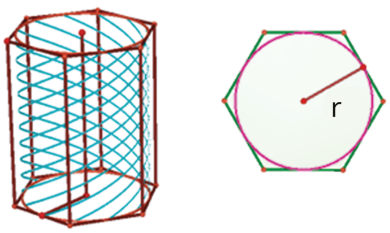
INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

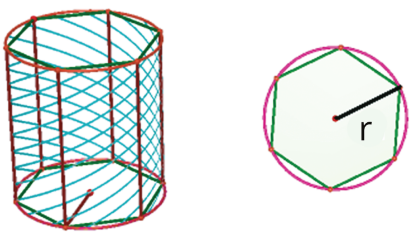
Estudamos até este momento os sólidos separadamente, mas em diversas situações precisamos entender a relação que um sólido tem com o outro. Nesta seção veremos uma relação de inscrição e circunscrição entre dois sólidos.

CILINDRO E PRISMA

Quando o cilindro circular reto está inscrito em um prisma regular, o raio da base do cilindro é o raio da circunferência inscrita na base do prisma, ou seja, o raio da base do cilindro é o apótema da base do prisma. Veja abaixo como exemplo, um cilindro inscrito em um prisma hexagonal regular:

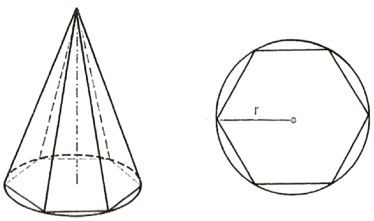


Quando o **prisma regular** está **inscrito em um cilindro circular reto**. O raio da base do cilindro é o raio da circunferência circunscrita à base do prisma. Veja abaixo como exemplo, um cilindro circunscrito a um prisma hexagonal regular:

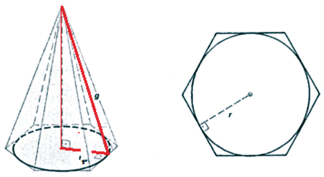


PIRÂMIDE E CONE

Quando uma **pirâmide regular está inscrita num cone circular reto**, o raio da base do cone é o raio da circunferência circunscrita à base da pirâmide.

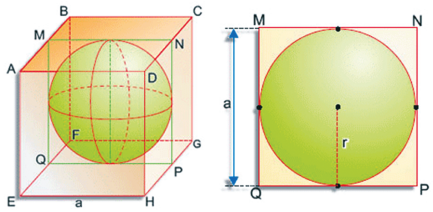


Quando um **cone circular reto está inscrito numa pirâmide regular**, o raio da base do cone é o apótema da base da pirâmide e a geratriz do cone é o apótema da pirâmide.



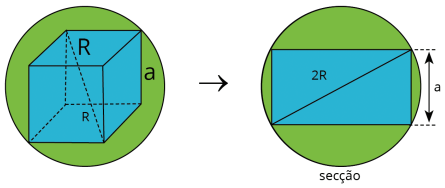
ESFERA E CUBO

Quando uma esfera está inscrita em um cubo, o diâmetro da esfera possui a mesma medida da aresta do cubo.



Dessa maneira, temos que $2r = a \leftrightarrow r = \frac{a}{2}$.

Quando uma **esfera** está **circunscrita ao cubo**, seu diâmetro possui mesma medida da diagonal do cubo.



Dessa maneira, temos que:

$$2R = a\sqrt{3} \leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Determine o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de 8 cm de aresta.

Resolução:

Como a esfera está circunscrita ao cubo temos que $2R = a\sqrt{3}$.

Dessa forma, $2R = 8\sqrt{3} \Rightarrow R = 4\sqrt{3}$.

Para calcular o volume dessa esfera basta aplicarmos a sua fórmula:

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi\left(4\sqrt{3}\right)^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi.64.3\sqrt{3} = 256\pi\sqrt{3}\,cm^3$$

02. Determine o volume de uma esfera inscrita num cubo de aresta 6 cm.

Resolução:

Como a esfera está inscrita no cubo temos que 2R = a.

Dessa forma, $2R = 6 \Rightarrow R = 3$.

Para calcular o volume dessa esfera basta aplicarmos a sua fórmula:

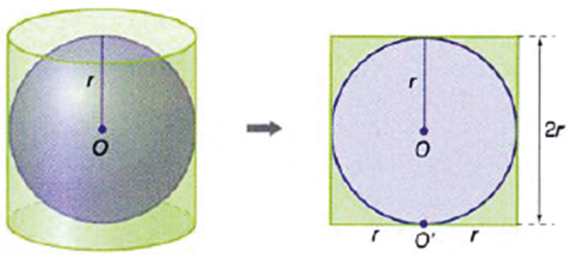
$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi cm^3$$

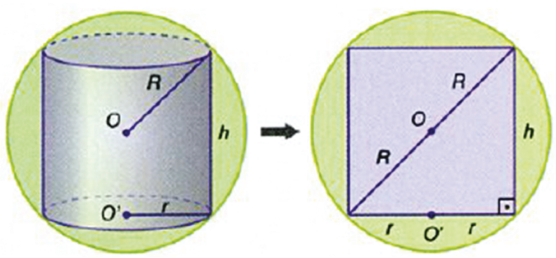
ESFERA E CILINDRO

Se uma **esfera** se encontra **inscrita em um cilindro circular reto**, temos que a altura desse cilindro deve ser o diâmetro da esfera, e o raio da base do cilindro possui mesma medida que o raio da esfera.



Devemos observar ainda que este, é um cilindro equilátero e que a medida de sua área lateral é a mesma da área da superfície esférica ($A_{lat.cilindro} = A_{esfera} = 4\pi R^2$).

Se uma **esfera** se encontra **circunscrita em um cilindro circular reto**, temos que o diâmetro da esfera é a diagonal da seção meridiana do cilindro.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Determine o volume de uma esfera inscrita num cilindro de volume 54π cm³.

Resolução:

Note que quando uma esfera está inscrita num cilindro temos:

$$R_{ESFERA} = R_{CILINDRO} = R$$

$$H_{CILINDRO} = 2 \cdot R_{ESFERA} = 2R$$

Dessa forma, podemos escrever o volume do cilindro como:

$$V_{CILINDRO} = A_b \cdot H = \pi(R_{CILINDRO})^2 \cdot H_{CILINDRO} = \\ = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 54\pi$$

$$R^3 = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} \Rightarrow R = 3cm$$

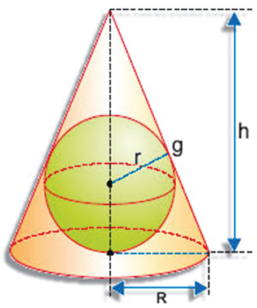
Calculando o volume da esfera, temos:

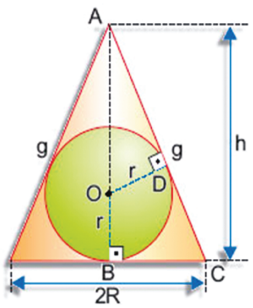
$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi cm^3$$

ESFERA E CONE

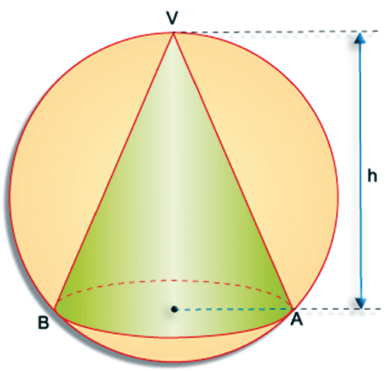
Se uma **esferas** se encontra **inscrita em um cone**, temos uma semelhança de triângulos na seção meridiana do cone.

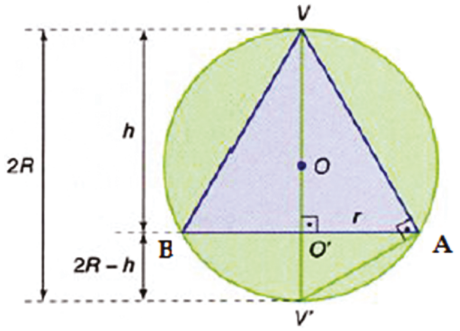




Considere a seção meridiana acima, onde A é o vértice do cone, O é o centro da esfera de raio r, B o centro da base do cone de raio R, e D a interseção da geratriz AC com a esfera. Note que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo AOD, assim $\frac{R}{r} = \frac{g}{h}$.

Quando uma **esfera** está **circunscrita a um cone**, notemos que o diâmetro da esfera que contém o vértice do cone forma um triângulo retângulo com qualquer dos pontos da base do cone, como mostra a figura.





Dessa maneira, considere o triângulo retângulo VV'A, cuja altura relativa à hipotenusa possui a mesma medida do raio r da base do cone, e cujas projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa possuem medida h e 2R – h. Logo, pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que:

$$r^2 = h(2R - h).$$

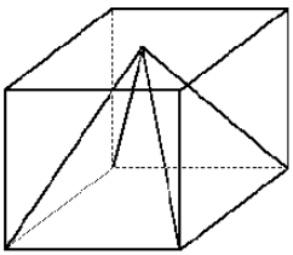
EXERCÍCIOS PROTREINO

01. Uma esfera de raio R está inscrita em um cilindro. Determine o volume do cilindro.

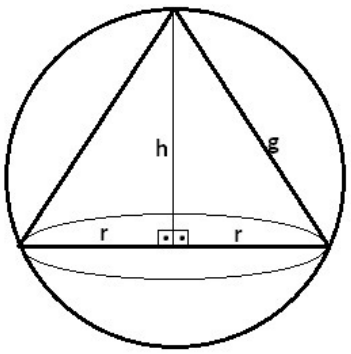
02. Calcule a razão entre duas esferas circunscrita e inscrita em um mesmo cubo.

03. Uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero. Encontre a razão entre a área lateral do cilindro equilátero e da superfície esférica.

04. Uma pirâmide está inscrita cubo. Sabendo que o volume da pirâmide são 6m³, determine o volume do cubo.

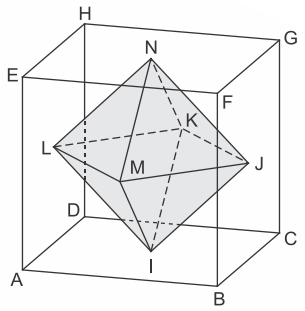


05. Dado um cone equilátero inscrito numa esfera de raio R, determine a área da superfície lateral desse cone.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFRGS) Considere um cubo de aresta a. Os pontos I, J, K, L, M e N são os centros das faces ABCD, BCFG, DCGH, ADHE, ABFE e EFGH, respectivamente, conforme representado na figura abaixo.



O octaedro regular, cujos vértices são os pontos I, J, K, L, M e N, tem aresta medindo

a) $a\sqrt{3}$.

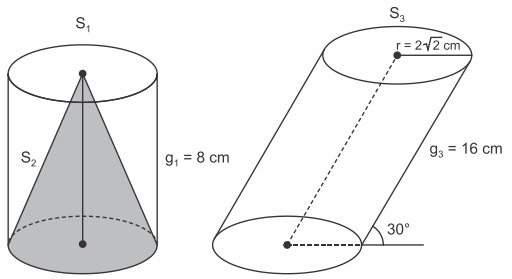
b) $a\sqrt{2}$.

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

d) $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

e) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

02. (UEMG) Observe as figuras.



Nas figuras acima, tem-se um cilindro circular equilátero (S_1), circunscrevendo um cone (S_2), e um cilindro circular oblíquo (S_3). A razão determinada pelo volume de S_3 com a superfície total de S_2 é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ cm.

b) $\sqrt{5}-1$ cm.

c) $\frac{\sqrt{5}+16}{4}$ cm.

d) $\sqrt{5}+16$ cm.

03. (UECE) Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio R. A medida de um diâmetro (2R) da esfera é

a) $2\sqrt{3}$ dm

b) $3\sqrt{2}$ dm

c) $3\sqrt{3}$ dm

d) $4\sqrt{3}$ dm

e) $4\sqrt{5}$ dm

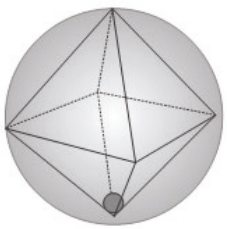
04. (UDESC) A base de um cone reto está inscrita em uma face de um cubo e seu vértice está no centro da face oposta. Se o volume do cone é $\frac{2\pi}{3}$ metros cúbicos, a área do cubo (em metros quadrados) é igual a:

a) 8 b) 24 c) 16 d) 20 e) 4

05. (UPF) É possível construir um dado redondo e honesto, isto é, com probabilidade 1/6 para cada um dos seis valores que ele pode sortear. As marcações do dado redondo são pintadas sobre a superfície de uma esfera, usando-se uma disposição análoga à do cubo convencional. Dentro da esfera, encontra-se uma cavidade na forma de um octaedro. Dentro da cavidade, coloca-se uma pequena esfera metálica pesada, que fica solta. Quando o dado redondo é lançado, toda a estrutura tende a se equilibrar com a pequena esfera, ocupando a posição de um dos seis vértices do octaedro e fazendo com que o topo da superfície esférica apresente uma das seis marcações.



Um conjunto de dados redondos



Estrutura interna de um dado redondo

(Disponível em: http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html. Acesso em 10 abr. 2015)

Se o diâmetro do dado redondo mede 4 cm, a soma das medidas das arestas do octaedro dentro do dado é:

a) 16 cm
b) 24 cm
c) $8\sqrt{2}$ cm
d) $12\sqrt{2}$ cm
e) $24\sqrt{2}$ cm

06. (FUVEST)Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{3}$
e) 6

07. (EEAR) Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede 16 π cm^2. O volume da esfera inscrita é

a) 8π
b) 16π
c) $\frac{32}{3}\pi$
d) $\frac{256}{3}\pi$
e) $\frac{18}{2}\pi$

08. (PUCPR) Um recipiente para sorvete tem forma de um cone reto, com 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, na parte onde será depositado o sorvete. São colocadas duas colheradas de sorvete no recipiente, sendo a colher na forma de uma semiesfera, também de diâmetro 4 cm. Suponha que o sorvete derreta no cone.

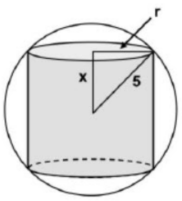
Sobre a situação descrita, assinale a alternativa **CORRETA**, denominando o volume do cone por V_C e o volume da esfera por V_E.

a) O sorvete transbordará, pois VE = 1,5 VC.
b) O sorvete não transbordará, pois VC = VE.
c) O sorvete não transbordará, pois VC = 3 VE.
d) O sorvete não transbordará, pois VC = 1,25 VE.
e) O sorvete transbordará, pois VC = 0,5 VE.

09. (UNICAMP) Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a

a) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{6}$

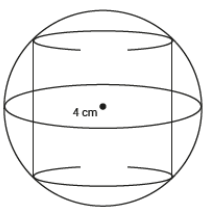
10. (UFPR) Um cilindro de raio r está inscrito em uma esfera de raio 5, como indica a figura abaixo.



Obtenha o maior valor de x, de modo que o volume desse cilindro seja igual a 72π.

a) $\sqrt{13}-2$
b) 3
c) $3\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{5}$
e) 4

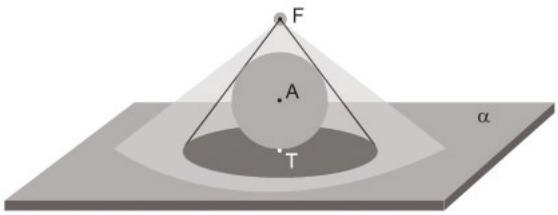
11. (UECE) Como mostra a figura a seguir, o cilindro reto está inscrito na esfera de raio 4 cm.



Sabe-se que o diâmetro da base e a altura do cilindro possuem a mesma medida. O volume do cilindro é

a) $18\pi\sqrt{2}\,cm^3$
b) $24\pi\sqrt{2}\,cm^3$
c) $32\pi\sqrt{2}\,cm^3$
d) $36\pi\sqrt{2}\,cm^3$

12. (UERJ) Uma esfera de centro A e raio igual a 3 dm é tangente ao plano α de uma mesa em um ponto T. Uma fonte de luz encontra-se em um ponto F de modo que F, A e T são colineares. Observe a ilustração:



Considere o cone de vértice F cuja base é o círculo de centro T definido pela sombra da esfera projetada sobre a mesa.

Se esse círculo tem área igual à da superfície esférica, então a distância FT , em decímetros, corresponde a:

a) 10
b) 9
c) 8
d) 7
e) 6

13. (FUVEST) A menor esfera na qual um paralelepípedo reto retângulo de medidas 7 cm x 4 cm x 4 cm está inscrito tem diâmetro de

a) 9 cm. b) 10 cm. c) 11 cm. d) 12 cm. e) 15 cm.

14. (ENEM PPL) Uma empresa de transporte disponibiliza, para embalagem de encomendas, caixas de papelão no formato de paralelepípedo retoretângulo, conforme dimensões no quadro.

Modelo da caixa	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
1	12	12	13
2	23	20	25
3	25	25	25
4	26	25	24
5	23	26	26

Para embalar uma encomenda, contendo um objeto esférico com 11 cm de raio, essa empresa adota como critério a utilização da caixa, dentre os modelos disponíveis, que comporte, quando fechada e sem deformá-la, a encomenda e que possua a menor área de superfície total.

Desconsidere a espessura da caixa.

Nessas condições, qual dos modelos apresentados deverá ser o escolhido pela empresa?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

15. (UECE) Considere um cubo Q inscrito na esfera S, isto é, os vértices de Q pertencem à superfície esférica de S. Se o volume de Q é igual a 1000 m³, então, a medida, em metros, do raio da esfera S é

a) $5\sqrt{3}$.

b) $3\sqrt{5}$.

c) $10\sqrt{2}$.

d) $5\sqrt{2}$.

16. (ENEM PPL) Em uma confeitaria, um cliente comprou um *cupcake* (pequeno bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:



Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares, cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimentoxlarguraxaltura)
I	8,5 cm x 12,2 cm x 9,0 cm
II	10 cm x 11 cm x 15cm
III	7,2 cm x 8,2 cm x 16 cm
IV	7,5 cm x 7,8 cm x 9,5 cm
V	15cm x 8 cm x 9 cm

A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não o deformar e com menor desperdício de espaço na caixa, é

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

17. (FUVEST) Três das arestas de um cubo, com um vértice em comum, são também arestas de um tetraedro. A razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é

a) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{4}$

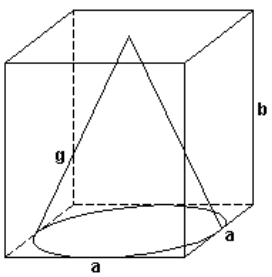
18. (UECE) Uma esfera está circunscrita a um cubo cuja medida da aresta é 2 m. A medida do volume da região exterior ao cubo e interior à esfera é

a) $4\left(\pi\sqrt{3}-2\right)m^3$ c) $4\left(\pi\sqrt{3}+2\right)m^3$

b) $3\left(\pi\sqrt{3}+2\right)m^3$ d) $3\left(\pi\sqrt{3}-2\right)m^3$

19. (FUVEST) Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão b/a entre as dimensões do paralelepípedo é $\frac{3}{2}$ e o volume do cone é π.

Então, o comprimento g da geratriz do cone é



a) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{11}$

b) $\sqrt{6}$ d) $\sqrt{10}$

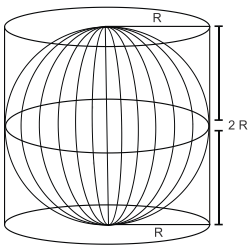
20. (UECE) Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a 1 m pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

a) $\frac{2}{3}m^3$. c) $\frac{1}{6}m^3$.

b) $\frac{2}{7}m^3$. d) $\frac{4}{7}m^3$.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (UFRN) Por motivo de segurança, construiu-se um superaquário de vidro, em formato esférico, dentro de um cilindro também de vidro, conforme esquematizado na figura a seguir. A esfera está completamente cheia de água e, caso quebre, toda a água passará para o cilindro.



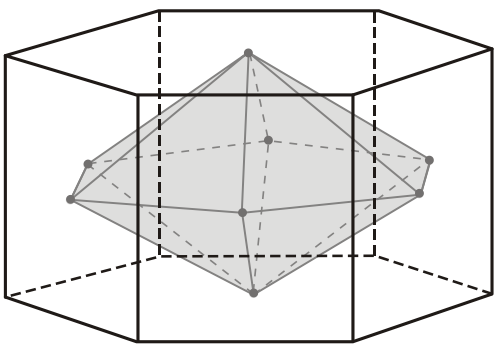
Desconsidere a pequena diferença entre os raios da esfera e do cilindro e o volume de água deslocado pelos pedaços de vidro da esfera quando quebrada. Supondo que R é igual a 2 m, determine:

a) O volume de água da esfera.

b) A capacidade volumétrica do cilindro.

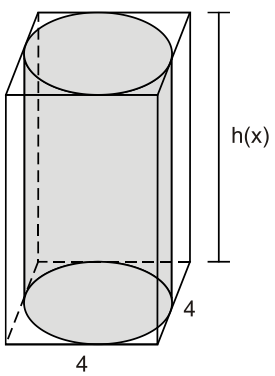
c) A altura do nível da água no cilindro, caso a esfera quebre.

02. (UERJ) Um cristal com a forma de um prisma hexagonal regular, após ser cortado e polido, deu origem a um sólido de 12 faces triangulares congruentes. Os vértices desse poliedro são os centros das faces do prisma, conforme representado na figura.



Calcule a razão entre os volumes do sólido e do prisma.

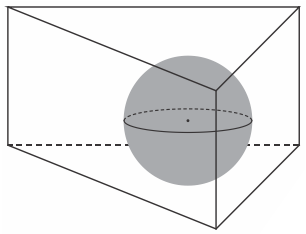
03. (UFSCAR) A figura mostra um prisma retangular reto de base quadrada com um cilindro circular reto inscrito no prisma. O lado da base do prisma mede 4 dm e a altura é dada por $h(x) = x^3 - 5x^2 + 8x$ dm, com $x > 0$.



a) Calcule o volume do prisma para x = 3 dm.

b) Para x = 1 dm o volume do cilindro inscrito é $16\pi dm^3$. Encontre os outros valores de x para os quais isto acontece.

04. (UERJ) A figura a seguir representa uma caixa, com a forma de um prisma triangular regular, contendo uma bola perfeitamente esférica que tangencia internamente as cinco faces do prisma.



Admitindo $\pi = 3$, determine o valor aproximado da porcentagem ocupada pelo volume da bola em relação ao volume da caixa.

05. (FGV) Considere uma pirâmide regular de altura $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cuja base é um quadrado de lado 3. Calcule:

c) o volume da pirâmide.

d) o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. E	05. E	09. A	13. A	17. B
02. B	06. A	10. E	14. E	18. A
03. C	07. C	11. C	15. A	19. D
04. B	08. D	12. C	16. D	20. C

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01.

a) O volume da água na esfera é $\frac{32}{3}\pi m^3$

b) A capacidade volumétrica do cilindro $16\pi m^3$.

c) $h = \frac{8}{3} m$.

02. 1/4

03.

a) $96dm^3$.

b) x = 1 dm e x = 2 dm

04. 38%

05.

a) $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ u.v.

b) $\sqrt{6}$ u.c.

ANOTAÇÕES