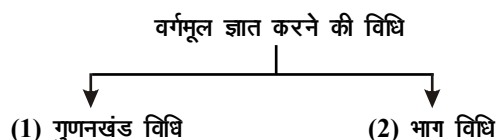


वर्गमूल तथा घनमूल

(Square Root and Cube Root)

जब किसी संख्या का उसी संख्या में गुणा किया जाता है तो एक नई संख्या प्राप्त होती है। इस नई संख्या को उस संख्या का वर्ग कहा जाता है तथा मूल संख्या को गुणनफल संख्या का वर्गमूल कहते हैं। जैसे- जब 6 का 6 में गुणा किया जाय तो गुणनफल 36 (6×6) प्राप्त होता है। यहां 36 को 6 का वर्ग तथा 6 को 36 का वर्गमूल कहेंगे। वर्गमूल का संकेत करणी ($\sqrt{\quad}$) होता है। इस संकेत को दो घात की ($\sqrt{\quad}$ य $\sqrt[3]{\quad}$) करणी भी कहते हैं। वर्ग का अर्थ है- किसी संख्या की घात दो।

किसी धनात्मक वास्तविक संख्या का दो वर्गमूल होता है- एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक। जैसे संख्या 9 का वर्गमूल ± 3 अर्थात् +3 और -3 होता है क्योंकि +3 का +3 में गुणा करने पर 9 प्राप्त होगा और -3 का -3 में गुणा करने पर भी 9 ही प्राप्त होगा। वर्गमूल धनात्मक और ऋणात्मक दो प्रकार का होता है परन्तु बहुत से मामलों में धनात्मक वर्गमूल ही ग्रहण किया जाता है (क्योंकि प्रश्न में व्यक्तियों की संख्या, वस्तुओं की संख्या आदि ज्ञात करना होता है जो कि सदैव धनात्मक ही होंगे) विशेष स्थितियों में ही दोनों प्रकृति के वर्गमूल ग्रहण किये जाते हैं। यह बात प्रश्न की प्रकृति पर निर्भर करता है। किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करने के लिए सीधे उस संख्या का उसी में गुणा कर देते हैं जबकि वर्गमूल ज्ञात करने हेतु निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं-



1. गुणनखंड विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जिस संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना रहता है उसका सर्वप्रथम अभाज्य गुणनखंड करते हैं। इसके बाद इन गुणनखंडों से दो-दो का समूह बनाते हैं। इन समूहों को दो-दो का जोड़ा भी कहा जाता है। अब प्रत्येक समूह से एक-एक गुणनखंड लेकर उनका आपस में गुणा कर देते हैं। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल अभीष्ट वर्गमूल होता है।

देखें- उदाहरणार्थ प्रश्न- 36 का वर्गमूल ज्ञात करें।

सर्वप्रथम 36 का अभाज्य गुणनखंड करते हैं अर्थात् $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ अब इन गुणनखंडों से दो-दो का समूह बनाते हैं $\underline{2 \times 2}$, $\underline{3 \times 3}$ । अब प्रत्येक समूह से एक-एक गुणनखंड लेते हैं 2 और 3 फिर इनका आपस में गुणा कर देते हैं अर्थात् $2 \times 3 = 6$ । अतः प्राप्त प्रतिफल 6 अभीष्ट वर्गमूल होगा।

2. भाग विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना-

जब संख्या का गुणनखंड संभव न हो या कठिन हो तब भाग विधि का प्रयोग करके वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है। सामान्यतः भाग विधि से शुद्ध अंकगणितीय संख्याओं का ही वर्गमूल ज्ञात किया जाता है।

भाग विधि द्वारा कैसे वर्गमूल ज्ञात किया जाता है ?

यदि संख्या पूर्णांक में हो तो सर्वप्रथम इकाई वाले अंक से बाएं दिशा में दो-दो अंकों का समूह बना लेते हैं। यदि संख्या में अंकों की संख्या सम हो तो सभी समूह दो-दो अंकों के होते हैं जैसे- 13 69 परन्तु यदि संख्या में अंकों की संख्या विषम हो तो

एकदम बायें वाला अंतिम समूह केवल एक अंक का ही होगा जैसे- 357 32 में सबसे बाएं वाले समूह में एक ही अंक 3 है। अब बाईं ओर वाले सबसे पहले समूह में उस संख्या से भाग देते हैं जिसका वर्ग उस समूह के बराबर या कम आए। इस संख्या को भाजक और भागफल दोनों जगह लिखते हैं। जैसे- यदि 1369 का वर्गमूल निकालना हो तो सर्वप्रथम संख्या 3 को भाजक एवं भागफल दोनों स्थान पर लिखते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ 3 & 13 \quad 69 \\ & 9 \\ \hline & 4 \quad 69 \end{array}$$

तथा वर्ग संख्या को प्रथम समूह के नीचे लिखकर घटा देते हैं और शेष के ठीक सामने अगला समूह लिखते हैं। इसके बाद भाजक को दूना करके अगला भाजक बनाते हैं और इस भाजक के पहले अंक से भाग देते हैं। प्राप्त भागफल पहले भागफल के दाहिने और भाजक के भी दाहिने लिखते हैं। इस प्रकार एक नया भाजक बन जाता है और उसका दूसरे भागफल में गुणा करके भाज्य से घटा देते हैं।

☞ देखें उपर्युक्त उदाहरणार्थ प्रश्न का वर्गमूल

$$\begin{array}{r|l} & 37 \\ 3 & 1369 \\ 3 & 9 \\ \hline 67 & 469 \\ & 469 \\ \hline & \times \times \times \end{array}$$

जब भाग की क्रिया पूरी हो जाय तो प्राप्त भागफल ही अभीष्ट वर्गमूल होता है। यहां 37 संख्या 1369 का वर्गमूल है।

□ यदि संख्या दशमलव में हो तो वर्गमूल निकालना

यदि संख्या दशमलव में हो तो दशमलव चिह्न के दाएं और बाएं दोनों तरफ दो-दो अंकों का समूह बना लेते हैं। यहां ध्यान रखने की बात यह है कि संख्या के पूर्णांक में समूह दाएं से बाएं बनते हैं जबकि अपूर्णांक में बाएं से दाएं। जैसे- 2 78.89 का

वर्गमूल निकालने का समूह बनाया। यदि दशमलव के दाहिने वाले अंक अर्थात् अपूर्णांक के अंकों की संख्या विषम हो तो अंत में शून्य (0) लिखकर जोड़ा या समूह बना लेते हैं।

☞ देखें-उदाहरणार्थ प्रश्न

27.889 का वर्गमूल निकालें ?

$$\begin{array}{r|l} & 5.28 \\ 5 & 27.88 \quad 90 \\ 5 & 25 \\ \hline 102 & 288 \\ 2 & 204 \\ \hline 1048 & 8490 \\ & 8384 \\ \hline & 106 \end{array}$$

अतः दशमलव के दो अंकों तक वर्गमूल 5.28 हुआ।

□ यदि संख्या भिन्न में हो तो वर्गमूल निकालना

(i) यदि भिन्न का अंश और हर दोनों वर्ग संख्या हो तो दोनों का अलग-अलग वर्गमूल निकालते हैं और फिर उन वर्गमूलों

से नई भिन्न बना देते हैं। जैसे $\frac{25}{49}$ का वर्गमूल निकालने के लिए

अंश का वर्गमूल 5 तथा हर का वर्गमूल 7 ज्ञात किया। इस प्रकार

$\frac{5}{7}$ भिन्न $\frac{25}{49}$ का वर्गमूल है।

(ii) यदि भिन्न का अंश और हर दोनों वर्ग न हो तो भिन्न को या तो दशमलव में बदलकर भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करते हैं या अंश और हर का अलग-अलग भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात

करते हैं। जैसे $\frac{1}{2}$ का वर्गमूल लेने के लिए $\frac{1}{2} = .5$ का वर्गमूल

ज्ञात करेंगे।

$$\begin{array}{r|l} & .707 \\ 7 & .50 \quad 00 \quad 00 \\ 7 & 49 \\ \hline 1407 & 100 \quad 00 \\ & 98 \quad 49 \\ \hline & 151 \end{array}$$

अतः दशमलव के 3 स्थान तक $\frac{1}{2}$ का वर्गमूल .707 है।

⇒ उत्तर

□ वर्ग-वर्गमूल

☞ वर्ग कैसे जाने ?

वर्ग संख्याएं जानने के लिए 2 सरल तथ्य ध्यान में रखें-

(1) 0 एवं 5 इकाई वाली संख्याओं का वर्ग करना अत्यधिक आसान है

देखें-

(i) 10 एवं 20 का वर्ग

$$10 \times 10 = 100, 20 \times 20 = 400$$

(संख्याओं को परस्पर गुणा करके उनके आगे उतने ही शून्य रख दें जितने इन संख्याओं में हैं)

(ii) 75, 85, 95 एवं 105 का वर्ग = ?

$$75^2 = 5625$$

$$85^2 = 7225$$

$$95^2 = 9025$$

$$105^2 = 11025$$

इकाई का अंक 5 वाली संख्याओं का वर्ग ज्ञात करने हेतु सदा यह करें-

(a) 5 का वर्ग करके रख दें ($5^2 = 25$)

(b) इसके बगल में शेष बची संख्या को उसकी अगली संख्या से गुणा करके रख दें।

$$\text{जैसे— } (75)^2 = \begin{array}{cc} 56 & 25 \\ \uparrow & \uparrow \\ (7 \times 8) & (5 \times 5) \end{array} = 5625$$

(5 का वर्ग करके 25 रखा गया इसके ठीक पहले 7 में उसकी अगली संख्या 8 से गुणा करके 56 रख गया)

$$\text{इसी प्रकार } (85)^2 = \begin{array}{cc} 72 & 25 \\ \uparrow & \uparrow \\ (8 \times 9) & (5 \times 5) \end{array} = 7225$$

$$(95)^2 = \begin{array}{cc} 90 & 25 \\ \uparrow & \uparrow \\ (9 \times 10) & (5 \times 5) \end{array} = 9025$$

$$(105)^2 = \begin{array}{cc} 110 & 25 \\ \uparrow & \uparrow \\ (10 \times 11) & (5 \times 5) \end{array} = 11025$$

(2) किसी संख्या के वर्ग में यदि वह संख्या और उसकी अगली संख्या जोड़ दें तो अगली संख्या का वर्ग प्राप्त होगा और

यदि वह संख्या और पिछली संख्या घटा दें तो पिछली संख्या का वर्ग प्राप्त हो जाएगा।

देखें-

(i) यदि 10 का वर्ग 100 है तो 11 का वर्ग क्या होगा ?

$$100 + 10 + 11 = 121$$

अर्थात् 10 के वर्ग में 10 एवं उसकी अगली संख्या 11 जोड़ दें।

12 का वर्ग क्या होगा ?

$$(11)^2 + 11 + 12 = 121 + 11 + 12 = 144$$

(ii) यदि 10 का वर्ग 100 है तो 9 का वर्ग क्या होगा ?

$$100 - 10 - 9 = 81$$

अर्थात् 10 के वर्ग में 10 एवं उसकी पिछली संख्या 9 घटा दें।

114 का वर्ग = ?

$$115 \text{ का वर्ग } = 13225$$

$$114 \text{ का वर्ग } = (115)^2 - (115 + 114) = 13225 - 229 = 12996$$

113 का वर्ग = ?

$$(113)^2 = (115)^2 - (115 + 114 + 114 + 113)$$

या

$$= (115)^2 - (114 \times 4)$$

$$= 13225 - 456 = 12769$$

नोट— 113 का वर्ग जानने के लिए 115 के वर्ग में 113 एवं 115 के बीच की संख्या (114) का 4 गुना घटा दें।

☞ कुछ उदाहरण देखें-

$$(102)^2 = ?$$

$$(102)^2 = (100)^2 + (101 \times 4) = 10000 + 404 = 10404$$

$$(103)^2 = ?$$

$$(103)^2 = (105)^2 - (104 \times 4) = 11025 - 416 = 10609 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

उपर्युक्त जानकारियों का प्रयोग कर बड़ी से बड़ी संख्या का वर्ग आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

वर्गमूल कैसे जाने?

वर्गमूल जानने के लिए सर्वप्रथम निम्नलिखित तथ्यों को जानना आवश्यक है।

$(10)^2 = 100$	
$(11)^2 = 121$	← 1
$(12)^2 = 144$	← 2
$(13)^2 = 169$	← 3
$(14)^2 = 196$	← 4
$(15)^2 = 225$	← 5
$(16)^2 = 256$	← 6
$(17)^2 = 289$	← 7
$(18)^2 = 324$	← 8
$(19)^2 = 361$	← 9
$(20)^2 = 400$	

- नोट—**(1) यदि किसी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 1 है तो उसकी वर्गमूल संख्या में इकाई का अंक 1 या 9 होगा।
 (2) यदि किसी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 4 है तो उसकी वर्गमूल संख्या में इकाई का अंक 2 या 8 होगा।
 (3) यदि किसी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 9 है तो उसकी वर्गमूल संख्या में इकाई का अंक 3 या 7 होगा।
 (4) यदि किसी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 6 है तो उसकी वर्गमूल संख्या में इकाई का अंक 4 या 6 होगा।
 (5) यदि किसी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 5 है तो उसकी वर्गमूल संख्या में इकाई का अंक 5 ही होगा।

देखें—(i) 324 का वर्गमूल = ?

वर्ग संख्या 324 में इकाई का अंक 4 है यानि कि इसकी वर्गमूल संख्या में इकाई के अंक 2 या 8 होंगे।

15 का वर्ग 225 आसानी से ज्ञात किया जा सकता है और 20 का वर्ग 400 भी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। वर्ग संख्या 324, वर्ग संख्या 225 एवं 400 के बीच है अर्थात् वर्ग संख्या 324 का वर्गमूल 15 एवं 20 के बीच होगी चूंकि इकाई का अंक 4 है तो वर्गमूल हेतु अभीष्ट संख्या 18 होगी।

$$\text{अतः } \sqrt{324} = 18$$

(ii) 529 का वर्गमूल = ?

वर्ग संख्या 529 में इकाई का अंक 9 है यानि की वर्गमूल संख्या में इकाई के अंक 3 या 7 होंगे।

20 का वर्ग 400 आसानी से ज्ञात किया जा सकता है और 25 का वर्ग 625 भी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। वर्ग

संख्या 529, वर्ग संख्या 400 एवं 625 के बीच है अर्थात् वर्ग संख्या 529 का वर्गमूल 20 एवं 25 के बीच ही होगा चूंकि इकाई का अंक 9 है तो वर्गमूल हेतु अभीष्ट संख्या 23 होगी।

उपर्युक्त जानकरियों का प्रयोग कर वर्ग संख्याओं का वर्गमूल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

ध्यान दें—उपर्युक्त नियमों द्वारा सटीक वर्गमूल केवल वर्ग संख्या का ही ज्ञात किया जा सकता है।

➡ **पूर्ण वर्ग संख्या के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या का वर्गमूल निकटतम दशमलव के दो बिन्दुओं तक सटीक अनुमान करना—**

55 का वर्गमूल = ?

नियम- (1) 55 की नजदीकी संख्या का वर्गमूल जानें; यह है- 49 का वर्गमूल = 7

$$(2) 55 \text{ में से } 49 \text{ घटाएं } 55 - 49 = 6$$

(3) शेषफल को निकटतम वर्गमूल के 2 गुने से भाग दें-

$$6 \div (7 \times 2) = \frac{6}{7 \times 2} = \frac{6}{14} = 0.43$$

(4) प्राप्त फल को निकटतम वर्गमूल संख्या में जोड़ें
 $\rightarrow 7 + 0.43 = 7.43$

अतः 55 का वर्गमूल दो दशमलव बिन्दु तक = 7.43 होगा।

67 का वर्गमूल = ?

निकटतम वर्गमूल संख्या = $\sqrt{64} = 8$ है।

$$67 - 64 = 3$$

$$\text{पुनः } \frac{3}{8 \times 2} = \frac{3}{16} = 0.187$$

अतः 67 का वर्गमूल दो दशमलव बिन्दु तक = $8 + 0.19 = 8.19$

234 का वर्गमूल = ?

निकटतम वर्ग मूल संख्या = $\sqrt{225} = 15$

$$234 - 225 = 9$$

$$\text{पुनः } \frac{9}{15 \times 2} = \frac{9}{30} = 0.3$$

अतः 234 का वर्गमूल = $15 + 0.3 = 15.3$

उदाहरणार्थ प्रश्न



प्रश्न 1. $\frac{0.342 \times 0.684}{0.000342 \times 0.000171}$ का वर्गमूल क्या है?



हल :

$$\text{अभीष्ट वर्गमूल} = \sqrt{\frac{0.342 \times 0.684}{0.000342 \times 0.000171}}$$

(दशमलव चिह्न हटाने के लिए 1000000 से अंश और हर की प्रत्येक संख्या में गुणा किया)

$$= \sqrt{\frac{342000 \times 684000}{342 \times 171}}$$

$$= \sqrt{1000 \times 4000} = \sqrt{100 \times 10 \times 4000}$$

(1000 को 100×10 लिखा गया)

$$= \sqrt{100 \times 40000} = 10 \times 200 = 2000 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

(100 का वर्गमूल = 10 तथा 40000 का वर्गमूल 200 होगा)



प्रश्न 2. $(3 - \sqrt{5})$ का वर्गमूल है—



$$\text{हल : } (3 - \sqrt{5}) \text{ का वर्गमूल } = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

[$(3 - \sqrt{5})$ में से $\frac{1}{2}$ कामन लेने पर]

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(6 - 2\sqrt{5})}$$

($6 = 5 + 1$ लिखने पर)

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(5 + 1 - 2\sqrt{5})}$$

[$5 + 1 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2$ क्योंकि

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2]$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} - 1) \text{ अभीष्ट वर्गमूल है।} \Rightarrow \text{उत्तर}$$



प्रश्न 3. $\sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}}$ का मान है—



$$\text{हल : } \sqrt{0.01 + \sqrt{0.0064}} = \sqrt{.01 + .08}$$

($\sqrt{0.0064}$ का मान .08 होता है)

$$= \sqrt{.09}$$

(0.09 का वर्गमूल = 0.3)

$$= 0.3 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



प्रश्न 4. $14 + 6\sqrt{5}$ का वर्गमूल = ?



$$\text{हल : } 14 + 6\sqrt{5} \text{ का वर्गमूल} = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2 + 6\sqrt{5}} \dots\dots\dots(1)$$

[$14 = (3)^2 + (\sqrt{5})^2$ लिखा गया]

$$= \sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}$$

[समीकरण (1) में $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ का प्रयोग किया]

$$= 3 + \sqrt{5} \text{ अभीष्ट वर्गमूल} \Rightarrow \text{उत्तर}$$



प्रश्न 5. $\sqrt{2^x} = 256$ है तो x का मान क्या होगा ?



$$\text{हल : } \sqrt{2^x} = 256$$

$[\sqrt{2^x}]$ का करणी विह्व हटाकर तथा 256 को 2^8 के रूप में लिखा गया]

$$2^{\frac{x}{2}} = 2^8$$

[समान आधार (2) की घात बराबर हेमी]

$$\frac{x}{2} = 8$$

[तिर्यक गुणा करने पर]

$$x = 2 \times 8 = 16$$

$x = 16$ अभीष्ट मान है। $\Rightarrow$ उत्तर



प्रश्न 6. $\sqrt{\frac{0.49 \times 0.16 \times 0.09}{0.81 \times 0.36 \times 0.64}}$ का मान ज्ञात कीजिए?

$$\text{हल : } \sqrt{\frac{0.49 \times 0.16 \times 0.09}{0.81 \times 0.36 \times 0.64}} = \sqrt{\frac{49 \times 16 \times 9}{81 \times 36 \times 64}}$$

[चूँकि अंश में दशमलव के दाहिने कुल 6 अंक हैं और हर में भी दशमलव के दाहिने कुल 6 अंक हैं। अतः दोनों के दशमलव को आपस में हटा दिया गया]

$$= \frac{7 \times 4 \times 3}{9 \times 6 \times 8}$$

[अंश और हर संख्याओं का वर्गमूल निकाला गया]

$$= \frac{7}{36} \text{ अभीष्ट वर्गमूल है। } \Rightarrow \text{ उत्तर}$$



प्रश्न 7. $\sqrt{330 - \sqrt{30 + \sqrt{36}}}$ का मान निकालिए।



हल : इस प्रकार के प्रश्नों में सबसे अंदर की

संख्या से वर्गमूल निकालना प्रारंभ करते हैं।

$$\sqrt{330 - \sqrt{30 + \sqrt{36}}} = \sqrt{330 - \sqrt{30 + 6}}$$

$$= \sqrt{330 - \sqrt{36}}$$

[$\sqrt{36}$ का मान 6 रखने पर]

$$= \sqrt{330 - 6}$$

$$= \sqrt{324} = 18$$

[324 का वर्गमूल 18 होता है]

$$\text{अतः } \sqrt{330 - \sqrt{30 + \sqrt{36}}} = 18 \Rightarrow \text{ उत्तर}$$



प्रश्न 8. यदि एक अनंत श्रेणी

$$x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$
 है तो x का मान

ज्ञात कीजिए।



$$\text{हल : } x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

दोनों ओर का वर्ग करने पर

$$x^2 = 6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

$$[\text{समीकरण 1 में } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} = x \text{ रखने पर}]$$

$$x^2 = 6 + x$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad (\text{पक्षांतर करने पर})$$

$$[-x \text{ को } -3x + 2x \text{ लिख सकते हैं क्योंकि } -3x + 2x = -x \text{ है}]$$

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$$

$$x(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$\text{यदि } x-3 = 0 \quad \text{यदि } x+2 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -2$$

$$\text{अतः } x = 3 \text{ एवं } (-2) \text{ होगा। } \Rightarrow \text{ उत्तर}$$

नोट : x का मान ऋणात्मक भी हो सकता है परंतु विकल्पों में सामान्यतया धनात्मक मान ही उत्तर के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।



दूसरी विधि—इस तरह की अनंत श्रेणी के प्रश्नों के

हल हेतु करणी में दी गई संख्या में जितना जोड़ा जाए जोड़ने के बाद बनी संख्या का वर्गमूल भी उतना ही आये तो जोड़ी गयी संख्या ही उत्तर है। देखें हल—

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

6 में 3 जोड़ने पर संख्या 9 प्राप्त होगी और 9 का वर्गमूल भी 3 है अतः $x = 3$ ही अभीष्ट उत्तर होगा।

इसी प्रकार जितना घटाने पर वर्गमूल वही संख्या आये उत्तर होगा। 6 में 2 घटाने पर वर्गमूल 2 प्राप्त होगा। अतः $x = -2$ होगा।



तृतीय विधि : इस प्रकार के प्रश्नों में यदि संख्या दो

क्रमिक संख्याओं का गुणनफल है तो बड़ी संख्या घनात्मक एवं छोटी संख्या ऋणात्मक रूप में अभीष्ट उत्तर होती है अर्थात्

$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \infty}}}}$ में संख्या $6 = 2 \times 3$ संख्या 3 बड़ी संख्या है। अतः अभीष्ट उत्तर +3 एवं -2 है।



प्रश्न 9. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$ का मान क्या होगा ?



हल : $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}} \dots n \text{ बार} = x^{\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)}$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} = 2^{\frac{2^5 - 1}{2^5}} = 2^{\frac{2^5 - 1}{2^5}}$$

[$\sqrt{2}$, 5 बार है इसलिए $n = 5$ होगा]

$$= 2^{\frac{32 - 1}{32}} = 2^{\frac{31}{32}}$$

अतः $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} = 2^{\frac{31}{32}}$ अभीष्ट मान है।

⇒ उत्तर



सामान्य समझ पर

करणी के अंदर दी गयी संख्या जितनी बार है उतनी घात ज्ञात करके हर के रूप में वही घात रखें तथा अंश के रूप में उससे एक कम। 2 की घात $5 = 2^5 \Rightarrow 32$

$$\text{अतः अभीष्ट उत्तर} = 2^{\frac{31}{32}}$$



प्रश्न 10. यदि एक अनंत श्रेणी $x = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए ?



हल : परंपरागत विधि

$$x = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$x^2 = \left(\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}} \right)^2$$

$$x^2 = 6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}}$$

$$\therefore x^2 + \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}} = 6$$

$$\therefore \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}} = 6 - x^2$$

$$\therefore x = 6 - x^2$$

$$[\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}} = x \text{ रखा गया है}]$$

$$\therefore x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ या } x = 2$$

अतः $x = 2$ या $x = -3$ अभीष्ट उत्तर होगा।



द्वितीय विधि : इस तरह अनंत श्रेणी के प्रश्नों के

हल हेतु करणी में दी गई संख्या में जितना घटाकर पूर्ण वर्गमूल की संख्या बनाते हैं पूर्ण वर्ग मूल भी उतना ही आए जैसे-

$$\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots \infty}}}$$

अब 6 में 2 घटाने पर संख्या 4 प्राप्त होती है। तथा संख्या

4 का वर्ग मूल भी 2 है। अतः $x = 2$

इसी प्रकार 3 जोड़ने पर वर्गमूल 3 प्राप्त होगा अतः $x = -3$

⇒ उत्तर

तथा उनका गुणनफल अनंत बार किया गया हो तो उत्तर करणी में दी गई संख्या होती है तथा दूसरा उत्तर 0 होगा इसलिये प्रश्न

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots\infty}}}$ का उत्तर 2, और 0 होगा।



प्रश्न 13. 5730 में कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ दें कि प्राप्त नई संख्या पूर्ण वर्ग बन जाए?



हल : परंपरागत विधि

5730 का वर्ग मूल

$$\begin{array}{r} 76 \\ 7 \overline{) 5730} \\ \underline{7 } 49 \\ 146 \overline{) 830} \\ \underline{146 } 876 \\ \underline{146 } -46 \end{array}$$

अतः 46 जोड़ने पर संख्या पूर्ण वर्ग बन जायेगी।



प्रश्न 14. 5730 में कौन सी छोटी से छोटी संख्या घटा दें कि प्राप्त नई संख्या पूर्ण वर्ग बन जाए?



हल : परंपरागत विधि

$$\begin{array}{r} 75 \\ 7 \overline{) 5730} \\ \underline{7 } 49 \\ 145 \overline{) 830} \\ \underline{145 } 725 \\ \underline{145 } 105 \end{array}$$

अतः 5730 में 105 घटाने पर प्राप्त संख्या पूर्ण वर्ग बन जाएगी।

घन तथा घनमूल

किसी संख्या का तीन बार गुणा किया जाए तो जो गुणनफल प्राप्त होता है उस गुणनफल को उस संख्या का घन कहते हैं और संख्या को गुणनफल का घनमूल कहते हैं। जैसे-यदि 7 का तीन बार गुणा किया जाए तो गुणनफल $7 \times 7 \times 7 = 343$ प्राप्त

है। यहां 343 को 7 का घन तथा 7 को 343 का घनमूल कहते हैं। घनमूल चिह्न $\sqrt[3]{}$ होता है। यदि कोई संख्या $\sqrt[3]{}$ के अंदर लिखी हो तो इसका अर्थ यह है कि उस संख्या का घनमूल निकालें।

घनमूल निकालना

$\sqrt[3]{729}$ का अर्थ है कि 729 का घनमूल निकालें। यहां 729 का अभाज्य गुणनखंड करेंगे जो $729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ है। अब इन गुणनखंडों का तीन-तीन का समूह $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ हुआ। इन समूहों में से प्रत्येक समूह से एक-एक गुणनखंड का गुणनफल $3 \times 3 = 9$ हुआ। अतः 729 का घनमूल 9 हुआ।

स्मरणीय तथ्य

सामान्यतः घात के रूप में लिखी संख्याओं का घनमूल निकालने के लिए घातों का $\frac{1}{3}$ में गुणा कर दिया जाता है क्योंकि

घनमूल के चिह्न $(\sqrt[3]{})$ का अर्थ ही होता है दी गई संख्या की घात $\frac{1}{3}$ ।

जैसे-

$$\begin{aligned} \text{(i) } 3^6 \times 2^6 \text{ का घनमूल} &= \sqrt[3]{3^6 \times 2^6} \\ &= 3^{6 \times \frac{1}{3}} \times 2^{6 \times \frac{1}{3}} \\ &= 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } 7^3 \times 5^9 \text{ का घनमूल} &= \sqrt[3]{7^3 \times 5^9} \\ &= 7^{3 \times \frac{1}{3}} \times 5^{9 \times \frac{1}{3}} = 7 \times 5^3 = 7 \times 125 = 875 \end{aligned}$$

घनमूल कैसे निकालें ?

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 \\ 2^3 &= 8 \\ 3^3 &= 27 \\ 4^3 &= 64 \\ 5^3 &= 125 \\ 6^3 &= 216 \end{aligned}$$

$$7^3 = 343$$

$$8^3 = 512$$

$$9^3 = 729$$

$$10^3 = 1000$$

उपर्युक्त चार्ट में 1 से 10 तक की संख्याओं का घन दिया गया है।

 **घनमूल निकालने के लिए क्या करना होगा?**

उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

54872 का घनमूल = ?

प्रथम चरण में दी गई संख्या को इस प्रकार दो भागों में बांटते हैं कि (I) अंतिम तीन संख्या (872) एक साथ तथा (II) प्रारंभ की शेष संख्या (54) एक साथ हो।

द्वितीय चरण में संख्या 872 पर विचार करते हैं। संख्या 872 में इकाई का अंक 2 है। 8 के घन (512) में भी इकाई का अंक 2 आता है। अतः संख्या 54872 के घनमूल में इकाई का अंक 8 होगा।

तृतीय चरण में संख्या 54 पर विचार करते हैं। 3 का घन 27 है जो 54 से कम है तथा 4 का घन 64 है जो संख्या 54 से अधिक है।

अब जिस संख्या का घन 54 या 54 से कम होगा वह संख्या, 54872 के घनमूल में दहाई का अंक होगा अर्थात् 54872 के घनमूल में दहाई का अंक 3 होगा (क्योंकि 3 का घन 27 जो कि 54 से कम तथा 4 का घन 64 है जो कि 54 से अधिक है। अतः दहाई का अंक 3 होगा)

अतः संख्या 54872 का अभीष्ट घनमूल 38 है।

उदाहरणार्थ प्रश्न



प्रश्न 1. 9261 का घनमूल = ?



हल : 9 261

प्रथम चरण 261 में इकाई का अंक एक (1) है। अतः घनमूल में **इकाई का अंक 1** होगा।

द्वितीय चरण संख्या 9, 2 के घन 8 से अधिक है तथा 3 के

घन 27 से कम। अतः घनमूल में **दहाई का अंक 2** होगा।

इस प्रकार संख्या 9261 अभीष्ट घनमूल 21 है।

⇒ **उत्तर**



प्रश्न 2. 185193 का घनमूल = ?



हल : प्रथम चरण 193 में इकाई का अंक 3 है।

अतः घनमूल में **इकाई का अंक 7** होगा।

द्वितीय चरण संख्या 185, 5 के घन 125 से अधिक है तथा 6 के घन 216 से कम है। अतः घनमूल में **दहाई का अंक 5** होगा।

इस प्रकार संख्या 185193 का अभीष्ट घनमूल 57 है।

⇒ **उत्तर**



प्रश्न 3. 314432 का घनमूल = ?



हल : प्रथम चरण 432 में इकाई का अंक 2 है।

अतः घनमूल में **इकाई का अंक 8** होगा।

द्वितीय चरण संख्या 314, 6 के घन 216 से अधिक है तथा 7 के घन 343 से कम है। अतः घनमूल में **दहाई का अंक 6** होगा।

इस प्रकार संख्या 314432 का अभीष्ट घनमूल 68 है।

⇒ **उत्तर**



प्रश्न 4. 704969 का घनमूल = ?



हल : प्रथम चरण 969 में इकाई का अंक 9 है

अतः घनमूल में इकाई का अंक 9 होगा।

द्वितीय चरण 704, 8 के घन 512 से कम है तथा 9 के घन 729 से अधिक है अतः घनमूल में **दहाई का अंक 8** होगा।

इस प्रकार संख्या 704969 का अभीष्ट घनमूल 89 है।



प्रश्न 5. 0.000216 का घनमूल = ?

⇒ उत्तर



$$\text{हल : } \sqrt[3]{0.000216} = \sqrt[3]{.06 \times .06 \times .06}$$

$$= .06 \text{ अभीष्ट घनमूल है। } \Rightarrow \text{उत्तर}$$



प्रश्न 6. $\sqrt[3]{4\frac{12}{125}}$ का मान = ?



$$\text{हल : } \sqrt[3]{4\frac{12}{125}} = \sqrt[3]{\frac{512}{125}} = \frac{8}{5} \text{ य 1.6 अभीष्ट है।}$$

⇒ उत्तर



प्रश्न 7. 175616 का घनमूल 56 है तो

$$\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$$

का मान ज्ञात कीजिए।



हल :

$$\sqrt[3]{175.616} + \sqrt[3]{0.175616} + \sqrt[3]{0.000175616}$$

$$= 5.6 + 0.56 + 0.056 = 6.216 \text{ अभीष्ट मान है। } \Rightarrow \text{उत्तर}$$



प्रश्न 8. $\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}}$ का मान ज्ञात कीजिए।



$$\text{हल : } \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}} = \sqrt[3]{1 + 7}$$

$[\sqrt[3]{343} \text{ का मान 7 होता है अर्थात् 343 का घनमूल 7 है}]$

$$= \sqrt[3]{8} \quad [8 \text{ का घनमूल निकालते हैं}]$$

$$= 2$$

$$\text{अतः } \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{343}} = 2 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

अभ्यास प्रश्न

- 10870210 से घटाया जाने वाला न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक कौन-सा है कि शेष एक पूर्ण वर्ग बन जाए?
- $(0.1)^2$, $\sqrt{0.0121}$, 0.12 तथा $\sqrt{0.0004}$ में सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है?
- यदि $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ हो, तो $a^3 - b^3$ का संख्यात्मक मान कितना होगा?
- $\sqrt[3]{1372} \times \sqrt[3]{1358}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- यदि x का वर्गमूल, y का घनमूल है, तो x और y के बीच क्या संबंध है?
- यदि $\sqrt{1 + \frac{x}{961}} = \frac{32}{31}$ हो, तो x का मान कितना होगा?
- $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ का वर्गमूल कितना है?
- 3011×3012 से कौन-सा न्यूनतम धन पूर्णांक घटाया जाए कि शेषफल पूर्ण वर्ग हो जाए?
- 100 से कम किसी धनात्मक संख्या का वर्गमूल किन संख्याओं के बीच होता है?
- 0.4 का वर्गमूल कितना है?
- वह छोटी-से-छोटी संख्या कौन-सी है, जिसे 680621 में जोड़ने पर योग एक पूर्ण वर्ग बन जाता है।
- किसी पिकनिक पार्टी के प्रत्येक सदस्य ने, उतने रुपयों के दोगुने रुपये दिए, जितने कि कुल सदस्य थे और इस प्रकार कुल 3042 रुपये एकत्रित हुए उस पार्टी में उपस्थित सदस्यों की संख्या कितनी थी?
- एक व्यक्ति अपने बाग में 5184 संतरों के पेड़ लगाता है तथा उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करता है कि बाग में उतनी ही पंक्तियां रहें जितने एक पंक्ति में पेड़ हैं। बाग में कितनी पंक्तियां हैं?
- दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल 37 है। उन संख्याओं के अंतर का वर्गमूल क्या होगा?

15. आवासियों के कल्याण हेतु बुलाई गयी बैठक में, प्रत्येक सदस्य ने उतने रुपये चंदे में दिए, जितने कि बैठक में सदस्य उपस्थित थे। यदि चेयरमैन ने अपने हिस्से के अतिरिक्त 49 रु. और देकर कुल धनराशि को 625 रु. बना दिया हो, तो बैठक में कितने सदस्य उपस्थित थे?
16. A का वह निम्नतम मान जिसके लिए $90 \times A$ एक पूर्ण घन संख्या बन जाए, ज्ञात कीजिए।
17. 710 में सबसे छोटी कौन-सी संख्या जोड़ी जाए, ताकि योगफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो?
18. एक बाग की प्रत्येक पंक्ति में पेड़ों की संख्या उतनी ही है जितनी कि उसमें पंक्तियाँ हैं। एक तूफान में 111 पेड़ों के उखड़ जाने के उपरांत, बाग में पेड़ों की संख्या 10914 रह जाती है। बाग में पेड़ों की पंक्तियों की संख्या कितनी है?
19. $(3+\sqrt{5})$ का वर्गमूल कितना है?
20. $(14-6\sqrt{5})$ का वर्गमूल कितना है?
21. यदि एक अनन्त श्रेणी $x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + 12 \dots \dots \infty}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए?
22. यदि एक अनन्त श्रेणी $x = \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 \dots \dots \infty}}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए?
23. यदि एक अनन्त श्रेणी $x = \sqrt{7 + \sqrt{7 + \sqrt{7 \dots \dots \infty}}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए?
24. यदि एक अनन्त श्रेणी $x = \sqrt{7 - \sqrt{7 - \sqrt{7 \dots \dots \infty}}}$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए?
25. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}}$ का मान क्या होगा?
26. $\sqrt{11\sqrt{11\sqrt{11 \dots \dots \infty}}}$ का मान क्या होगा?
27. $\sqrt{13\sqrt{13\sqrt{13 \dots \dots (10 \text{ पदों तक})}}}$ का मान क्या होगा?

28. वह सबसे छोटी संख्या प्राकृति संख्या जिससे 3000 को भाग देने से प्राप्त भागफल एक पूर्ण घन संख्या बन जाए?
29. 525 में सबसे छोटी कौन-सी संख्या घटायी जाए ताकि प्रतिफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त हो?

30. $\sqrt[3]{333 + \sqrt[3]{987 + \sqrt[3]{2197}}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

अभ्यास प्रश्नों के हल



हल 1. $10870210 = 10870209 + 1$

$$= (3297)^2 + 1$$

अतः 10870210 में से न्यूनतम घनात्मक संख्या 1 घटाने पर शेषफल एक पूर्ण वर्ग संख्या बन जायेगी। जो 3297 की वर्ग संख्या होगी। $\Rightarrow$ उत्तर



हल 2. $(0.1)^2 = 0.1 \times 0.1 = 0.01$

$$\sqrt{0.0121} = \sqrt{0.11 \times 0.11} = 0.11$$

$$0.12 = 0.12$$

$$\sqrt{0.0004} = \sqrt{0.02 \times 0.02} = 0.02$$

अतः स्पष्टतः सबसे बड़ी संख्या 0.12 है। $\Rightarrow$ उत्तर



हल 3. $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a+b} = \frac{(b+a)}{ab}$$

[दायां पक्ष का ल.स. लिया गया]

$$\therefore ab = (a+b)^2$$

[तिर्यक गुणा किया गया है]

$$\therefore ab = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = -2ab + ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = -ab \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{अब- } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$$

[समीकरण (i) से $a^2 + b^2 = -ab$ रखने पर]

$$= (a - b)(-ab + ab)$$

$$= (a - b) \times 0 \Rightarrow 0$$

$$\text{अतः } a^3 - b^3 = 0 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



सामान्य समझ पर

$$\text{संख्यात्मक रूप से विचार करने पर } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2+2}$$

समीकरण संतुष्ट हो रहा है इसलिए इसी आधार पर a और b के मान बराबर एवं 2 मानते हुए $2^3 - 2^3 = 0$ ज्ञात कर सकते हैं।



हल 4. परंपरागत विधि

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1372} \times \sqrt[3]{1458} &= \sqrt[3]{1372 \times 1458} \\ &= \sqrt[3]{2000376} \\ &= \sqrt[3]{126 \times 126 \times 126} \\ &= \sqrt[3]{(126)^3} \\ &= 126 \Rightarrow \text{उत्तर} \end{aligned}$$



द्वितीय विधि-

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1372} \times \sqrt[3]{1458} &= \sqrt[3]{2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7} \times \sqrt[3]{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= 2 \times 7 \times 3 \times 3 = 126 \Rightarrow \text{उत्तर} \end{aligned}$$



हल 5. प्रश्न से x का वर्गमूल = y का घनमूल

$$\text{या } \sqrt{x} = \sqrt[3]{y}$$

$$\text{या } x^{1/2} = y^{1/3}$$

$$\text{या } x^{6/2} = y^{6/3}$$

(दोनों पक्षों की घातों में 6 से गुणा करने पर)

$$\text{या } x^3 = y^2$$

अतः x एवं y के मध्य $x^3 : y^2$ का संबंध होगा।

$\Rightarrow$ उत्तर



सामान्य समझ पर

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{y}$$

$$\therefore x^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \text{अनुपात} \rightarrow y^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{\frac{1}{3} \times 6} : x^{\frac{1}{2} \times 6}$$

$$y^2 : x^3$$

अतः x एवं y के मध्य $x^3 : y^2$ का संबंध होगा।

(घातों के बीच जो संबंध है संख्याओं में उसी का विपरीत संबंध होगा। अर्थात् यदि $y^2 : x^3$ तो $x : y = x^3 : y^2$)



$$\text{हल 6. } \sqrt{1 + \frac{x}{961}} = \frac{32}{31}$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$1 + \frac{x}{961} = \frac{32 \times 32}{31 \times 31}$$

$$\frac{x}{961} = \frac{(32)^2}{(31)^2} - 1$$

$$\frac{x}{961} = \frac{(32)^2 - (31)^2}{(31)^2}$$

$$\frac{x}{961} = \frac{(32 + 31) \times (32 - 31)}{(31)^2}$$

$$x = \frac{63 \times 1 \times 961}{31 \times 31} \Rightarrow 63 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



सामान्य समझ पर

$$\sqrt{1 + \frac{x}{961}} = \frac{32}{31}$$

या $\sqrt{1 + \frac{x}{961}} = \sqrt{\frac{1024}{961}}$

या $\sqrt{1 + \frac{x}{961}} = \sqrt{1 + \frac{63}{961}}$

स्पष्ट है कि का मान 63 है।



हल 7. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$

$[(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ से अंश एवं हर में गुणा किया गया]

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$\text{वर्गमूल} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{2} \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 8. $3011 \times 3012 = 3011 \times (3011 + 1)$

$$= (3011)^2 + 3011$$

अतः स्पष्ट है कि 3011×3012 में से 3011 घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग बन जाएगा $\Rightarrow$ उत्तर



सामान्य समझ पर

प्रश्न में 3011 का 3012 गुना किया गया है। पूर्ण वर्ग के लिए 3011 का 3011 गुना होना चाहिए 3011 का एक गुना अर्थात् 3011 अधिक है अतः इसे ही घटाना चाहिए।



हल 9. $\therefore 100$ का वर्गमूल $= \pm\sqrt{100} = \pm 10$

$\therefore 100$ से कम किसी धनात्मक संख्या का वर्गमूल -10 और $+10$ के बीच होगा $\Rightarrow$ उत्तर



हल 10. $\sqrt{0.4} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ उत्तर

(व्याख्या के लिए देखें पृष्ठ 88)



हल 11. $\therefore$ वर्गमूल लेने पर ज्ञात होता है कि

$$(824)^2 < 680621 < (825)^2$$

$$\text{अतः अभीष्ट संख्या} = (825)^2 - 680621$$

$$= 680625 - 680621$$

$$= 4 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



द्वितीय विधि:

	825
8	680621
8	64
162	406
+2	324
1645	8221
	8225
	-4

अतः यदि हम संख्या में 4 जोड़ दें तो संख्या पूर्ण वर्ग बन जाएगी। $\Rightarrow$ उत्तर



हल 12. परंपरागत विधि

मान पार्टी में उपस्थित सदस्यों की संख्या x थी, तब प्रत्येक सदस्य द्वारा दिए गए रुपये $= 2x$

$$\therefore x \times 2x = 3042$$

$$\therefore 2x^2 = 3042$$

$$x^2 = 1521$$

$$\therefore x = \sqrt{1521} = 39$$

$$\therefore \text{पार्टी में उपस्थित सदस्यों की संख्या} = 39$$

$\Rightarrow$ उत्तर



हल 13. अभीष्ट पंक्तियों की संख्या

$$= \sqrt{5184} = 72 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 14. $\therefore$ 37 एक अभाज्य संख्या है, इसलिए

37 को 1 से गुणा करने पर ही गुणनफल 37 आयेगा क्योंकि 1 को छोड़कर किन्हीं दो संख्याओं का गुणनफल अभाज्य नहीं होता।

$$\therefore 37 = 1 \times 37$$

$$\therefore \text{अंतर} = 37 - 1 = 36$$

$$\therefore 36 \text{ का वर्गमूल} = 6 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 15. परंपरागत विधि

माना आवासियों के कल्याण हेतु बुलाई गई बैठक में x सदस्य उपस्थित थे।

$\therefore$ प्रत्येक सदस्य ने उतना ही चंदा दिया जितने की सदस्यों की संख्या थी।

$$\therefore \text{चंदे की कुल राशि} = x \times x = x^2$$

प्रश्नानुसार,

$$x^2 + 49 = 625$$

$$x^2 = 625 - 49 = 576$$

$$x = 24$$

$$\therefore \text{बैठक में उपस्थित सदस्यों की संख्या} = 24 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 16. $90 \times A$ को पूर्ण घन बनाने के लिए

गुणनखण्ड करने पर

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times A$$

पूर्ण घन बनाने के लिए

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \text{ से गुणा करना होगा}$$

अतः 300 पूर्ण संख्या से गुणा करने पर पूर्ण घन होगा।

$\Rightarrow$ उत्तर



हल 17. $\therefore 9^3 = 729$

$$\therefore 729 - 710 = 19$$

अतः 710 में 19 जोड़ने पर योगफल एक पूर्ण घन संख्या प्राप्त होगी। $\Rightarrow$ उत्तर



हल 18. परंपरागत विधि

माना कि बाग में पेड़ों व पंक्तियों की संख्या x है।

$\therefore$ प्रत्येक पंक्ति में उतने ही पेड़ हैं जितनी कि पेड़ों की पंक्तियां हैं।

$$\therefore \text{कुल पेड़} = x \times x = x^2$$

प्रश्नानुसार,

$$x^2 - 111 = 10914$$

$$x^2 = 11025 = 105 \times 105$$

$$x = 105 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 19. $(3 + \sqrt{5})$ का वर्गमूल $= \sqrt{3 + \sqrt{5}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(6 + 2\sqrt{5})} \quad \left(\frac{1}{2} \text{ कॉमन लिया गया}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(5 + 1 + 2\sqrt{5})}$$

$(6 = 5 + 1 \text{ रखा गया})$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)^2}$$

$[a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \text{ का सूत्र प्रयोग किया गया}]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 20. $(14 - 6\sqrt{5})$ का वर्गमूल

$$= \sqrt{9 + 5 - 2 \times 3\sqrt{5}}$$

$[14 = 9 + 5, 6\sqrt{5} = 2 \times 3\sqrt{5} \text{ लिखा गया}]$

$$= \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times 3 \times \sqrt{5}} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$$

$[a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \text{ का सूत्र प्रयोग किया गया}]$

$$= (3 - \sqrt{5})$$

अतः $(14 - 6\sqrt{5})$ का वर्गमूल $(3 - \sqrt{5})$ है।

$\Rightarrow$ उत्तर



हल 21. परंपरागत विधि

$$x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + 12 \dots \dots \infty}}$$

वर्ग करने पर

$$x^2 = \left(\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 \dots \dots \infty}}}\right)^2$$

$$= 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \dots \infty}}$$

$$x^2 = 12 + x$$

$$\left[\sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots \dots \infty}} = x\right] \text{ रखा गया है}$$

$$\therefore x^2 - x - 12 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$$

$$x(x - 4) + 3(x - 4) = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) =$$

$$x = 4 \text{ या } x = -3$$

अतः अभीष्ट उत्तर 4 या -3 है $\Rightarrow$ उत्तर



सामान्य समझ पर

$$12 = 3 \times 4$$

चूंकि करणीगत संख्या धनात्मक है अतः उत्तर में बड़ी संख्या धनात्मक तथा छोटी संख्या ऋणात्मक चिह्न के साथ होगी। अतः $+4, -3 \Rightarrow$ उत्तर



हल 22. परंपरागत विधि

$$x = \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 \dots \dots \infty}}}$$

वर्ग करने पर

$$x^2 = 20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 \dots \dots \infty}}}$$

$$\left[\sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots \dots \infty}}} = x\right] \text{ रखा गया है}$$

$$x^2 = 20 - x$$

$$\therefore x^2 + x - 20 = 0$$

$$x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$$

$$x(x + 5) - 4(x + 5) = 0$$

$$(x+5)(x-4)=0$$

$$\therefore x = -5 \text{ या } 4 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



सामान्य समझ पर

यदि प्रश्न में करणी में संख्या दुहराव वाली हो तथा ऋणात्मक चिह्न हो तो बड़ी संख्या ऋणात्मक और छोटी संख्या धनात्मक होती है।

$$\text{अर्थात् } 20 = 5 \times 4$$

$\therefore$ बड़ी संख्या 5 ऋणात्मक और छोटी संख्या 4 धनात्मक संख्या होगी। अतः $-5, +4 \Rightarrow \text{उत्तर}$



हल 23. परंपरागत विधि

$$\text{माना } \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\dots\infty}}} = x \dots\dots\dots(i)$$

समीकरण (i) का वर्ग करने पर

$$x^2 = 7 + \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\dots\infty}}}$$

$$x^2 = 7 + x$$

$\therefore$ श्री धराचार्य के सूत्र से

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 5.4}{2}$$

धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{1+5.4}{2} = 3.2$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{1-5.4}{2} = -2.2$$

$$\therefore x = 3.2 \text{ या } -2.2 \Rightarrow \text{उत्तर}$$



हल 24. परंपरागत विधि

$$x = \sqrt{7-\sqrt{7-\sqrt{7+\dots\infty}}}$$

वर्ग करने पर

$$x^2 = 7 - \sqrt{7-\sqrt{7+\dots\infty}}$$

$$x^2 + \sqrt{7-\sqrt{7-\sqrt{7+\dots\infty}}} = 7$$

$$x^2 + x - 7 = 0$$

$\therefore$ श्री धराचार्य के नियम से x का मान निकालने पर

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-\pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm 5.4}{2}$$

$\therefore$ धनात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-1+5.4}{2} = 2.2$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर

$$x = \frac{-1-5.4}{2} = -3.2 \Rightarrow \text{उत्तर}$$

$\therefore$ (x का मान लगभग में आयेगा क्योंकि $\sqrt{29}$ का मान लगभग में निकाला गया है)

परीक्षा प्रश्न



प्रश्न 1. $\sqrt{64009}$ किसके बराबर है ?

- (a) 352 (b) 523
(c) 253 (d) 532

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2013

S.S.C. स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(c)



हल : परम्परागत विधि

$$\begin{aligned}\sqrt{64009} &= \sqrt{253 \times 253} \\ &= \sqrt{(253)^2} \Rightarrow 253\end{aligned}$$



हल : सामान्य समझ पर

वर्गमूल लेने का मतलब है देखें अंतिम से 2 अंक छोड़कर शेष 3 अंक का संभावित वर्गमूल क्या हो सकता है। शेष 3 अंक 640 है जिसका निकटतम वर्गमूल 25 है अर्थात् अभीष्ट वर्गमूल 250 के निकट की कोई संख्या होगी। स्पष्ट है कि विकल्प 'c' ही उत्तर होगा।

प्रश्न 2. 3 धनात्मक संख्याओं का अनुपात 2 : 3 : 5 है और उनके वर्ग का योग 608 है। वे तीन संख्याएं हैं—

- (a) 2, 3, 5 (b) 10, 15, 25
(c) 8, 12, 20 (d) 4, 6, 10

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2014

उत्तर—(c)



हल : परम्परागत विधि

माना तीन धनात्मक संख्याएं क्रमशः $2x$, $3x$ तथा $5x$ हैं।

∴ प्रश्नानुसार

$$(2x)^2 + (3x)^2 + (5x)^2 = 608$$

$$4x^2 + 9x^2 + 25x^2 = 608$$

$$38x^2 = 608$$

$$x^2 = \frac{608}{38}$$

$$x^2 = 16$$

$$\therefore x = 4$$

अतः संख्याएं क्रमशः $= 2x, 3x, 5x$

$$\begin{aligned}&= 2 \times 4, 3 \times 4, 5 \times 4 \\ &= 8, 12, 20\end{aligned}$$



प्रश्न 3. यदि $\sqrt{.05 \times .5 \times a} = .5 \times .05 \times \sqrt{b}$ है, तो $\frac{a}{b}$ किसके बराबर है ?

- (a) .0025 (b) .025
(c) 25 (d) .00025

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2014

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

$$\sqrt{.05 \times .5 \times a} = .5 \times .05 \times \sqrt{b}$$

$$\text{या } \frac{\sqrt{.05 \times .5 \times a}}{\sqrt{b}} = .5 \times .05$$

वर्ग करने पर

$$.05 \times .5 \times \frac{a}{b} = .5 \times .05 \times .5 \times .05$$

$$\frac{a}{b} = .5 \times .05$$

$$\frac{a}{b} = .025$$



प्रश्न 4. निम्न का वर्गमूल ज्ञात करें।

$$\frac{(0.064 - 0.008)(0.16 - 0.04)}{(0.16 + 0.08 + 0.04)(0.4 + 0.2)^3}$$

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) 3

S.S.C. स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2010

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2015

उत्तर—(a)



हल : परम्परागत विधि

$$\frac{(0.064 - 0.008)(0.16 - 0.04)}{(0.16 + 0.08 + 0.04)(0.4 + 0.2)^3}$$

$$= \frac{0.056 \times 0.12}{.28 \times (0.6)^3}$$

$$= \frac{.2 \times 0.12}{0.216} \Rightarrow \frac{1}{9}$$

अतः दिए गए व्यंजक का वर्गमूल $= \sqrt{\frac{1}{9}}$

$$= \frac{1}{3}$$



प्रश्न 5. यदि $(3x - 2y) : (2x + 3y) = 5 : 6$, तो

$\left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \right)^2$ का एक मान क्या होगा?

- (a) $\frac{1}{25}$ (b) $\frac{1}{5}$
(c) 25 (d) 5

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-II) परीक्षा, 2015

उत्तर—(c)



हल : परम्परागत विधि

$$\frac{3x - 2y}{2x + 3y} = \frac{5}{6}$$

$$18x - 12y = 10x + 15y$$

$$8x = 27y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{27}{8} \dots\dots\dots (i)$$

तो $\left(\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{x}{y}} + 1}{\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 1} \right)^2$

समीकरण (i) से $\frac{x}{y} = \frac{27}{8}$ रखने पर

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{\frac{27}{8}} + 1}{\sqrt[3]{\frac{27}{8}} - 1} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2} - 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 = (5)^2 \Rightarrow 25$$



प्रश्न 6. $(4x^2 + 8x)$ में कौन-सी संख्या जोड़ी जाए की परिणामी पदसंहति पूर्ण वर्ग बन जाए।

- (a) 2 (b) 4
(c) $2x$ (d) 1

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

$$(2x + 2)^2 = 4x^2 + 2 \times 2x \times 2 + 4$$

$$= 4x^2 + 8x + 4$$

अतः $(4x^2 + 8x)$ में संख्या 4 जोड़ देने पर परिणामी पदसंहति पूर्ण बन जाएगा।



प्रश्न 7. $\sqrt{4032} \times \sqrt{7} =$

- (a) $24\sqrt{7}$ (b) 168 (c) $36\sqrt{2}$ (d) 252

S.S.C. C.P.O. परीक्षा, 2012

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2015

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

$$\sqrt{4032} \times \sqrt{7} = \sqrt{4032 \times 7}$$

$$= \sqrt{28224}$$

$$= 168$$



प्रश्न 8. $\sqrt[3]{1 - \frac{127}{343}}$ किसके बराबर है?

- (a) $\frac{5}{9}$ (b) $1 - \frac{1}{7}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $1 - \frac{2}{7}$

S.S.C. संयुक्त स्नातक स्तरीय (Tier-I) परीक्षा, 2011

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

$$\sqrt[3]{1 - \frac{127}{343}} = \sqrt[3]{\frac{216}{343}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6 \times 6 \times 6}{7 \times 7 \times 7}}$$

$$= \frac{6}{7}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{7}\right)$$



प्रश्न 9. यदि x एक ऐसा पूर्ण वर्ग पूर्णांक है कि $7 < (2x - 3) < 17$ है, तो x का मान है —

- (a) 25 (b) 16
(c) 9 (d) 4

S.S.C. संयुक्त हायर सेकण्डरी (10+2) स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(c)



विकल्प विधि-

विकल्प (a) से माना $x = 25$

$$7 < (25 \times 2 - 3) < 17 \quad (\text{असंभव})$$

विकल्प (b) से माना $x = 16$

$$7 < (16 \times 2 - 3) < 17 \quad (\text{असंभव})$$

विकल्प (c) से माना $x = 9$

$$7 < (9 \times 2 - 3) < 17$$

$$7 < 15 < 17$$

अतः $x = 9$ जो कि एक पूर्ण वर्ग पूर्णांक है।



प्रश्न 10. $[2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2]$ बराबर है—

- (a) 385 (b) 2916
(c) 540 (d) 384

S.S.C. (डाटा एंट्री ऑपरेटर) परीक्षा, 2008

S.S.C. स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2010

उत्तर—(d)



हल : परम्परागत विधि

$$(2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2)$$

$$= 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$$

$$= 384$$



सूत्र विधि-

$$[2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 10^2] = [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2] - 1^2$$

$$= \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} - 1 = 5 \times 11 \times 7 - 1$$

$$= 384$$



प्रश्न 11. किसी पूर्णांक के वर्ग को यदि उसके घन में से घटाया जाए, तो शेषफल 48 आता है, वह पूर्णांक बताइए।

- (a) 8 (b) 6
(c) 5 (d) 4

S.S.C स्नातक स्तरीय परीक्षा, 2000

उत्तर—(d)



हल : विकल्प विधि-

विकल्प (d) से- पूर्णांक का मान 4 लेने पर

$$4^3 - 4^2 = 64 - 16 = 48 = \text{शेषफल}$$

अतः स्पष्ट है कि पूर्णांक का मान 4, प्रश्न को संतुष्ट करता है।

∴ पूर्णांक = 4



प्रश्न 12. $\frac{0.324 \times 0.081 \times 4.624}{1.5625 \times 0.0289 \times 72.9 \times 64}$ का वर्गमूल है-

- (a) 24 (b) 2.4
(c) 0.024 (d) 0.24

R.R.B. कोलकाता (G.G./E.C.R.C.) 'मुख्य' परीक्षा, 2012

उत्तर—(c)



हल : सूत्र विधि

$$\sqrt{\frac{0.324 \times 0.081 \times 4.624}{1.5625 \times 0.0289 \times 72.9 \times 64}}$$

$$= \sqrt{\frac{324 \times 81 \times 4624}{15625 \times 289 \times 729 \times 64}}$$

$$= \sqrt{\frac{(18 \times 18) \times (9 \times 9) \times (68 \times 68)}{(125 \times 125) \times (17 \times 17) \times (27 \times 27) \times (8 \times 8)}}$$

$$= \frac{18 \times 9 \times 68}{125 \times 17 \times 27 \times 8}$$

$$= \frac{3}{125} = \frac{24}{1000} \Rightarrow 0.024$$



प्रश्न 13. प्राकृतिक संख्या 88935 को देखें। तब सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या क्या है जिससे उपरोक्त संख्या को विभाजित या गुणा करने पर एक वर्ग संख्या प्राप्त होगी?

- (a) 3 (b) 5
(c) 15 (d) इनमें से कोई नहीं

R.R.B. इलाहाबाद (T.C./Tr. Clerk) परीक्षा, 2013

R.R.B. मुंबई (ग्रुप-D) परीक्षा, 2003

उत्तर—(c)



हल : सामान्य समझ पर

$$\therefore 88935 = 3 \times 5 \times 77 \times 77$$

$\therefore$ संख्या 3×5 से भाग या गुणा करने पर संख्या पूर्ण वर्ग बन जाएगी।



प्रश्न 14. 1901 के साथ निश्चित रूप से जोड़ी जाने वाली न्यूनतम संख्या, ताकि योगफल एक पूर्ण वर्ग हो जाए, है-

- (a) 35 (b) 32
(c) 30 (d) 29
(e) इनमें से कोई नहीं

R.R.B. कोलकाता (T.A./A.S.M.) परीक्षा, 2001

R.R.B. मुंबई (ग्रुप-D) परीक्षा, 2003

उत्तर—(a)



हल : सामान्य समझ पर

$$\sqrt{1901} = 43.6$$

$$\therefore 44^2 = 1936$$

$$\text{अभीष्ट न्यूनतम संख्या} = 1936 - 1901 \Rightarrow 35$$



प्रश्न 15. यदि $\sqrt{1 + \frac{x}{144}} = \frac{13}{12}$ तो x बराबर है-

- (a) इनमें से कोई नहीं (b) 1
(c) 13 (d) 27

R.R.B. अजमेर (A.S.M.) परीक्षा, 2001

उत्तर—(a)



हल : परम्परागत विधि

$$\sqrt{1 + \frac{x}{144}} = \frac{13}{12}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$1 + \frac{x}{144} = \frac{169}{144}$$

$$\frac{x}{144} = \frac{169}{144} - 1$$

$$= \frac{169 - 144}{144}$$

$$\frac{x}{144} = \frac{25}{144}$$

$$\therefore x = 25$$



प्रश्न 16. वह न्यूनतम पूर्ण वर्ग संख्या जो 3, 4, 5, 6 एवं 8 से विभाज्य है, है-

- (a) 900 (b) 1600
(c) 2500 (d) 3600

R.R.B. गोरखपुर (E.R.C./C.A./T.A./A.S.M.) परीक्षा, 2005

उत्तर—(d)



हल : परम्परागत विधि

संख्या 3, 4, 5, 6 एवं 8 का ल.स.प. =

$$\begin{array}{r|l} 2 & 3, 4, 5, 6, 8 \\ 2 & 3, 2, 5, 3, 4 \\ 2 & 3, 1, 5, 3, 2 \\ 3 & 3, 1, 5, 3, 1 \\ 5 & 1, 1, 5, 1, 1 \\ \hline & 1, 1, 1, 1, 1 \end{array}$$

$$\therefore \text{ल.स.प.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$$

$$\therefore \text{अभीष्ट पूर्ण वर्ग संख्या} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \\ = 120 \times 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow 3600$$



प्रश्न 17. ऐसी कितनी 2 अंकों की संख्याएँ हैं, जिनके वर्ग का इकाई अंक 8 होता है?

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) इनमें से कोई नहीं

R.R.B. जम्मू (T.C.) परीक्षा, 2001

उत्तर—(d)



हल : सामान्य समझ पर

किसी भी संख्या के वर्ग में इकाई का अंक 0, 1, 4, 5, 6 या 9 ही हो सकता है। अर्थात् किसी भी वर्ग संख्या में इकाई का अंक 2, 3, 7 या 8 नहीं होगा।

अतः उत्तर विकल्प (d) होगा।



(a) $2a + b$ (b) $2a^2b$
(c) $2a + b^2$ (d) $2ab$

उत्तर—(a)



$\therefore$ व्यंजक का वर्गमूल $= 2a + b$


$$= (2a + b)$$


(a) 1.49985 (b) 14.9985
(c) 149.985 (d) 1499.85

उत्तर—(b)


$$= 14.9985$$


(a) -60 (b) 60
(c) -70 (d) 80


$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-21\,6000} &= \sqrt[3]{(-60) \times (-60) \times (-60)} \\ &= -60\end{aligned}$$


R.R.C. मुंबई (ग्रुप-D) परीक्षा, 2005


$$\therefore x = \frac{84 \times 84}{18 \times 14} \Rightarrow 28$$


(a) 23.45 (b) 28.25
(c) 23.15 (d) 24.15


$$\begin{array}{r} 23.15 \\ 2 \overline{) 535.9225} \\ \underline{4} \\ 43 \\ \underline{3} \\ 461 \\ \underline{1} \\ 4625 \end{array} \quad \begin{array}{r} 535.9225 \\ 4 \\ 135 \\ 129 \\ \underline{} 692 \\ \underline{} 461 \\ 23125 \\ \underline{23125} \\ \times \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{535.9225} = 23.15$$



प्रश्न 23. $\sqrt{\frac{16}{25}} \times \sqrt{\frac{?}{25}} \times \frac{16}{25} = \frac{256}{625}$

- (a) 8 (b) 16
(c) 5 (d) इनमें से कोई नहीं

R.R.B. मुजफ्फरपुर (A.S.M.) परीक्षा, 20 08

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

$$\sqrt{\frac{16}{25}} \times \sqrt{\frac{?}{25}} \times \frac{16}{25} = \frac{256}{625}$$

$$\left(\frac{?}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{16}{25}\right)^{1+1/2} = \left(\frac{16}{25}\right)^2$$

$$\left(\frac{?}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 \div \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{?}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^{2-3/2}$$

$$\left(\frac{?}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{?}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore ? = 16$$



प्रश्न 24. एक विद्यालय में 15376 छात्रों को इस प्रकार बैठाया गया है ताकि पंक्तियों की संख्या उतनी ही हो जितनी प्रत्येक पंक्ति में छात्रों की संख्या है, तो, पंक्तियों की संख्या होगी—

- (a) 124 (b) 126
(c) 134 (d) 144

R.R.C. जबलपुर (ग्रुप-D) परीक्षा, 2014

उत्तर—(a)



हल : परम्परागत विधि

माना पंक्तियों की संख्या x है।

$\therefore$ प्रत्येक पंक्ति में छात्रों की संख्या $= x$

प्रश्नानुसार

$$x \times x = 15376$$

$$x^2 = 15376$$

$$x = \sqrt{15376} \Rightarrow 124$$



प्रश्न 25. एक ठोस वर्ग के रूप में आपने 16160 जवानों को एक जनरल खड़ा करने की कोशिश करता है और 31 जवान बच जाते हैं। सामने कितने जवान खड़े हैं?

- (a) 126 (b) 125
(c) 128 (d) 127

R.R.C. इलाहाबाद (ग्रुप-D) परीक्षा, 2014

उत्तर—(d)



हल : परम्परागत विधि

$$\text{ठोस वर्ग में खड़े कुल जवानों की संख्या} = 16160 - 31 \\ = 16129$$

$$\text{सामने खड़े जवानों की संख्या} = \sqrt{16129} \\ = 127$$



प्रश्न 26. यदि x एक घनात्मक संख्या है, यदि x के वर्गमूल को x के घनमूल से विभाजित किया जाए, तो प्राप्त परिणाम होगा—

- (a) x (b) $x^{2/3}$
(c) $x^{3/2}$ (d) $x^{1/6}$

R.R.C. गोरखपुर (ग्रुप-D) परीक्षा, 2014

उत्तर—(d)



हल : परम्परागत विधि

$$x \text{ का वर्गमूल} = (x)^{1/2}$$

$$x \text{ का घनमूल} = (x)^{1/3}$$

$$\text{प्रश्नानुसार} = \frac{(x)^{1/2}}{(x)^{1/3}}$$

$$= x^{(1/2 - 1/3)} \\ = x^{1/6}$$



प्रश्न 27. एक निश्चित संख्या में कुछ व्यक्तियों ने मिलकर 529 रु. की धनराशि जमा की। यदि प्रत्येक व्यक्ति उतना ही करता है जितनी उनकी संख्याएं हैं, तो व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

- (a) 22 (b) 21

(c) 23

(d) 43

R.R.C. बिलासपुर (ग्रुप-D) परीक्षा, 2014

उत्तर—(c)



हल : परम्परागत विधि

माना व्यक्तियों की संख्या x है।अतः प्रत्येक व्यक्ति द्वारा जमा किया गया धन = x

$$\therefore x \times x = 529$$

$$\therefore x^2 = 529$$

$$x = \sqrt{529} \Rightarrow 23$$



प्रश्न 28. वह सबसे छोटी संख्या कौन सी है जिसको 4, 5, 6 तथा 8 से भाग देने पर 3 शेष बचता है, किन्तु 9 से भाग देने पर कोई शेष नहीं बचता?

(a) 123

(b) 243

(c) 729

(d) 363

U.P. P.C.S. (Mains) 2012

उत्तर—(b)



हल : परम्परागत विधि

2,	4, 5, 6, 8
2,	2, 5, 3, 4
2,	1, 5, 3, 2
3,	1, 5, 1, 1
1,	1, 1, 1

4, 5, 6 तथा 8 से भाग देने पर 3 शेष बचाने वाली छोटी से छोटी संख्या

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 + 3$$

$$= 120 + 3 \Rightarrow 123$$

परंतु 12, 3, 9 से पूर्णतया विभाजित नहीं होती है

अतः 4, 5, 6 तथा 8 से भाग देने पर 3 शेष बनाने वाली संख्या तथा 9 से विभाजित होने वाली संख्या

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 + 3 = 243$$



प्रश्न 29. यदि किसी संख्या को इसके आधे के वर्ग में से घटाया जाता है तो परिणाम 48 आता है। निम्न में से कौन संख्या के वर्गमूल को व्यक्त करता है?

(a) 8

(b) 6

(c) 4

(d) 2

M.P.P.C.S. (Pre) (CSAT) 2012

उत्तर—(c)



हल : परम्परागत विधि

माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x = 48$

$$\frac{x^2}{4} - x = 48$$

$$x^2 - 4x - 192 = 0$$

$$x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$$

$$x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$$

$$(x + 12)(x - 16) = 0$$

$$\therefore x = -12 \text{ या } 16$$

अतः संख्या = 16 (क्योंकि -12 का वर्गमूल नहीं प्राप्त किया जा सकता)

$$\text{संख्या का वर्गमूल} = \sqrt{16} = 4$$



प्रश्न 30. एक माली के पास 1000 पौधे हैं। वह इन पौधों को इस प्रकार लगाना चाहता है जिससे पंक्तियों और स्तंभों की संख्या समान हो। इसके लिए उसको कम-से-कम कितने और अधिक पौधों की आवश्यकता है?

(a) 14

(b) 24

(c) 32

(d) 34

I.A.S. (Pre) 2013

उत्तर—(b)



हल : सामान्य समझ पर

पंक्तियों और स्तंभों की संख्या समान होने के लिए यह आवश्यक है कि पौधों की संख्या एक वर्ग संख्या होनी चाहिए।

1000 के निकट वर्ग संख्या 1024 है जोकि 32 की वर्ग संख्या है।

अतः पंक्तियों और स्तंभों की संख्या समान होने हेतु आवश्यक पौधों की संख्या = $1024 - 1000 \Rightarrow 24$