SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS:

Caso 1 – LLL: É o caso em que os dois triângulos apresentam proporção entre os 3 lados em questão. Assim, se dois triângulos possuem proporção entre os seus lados, eles serão semelhantes. Um grande exemplo é o triângulo pitagórico "3, 4 e 5": ao multiplicar os três lados desse triângulo por um mesmo número, como por exemplo o 2, chegaríamos aos seguintes valores: ¨6, 8 e 10". Os dois triângulos citados são, portanto, semelhantes. Nesta situação, podemos dizer que a razão de semelhança entre estes dois triângulos é 2 ou $\frac{1}{2}$, dependendo da ordem em que é expressa esta razão.

Caso 2 – LAL: É o caso de semelhança em que os dois triângulos possuem proporção entre dois dos três lados dos triângulos e o mesmo ângulo entre estes dois lados. Assim, se em um triângulo A temos dois lados que medem 3 cm e 5 cm com um ângulo de 30° entre eles e em um triângulo B temos dois lados que medem 9 cm e 15 cm com um ângulo de 30° entre eles, percebemos que há o ângulo em comum e a proporção entre os respectivos lados. Neste caso, a razão de semelhança seria igual a 3 ou $\frac{1}{3}$, a depender da ordem em que é estabelecida a razão.

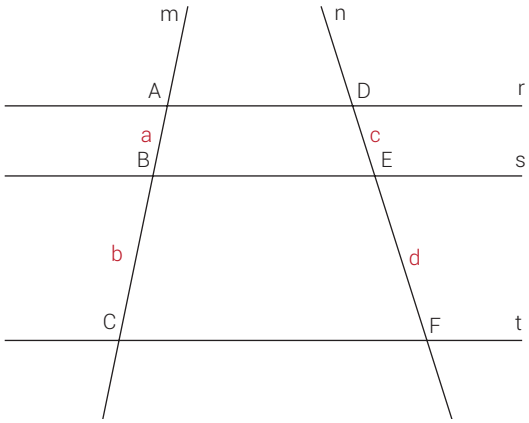
Caso 3 – AAA: É o caso em que dois triângulos possuem dois ângulos em comum. Assim, se dois triângulos possuem dois ângulos em comum, eles serão semelhantes. Muitos alunos se confundem e pensam que os triângulos para serem semelhantes devem ter os 3 ângulos internos em comum, porém com apenas 2 ângulos em comum, a semelhança já acontece. Isso ocorre porque se dois ângulos são comuns, o terceiro deve ser comum nos dois triângulos, visto que a soma dos ângulos internos de quaisquer triângulos sempre será de 180°.

RELAÇÃO ENTRE ÁREAS EM TRIÂNGULOS SEMELHANTES:

Se temos dois triângulos semelhantes, existirá entre os mesmo uma razão de semelhança k entre os lados homólogos. Porém, se um triângulo A possui os lados com comprimento igual a k vezes os comprimentos dos seus homólogos no triângulo B, a relação entre as áreas não será igual a k. Isso acontece porque a área é uma grandeza bidimensional, o que faz com que a razão seja igual a k^2. Desta forma, quando dobramos os lados de um triângulo, criamos um segundo triângulo semelhante ao primeiro, com k = 2. Entretanto, o segundo triângulo não terá o dobro da área do primeiro, visto que a razão de semelhança entre as áreas é igual a k^2. Neste caso, a área do segundo triângulo será o quádruplo da área do primeiro.

TEOREMA DE THALES:

Também denominado por Teorema do Feixe de Paralelas, gera uma proporção a partir da figura abaixo, que traz algumas retas paralelas e duas retas transversais, que são fragmentadas em alguns segmentos de reta. Neste cenário, não há limite para o número de retas paralelas na figura.

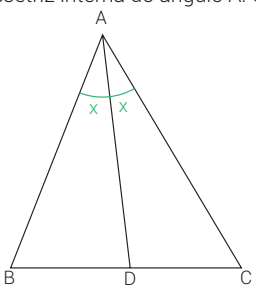


Na figura acima, onde as retas r, s e t são paralelas, teremos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

A bissetriz interna em um dos vértices de um triângulo cria uma divisão no lado oposto, com segmentos que serão proporcionais. Na figura abaixo, temos um triângulo ABC e o segmento AD é a bissetriz interna do ângulo Â. Observe:

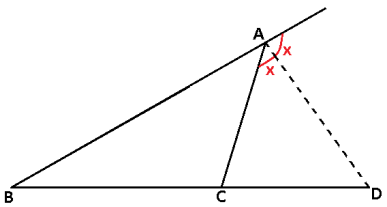


A partir das informações e da figura, teremos:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

A bissetriz externa em um dos vértices de um triângulo criará sobre a reta suporte do lado oposto um segmento de maior comprimento do que o lado oposto. Observe a figura abaixo, que retrata o triângulo ABC e o seu ângulo externo do vértice A:



A Teorema da Bissetriz Externa criará a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$$

ESCALA

É a razão entre a medida do esboço de um objeto e a medida real do mesmo. Quando falamos em esboço, podemos falar sobre uma fotografia, a planta-baixa de um imóvel, o mapa de uma região, entre outros. Tal razão (divisão) acontece entre medidas de comprimento na mesma unidades, o que gera uma escala sem unidades, podendo o leitor fazer a leitura com a unidade desejada, desde que use a mesma unidade para o objeto e para o esboço. Para simplificar o entendimento, imagine um mapa de um bairro que está na escala 1:5000. Tal escala significa que caso duas casas do bairro estão distantes por 1 centímetro no desenho, a distância real que as separa é de 5.000 cm.

Como obter as medidas reais de um objeto tendo a medida no esboço e uma escala 1:X?

Utilize o seguinte raciocínio: se a escala é 1:X, temos que a cada 1 unidade no desenho, teremos x unidades na realidade. Assim, para obter a medida real de um objeto tendo a medida no esboço e a escala 1:X, MULTIPLICAMOS a medida no esboço por x.

Como obter as medidas no esboço, se temos as medidas reais do objeto e a escala 1:X?

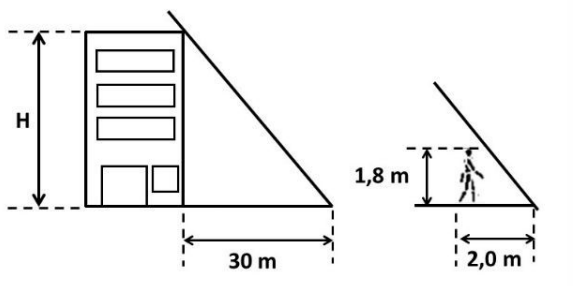
Utilize o seguinte raciocínio: se a escala é 1:X, temos que a cada unidade no desenho, teremos x unidades na realidade. Assim, para obter a medida no esboço tendo a medida real do objeto e a escala 1:X, DIVIDIMOS a medida real do objeto por x.

Como obter a escala tendo a medida real do objeto e a medida do esboço:

Na escala 1:X, a razão 1/X é proporcional a razão (esboço)/(realidade). Assim, para obter a escala de uma representação tendo a medida real do objeto e a medida do esboço, DIVIDIMOS a medida do esboço pela medida real do objeto, simplificando a fração gerada ao máximo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (EAM) Observe a figura abaixo:



Um prédio projeta no solo uma sombra de 30 m de extensão no mesmo instante em que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 2,0 m. Pode-se afirmar que a altura do prédio vale

a) 27 b) 30 c) 33 d) 36 e) 40

Resolução: A

Teremos a seguinte proporção:

$\frac{H}{30} = \frac{1,8}{2}$

$2H = 54$

$H = \frac{54}{2}$

$H = 27$ m

02. (FAUGRS) Considere um triângulo retângulo de catetos medindo 3m e 5m. Um segundo triângulo retângulo, semelhante ao primeiro, cuja área é o dobro da área do primeiro, terá como medidas dos catetos, em metros:

a) 3 e 10
b) $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{2}$ e $10\sqrt{2}$
d) 5 e 6
e) 6 e 10

Resolução: B

A razão de semelhança entre os comprimentos dos triângulos pode ser denotada por k, enquanto a razão de semelhança entre suas áreas, na mesma ordem, será denominada por k^2. Assim, teremos:

$K^2 = 2$

$K = \sqrt{2}$

Desta forma, os lados do segundo triângulo serão $\sqrt{2}$ vezes maiores que os lados do primeiro. Assim, teremos:

$a' = a.\sqrt{2}$ $a' = 3\sqrt{2}$

$b' = b.\sqrt{2}$ $b' = 5\sqrt{2}$

Portanto, teremos: $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

03. (UNIFEI) Em um mapa no qual a escala é de 1: 100.000, a distância em linha reta entre duas cidades é de 8 cm. Qual a distância real entre essas cidades?

a) 8 km b) 80 km c) 800 km d) 8000 km

Resolução: A

Como a escala é 1:100.000, as medidas reais serão 100.000 maiores que as medidas no mapa. Assim, a distância entre as duas cidades será de:

Distância Real = (8 cm).100.000

Distância Real = 800.000 cm

Distância Real = 8 km

04. (MACK) Considerando que a distância real entre duas cidades é de 120km e que a sua distância gráfica, num mapa, é de 6cm, podemos afirmar que esse mapa foi projetado na escala:

a) 1:1.200.000
b) 1:2.000.000
c) 1:12.000.000
d) 1:20.000.000
e) 1:48.000.000

Resolução: B

Temos uma distância na representação igual a 6 cm e uma distância real de 120 km. Assim, a escala será igual a:

$$\text{Escala} = \frac{6\text{cm}}{120\text{km}}$$

$$\text{Escala} = \frac{6\text{cm}}{12.000.000\text{cm}}$$

$$\text{Escala} = \frac{6}{12.000.000}$$

$$\text{Escala} = m\ \frac{1}{2.000.000}$$

Escala = 1:2.000.000

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

ANOTAÇÕES