PEMBAHASAN SOAL OSP
OLIMPIADE SAINS NASIONAL JENJANG SMP
SELEKSI TINGKAT PROVINSI TAHUN 2018
BIDANG STUDI MATEMATIKA
WAKTU : 150 MENIT
21 April 2018

SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui bilangan bulat positif k sehingga $\frac{5k+1}{3k-18}$ juga bilangan bulat positif. Dua nilai k yang memenuhi adalah ....

Pembahasan:

Diketahui $\frac{5k+1}{3k-18}$, dimana k merupakan bilangan bulat positif atau bilangan asli

Untuk menemukan nikai k, perlu menggunakan startegi "manipulasi bentuk aljabar", yakni

$\frac{5k+1}{3k-18} = a$, dimana a bilangan asli $\Rightarrow$ $5k + 1 = a(3k - 18)$

$\Rightarrow$ $5k + 1 = 3ak - 18a$

$\Rightarrow$ $18a + 1 = k(3a - 5)$

$\Rightarrow$ $\frac{18a+1}{3a-5} = k$

$\Rightarrow$ $\frac{6(3a-5)+31}{3a-5} = k$

$\Rightarrow$ $\frac{6(3a-5)}{3a-5} + \frac{31}{3a-5} = k$

$\Rightarrow$ $6 + \frac{31}{3a-5} = k$

Agar nilai k dihasilkan bilangan bulat positif maka $(3a - 5)$ haruslah pembagi bulat positif dari 31, yaitu: 1 dan 31

$3a - 5 = 1 \Rightarrow a = 2$, sehingga nilai $k = 6 + \frac{31}{3(2)-5} = 6 + 31 = 37$

$3a - 5 = 31 \Rightarrow a = 12$, sehingga nilai $k = 6 + \frac{31}{3(12)-5} = 6 + 1 = 7$

Jadi, nilai k yang memenuhi adalah $k = 7$ dan $k = 37$

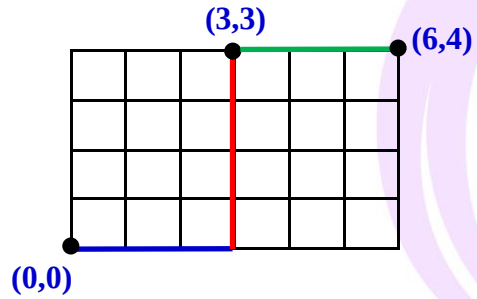
2. Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dimulai dari titik (0,0). Setiap langkah pergerakan adalah satu satuan. Peluang partikel bergerak pada arah sumbu-X positif adalah $\frac{1}{2}$, sedangkan peluang bergerak pada arah sumbu-Y positif adalah $\frac{2}{5}$. Setelah bergerak 10 langkah, peluang partikel tersebut sampai pada titik (6,4) dengan melalui titik (3,4) adalah ....

Pembahasan:

Berdasarkan informasi pada soal bahwa suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dimulai dari titik (0,0), kemudian melewati titik (3,4) untuk sampai pada titik (6,4).
Dimana partikel hanya bisa bergerak pada arah sumbu-X positif dan bergerak pada arah sumbu-Y positif dengan peluang masing-masing adalah $\frac{1}{2}$ dan $\frac{2}{5}$

Hal ini memiliki arti bahwa banyak cara terpendek dari titik (0,0) ke titik (6,4) dengan syarat melewati titik (3,4)

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



Ada 10 langkah yang harus dilakukan oleh partikel tersebut
Salah satu contoh rute paralel bergerak adalah **garis warna merah** + **garis warna biru** + **garis warna hijau**, yaitu **ada 3 satuan ke kanan** + **4 satuan ke atas** + **3 satuan ke kanan**

Sehingga banyaknya rute paralel dari gambar tersebut adalah sebagai berikut.

${}_7C_4 = \frac{7!}{(7-4)!.4!} = 7 \times 5 = 35$, kemudian ke arah kanan 3 kali

Jadi, peluang partikel tersebut adalah $35 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{500}$

3. Diberikan himpunan $A = \{1,2,3, ..., 25\}$. Banyak himpunan bagian berunsur dua yang hasil kali unsur-unsurnya kuadrat sempurna adalah ....

Pembahasan:

Diketahui himpunan $A = \{1,2,3, ..., 25\}$.
Adapun bilangan kuadrat sempurna yang terdapat pada himpunan A adalah {1, 4, 9, 16, 25}

Kemudian berdasarkan informasi dari soal bahwa terdapat himpunan berunsur dua yang hasil kali unsur-unsurnya merupakan kuadrat sempurna, sehingga himpunannya merupakan kelipatan dari bilangan kuadrat sempurna yang dapat ditulis menjadi {1a, 4a, 9a, 16a, 25a}, dimana nilai

a merupakan bilangan asli, dengan syarat hasil kalinya merupakan himpunan bagian dari himpunan A.

Dengan demikian didapat sebagai berikut.

a) Jika nilai $a = 1$, maka himpunannya {1, 4, 9, 16, 25}
dipilih 2 dari 5, sehingga ada ${}_5C_2 = 10$ yang memenuhi

b) Jika nilai $a = 2$, maka himpunannya {2, 8, 18}
dipilih 2 dari 3, sehingga ada ${}_3C_2 = 3$ yang memenuhi

c) Jika nilai $a = 3$, maka himpunannya {3, 12}
dipilih 2 dari 2, sehingga ada ${}_2C_2 = 1$ yang memenuhi

d) Jika nilai $a = 4$, maka himpunannya {4, 16}
terdapar di point a)

e) Jika nilai $a = 5$, maka himpunannya {5, 20}
dipilih 2 dari 2, sehingga ada ${}_2C_2 = 1$ yang memenuhi

Jadi, banyak himpunan bagian berunsur dua yang hasil kali unsur-unsurnya kuadrat sempurna adalah ada 10 + 3 + 1 + 1 + 1 = 16

4. Diketahui bilangan x dan y, masing-masing tidak lebih dari 2018 dan $x^2 + y^2$ habis dibagi 121. Jika pasangan (x,y) dan (y,x) tidak dibedakan, maka banyak pasangan (x,y) yang memenuhi adalah ....

Pembahasan:

Diketahui nilai $x \leq 2018$ dan $y \leq 2018$, serta dan $x^2 + y^2 = 121a$, nilai a bilangan asli
Dengan memperhatikan bahwa $x^2 + y^2$ habis dibagi 121, hal ini memiliki arti bahwa pasangan (x, y) terkecil adalah (11, 11) dan pasangan terbesar adalah $11a \leq 2018$, yaitu (2013, 2013).

Sehingga banyaknya nilai x dan y yang memenuhi adalah $\frac{2013}{11} = 183$

Dengan demikian banyaknya pasangan nilai x dan y yang memenuhi, didapat:

11 berpasangan dengan 11, sampai 11 berpasangan dengan 2013 (ada 183)

22 berpasangan dengan 22, sampai 22 berpasangan dengan 2013 (ada 182)

. .
. .
. .

2012 berpasangan dengan 2012, sampai 2012 berpasangan dengan 2013 (ada 2)

2013 berpasangan dengan 2013 (ada 1)

Dengan demikian, banyak pasangannya adalah $1 + 2 + ... + 182 + 183 = (184 \times 91) + 92$
$= 16.836$

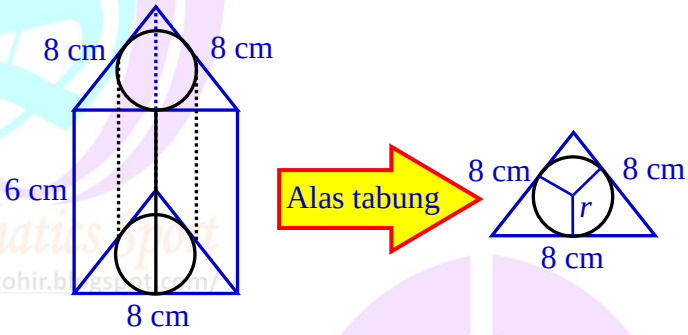
Jadi, banyak pasangan (x,y) yang memenuhi adalah ada 16.836

5. Suatu tabung berada di dalam prisma tegak segitiga. Tabung tersebut tepat menyinggung prisma pada alas, tutup, dan semua sisi prisma. Alas prisma berbentuk segitiga sama sisi dengan panjang sisi 8 *cm* dan tinggi prisma 6 *cm* . Volume tabung tersebut adalah ....

Pembahasan:

Diketahui suatu tabung berada di dalam prisma tegak segitiga dengan alas prisma segitiga sama sisi, dimana panjang sisinya 8 cm dan tinggi prisma 6 cm

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



$s = \frac{1}{2}(8 + 8 + 8) = 12$

Jari-jari lingkaran dalam segitiga (r)

$r = \frac{Luas\,\Delta}{s} = \frac{\left(\frac{8^2}{4}\sqrt{3}\right)}{12} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

Volume Tabung = Luas alas × tinggi

$= \pi\, r^2 \times t$

$= \pi \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 \times 6$

$= \pi \frac{16 \times 3}{9} \times (3 \times 2)$

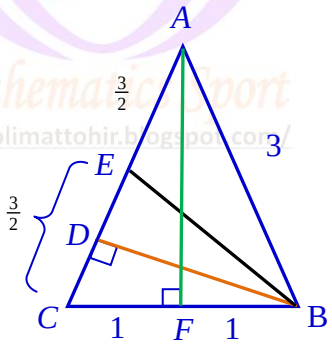
$= 32\pi$

Jadi, volume tabung tersebut adalah 32π

6. Diketahui ΔABC mempunyai panjang sisi $AB = AC = 3$ *cm* dan $BC = 2$ *cm*. Titik D dan E terletak pada AC sehingga BD adalah garis tinggi dan BE adalah garis berat ΔABC. Luas ΔBDE adalah ... cm^2.

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



Perhatikan ΔAFB, dengan rumus pithagoras didapat panjang $AF = 2\sqrt{2}$.

Kemudian perhatikan Luas ΔABC dengan alas BC dan alas AC, didapat

$BD \times AC = BC \times AF$

$BD = \frac{BC \times AF}{AC} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$

Seanjutnya perhatikan ΔAFC dengan ΔBDC, keduanya sebangun sehingga didapat

$DC \times BD = CF \times AF$

$$DC = \frac{CF \times AF}{BD} = \frac{1 \times 2\sqrt{2}}{\frac{4}{3}\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \text{didapat } DE = CE - DC = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Dengan demikian, Luas $\Delta BDE = \frac{1}{2} \times DE \times BD$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$= \frac{5}{9}\sqrt{2}$$

Jadi, Luas ΔBDE adalah $\frac{5}{9}\sqrt{2}$ cm^2

7. Sebuah kode terdiri dari 6 digit angka akan disusun dengan ketentuan sebagai berikut:
   a) Angka pertama adalah tak nol
   b) Nilai angka pertama adalah dua kali angka terakhir
   c) Jika angka ke-2 dan ke-3 dipertukarkan, tidak akan mengubah nilai bilangan.

   Banyaknya susunan angka kode yang mungkin adalah ....

Pembahasan:

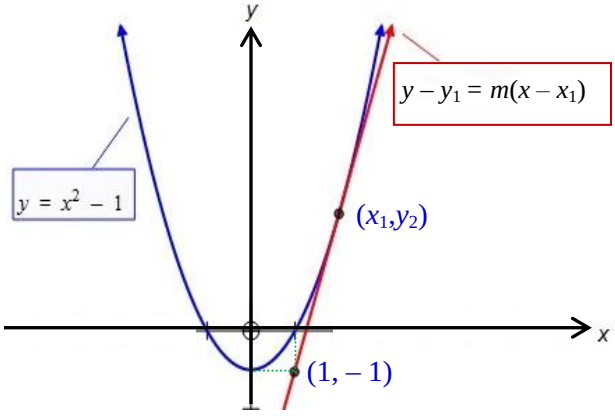
Misalkan kode 6 digit adalah *abcdef*
Dengan ketentuan dari tiga hal didapat bahwa $a = 2f$ dan $b = c$
Sehingga banyak susunan yang didapat ke-enam digit kode tersebut sama halnya dengan menyusun 4 digit *bdef*, yaitu $10 \times 10 \times 10 \times 4 = 4000$

Jadi, banyaknya susunan angka kode yang mungkin adalah ada 4000

8. Misalkan k adalah garis yang menyinggung kurva $y = x^2 - 1$ di titik (x_1,y_1), dengan $x_1 > 1$. Jika k melalui titik $(1,-1)$, maka k memotong sumbu-y di titik ....

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



Suatu garis k yang menyinggung kurva $y = f(x) = x^2 - 1$ pada satu titik (x_1,y_1) memiliki gradien garis singgung $m = f'(x_1)$, sehingga didapat $m = 2x_1$ dan $y_1 = x_1^2 - 1$. Sedangkan gardien garis k yang melalui titik (x_1,y_1) dan titik $(1, -1)$ adalah $m = \frac{y_1 + 1}{x_1 - 1}$, dimana persamaan garis singgungnya adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$. Berdasarkan persamaan $m = 2x_1$ dan $m = \frac{y_1 + 1}{x_1 - 1}$, maka didapat

$$2x_1 = \frac{x_1^2}{x_1 - 1}$$

$$2x_1(x_1 - 1) = x_1^2$$

$2x_1(x_1 - 1) = x_1^2 \quad \Rightarrow 2x_1^2 - 2x_1 = x_1^2$

$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 = 0$

$\Rightarrow x_1(x_1 - 2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$ atau $x_1 = 2$

Dikarenakan $x_1 > 1$, maka yang memenuhi adalah $x_1 = 2$

Berdasarkan persamaan $y_1 = x_1^2 - 1$ dan $x_1 = 2$, maka didapat $y_1 = (2)^2 - 1 = 3$

sehingga nilai m didapat $m = \dfrac{3+1}{2-1} = \dfrac{4}{1} = 4$

Dengan demikian, persamaan garis k didapat, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8 + 3$

$y = 4x - 5$

Jadi, garis $y = 4x - 5$ memotong sumbu-y di titik (0, –5)

9. Misalkan suku-suku suatu barisan diberikan dengan $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + n$, untuk $n > 1$. Nilai n terbesar sehingga $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \leq 2018$ adalah ....

Pembahasan:

Diketahui $x_1 = 1$, dan $x_{n+1} = x_n + n$, dengan $n > 1$

Untuk $n = 2$, maka $x_3 = x_2 + 2$

Untuk $n = 3$, maka $x_4 = x_3 + 3 = (x_2 + 2) + 3 = x_2 + 5$

...

...

dan seterusnya,

sehingga didapat

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n \leq 2018$

$1 + x_2 + (x_2 + 2) + (x_2 + 5) + (x_2 + 9) + ... + (x_2 + \frac{1}{2} \times (n-2)(n+1) \leq 2018$

$(1 + (n-1) \times x_2) + [2 + 5 + 9 + ... + \frac{1}{2} \times (n-2)(n+1)] \leq 2018$

Dengan "mengabaikan" bentuk $(1 + (n-1) \times x_2)$, maka menjadi

$2 + 5 + 9 + ... + \frac{1}{2} \times n(n+3) < 2018$

2, 5, 9, 14, ..., $\frac{1}{2} \times n(n+3)$

3 4 5

1 1

$$S_n = \frac{2}{0!} + \frac{(n-1)5}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)4}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)1}{3!}$$

$S_n = 2 + 5n - 5 + 2n^2 - 6n + 6 + \dfrac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

$S_n = 2n^2 - n + 3 + \dfrac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6)$

$S_n = \dfrac{1}{6}(12n^2 - 6n + 18) + \dfrac{1}{6}(n^3 - 6n^2 + 11n - 6$

$S_n = \dfrac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 5n + 12)$

Sehingga didapat

$2\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ 14\ ,\ .....,\ \frac{1}{2} \times n(n+3)\ < 2018$

$\frac{1}{6}(n^3 + 6n^2 + 5n + 12) < 2018$ $\times 6$

$n^3 + 6n^2 + 5n + 12 < 12108$

bentuk aljabar dari $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < n^3 + 6n^2 + 5n + 12$

$(x+1)^3 < n^3 + 6n^2 + 5n + 12$

Sehingga

$(x+1)^3 < 12108 \Rightarrow x + 1 = 22{,}963$

$\Rightarrow x = 21{,}963$

$\Rightarrow$ sehingga nilai $x = 22$

Jadi, nilai *n* terbesar sehingga $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n \le 2018$ adalah 22

10. Nilai x dan y yang memenuhi sistem

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{63} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{42} \end{cases}$$

adalah ....

Pembahasan:

$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{63}$ dan $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{42}$ $\Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x - \frac{13}{42}\right) = -\frac{4}{63}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x - \frac{13}{42} = -\frac{4}{63}$

$\Rightarrow \frac{(2+1)}{3}x - = -\frac{4}{63} + \frac{13}{42}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{7}$

Sehingga didapat nilai $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{42}$ $\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right) - \frac{13}{42} = -\frac{5}{21}$

Jadi, nilai *x* dan *y* yang memenuhi adalah $x = \frac{1}{7}$ dan $y = -\frac{5}{21}$

11. Bilangan bulat dari 1, 2, 3, ..., 1000 ditulis berurutan pada keliling lingkaran. Seseorang menendai bilangan 1, bilangan 13, bilangan 25 dan setiap bilangan ke-12 setelahnya (berarti bilangan yang ditandai adalah 1, 13, 25, 37, ...). Proses ini berlangsung terus sampai dengan bertemu bilangan yang pernah ditandai. Bilangan bulat pada keliling lingkaran tersebut yang tidak ditandai ada sebanyak ....

Pembahasan:

Diketahui bilangan bulat dari 1, 2, 3, ..., 1000 ditulis berurutan pada keliling lingkaran.

Kemungkinan-kemugkinan bilangan yang ditandai pada setiap putaran adalah sebagai berikut.

1) 1, 13, 25, 37, 49, ..., 997 (U_n = 997, a, = 1, b = 12, dan n = 84)
2) 9, 21, 33, 45, ..., 993 (U_n = 993, a, = 9, b = 12, dan n = 83)
3) 5, 17, 29, 41, ..., 989 (U_n = 989, a, = 5, b = 12, dan n = 83)
4) Pada putara ke-empat balik lagi seperti putaran pertama, yakni 1, 13, 25, ..., 997

Dengan demikian deret yang tebentuk adalah

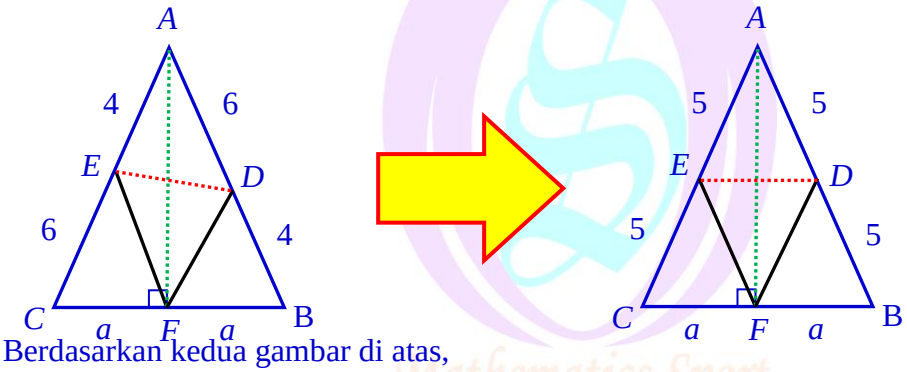
1, 5, 9, 13, 17, 21, ..., 997 (U_n = 997, a, = 1, b = 4, dan n = 250)

Jadi, bilangan bulat pada keliling lingkaran yang dimaksud ada 1000 – 250 = 750

12. Diberikan suatu segitiga samakaki ABC dengan $AB = AC = 10$ cm. Titik D terletak pada sisi AB sejauh 6 cm dari A, serta titik E pada sisi AC sejauh 4 cm dari A. Selanjutnya dari A ditarik garis tinggi dan memotong BC di F. Jika bilangan rasional $\frac{a}{b}$ menyatakan perbandingan luas segiempat $ADFE$ terhadap luas segitiga ABC dalam bentuk yang paling sederhana, maka nilai $a+b$ adalah ....

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



Berdasarkan kedua gambar di atas,

maka Luas segiempat $ADFE = \frac{1}{2}$ Luas $\Delta ABCD$, dan Luas $\Delta ABF = \frac{1}{2}$ Luas $\Delta ABCD$

hal ini dikarenakan bahwa ΔABC merupakan segitiga sama kaki, panjang $AE = BD = 4$ cm, panjang $AD = CE = 6$ cm.

Sehingga didapat bahwa Luas ΔADE = Luas ΔBDF = Luas ΔCFE = Luas ΔDEF

Dengan demikian, $\frac{Luas\ segiempat\ ADFE}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{1}{2}$

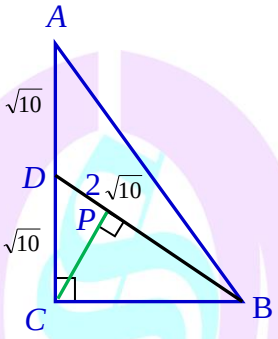
$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$, a = 1 dan b = 2, maka $a + b = 1 + 2 = 3$

Jadi, nilai $a + b$ adalah 3

13. Diketahui ΔABC siku-siku di C. D titik tengah AC dan $AC = BD = 2\sqrt{10}$. P pada BD sehingga $CP \perp BD$. Luas ΔCDP adalah ....

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut



Perhatikan ΔCDB,merupakan segitiga siku-siku, sehingga panjang BC didapat: $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{30}$

Perhatikan ΔCDP dengan ΔBDC, keduanya sebangun sehingga didapat

$$\frac{CP}{BC} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CP = BC \times \frac{CD}{BD} = \sqrt{30} \times \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$

$$\frac{DP}{DC} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow DP = DC \times \frac{CD}{BD} = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

Dengan demikian, Luas $\Delta CDP = \frac{1}{2} \times DP \times CP = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{10} \times \frac{1}{2}\sqrt{30} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$

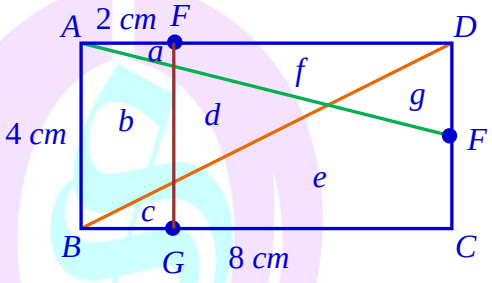
Jadi, Luas ΔCDP adalah $\frac{5}{4}\sqrt{3}$

14. Persegi panjang $ABCD$ mempunyai panjang sisi $AB = 4$ *cm* dan $BC = 8$ *cm* . Titik F pada AD, G pada BC, sehingga garis FG sejajar sisi CD, dan panjang $AF = 2$ *cm*. Titik E merupakan titik tengah CD. Selanjutnya dilukis diagonal BD dan garis AE. Banyak segiempat pada persegi panjang $ABCD$ adalah ....

Pembahasan:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut

Langkah pertama kita beri simbol pada tiap-tiap daerah, yaitu sebagai berikut:



Kemudian kita cari satu demi satu berdasarkan simbol yang telah dibuat.

1. Segiempat yang terdiri dari 1 bagian yaitu *b* dan *f* ada sebanyak 2
2. Segiempat yang terdiri dari 2 bagian yaitu *ab*, *bc*, *ce*, *de*, *eg*, dan *gf* ada sebanyak 6
3. Segiempat yang terdiri dari 3 bagian yaitu *abc* dan *adf* ada sebanyak 2
4. Segiempat yang terdiri dari 4 bagian yaitu *bcde*, dan *defg* ada sebanyak 2
5. Segiempat yang terdiri dari 7 bagian yaitu *abcde* ada sebanyak 1

Jadi, banyak segiempat pada persegi panjang *ABCD* adalah 2 + 6 + 2 + 2 + 1 = 13

15. Didefinisikan $[\![x]\!]$ = bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x, contoh $[\![2]\!] = 2$; $[\![0{,}1]\!] = 0$; dan $[\![1{,}8]\!] = 1$. Jika $J = [\![\sqrt{1918}\,]\!] + [\![\sqrt{1919}\,]\!] + [\![\sqrt{1920}\,]\!] + \ldots + [\![\sqrt{2018}\,]\!]$ maka nilai J adalah ....

Pembahasan:

Diketahui $[\![x]\!]$ merupakan bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x,

contoh $[\![2]\!] = 2$; $[\![0{,}1]\!] = 0$; dan $[\![1{,}8]\!] = 1$.

$J = [\![\sqrt{1918}\,]\!] + [\![\sqrt{1919}\,]\!] + [\![\sqrt{1920}\,]\!] + \ldots + [\![\sqrt{2018}\,]\!]$

$J = \underbrace{[\![\sqrt{1918}\,]\!] + \ldots\ldots + [\![\sqrt{1935}\,]\!]}_{\text{Ada 18 yang nilainya 43}} + \underbrace{[\![\sqrt{1936}\,]\!] + \ldots + [\![\sqrt{2018}\,]\!]}_{\text{Ada 83 yang nilainya 44}}$

$J = 18 \times 43 + 83 \times 44$

$J = 774 + 3652$

$J = 4.426$

Jadi, nilai J adalah 4.426

SOAL URAIAN

16. Tentukan semua penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy - x + 3y = 0; \\ x^2 - 5x - 3y^2 - y + 10 = 0. \end{cases}$$

Pembahasan:

$x^2 - 6y^2 - xy - x + 3y = 0 \quad \Rightarrow (x^2 - 6y^2 - xy) - (x - 3y) = 0$

$\Rightarrow (x - 3y)(x + 2y) - (x - 3y) = 0$

$\Rightarrow (x - 3y)[(x + 2y) - (1)] = 0$

$\Rightarrow (x - 3y)(x + 2y - 1) = 0$

$x = 3y$ atau $x = 1 - 2y$

Untuk $x = 3y \quad \Rightarrow x^2 - 5x - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow (3y)^2 - 5(3y) - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow 9y^2 - 15y - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow 6y^2 - 16y + 10 = 0$

$\Rightarrow 3y^2 - 8y + 5 = 0$

$\Rightarrow (3y - 5)(y - 1) = 0$

$y = \frac{5}{3}$ atau $y = 1$ sehingga didapat $x = 5$ atau $x = 3$

pasangan (x,y) didapat $(5, \frac{5}{3})$; (3, 1)

Untuk $x = 1 - 2y$ $\Rightarrow x^2 - 5x - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow (1 - 2y)^2 - 5(1 - 2y) - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow 4y^2 - 4y + 1 - 5 + 10y - 3y^2 - y + 10 = 0$

$\Rightarrow y^2 + 5y + 6 = 0$

$\Rightarrow (y + 3)(y + 2) = 0$

$y = -3$ atau $y = -2$ sehingga didapat $x = 7$ atau $x = 5$

pasangan (x,y) didapat (7, –3); (5, –2)

Jadi, semua penyelesaian yang memenuhi adalah $(5, \frac{5}{3})$; (3, 1); (7, –3); (5, –2)

17. Sebuah permainan dengan nama "Halang Rintang" mempunyai aturan permainan bahwa jika seseorang berada pada rintangan ke-*n*, orang tersebut harus melemparkan dadu sebanyak *n* kali. Jika jumlah mata dadu dari *n* pelemparan ini lebih besar dari 2^n, maka orang tersebut berhasil melewati rintangan. Tentukan peluang bahwa seseorang berhasil melewati tiga rintangan pertama. Diasumsikan bahwa dadu yang digunakan adalah dadu yang setimbang.

Pembahasan:

Berdasarkan informasi pada soal bahwa terdapat suatu permainan "Halang Rintang" dengan aturan yang sudah ditentukan. Peserta yang berhasil melewati rintang apabila jumlah mata dadu dari *n* pelemparan > 2^n.

Rintangan pertama

Pelemparan pertama agar berhasil melewati rintangan maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih dari 2^1, sehingga didapat

$n(S) = 6^1 = 6$

$n(A) = 6^1 - 2$ (1 dan 2 : ada 2)

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Rintangan kedua

Pelemparan kedua agar berhasil melewati rintangan maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih dari $2^2 = 4$, sehingga didapat

$n(S) = 6^2 = 36$

Kemudian dicari jumlah mata dadu ≤ 4, atau $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 3$, dan $x_1 + x_2 = 2$, dimana nilai x_1 dan x_2 merupakan bilangan asli

untuk persamaan dari $x_1 + x_2 = 4$, bisa menggunakan aturan kombinasi ${}_3C_1 = 3$

untuk persamaan dari $x_1 + x_2 = 3$, bisa menggunakan aturan kombinasi ${}_2C_1 = 2$

untuk persamaan dari $x_1 + x_2 = 2$, bisa menggunakan aturan kombinasi ${}_1C_1 = 1$

Dengan demikian,

$n(A) = 6^2 - 6$ (3 + 2 + 1 : ada 6)

$n(A) = 36 - 6\ ({}_3C_1 + {}_3C_1 + {}_3C_1)$

$n(A) = 30$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$

Rintangan ketiga

Pelemparan kedua agar berhasil melewati rintangan maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih dari $2^3 = 8$, sehingga didapat

$n(S) = 6^3 = 216$

Kemudian dicari jumlah mata dadu ≤ 8, atau $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, dan $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, dimana nilai x_1, x_2, dan x_3 merupakan bilangan asli

Dengan cara yang sama, amak didapat

$n(A) = 6^3 - ({}_7C_2 + {}_6C_2 + {}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2)$

$n(A) = 216 - (21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1)$

$n(A) = 216 - 56$

$n(A) = 160$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{160}{216} = \dfrac{20}{27}$

Dengan demikian, peluang seluruhnya adalah $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{6} \times \dfrac{20}{27} = \dfrac{100}{243}$

Jadi, peluang bahwa seseorang berhasil melewati tiga rintangan pertama adalah $\dfrac{100}{243}$

18. Seseorang mengamati Pelat Nomor Kendaraan Bermotor (PNKB) yang terdiri atas empat angka. Dengan angka pertama tak nol. Orang tersebut mendefinisikan PNKB istimewa jika memenuhi dua syarat, yaitu:
    - PNKB tersebut memuat tiga atau empat suku barisan aritmetika
    - beda atau selisih barisan tersebut merupakan bilangan bulat positif.

    Tentukan banyak PNKB istimewa dimaksud.

Pembahasan:

Menurut informasi dari soal bahwa terdapat empat angka PNKB istemewa dengan syarat memuat tiga atau empat suku barisan aritmatika.

Misalkan empat angka tersebut adalah $\underline{abcd}$

Ada dua kemungkinan yang didapat,

1) $\underline{d}$ bebas dengan $\underline{abc}$ membentuk barisa aritmetika
2) $\underline{a}$ bebas dengan $\underline{bcd}$ membentuk barisa aritmetika

Kasus 1 (d bebas)

$\underline{abc}\ \underline{d}$			
Beda 1	Beda 2	Beda 3	Beda 4
$\underline{abc}\ \underline{d}$ a ; 1 – 7 b ; 2 – 8 c ; 3 – 9 d ; 0 – 9 ada $10 \times 7 = 70$	$\underline{abc}\ \underline{d}$ a ; 1 – 5 b ; 3 – 7 c ; 5 – 9 d ; 0 – 9 ada $10 \times 5 = 50$	$\underline{abc}\ \underline{d}$ a ; 1 – 3 b ; 4 – 6 c ; 7 – 9 d ; 0 – 9 ada $10 \times 3 = 30$	$\underline{abc}\ \underline{d}$ a ; 1 b ; 5 c ; 9 d ; 0 – 9 ada $10 \times 1 = 10$
Jadi, total ada sebanyak $70 + 50 + 30 + 10 = 160$			

Kasus 2 (a bebas)

$\underline{a}\ \underline{bcd}$			
Beda 1	Beda 2	Beda 3	Beda 4
$\underline{a}\ \underline{bcd}$ a ; 1 – 9 b ; 0 – 7 c ; 1 – 8 d ; 2 – 9 ada $9 \times 8 = 72$	$\underline{a}\ \underline{bcd}$ a ; 1 – 9 b ; 0 – 5 c ; 2 – 7 d ; 4 – 9 ada $9 \times 6 = 54$	$\underline{a}\ \underline{bcd}$ a ; 1 – 9 b ; 0 – 3 c ; 3 – 6 d ; 6 – 9 ada $9 \times 4 = 36$	$\underline{a}\ \underline{bcd}$ a ; 1 – 9 b ; 0 – 1 c ; 4 – 5 d ; 8 – 9 ada $9 \times 2 = 18$
Jadi, total ada sebanyak $72 + 54 + 36 + 18 = 180$			

Dengan memperhatikan kasus 1 dan 2, masih ada *double* hitungan, yaitu pada barisan

Pada beda 1: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789 (ada 6)

Pada beda 2: 1357, 2468, 3579 (ada 3)

Jadi, banyak PNKB istimewa dimaksud adalah ada $(160 + 180) – (6 + 3) = 340 – 9 = 331$

Dibahas oleh : Mohammad Tohir
Jika ada saran, kritik maupun masukan
silahkan kirim ke- My email: olimattohir@gmail.com
Terima kasih.
My blog : http://matematohir.wordpress.com/
http://olimattohir.blogspot.com/