ced.ufsc.br. Acesso em: 16 nov. 2011 (adaptado).

Para reduzir a exposição à radiação do celular de forma mais eficiente, o usuário deve utilizar

a) fones de ouvido, com o aparelho na mão.

b) fones de ouvido, com o aparelho no bolso da calça.

c) fones bluetooth, com o aparelho no bolso da camisa.

d) o aparelho mantido a 1,5 cm do ouvido, segurado pela mão.

e) o sistema viva voz, com o aparelho apoiado numa mesa de trabalho.

29. Algumas crianças, ao brincarem de esconde-esconde, tapam os olhos com as mãos, acreditando que, ao adotarem tal procedimento, não poderão ser vistas.

Essa percepção da criança contraria o conhecimento científico porque, para serem vistos, os objetos

a) refletem partículas de luz (fótons), que atingem os olhos.

b) geram partículas de luz (fótons), convertidas pela fonte externa.

c) são atingidos por partículas de luz (fótons), emitidas pelos olhos.

d) refletem partículas de luz (fótons), que se chocam com os fótons emitidos pelos olhos.

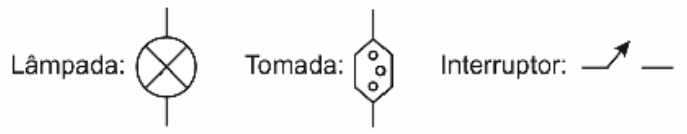
e) são atingidos pelas partículas de luz (fótons), emitidas pela fonte externa e pelos olhos.

(ENEM 2015)

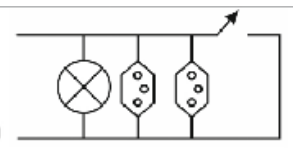
30. Um estudante, precisando instalar um computador, um monitor e uma lâmpada em seu quarto, verificou que precisaria fazer a instalação de duas tomadas e um interruptor na rede elétrica. Decidiu esboçar com antecedência o esquema elétrico.

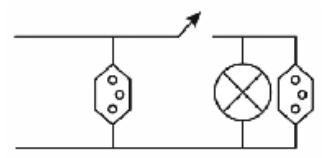
"O circuito deve ser tal que as tomadas e a lâmpada devem estar submetidas à tensão nominal da rede elétrica e a lâmpada deve poder ser ligada ou desligada por um interruptor sem afetar os outros dispositivos" — pensou.

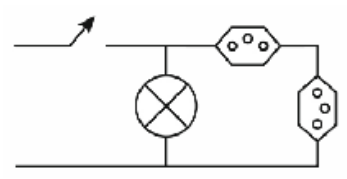
Símbolos adotados:

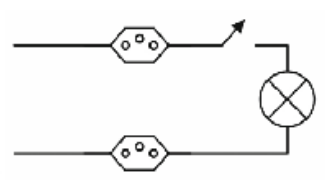


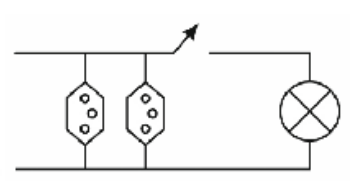
Qual dos circuitos esboçados atende às exigências?

a)


b)


c)


d)


e)


GABARITO
E COMENTÁRIOS

CONSULTORIA: Jorgênio Miranda Costa, formado pela Faculdade Oswaldo Cruz, físico pela Universidade de São Paulo (USP), mestre em ciências com concentração em infectologia em saúde pública e professor de vários cursinhos universitários em São Paulo.

1. B

O 2 é o cinto com menor valor de amplitude, portanto o mais seguro.

2. E

Isolando o que temos como dados do exercício:

- Motorista atento

Tempo e distância percorrida até atingir a partir do repouso:

$$v = v_0 + at$$
$$14 = 0 + 1 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 14\ s$$
$$v^2 = v_0{}^2 + 2a\Delta s$$
$$14^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = 98\ m$$

Distância percorrida até parar:

$$0^2 = 14^2 + 2 \cdot (-5) \cdot d_1' \Rightarrow d_1' = 19{,}6\ m$$

Distância total percorrida:

$$\Delta s_1 = d_1 + d_1' = 98 + 19{,}6 \Rightarrow \Delta s_1 = 117{,}6\ m$$

- Motorista com celular

$$t_2 = t_1 + 1 \Rightarrow t_2 = 15\ s$$

Velocidade atingida e distância percorrida a partir do repouso:

$$v_2 = 0 + 1 \cdot 15 \Rightarrow v_2 = 15\ m/s$$
$$15^2 = 0^2 + 2 \cdot 1 \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 112{,}5\ m$$

Distância percorrida até parar:

$$0^2 = 15^2 + 2 \cdot (-5) \cdot d_2' \Rightarrow d_2' = 22{,}5\ m$$

Distância total percorrida:

$$\Delta s_2 = d_2 + d_2' = 112{,}5 + 22{,}5 \Rightarrow \Delta s_2 = 135\ m$$

Portanto a distância percorrida a mais pelo motorista com celular é de:

$$\Delta s = \Delta s_2 - \Delta s_1 = 135 - 117{,}6$$
$$\therefore \Delta s = 17{,}4\ m$$

3. C

A energia cinética da criança deve se anular nos pontos de altura mínima e máxima, onde está convertida em energia potencial (elástica ou gravitacional), e máxima no ponto de altura zero.

Na região $0 < h < h_{máx}$, atua a $E_p = mgh$. E na região $h_{mín} < h < 0$, age também a $E_{e\ell} = \frac{kh^2}{2}$.

Logo, devido às relações das energias com as alturas, segue que E_c deve variar linearmente apenas para $0 < h < h_{máx}$.

4. D

Relação entre os calores Q_s e Q_m trocados, respectivamente, nas condições superquente e morno:

$$\frac{Q_s}{Q_m} = \frac{mc\Delta T_s}{mc\Delta T_m} \Rightarrow \frac{Q_s}{Q_m} = \frac{\Delta T_s}{\Delta T_m}$$

Como $P = \frac{Q}{\Delta t}$, tem-se que:

$$\frac{P_s \Delta t}{P_m \Delta t} = \frac{\Delta T_s}{\Delta T_m} \Rightarrow \frac{P_s}{P_m} = \frac{\Delta T_s}{\Delta T_m}$$

Substituindo os valores de AT do gráfico nessa última relação, chegamos a:

$$\frac{P_s}{P_m} = \frac{32}{12} \therefore \frac{P_m}{P_s} = \frac{3}{8}$$

5. C

Sendo r o valor da resistência interna do gerador, pela 1ª lei de Ohm, temos que:

$$V = (r + R)i$$
$$10000 = (r + 1000)0{,}01$$
$$r = 999000\ \Omega \approx 10^6\ \Omega$$

Em relação à resistência do corpo humano:

$$\frac{r}{R} = \frac{10^6}{10^3} = 10^3$$

Ou seja, o valor da resistência deve ser cerca de 1000 vezes maior.

6. A

$$\begin{cases} V = iR \\ 2V = iR' \end{cases} \Rightarrow R' = 2R$$

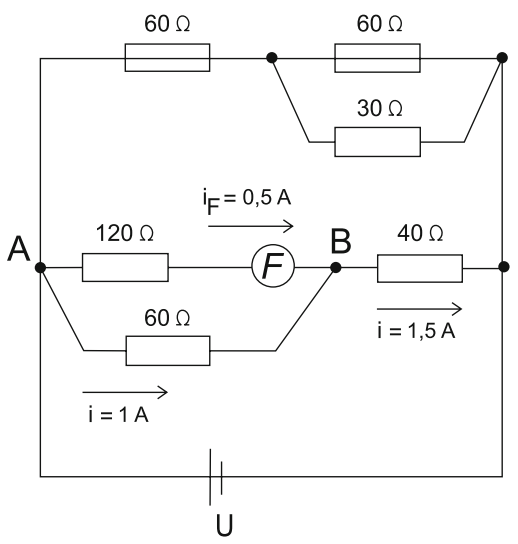
Para dobrar a tensão máxima v do gerador, deve-se manter constante a corrente de curto i. É necessário dobrar o valor da resistência R.

$$B = N\frac{\mu i}{2r} = N\frac{\mu U}{2rR} \Rightarrow R = N\frac{\mu U}{2rB}$$

Assim uma forma possível de fazê-lo seria dobrando o número de espiras.

7. D

Vamos redesenhar o circuito:



Sabemos que deve passar uma corrente de 0,5 A pelo fusível. A corrente i' que deve passar pelo resistor de 60Ω em paralelo com ele deve ser de:

$$120 \cdot 0{,}5 = 60 \cdot i' \Rightarrow i' = 1\ A$$

Sendo assim, por deve passar uma corrente de:

$$i = i_F + i' = 0{,}5 + 1 \Rightarrow i = 1{,}5\ A$$

Resistência equivalente no ramo AC:

$$R_{AC} = \frac{120 \cdot 60}{120 + 60} + 40 \Rightarrow R_{AC} = 80\ \Omega$$

Como os ramos estão em paralelo, podemos calcular U como:

$$U = R_{AC} \cdot i = 80 \cdot 1{,}5$$

$$\therefore U = 120\ V$$

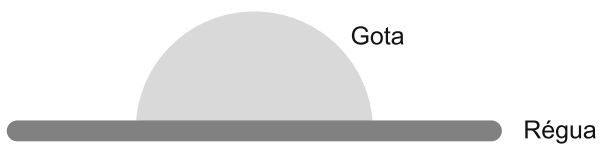
8. C

Dados: $\Delta S = 0{,}5\,m;\ v = 60\,km/h = \frac{60}{3{,}6}\,m/s = \frac{50}{3}\,m/s.$

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta S}{v} = \frac{0{,}5}{50/3} = \frac{1{,}5}{50} = 0{,}03\,s \Rightarrow \boxed{\Delta t = 30\,ms.}$$

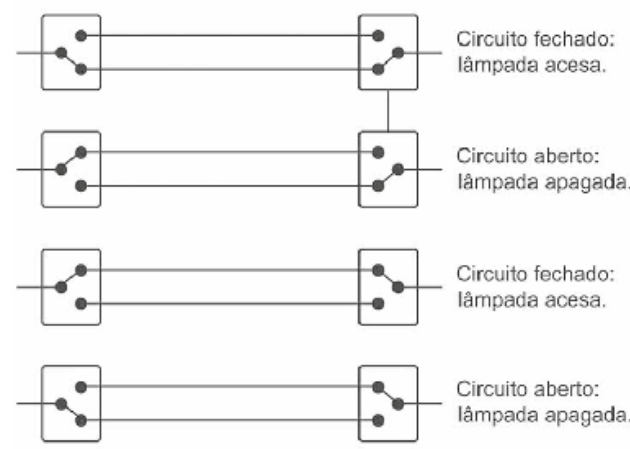
9. C

Temos a vista frontal de uma gota sobre uma régua, e a gota forma uma lente plano-convexa.



10. B

Aqui temos quatro posições possíveis que ilustram o funcionamento do sistema.



11. C

Dados: $U = 5\ V;\ i = 100\ mA = 0{,}1\ A;\ L = 5\ cm;\ \eta = 10\% = 0{,}1.$

A potência elétrica (útil) para acender a lâmpada é:

$$P_U = Ui = 5 \times 0{,}1 \Rightarrow \underline{P_U = 0{,}5\ W.}$$

Essa potência é 10% da potência (total) incidente na placa fotovoltaica.

$$\eta = \frac{P_U}{P_T} \Rightarrow P_T = \frac{P_U}{\eta} = \frac{0{,}5}{0{,}1} \Rightarrow \underline{P_T = 5\ W.}$$

A área de captação de energia da placa é:

$$A = L^2 = 5 \times 5 = 25\ cm^2 \Rightarrow \underline{A = 25 \times 10^{-4}\ m^2.}$$

A intensidade da radiação incidente é:

$$I = \frac{P_T}{A} = \frac{5}{25 \times 10^{-4}} = 0{,}2 \times 10^4\ W/m^2 \Rightarrow \boxed{I = 2 \times 10^3\ W/m^2.}$$

12. C

Dados:

$$P_1 = 6.000\ W = 6\ kW;\ P_2 = 3.600\ W = 3{,}6\ kW;\ t_1 = 15\ min = \frac{1}{4}\ h;\ t_2 = 5\ min = \frac{1}{12}\ h.$$

A economia de energia é:

$$E = E_1 - E_2 = P_1 t_1 - P_2 t_2 = 6 \cdot \frac{1}{4} - 3{,}6 \cdot \frac{1}{12} = 1{,}5 - 0{,}3 \Rightarrow \boxed{E = 1{,}2\ kWh.}$$

13. A

Tendo como dados as expressões de P e M, podemos aumentar o valor de para diminuir o menor ângulo necessário e ampliar a magnitude limite. E, já que o aumento angular é dado por F_1/F_2, devemos aumentar F_1 e diminuir F_2.

14. C

Temos como dados: Ah é unidade de carga elétrica e a quantidade de carga armazenada por hora é igual a 4400 mAh. Calculando,

$$Q = 4400 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \Rightarrow Q = 264\ A\,min$$

Portanto o tempo máximo para utilização é de:

$$\Delta t = \frac{Q}{i} = \frac{264\ A\,min}{2\ A}$$

$$\therefore \Delta t = 132\ min$$

15. B

Carga necessária para carregar a bateria:

Q = 100 Ah

Corrente do gerador:

$P = iU \Rightarrow 600 = i \cdot 12 \Rightarrow i = 50\ A$

Logo:

$$i = \frac{Q}{\Delta t} \Rightarrow 50 = \frac{100}{\Delta t}$$

$$\therefore \Delta t = 2\ h$$

16. D

Temos os seguintes dados:

$$P_i = 60\ W$$

$$P_e = \frac{60\ W}{4} = 15\ W$$

Como as energias transferidas para o ambiente são:

$$E_i = 0{,}8 \cdot 60 \cdot 1 \Rightarrow E_i = 48\ J$$

$$E_e = 0{,}2 \cdot 15 \cdot 1 \Rightarrow E_e = 3\ J$$

Por isso, a cada segundo, deixa-se de transferir para o ambiente uma quantidade de calor igual a 45 J.

17. E

Tomando a distância horizontal entre um mínimo e um máximo no gráfico, teremos como resultado a metade do período. Sendo assim:

$$\frac{T}{2} = 7 - 3 \Rightarrow T = 8\ ms$$

Ao aplicarmos a fórmula, temos como frequência de oscilação do circuito:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}}$$

$$\therefore f = 125\ Hz$$

18. D

É a violeta, porque possui menor comprimento de onda do espectro e, devido a isso, a maior frequência e energia transportada, podendo apresentar riscos para as formas de vida na Terra.

19. B

Sabemos que no, acoplamento coaxial, temos frequências iguais e que no tangencial elas são inversamente proporcionais aos números de dentes. Assim:

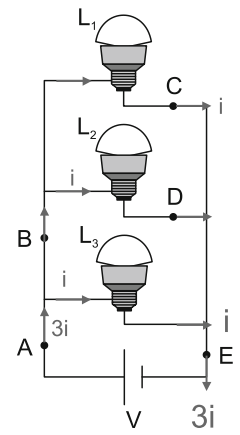
$$\begin{cases} f_A = f_{motor} = 18\ rpm. \\ f_B N_B = f_A N_A \Rightarrow f_B \cdot 72 = 18 \cdot 24 \Rightarrow f_B = 6\ rpm. \\ f_C = f_B = 6\ rpm. \\ f_D N_D = f_C N_C \Rightarrow f_D \cdot 108 = 6 \cdot 36 \Rightarrow f_D = 2\ rpm. \end{cases}$$

A frequência do ponteiro é igual à da engrenagem, ou seja:

$$\boxed{f = 2\ rpm.}$$

20. A

As três lâmpadas estão em paralelo. Como são idênticas, são percorridas pela mesma corrente, i. A figura mostra a intensidade da corrente elétrica em cada lâmpada e nos pontos destacados.



De acordo com a imagem:

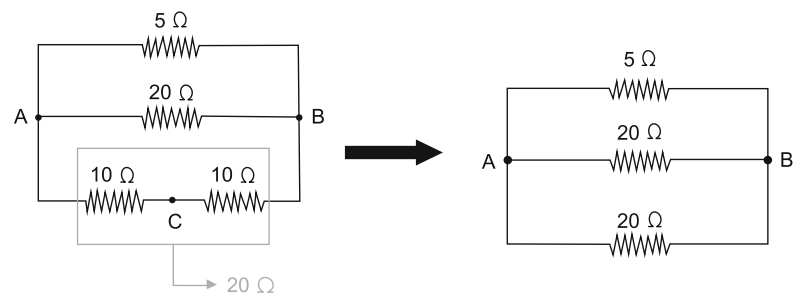
$I_A = 3i;\ I_B = 2i;\ I_C = i;\ I_D = i$ e $I_E = 3i$.

Portanto:

$$\boxed{I_A = I_E \text{ e } I_C = I_D.}$$

21. B

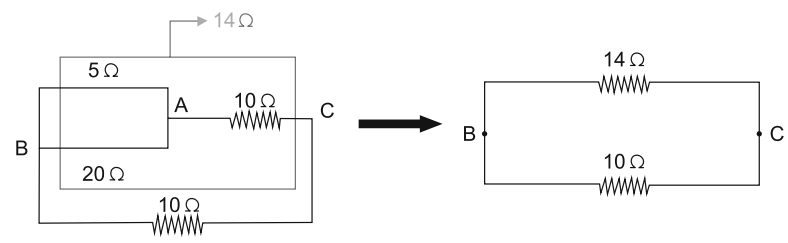
Vamos esquematizar a primeira situação proposta e fazer as simplificações:



A resistência equivalente nessa situação 1 é:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4+1+1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \Rightarrow \underline{R_{AB} = \frac{10}{3}\ \Omega.}$$

Esquematizando a segunda situação proposta e fazendo as simplificações:



No ramo superior da figura acima, a resistência equivalente é:

$$R_{BC1} = \frac{20 \cdot 5}{25} + 10 = 4 + 10 \Rightarrow R_{BC1} = 14\ \Omega.$$

A resistência equivalente na situação 2 é:

$$R_{BC} = \frac{14 \cdot 10}{24} = \frac{140}{24} \Rightarrow \underline{R_{BC} = \frac{35}{6}\ \Omega.}$$

Fazendo a razão pedida:

$$\frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{10/3}{35/6} = \frac{10}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{6}}{35} = \frac{20}{35} \Rightarrow \boxed{\frac{R_{AB}}{R_{BC}} = \frac{4}{7}.}$$

22. D

O deslocamento de partículas carregadas (íons) que acarretam descargas elétricas se deve ao aumento do campo elétrico entre as nuvens e o solo.

23. B

A intensidade máxima de corrente elétrica ocorre para o valor mínimo de resistência. Pela 1ª lei de Ohm:
U = R . i.

$$i_{máx} = \frac{120}{1000} = 120 \cdot 10^{-3}$$

$$\therefore i_{máx} = 120\ mA$$

24. C

A lâmpada produzirá maior brilho para a associação que produzir a maior potência e, como esta é proporcional à tensão, o circuito com maior tensão elétrica equivalente proverá o maior brilho.
Tensão equivalente para os circuitos:

[A]: $V_A = (1{,}5\ //\ 1{,}5\ //\ 1{,}5) + 1{,}5 \Rightarrow V_A = 3\ V$

[B]: $V_B = (1{,}5 + 1{,}5)\ //\ (1{,}5 + 1{,}5) \Rightarrow V_B = 3\ V$

[C]: $V_C = 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \Rightarrow V_C = 6\ V$

[D]: $V_D = (1{,}5\ //\ 1{,}5) + (1{,}5\ //\ 1{,}5) \Rightarrow V_D = 3\ V$

[E]: $V_E = 1{,}5\ //\ 1{,}5\ //\ 1{,}5\ //\ 1{,}5 \Rightarrow V_E = 1{,}5\ V$

Portanto a associação que produzirá o maior brilho é a do item C.

25. C

Para a potência em repouso de 1 W, a potência total produzida pela usina é de:

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} \Rightarrow 0{,}3 = \frac{1}{P_t} \Rightarrow P_t = \frac{10}{3}\ W$$

Logo a energia produzida em 30 dias devido a esta potência equivale a:

$$E = P_t \cdot \Delta t = \frac{10}{3} \cdot 30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 8.640.000\ J$$

$$\therefore E = 8{,}64\ MJ$$

26. C

Células solares e geradores eólicos são fontes renováveis de energia, informação presente na letra C.

27. C

Vamos determinar o período a partir da equação de onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{\sqrt{gd}} = \frac{200 \cdot 10^3}{\sqrt{10 \cdot 4 \cdot 10^3}} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}$$

$$\therefore T = 1000\ s \approx 17\ min$$

28. E

A alternativa que melhor responde ao pedido é a E, porque não há contato físico com o aparelho celular.

29. A

Para um objeto ser observado, é necessário que neste reflitam raios de luz e que estes cheguem aos olhos do observador.

30. E

Os três dispositivos devem ser associados em paralelo para ficarem sob mesmo ddp, mas isso desde que a chave ligue e desligue somente a lâmpada e permaneça em série apenas com ela.

ANOTAÇÕES

SUPERGUIA Enem



Outros títulos da série Superguia ENEM:

- Português e Redação
- Geografia e História
- Química e Biologia
- Sociologia e Filosofia
- Atualidades

Superguia Enem Matemática e Física - Edição 3 - 2018
R$ 19,90

9 788582 468111
ISBN 978-85-8246-811-1