29 SÓLIDOS CIRCUNSCRITOS

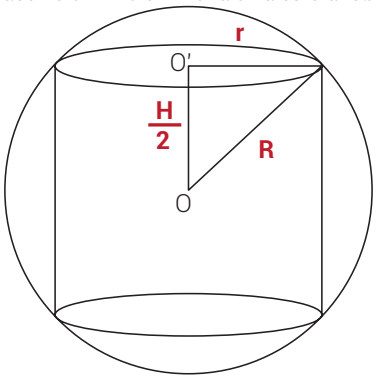
ESFERA CIRCUNSCRITA A UM CUBO

Quando temos uma esfera circunscrita a um cubo, temos que a diagonal do cubo coincidirá com o diâmetro da esfera. Assim, determinando por "R" o raio da esfera e por "a" a aresta do cubo, teremos a seguinte relação:

$$a\sqrt{3} = 2R \rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

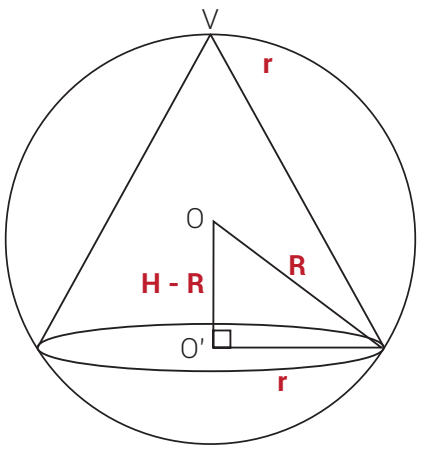
ESFERA CIRCUNSCRITA A UM CILINDRO

Quando temos uma esfera circunscrita a um cilindro, Devemos proceder com uma relação do Teorema de Pitágoras como na figura abaixo. Nela, consideraremos "H" como a altura do cilindro, "r" o raio da base do cilindro e "R" o raio da esfera. Observe:



ESFERA CIRCUNSCRITA A UM CONE

Quando temos uma esfera circunscrita a um cone, devemos proceder com uma relação do Teorema de Pitágoras como na figura abaixo. Nela, consideraremos "H" a altura do cone, "r" o raio da base do cone e "R" o raio da esfera. Observe:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC-RJ) Seja E uma esfera de raio 1 metro. Considere dois cubos, um contido em E, de maior volume possível e outro que contém E, de menor volume possível. Ache a razão entre os volumes dos dois cubos (entre o maior e o menor).

Resolução:

O cubo inscrito na esfera E (de raio R) é tal que a sua aresta "a" satisfaz a seguinte igualdade:

$$a\sqrt{3} = 2R \rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

O cubo circunscrito à esfera (de raio R) é tal que sua aresta " a' " satisfaz a seguinte igualdade:

$$a' = 2R \rightarrow R = \frac{a'}{2}$$

Assim, chegamos a seguinte igualdade:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a'}{2} \rightarrow a\sqrt{3} = a'$$

A razão entre os volumes dos cubos será igual a:

$$\text{Razão} = \frac{(a')^3}{a^3} = \frac{(a\sqrt{3})^3}{a^3}$$

$$\text{Razão} = \frac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{a^3} = 3\sqrt{3}$$

02. Determine o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de 10 cm de aresta.

Resolução:

Como a esfera circunscreve o cubo, teremos:

$$2R = a\sqrt{3}$$

$$2R = 10\sqrt{3}$$

$$R = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

O volume dessa esfera será igual a:

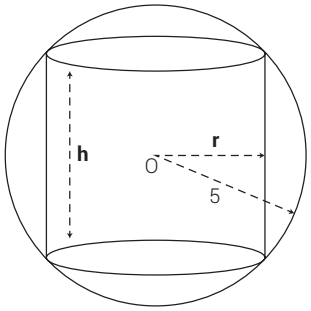
$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (5\sqrt{3})^3$$

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 125 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$V_{ESFERA} = 4 \cdot \pi \cdot 125\sqrt{3}$$

$$\mathbf{V_{ESFERA} = 500\pi\sqrt{3}\ cm^3}$$

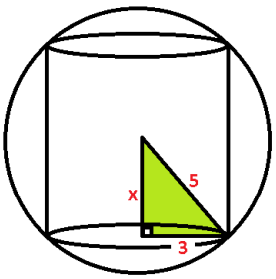
03. (PUC-RJ) Um cilindro reto de base circular de raio r e altura h é inscrito numa esfera de raio 5.



a) Encontre a altura do cilindro quando r = 3.
b) Calcule a área total do cilindro quando r = 3.
c) Escreva a área total do cilindro como função de r.

Resolução:

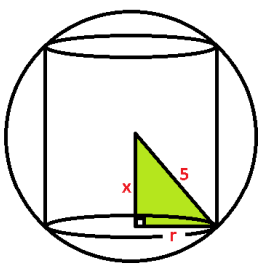
a) Observe a figura:



O triângulo retângulo da figura é pitagórico.
Assim, teremos x = 4 u · c.
Como x é a metade da altura do cilindro, teremos:
H = 2 · x → H = 2 · (4) → **H = 8 u · c.**

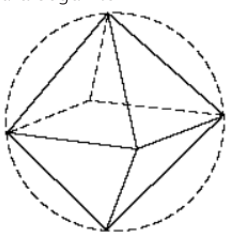
b) Quando r = 3u · c., teremos H = 8 u · c.
Assim, teremos a seguinte área total do cilindro:
$A_{TOT} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot H$
$A_{TOT} = 2\pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 8$
$A_{TOT} = 18\pi + 48\pi$
$A_{TOT} = 66\pi$ u · a.

c) Observe a figura abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo retângulo, teremos:
$5^2 = x^2 + r^2$
$25 = x^2 + r^2$
$x^2 = 25 - r^2$
$x = \sqrt{25 - r^2}$
Como a altura tem o dobro da medida de x, teremos:
$H = 2.x \rightarrow H = 2 \cdot \sqrt{25 - r^2}$
Assim, a área total do cilindro será igual a:
$A_{TOT} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot H$
$A_{TOT} = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot 2 \cdot \sqrt{25 - r^2}$
$A_{TOT} = 2\pi \cdot r^2 + 4\pi \cdot r \cdot \sqrt{25 - r^2}$
$A_{TOT} = 2\pi r(r + 2 \cdot \sqrt{25 - r^2})$ u · a

04. (PUC-SP) De um cristal de rocha, com o formato de uma esfera, foi lapidada uma joia na forma de um octaedro regular, como mostra a figura seguinte.

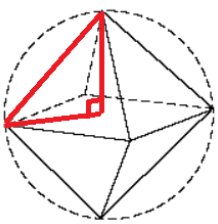


Se tal joia tem $9\sqrt{2}$ cm³ de volume, quantos centímetros cúbicos de rocha foram retirados do cristal original para lapidá-la? (Use: π = 3)

a) $36\sqrt{2}$
b) $32\sqrt{2}$
c) $24\sqrt{2}$
d) $18\sqrt{2}$
e) $12\sqrt{2}$

Resolução: D

O raio da esfera coincide com a altura de cada uma das duas pirâmides que formam o octaedro regular. Seja "a" a medida de cada aresta do octaedro regular. Observe a figura:



Nesta figura, temos um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede a, um cateto horizontal que mede $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e outro cateto medindo H. Aplicando o Teorema de Pitágoras, teremos:

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + H^2$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + H^2$$

$$H^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$H = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Assim, pensando no volume deste octaedro, teremos:

$$V_{OCTAEDRO} = 9\sqrt{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{a^3}{3} = 9$$

$a^3 = 27 \rightarrow a = 3$ cm

Assim, a altura de cada pirâmide (e consequentemente o raio da esfera) será igual a:

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Assim, o volume da esfera será igual a:

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$V_{ESFERA} = 4 \cdot \frac{27 \cdot 2\sqrt{2}}{8}$$

$$V_{ESFERA} = 27\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

O volume retirado para se criar esta peça será igual a:

$$V_{RETIRADO} = V_{ESFERA} - V_{OCTAEDRO}$$

$$V_{RETIRADO} = 27\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$\mathbf{V_{RETIRADO} = 18\sqrt{2}\ cm^3}$$

ANOTAÇÕES