09 SOMA E PRODUTO DE QUADRADOS

SOMA E PRODUTO

DEFINIÇÃO E DEMONSTRAÇÕES

"*Soma e Produto*" é um método prático para encontrarmos as raízes de uma equação do segundo grau.

Seja:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Temos que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ raízes da equação.

Demonstração:

Seja:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} =$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \pm b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-2b}{2a} =$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}\right) =$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4 \cdot a \cdot c\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a^2} =$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU PELO MÉTODO DA "SOMA E PRODUTO" DAS RAÍZES

Para o bom uso do método se sugere os seguintes procedimentos:

1. Estabeleça os possíveis pares de raízes x_1 e x_2 tais que $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$;
2. Destes escolha aquele par tal que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
3. Lembre-se que:

Produto das Raízes	Soma das Raízes	Conclusão
Positivo	Positivo	As duas raízes são **positivas**.
Positivo	Negativo	As duas raízes são **negativas**.
Negativo	Positivo	As raízes possuem **sinais diferentes e a de maior valor absoluto é positiva**.
Negativo	Negativo	As raízes possuem **sinais diferentes e a de maior valor absoluto é negativa**.

Exemplo:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Possíveis pares de raízes:

- **1 e 12**
- **2 e 6**
- **3 e 4**
- (-1) e (-12)
- (-2) e (-6)
- (-3) e (-4)

Como o produto das raízes e a soma delas resultam em números positivos reduzimos nossas hipóteses, apenas para os itens destacados em negrito.

O produto das raízes é $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$

A soma das raízes é: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{7}{1} = 7$

Logo, as raízes são **3** e **4**.

COMPLETAMENTO DE QUADRADOS APLICADO A EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Um trinômio quadrado perfeito é todo qualquer trinômio que poderá ser reduzido a forma:

$$(a + b)^2$$

Por exemplo:

$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = (x + 3)^2$

Logo, $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

O método de completamento de quadrado consiste em última análise, transformar um trinômio do segundo grau em um trinômio quadrado perfeito.

Exemplo 1:

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x^2 - 8x = -15$

$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$

$(x - 4)^2 = 1$

$$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{1}$$

x – 4 = 1 ou x – 4 = -1
x = 5 ou x = 3

Exemplo 2:

$x^2+4x+3=0$
$x^2+4x=-3$
$x^2+4x+4=-3+4$
$(x+2)^2=1$
$\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{1}$
x + 2 = 1 ou x + 2 = -1
x = -1 ou x = -3

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Sabe-se que as raízes da equação $x^2 + kx + 6 = 0$ são dois números naturais primos.
O valor de k pertence ao intervalo:

a) [-8, -6]
b) [-6, -3]
c) [-3, 0]
d) [0, 4]
e) [4, 7]

Resolução: B

$\begin{cases}\text{Equação}: x^2+kx+6=0\\ \text{Raízes}: x_1 \text{ e } x_2 \in \mathbb{N} \text{ e primos}\end{cases}$

Como $\begin{cases}x_1+x_2=-k\\ x_1x_2=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=2\\ x_2=3\end{cases}$ (única possibilidade)

$\Rightarrow (x_1, x_2) = (2, 3)$ ou $(3, 2)$

Logo a soma
$x_1, x_2 = 2 + 3 = 5 = -k$ ou $k = -5$
Assim k está no intervalo: [-6, -3]

02. As raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$ são α e β. O valor da expressão $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$ é:

a) $\frac{29}{3}$
b) $\frac{49}{3}$
c) $\frac{31}{3}$
d) $\frac{53}{3}$
e) $\frac{26}{3}$

Resolução: B

$3x^2 + 7x - 18 = 0$
Raízes α e β, logo:

$\begin{cases}\alpha+\beta=-\frac{7}{3}\\ \alpha\beta=-\frac{18}{3}=-6\end{cases}$

Portanto:
$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta =$
$\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) =$

$-6\left(-\frac{7}{3}\right)-\left(-\frac{7}{3}\right)=14+\frac{7}{3}=\frac{49}{3}$

03. A equação $x^2 + px + q = 0$ tem raízes reais opostas e não-nulas. Pode-se então afirmar que

a) p > 0 e q = 0
b) p < 0 e q = 0
c) p = 0 e q > 0
d) p = 0 e q < 0

Resolução: D

As raízes são a e -a, com a > 0. Pelas relações de Girard,
$-p = a+(-a) = 0 \Rightarrow p = 0$
$q = a\cdot(-a) = -a^2 \Rightarrow q < 0$

ANOTAÇÕES