27 SISTEMAS LINEARES: PROBLEMAS

Iremos, neste capítulo, analisar alguns problemas envolvendo Sistemas Lineares:

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (Unisc) Numa casa geriátrica, as pacientes Dosolina, Nair e Raquelita ingerem ao todo 2876 mg de determinados medicamentos por dia. Sabendo-se que a paciente Dosolina ingere 49 mg a mais que Nair, e que Raquelita ingere 2434 mg a mais que Nair, podemos afirmar que cada uma das pacientes – Dosolina, Nair, Raquelita – ingerem por dia, em mg, de determinados medicamentos, respectivamente:

a) 177; 128; 2562
b) 180; 131; 2565
c) 179; 130; 2564
d) 178; 129; 2563
e) 181; 132; 2566

Resolução: B

Sejam d, n e r, respectivamente, as quantidades, em mg, de medicamentos ingeridos por Dosolina, Nair e Raquelita. Logo, temos d+ n + r = 2876, d = n + 49 e r = n + 2434.

Portanto, segue que

$$n+49+n+n+2434=2876 \Leftrightarrow n=131.$$

Em consequência, vem d = 180 e r = 2565.

02. (ENEM DIGITAL) Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino.

Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2.385,00
b) 2.650,00
c) 3.300,00
d) 3.950,00
e) 5.300,00

Resolução: B

Sendo x e y, respectivamente, o número de homens e de mulheres, temos:

$$\begin{cases} x+y=132 \\ y=x+26 \end{cases}$$

$$x+x+26=132$$

$$2x=106$$

$$x=53$$

Logo, o valor a ser pago pelos homens é de:

$$53 \cdot R\$\,50,00 = R\$\,2.650,00$$

03. (CFTRJ) A biblioteca de uma escola comprou alguns livros de contos, alguns por R$ 8,00 e outros por R$ 4,00. A editora estava fazendo uma promoção dando um livro para cada 10 livros comprados. A biblioteca recebeu um total de 273 livros pelos quais pagou R$ 1.536,00.

a) Quantos livros a biblioteca ganhou de presente da editora?
b) Quantos foram os de R$ 8,00? E os de R$ 4,00?

Resolução:

a) Considerando que a seja o número de livros recebidos de presente, temos que:

$$10a+a \le 273$$

$$11a \le 273$$

Dividindo 273 por 11, obtemos:

$273 = 11 \cdot 24+9$

Portanto, a biblioteca ganho de presente 24 livros.

b) Considerando, agora, que x seja o número de livros pagos de R$ 8,00 e y o número de livros pagos de R$ 4,00, temos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} x+y=273-24 \\ 8x+4y=1536 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

X = 135 e y = 114.

Portanto:

Foram comprados 135 livros de R$ 8,00 e ainda a biblioteca foi presenteada com 13 destes livros.

Foram comprados 114 livros de R$ 4,00 e ainda a biblioteca foi presenteada com 11 destes livros.

04. (UNICAMP) Seja a matriz de ordem 2x3, dada por $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Seja C a matriz de ordem 3x2, cujos elementos são dados por $c_{ij} = (-1)^{i+j}$, para i = 1, 2, 3 e j = 1,2. e Determine o produto AC.

b) Determine a solução do sistema linear $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, nas variáveis reais x,y e z, em que (x, y, z) é uma progressão aritmética.

Resolução:

a) Tem-se que

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Em consequência, vem

$$AC=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1-1+1 & -1+1-1 \\ 1-2+3 & -1+2-3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Seja $(x, y, z)=(x, x+r, x+2r)$. Logo, encontramos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x+r \\ x+2r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x+x+r+x+2r \\ x+2x+2r+3x+6r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 3x+3r \\ 6x+8r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+r=2 \\ 3x+4r=3 \end{cases}$$

$$\sim\begin{cases} x+r=2 \\ 3x+4r=3 \end{cases}$$

$$\sim\begin{cases} x=5 \\ r=-3 \end{cases}.$$

Portanto, a solução do sistema é $S=\{(5, 2, -1)\}$.

05. (UFJF-PISM) Em um exame de seleção a prova é formada por 60 questões. Para cada questão que o candidato resolve corretamente lhe são atribuídos 10 pontos e para cada questão que ele resolve incorretamente ou não resolve, são descontados 4 pontos. Ao final do exame, um candidato obteve 40 pontos e acertou mais questões do que errou.

Qual é a quantidade mínima de questões que esse candidato não resolveu?

Resolução:

Sendo x, y e z, respectivamente, o número de questões resolvidas corretamente, incorretamente e não resolvidas, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=60 \quad (I) \\ 10x-4(y+z)=40 \quad (II) \end{cases}$$

Fazendo $(II)+4\cdot(I)$:

$$10x-\cancel{4(y+z)}+4x+\cancel{4(y+z)}=280$$

$$14x=280$$

$$x=20$$

Logo:

$$20+y+z=60$$

$$y+z=40$$

Como $x > y$, devemos ter que $y \leq 19$. Dessa forma, o número mínimo de questões não resolvidas é de:

$$19+z=40$$

$$\therefore z=21$$

06. (Unioeste 2020) Em uma lanchonete, registrou-se o consumo de 3 meses, como mostra o quadro abaixo.

	Produto		
Mesa	**Café**	**Misto quente**	**Pão de queijo**
1	6	3	8
2	3	2	4
3	9	5	12

Considerando que há preços únicos para cada tipo de produtos da lanchonete e sabendo-se que o consumo total na mesa 2 foi de R$ 25,00 e na mesa 3 foi de R$ 70,00, então é **CORRETO** afirmar que:

a) O preço unitário do misto quente é R$ 4,50.
b) É possível determinar o valor do consumo total na mesa 1.
c) É possível determinar o preço unitário de todos os produtos.
d) É possível concluir que o preço do café é mais caro que o do pão de queijo.
e) O problema consiste em um sistema de equações lineares que não possui nenhuma solução.

Resolução: B

Sejam c, m e p, respectivamente, os preços unitários do café, do misto quente e do pão de queijo. Logo, temos

$$\begin{cases} 6c+3m+8p=t \\ 3c+2m+4p=25 \\ 9c+5m+12p=70 \end{cases},$$

em que t denota o consumo total na mesa 1. Escalonando o sistema, encontramos

$$\begin{cases} 3c+2m+4p=25 \\ m=50-t \\ 0=-t+45 \end{cases}.$$

Portanto, o sistema é impossível para $t \neq R\$\,45{,}00$ e indeterminado para t = R$ 45,00 com $(c, m, p)=\left(\frac{15-4p}{3}, 5, p\right)$ e $0<p<\frac{15}{4}$.

Subtraindo a equação 3c + 2m + 4p = 25 da equação 9 c + 5m + 12p = 70, encontramos

6 c + 3 m + 8p = 45,

o que corresponde ao consumo total na mesa 1.

[A] Falsa. Na verdade, sabemos que m = R$ 5,00 para t = R$ 45,00.

[B] Verdadeira. De fato, conforme mostramos acima.

[C] Falsa. O sistema é possível e indeterminado para t = R$ 45,00.

[D] Falsa. Na verdade, temos c > p quando $0 < p < \frac{15}{7}$.

[E] Falsa. O sistema pode ser indeterminado, conforme mostramos acima.

07. (UECE) Sejam x, y, z e w números naturais cuja soma é igual a 200. Se x + z = y + w e se x = 3z, então, é correto afirmar que $\frac{xz}{5}$ é igual a

a) 365. b) 380. c) 370. d) 375.

Resolução: D

Tem-se que

$$\begin{cases} x = 3z \\ x + z = y + w \\ x + y + z + w = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ 4z = y + w \\ 4z + y + w = 200 \end{cases}$$

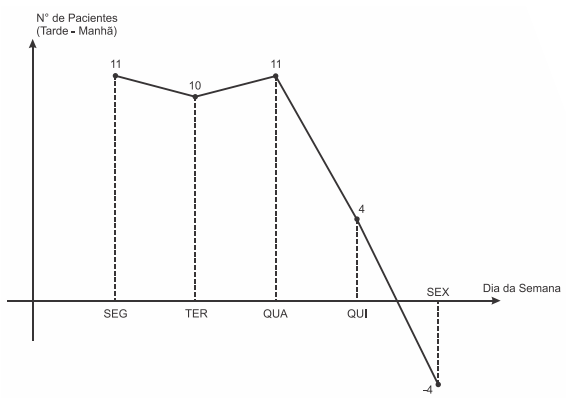
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ 4z = y + w \\ 8z = 200 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \cdot 25 \\ z = 25 \\ y + w = 4 \cdot 25 \end{cases}.$$

Portanto, segue que $\frac{xz}{5} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 25}{5} = 375$.

08. (CMRJ) Um ambulatório médico atende pacientes de segunda a sexta-feira, pela manhã e à tarde. Na última semana, foram atendidos, ao todo, 80 pacientes.

O gráfico apresenta, dia a dia, a diferença entre as quantidades de pacientes atendidos de tarde e de manhã, nessa ordem, nessa semana.



Com base nessas informações, é correto concluir que, nessa semana, o total de pacientes atendidos no turno da tarde foi de

a) 44 b) 52 c) 56 d) 58 e) 60

Resolução: C

Considerando que:

x: pacientes atendidos de tarde

y: pacientes atendidos de manhã

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x - y = 11 + 10 + 11 + 4 + (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 80 \\ x - y = 32 \end{cases}$$

Somando as equações do sistema, obtemos:

$2x = 112 \Rightarrow x = 56$

Portanto, 56 pacientes foram atendidos de tarde.

09. (UFJF-PISM) O produto interno bruto (PIB) representa a soma, em valores monetários, de todos os bens e serviços finais produzidos em uma determinada região. Países desenvolvidos têm PIB maior. Por exemplo, dez vezes o PIB da Alemanha em 2017 resultou em dezenove vezes o PIB do Brasil no mesmo ano. Ainda em 2017, a diferença entre o PIB dos dois países foi de 1 trilhão e 800 bilhões de dólares.

O valor do PIB do Brasil no ano de 2017, em trilhões de dólares, foi

a) 380 b) 200 c) 38 d) 3,8 e) 2,0

Resolução: E

Sendo x e y, respectivamente, os PIBs do Brasil e da Alemanha, temos:

$$\begin{cases} 10y = 19x \\ y - x = 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1{,}9x \\ y = x + 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow 1{,}9x = x + 1{,}8 \Rightarrow 0{,}9x = 1{,}8$$

$\therefore x = 2$ trilhões de dólares

10. (UECE) Na sala de reuniões de um condomínio, há mesas de 4,5 e 6 lugares, perfazendo o total de 22 mesas. Na última reunião que houve, compareceram 113 pessoas, que foram acomodadas nessas mesas, ocupando todos os lugares. Se o número de mesas com 6 lugares era o dobro do número de mesas com 5 lugares, então, o número de mesas com 4 lugares era

a) 10.
b) 7.
c) 4.
d) 13.

Resolução: B

Sejam x, y e z, respectivamente, o número de mesas de 4,5 e 6 lugares. Tem-se que

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 4x + 5y + 6z = 113 \\ z = 2y \end{cases} \sim \begin{cases} x + 3y = 22 \\ 4x + 17y = 113 \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 10 \end{cases}.$$

Portanto, a resposta é 7.