

SOMA DOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

FINITA

A soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. (crescente, decrescente ou alternante) pode ser demonstrada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando a equação acima pela razão q , temos que:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

Subtraindo as duas equações supracitadas, temos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \quad (2)$$

(2) - (1):

$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n(q-1) = a_n \cdot q - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}$$

Considerando que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Temos, então:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1+1} - a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA P.G. INFINITA E DECRESCENTE

Considere uma sequência geométrica decrescente e infinita tal que podemos observar que quanto maior a distância de a_n para a_1 , **mais próximo de zero este termo a_n** estará.

Considerando, portanto, que a_n é um número que tenderá a ser igual zero, então, temos que:

$$S_n = \frac{-a_1}{q-1}$$

$$S_n = \frac{-a_1}{q-1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Para percorrer 1 km, o jovem Zeno adota a estratégia de dividir seu movimento em várias etapas, percorrendo, em cada etapa, metade da distância que ainda falta até o ponto de chegada. A tabela mostra a distância percorrida por ele em cada etapa.

Etapas	Distância percorrida (km)
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{1}{2^n}$

Ao final da etapa n , a distância total percorrida por Zeno será igual a

a) $\frac{2^n - 1}{2^n}$

b) $\frac{2^n + 1}{2^n}$

c) $\frac{n}{2^n}$

d) $\frac{2n - 1}{2^n}$

e) $\frac{2n + 1}{2^n}$

Resolução: A

A tabela mostra a seguinte progressão geométrica:

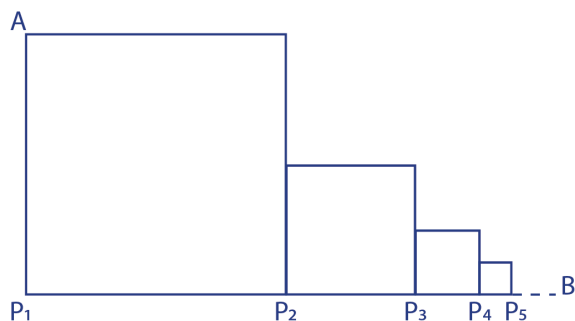
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}\right), \text{ onde:}$$

Termo inicial $a_1 = \frac{1}{2}$, razão $q = \frac{1}{2}$. Com isso, a distância total percorrida até a etapa n é a soma dos n primeiros termos da PG:

$$S_n = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right)}{\frac{-1}{2}} = -\left(\frac{1 - 2^n}{2^n}\right) = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

02. A figura a seguir é formada por quadrados de lados $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, e assim sucessivamente.

A construção é tal que os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots, B$ são colineares, e as bases dos quadrados têm medidas $\overline{P_1P_2} = 1$, $\overline{P_2P_3} = \frac{1}{2}$, $\overline{P_3P_4} = \frac{1}{4}$ e assim por diante. O ponto A é vértice do quadrado de lado $\overline{P_1P_2}$, como representado na figura abaixo.



A medida do segmento $\overline{AB}$ é

- a) 1.
- b) $\sqrt{2}$.
- c) $\sqrt{3}$.
- d) 2.
- e) $\sqrt{5}$.

Resolução: E

Pelo problema percebemos que a cada quadrado a aresta diminui pela metade, então o seguimento $\overline{PB}$ terá tamanho:

$$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

A sequência forma uma P.G de razão $\frac{1}{2}$, então o segmento $\overline{P_1P_5}$ será a soma infinita de uma P.G de razão $\frac{1}{2}$, logo:

$$\overline{P_1P_5} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Para calcular o tamanho da diagonal podemos utilizar a relação de Pitágoras, então:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{P_1P_5}^2$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

ANOTAÇÕES