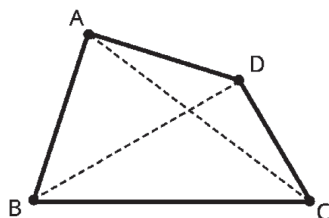




## QUADRILÁTEROS

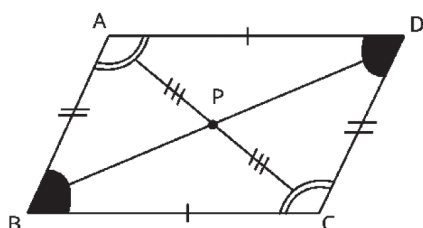
Já vimos anteriormente que o quadrilátero é um polígono com quatro lados.  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  são diagonais e  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ .



Nosso objetivo nesse momento é explorar alguns quadriláteros notáveis.

## PARALELOGRAMO

Paralelogramo é o quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.



Com isso, ele terá algumas propriedades especiais:

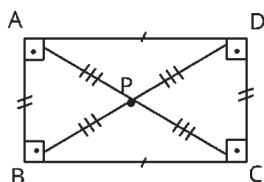
- Ângulos opostos sempre serão congruentes. Na figura,  $\hat{A} = \hat{C}$  e  $\hat{B} = \hat{D}$ .
- Dois ângulos consecutivos sempre serão suplementares. Assim, na figura observa-se que  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ ,  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ,  $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$  e  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ .
- Lados opostos sempre serão congruentes. Na figura,  $\overline{AB} = \overline{CD}$  e  $\overline{AD} = \overline{BC}$ .
- As diagonais cortam-se em seus pontos médios. Na figura,  $\overline{AP} = \overline{PC}$  e  $\overline{BP} = \overline{PD}$ .

## TIPOS DE PARALELOGRAMOS

### Retângulo

O retângulo é um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos retos.

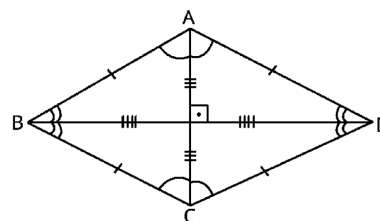
Com isso, além dele possuir todas propriedades do paralelogramo, no retângulo todas as diagonais possuem a mesma medida.



### Losango

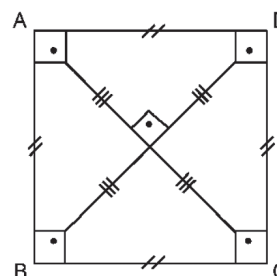
O losango é um paralelogramo que possui os quatro lados congruentes.

Com isso, além dele possuir todas propriedades do paralelogramo, no losango as diagonais são perpendiculares e são bissetrizes.



### Quadrado

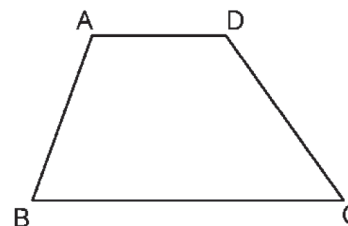
O quadrado é um paralelogramo que é ao mesmo tempo um retângulo e um losango. Dessa forma, o quadrado possui todas as propriedades de um paralelogramo, de um losango e de um quadrado.



## TRAPÉZIO

O trapézio é um quadrilátero que possui exatamente um par de lados paralelos. Esses lados são chamados de base maior e base menor.

Com isso, na figura:

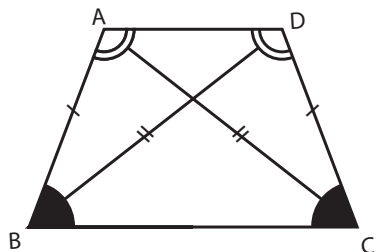


$\overline{BC}$  é a base maior,  $\overline{AD}$  é a base menor,  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$  e  $\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ .

## TIPOS DE TRAPÉZIO

## Trapézio isósceles

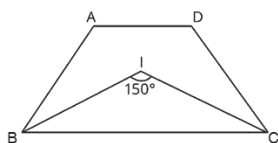
O trapézio isósceles possui os lados não paralelos congruentes. Com isso, na figura:



- As diagonais serão sempre congruentes, isto é,  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .
- Os ângulos da base maior serão congruentes entre si, isto é,  $\hat{B} = \hat{C}$ .
- Os ângulos adjacentes a base menor também serão congruentes entre si, isto é,  $\hat{A} = \hat{D}$ .

## Exemplo

01. Na figura, ABCD é um trapézio isósceles,  $\overline{BI}$  e  $\overline{CI}$  são respectivamente bissetrizes dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ .



Calcule a medida do ângulo  $\hat{BAD}$ .

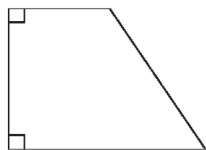
## Resolução:

Como o trapézio ABCD é isósceles seus ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  são congruentes.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale  $180^\circ$  e o triângulo  $\Delta BIC$  é isósceles descobrimos que  $\hat{IBC} = \hat{ICB} = 30^\circ$ , dessa forma, os ângulos internos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  valerão  $60^\circ$  cada. Como no trapézio os ângulos apoiados sobre uma mesma transversal são suplementares temos que o ângulo procurado  $\hat{BAD}$  mede  $150^\circ$ .

## Trapézio retângulo

O trapézio retângulo possui exatamente dois ângulos retos.



## Trapézio Escaleno

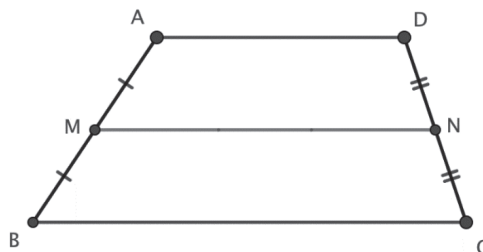
Quando os lados não paralelos não são congruentes chamamos o trapézio de escaleno.



## BASE MÉDIA DO TRAPÉZIO

A base média de um trapézio é o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos. Na figura a base média é  $\overline{MN}$ .

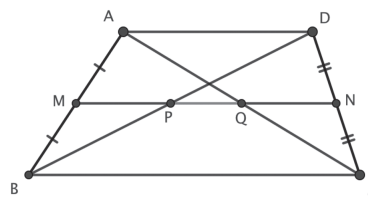
A base média é paralela as bases do Trapézio, isto é,  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$  e  $\overline{MN} \parallel \overline{AD}$ .



A base média do Trapézio é a média aritmética das bases, isto é,  $\overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ .

## MEDIANA DE EULER

É o segmento que une os pontos médios das diagonais. Esse segmento é paralelo às bases e pode ser calculado a partir da semi-diferença das bases.



$$\overline{PQ} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2}$$

## PRORESOLVE

01. No desenho anterior, observe que  $\overline{PQ}$  é uma parte de  $\overline{MN}$ .

Mostre que  $\overline{PQ} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2}$

## Resolução

Calcularemos  $\overline{PQ} = \overline{MN} - \overline{MP} - \overline{QN}$ ...

Note que  $\overline{MN}$  e  $\overline{QN}$  são congruentes e valem a metade de  $\overline{AD}$  (use base média do triângulo).

Dessa forma, temos que

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2}.$$

**02.** ABCD é um trapézio de diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  e de bases  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$ , com  $\overline{BC} > \overline{AD}$ . Sabe-se que  $\hat{B} = 80^\circ$  e que as bissetrizes internas de  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  cortam-se em um ponto I de modo que  $\hat{BIC} = 110^\circ$ . Dessa forma, determine a medida do ângulo  $\hat{ADC}$ .

**Resolução:**

A soma dos ângulos internos do triângulo  $\triangle BIC$  é  $180^\circ$ . Já conhecemos dois de seus ângulos:  $\hat{IBC} = 40^\circ$  (metade do ângulo B) e  $\hat{BIC} = 110^\circ$  (dado no enunciado), dessa forma, é fácil perceber que o ângulo  $\hat{ICB} = 30^\circ$ .

Assim, concluímos que o ângulo  $\hat{C} = 60^\circ$  e por conseguinte que o ângulo pedido  $\hat{ADC} = 120^\circ$  pois é suplemento do ângulo  $\hat{C}$ .



**EXERCÍCIOS  
PROTREINO**

**01.** Num paralelogramo, a medida de um dos ângulos internos é o dobro da medida do outro. Calcule o valor do maior ângulo do paralelogramo.

**02.** As diagonais de um trapézio isósceles medem, respectivamente,  $3x + 5$  e  $60 - 2x$ . Encontre o comprimento, em cm, de cada uma das diagonais.

**03.** Um trapézio isóscele tem 124 cm de perímetro, e a base média mede 25 cm. Calcule as medidas dos lados oblíquos desse trapézio.

**04.** Sabendo-se que, em um trapézio, a soma da base média com a mediana de Euler é igual a 18 cm e que a razão entre as bases do trapézio é 2, encontre a medida da base menor desse trapézio.

**05.** Uma diagonal de um paralelogramo forma  $26^\circ$  com um lado e  $42^\circ$  com o outro. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.

**03.** (PUC) Os ângulos internos de um quadrilátero medem  $3x - 45$ ,  $2x + 10$ ,  $2x + 15$  e  $x + 20$  graus. O menor ângulo mede:

- a)  $90^\circ$  d)  $105^\circ$   
b)  $65^\circ$  e)  $80^\circ$   
c)  $45^\circ$

**04.** (IFSP 2014) Considerando que as medidas de dois ângulos opostos de um losango são dadas, em graus, por  $3x + 60^\circ$  e  $135^\circ - 2x$ , a medida do menor ângulo desse losango é:

- a)  $75^\circ$  d)  $60^\circ$   
b)  $50^\circ$  e)  $55^\circ$   
c)  $65^\circ$

**05.** (UECE 2019) José somou as medidas de três dos lados de um retângulo e obteve 40 cm. João somou as medidas de três dos lados do mesmo retângulo e obteve 44 cm. Com essas informações, pode-se afirmar corretamente que a medida, em cm, do perímetro do retângulo é

- a) 48 c) 46  
b) 52 d) 56

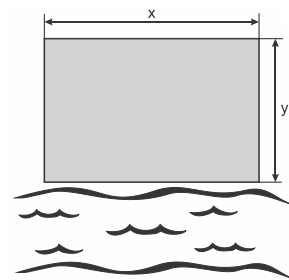
**06.** (UECE 2019) No retângulo OYZW, E é um ponto do lado ZW equidistante de O e Z. Se a medida do ângulo  $\hat{W\hat{O}E}$  é sete vezes a medida do ângulo  $\hat{Z\hat{O}Y}$ , então, a medida, em graus, do ângulo  $\hat{E\hat{O}Z}$  é

- a) 20 c) 10  
b) 15 d) 5

**07.** (UECE 2016) No retângulo PQRS, a medida dos lados PQ e QR são respectivamente 3 m e 2 m. Se V é um ponto do lado PQ tal que a medida do segmento VQ é igual a 1 m e U é o ponto médio do lado PS, então, a medida, em graus, do ângulo  $\hat{V\hat{U}R}$  é

- a) 40 c) 50  
b) 35 d) 45

**08.** (ENEM) Um terreno retangular de lados cujas medidas, em metro, são x e y será cercado para a construção de um parque de diversões. Um dos lados do terreno encontra-se às margens de um rio. Observe a figura.



Para cercar todo o terreno, o proprietário gastará R\$ 7.500,00. O material da cerca custa R\$ 4,00 por metro para os lados do terreno paralelos ao rio, e R\$ 2,00 por metro para os demais lados.

Nessas condições, as dimensões do terreno e o custo total do material podem ser relacionados pela equação

- a)  $4(2x + y) = 7.500$   
b)  $4(x + 2y) = 7.500$   
c)  $2(x + y) = 7.500$   
d)  $2(4x + y) = 7.500$   
e)  $2(2x + y) = 7.500$



**EXERCÍCIOS  
PROPOSTOS**



**01.** (ENEM) Julgue as afirmativas abaixo e assinale a alternativa correta.

- I. Todo paralelogramo é losango.  
II. Se um quadrilátero tem todos os lados com a mesma medida, então esse quadrilátero é um quadrado.  
III. As diagonais de um quadrado são perpendiculares entre si.  
a) Só I é verdadeira.  
b) Só II é verdadeira.  
c) Só III é verdadeira.  
d) I e III são verdadeiras.  
e) II e III são verdadeiras.

**02.** (UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1:3. O ângulo menor desse paralelogramo mede:

- a)  $45^\circ$  b)  $50^\circ$  c)  $55^\circ$  d)  $60^\circ$  e)  $65^\circ$

09. (UFSCAR) A figura 1 representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e cortes.

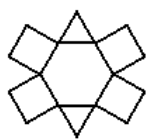


Figura 1

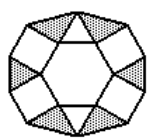


Figura 2

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado na figura 2, é correto dizer que

- 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo  $15^\circ$ .
- 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo  $30^\circ$ .
- 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo  $50^\circ$  e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo  $30^\circ$ .
- 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.
- 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos escalenos.

10. (ENEM) Diariamente, uma residência consome 20.160Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6cm x 8cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

- Retirar 16 células.
- Retirar 40 células.
- Acrescentar 5 células.
- Acrescentar 20 células.
- Acrescentar 40 células.

11. (ENEM) Em uma das paredes de um depósito existem compartimentos de mesmo tamanho para armazenamento de caixas de dimensões frontais a e b. A terceira dimensão da caixa coincide com a profundidade de cada um dos compartimentos. Inicialmente as caixas são arrumadas, em cada um deles, como representado na Figura 1. A fim de aproveitar melhor o espaço, uma nova proposta de disposição das caixas foi idealizada e está indicada na Figura 2. Essa nova proposta possibilitaria o aumento do número de caixas armazenadas de 10 para 12 e a eliminação de folgas.

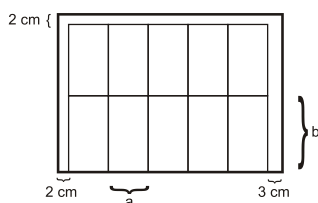


Figura 1

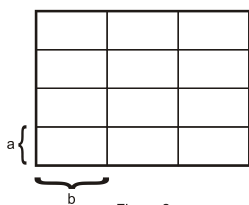
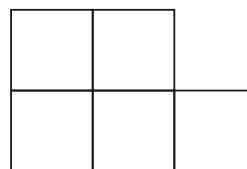


Figura 2

É possível ocorrer a troca de arrumação segundo a nova proposta?

- Não, porque a segunda proposta deixa uma folga de 4 cm na altura do compartimento, que é de 12 cm, o que permitiria colocar um número maior de caixas.
- Não, porque, para aceitar a segunda proposta, seria necessário dobrar a altura e reduzir à metade a largura do compartimento.
- Sim, porque a nova disposição das caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 20 cm de altura por 27 cm de largura.
- Sim, pois efetivamente aumentaria o número de caixas e reduziria o número de folgas para apenas uma de 2 cm na largura do compartimento.
- Sim, porque a nova disposição de caixas ficaria acomodada perfeitamente no compartimento de 32 cm de altura por 45 cm de largura.

12. (UPE) A figura a seguir mostra uma das peças do jogo "Pentaminós".



Cada peça é formada por cinco quadradinhos, e o lado de cada quadradinho mede 5cm.

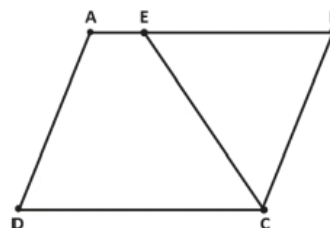
Com 120 dessas peças, Jorge montou uma faixa, encaixando perfeitamente as peças como mostra a figura a seguir:



Quanto mede o perímetro dessa faixa?

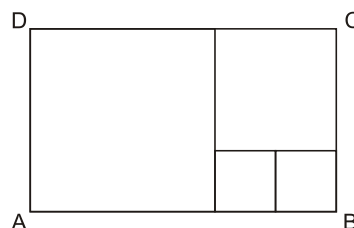
- 1 200 cm
- 1 500 cm
- 3 000 cm
- 3 020 cm
- 6 000 cm

13. (UDESC) No paralelogramo ABCD, conforme mostra a figura, o segmento CE é a bissetriz do ângulo DCB. Sabendo que  $AE = 2$  e  $AD = 5$ , então o valor do perímetro do paralelogramo ABCD é:



- 26
- 16
- 20
- 22
- 24

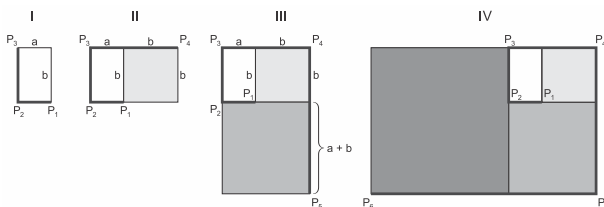
14. (UNICAMP) A figura abaixo exhibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.



O valor da razão  $\frac{AB}{BC}$  é igual a

- a)  $\frac{5}{3}$       b)  $\frac{5}{2}$       c)  $\frac{4}{3}$       d)  $\frac{3}{2}$

15. (UERJ) Admitindo um retângulo cujos lados medem  $a$  e  $b$ , sendo  $a < b$ , é possível formar uma sequência ilimitada de retângulos da seguinte forma: a partir do primeiro, cada novo retângulo é construído acrescentando-se um quadrado cujo lado é igual ao maior lado do retângulo anterior, conforme ilustrado a seguir.

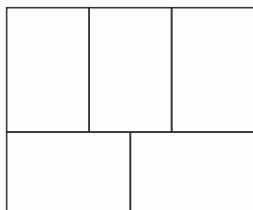


A figura IV destaca a linha poligonal  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$ , formada pelos lados dos retângulos, que são os elementos da sequência  $(a, b, a+b, a+2b, 2a+3b)$ .

Mantendo o mesmo padrão de construção, o comprimento da linha poligonal  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7$ , de  $P_1$  até o vértice  $P_7$ , é igual a:

- a)  $5a + 7b$       c)  $13a + 20b$   
b)  $8a + 12b$       d)  $21a + 33b$

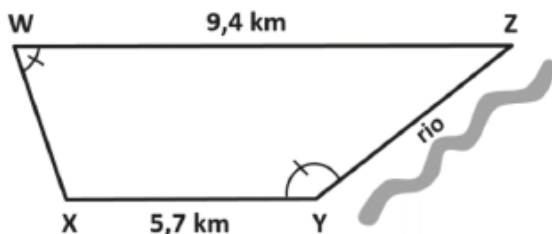
16. (IFCE) Um terreno com perímetro de 176 m é subdividido em 5 retângulos congruentes, como mostrado na figura a seguir.



O perímetro de qualquer um dos 5 retângulos congruentes vale, em m,

- a) 80      b) 76      c) 35,2      d) 84      e) 86

17. (UNESP) Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio. Se o ângulo XYZ é o dobro do ângulo XWZ, a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:



- a) 7,5  
b) 5,7  
c) 4,7  
d) 4,3  
e) 3,7

18. (FGV) A figura representa um trapézio isósceles ABCD, com  $AD = BC = 4$  cm. M é o ponto médio de  $\overline{AD}$ , e o ângulo  $\hat{BMC}$  é reto.

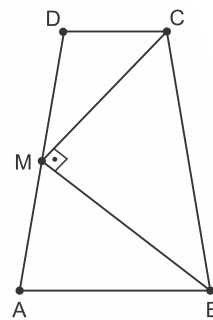
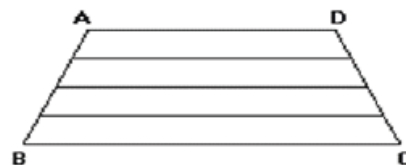


Figura fora de escala

O perímetro do trapézio ABCD, em cm, é igual a

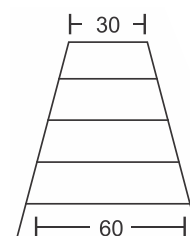
- a) 8  
b) 10  
c) 12  
d) 14  
e) 15

19. (CFT) Na figura tem-se o trapézio isósceles ABCD no qual as bases medem 15 cm e 27 cm. Os lados AB e CD foram divididos em 4 partes iguais, e pelos pontos de divisão, foram traçados 3 segmentos paralelos às bases. A soma das medidas dos três segmentos traçados é, em centímetros,



- a) 52  
b) 58  
c) 59  
d) 61  
e) 63

20. (ENEM) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

- a) 144      d) 225  
b) 180      e) 240  
c) 210

