

Somme des Arctan

On va définir les relations entre $[Arctan x + Arctan y]$ et $Arctan(\frac{x+y}{1-xy})$ ou x et y deux nombres réels tels que $xy \neq 1$

$$\begin{aligned}\tan(Arctan x + Arctan y) &= \frac{\tan(Arctan x) + \tan(Arctan y)}{1 - \tan(Arctan x) \times \tan(Arctan y)} \\ &= \frac{x+y}{1-xy} \\ &= \tan[Arctan(\frac{x+y}{1-xy})]\end{aligned}$$

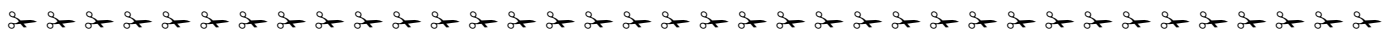
Mais de là on en déduit seulement que $Arctan x + Arctan y = Arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

(On va voir dans ce qui suit que $k \in \{-1; 0; 1\}$)

On pose $a = Arctan x$ et $b = Arctan y$ on a donc $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$

D'où on en déduit que $-\pi < a + b < \pi$

On a donc $[Arctan x + Arctan y] \in]-\pi, \pi[$ et $Arctan(\frac{x+y}{1-xy}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$



Premier cas

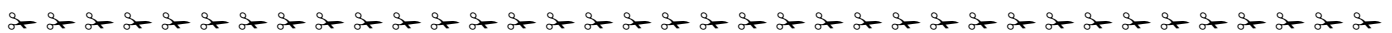
Si on a $-\pi < a + b < -\frac{\pi}{2}$ alors $0 < a + b + \pi < \frac{\pi}{2}$

$$D'où \tan(a + b + \pi) = \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \frac{x+y}{1-xy}$$

Puisque $(a + b + \pi) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ alors on a $a + b + \pi = Arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

Conclusion:

$$Arctan x + Arctan y = Arctan(\frac{x+y}{1-xy}) - \pi$$

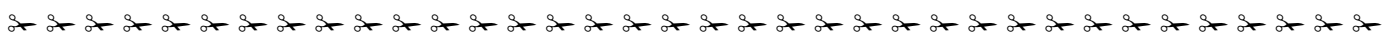


Deuxième cas

Si on a $-\frac{\pi}{2} < a + b < \frac{\pi}{2}$ on trouve aisément $a + b = Arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

Conclusion:

$$Arctan x + Arctan y = Arctan(\frac{x+y}{1-xy})$$



Troisième cas

Si on a $\frac{\pi}{2} < a + b < \pi$ alors $-\frac{\pi}{2} < a + b - \pi < 0$

$$\text{D'où } \tan(a + b - \pi) = \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} = \frac{x + y}{1 - xy}$$

Puisque $(a + b - \pi) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ alors on a $a + b - \pi = \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right)$

Conclusion:

$$\text{Arctan}x + \text{Arctan}y = \text{Arctan}\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + \pi$$

Récapitulatif

Posons $X = \text{Arctan}x + \text{Arctan}y$ et $Y = \text{Arctan}x + \text{Arctan}y - \text{Arctan}\frac{x + y}{1 - xy}$

X	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Y	$-\pi$	0	π	

Remarque

➤ Montrons que $\text{Arctan}x + \text{Arctan}y = \text{Arctan}\frac{x + y}{1 - xy} \Leftrightarrow xy < 1$

$$\begin{aligned} \text{Arctan}x + \text{Arctan}y = \text{Arctan}\frac{x + y}{1 - xy} &\Leftrightarrow (a + b) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ &\Leftrightarrow \cos(a + b) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(a)\cos(b)[1 - \tan(a)\tan(b)] > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(a)\cos(b)(1 - xy) > 0 \\ &\Leftrightarrow xy < 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$