

PROPRIEDADES DE LOGARITMO

Sabemos que pela definição do logaritmo, temos que:

$$\log_b A = x \rightarrow b^x = A, \text{ quando } A > 0, b > 0 \text{ e } b \neq 1$$

Além desta definição, as propriedades do logaritmo nos possibilitam facilitar os cálculos dos mesmos para a obtenção dos resultados. Veremos neste capítulo como podemos utilizá-las a nosso favor.

SOMA DE LOGARITMOS

Quando possuímos uma soma de dois ou mais logaritmos de mesma base, podemos transformar a expressão em um único logaritmo, com a mesma base que os anteriores e cujo logaritmando será o produto dos logaritmandos envolvidos. Observe:

$$\log_b A + \log_b B + \log_b C = \log_b (A \cdot B \cdot C)$$

Exemplo: $\log 4 + \log 5 + \log 50 = \log (4 \cdot 5 \cdot 50) = \log 1000 = 3$

DIFERENÇA DE LOGARITMOS

Quando possuímos uma diferença entre dois logaritmos de mesma base, podemos transformar a expressão em um único logaritmo, com a mesma base que os anteriores e cujo logaritmando será a divisão dos logaritmandos envolvidos. Observe:

$$\log_b A - \log_b B = \log_b \left(\frac{A}{B} \right)$$

Exemplo: $\log_2 96 - \log_2 6 = \log_2 \frac{96}{6} = \log_2 16 = 4$

EXPOENTE DO LOGARITMANDO

Quando temos um logaritmando com um expoente, podemos reescrever a expressão fazendo a multiplicação deste expoente pelo logaritmo da expressão restante:

$$\log_b A^x = x \cdot \log_b A$$

Exemplo: $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot (\log_3 3) = 4 \cdot (1) = 4$

EXPOENTE DA BASE

Quando temos uma base de um logaritmo, podemos reescrever a expressão fazendo a multiplicação do inverso do expoente da base pelo logaritmo da expressão restante.

$$\log_{b^x} A = \frac{1}{x} \cdot \log_b A$$

Exemplo: $\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot (1) = \frac{1}{2}$

MUDANÇA DE BASE DO LOGARITMO

Quando temos um logaritmo de logaritmando A e base b (que respeitem as condições de existência do logaritmo) e desejamos reescrever tal expressão em função de logaritmo em uma base c ($c > 0$ e $c \neq 1$), fazemos uma divisão de logaritmos nessa nova base. O logaritmando do logaritmo do numerador será o antigo logaritmando, enquanto o logaritmando do logaritmo do denominador será a antiga base. Observe:

$$\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (CESGRANRIO) Se $\log_{10} 123 = 2,09$, o valor de $\log_{10} 1,23$ é:

- a) 0,0209
- b) 0,09
- c) 0,209
- d) 1,09
- e) 1,209

Resolução: B

Temos que $\log_{10} 123 = 2,09$. Assim:

$$\log_{10} 1,23 = \log_{10} 1,23 = \log_{10} \left(\frac{123}{100} \right) = \log_{10} 123 - \log_{10} 100 = 2,09 - 2 = 0,09$$

02. (FUVEST) Sabendo-se que $5^n = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

- a) $2/n$
- b) $2n$
- c) $2 + n^2$
- d) $2 + 2n$
- e) $(2 + 2n)/n$

Resolução: E

Utilizaremos o dado da questão: $5^n = 2$

$$5^n = 2 \rightarrow \log_5 2 = n \rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{n}$$

Passaremos para o cálculo de $\log_2 100$:

$$\log_2 100 = \log_2 (2^2 \cdot 5^2) = \log_2 2^2 + \log_2 5^2 =$$

$$2 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot \log_2 5 = 2 \cdot (1) + 2 \cdot \left(\frac{1}{n} \right) = 2 + \frac{2}{n} = \frac{2+2n}{n}$$

03. (UFRGS) Atribuindo para $\log 2$ o valor 0,3, então o valor de $100^{0,3}$ é:

- a) 3
- b) 4
- c) 8
- d) 10
- e) 33

Resolução: B

Temos que $\log 2 = 0,3$. Assim, teremos pela definição de logaritmo:

$$\log 2 = 0,3 \rightarrow 2 = 10^{0,3}$$

Assim, teremos:

$$100^{0,3} = (10^2)^{0,3} = (10^{0,3})^2 = (2)^2 = 4$$

04. (FEI) Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, escrevendo $\log 32/27$ em função de a e b obtemos:

- a) $2a + b$
- b) $2a - b$
- c) $2ab$
- d) $2a/b$
- e) $5a - 3b$

Resolução: E

Temos que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$. Assim, teremos:

$$\log \left(\frac{32}{27} \right) = \log 32 - \log 27 = \log 2^5 - \log 3^3 =$$

$$5 \cdot (\log 2) - 3 \cdot (\log 3) = 5a - 3b$$

05. (FUVEST) Se $\log_{10} 8 = a$ então $\log_{10} 5$ vale:

- a) a^3
- b) $5a - 1$
- c) $2a/3$
- d) $1 + a/3$
- e) $1 - a/3$

Resolução: E

Temos que $\log_{10} 8 = a$. Assim:

$$\log_{10} 8 = a \rightarrow \log_{10} 2^3 = a \rightarrow 3 \cdot (\log_{10} 2) = a \rightarrow \log_{10} 2 = \frac{a}{3}$$

Assim, podemos calcular o valor de $\log_{10} 5$:

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \left(\frac{10}{2} \right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \frac{a}{3}$$

06. (FATEC) Se $\log 2 = 0,3$, então o valor do quociente $\log_5 32 / \log_4 5$ é igual a:

- a) $30/7$
- b) $7/30$
- c) $49/90$
- d) $90/49$
- e) $9/49$

Resolução: D

Temos que $\log 2 = 0,3$. Assim, teremos:

$$\log_5 32 = \frac{\log 32}{\log 5} = \frac{\log 2^5}{\log \left(\frac{10}{2} \right)} = \frac{5 \cdot \log 2}{\log 10 - \log 2} = \frac{5 \cdot 0,3}{1 - 0,3} = \frac{1,5}{0,7} = \frac{15}{7}$$

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{\log \left(\frac{10}{2} \right)}{\log 2^2} = \frac{\log 10 - \log 2}{2 \cdot \log 2} = \frac{1 - 0,3}{2 \cdot 0,3} = \frac{0,7}{0,6} = \frac{7}{6}$$

Assim...

$$\frac{\log_5 32}{\log_4 5} = \frac{\frac{15}{7}}{\frac{7}{6}} = \left(\frac{15}{7} \right) \cdot \left(\frac{6}{7} \right) = \frac{90}{49}$$

07. (FATEC) Supondo-se que $\log_{10} 2 = 0,3$ a solução da equação $10^{2x-3} = 25$, sendo $U = \mathbb{R}$, igual a:

- a) 2
- b) 2,1
- c) 2,2
- d) 2,35
- e) 2,47

Resolução: C

Temos que $\log_{10} 2 = 0,3$. Resolução da equação dada:

$$10^{2x-3} = 25$$

$$\log 10^{2x-3} = \log 25$$

$$(2x - 3) \cdot (\log 10) = \log 5^2$$

$$(2x - 3) \cdot (1) = 2 \cdot (\log 5)$$

$$2x - 3 = 2 \cdot \left[\log \left(\frac{10}{2} \right) \right]$$

$$2x - 3 = 2 \cdot (\log 10 - \log 2)$$

$$2x - 3 = 2 \cdot (1 - 0,3)$$

$$2x - 3 = 2 \cdot (0,7)$$

$$2x - 3 = 1,4$$

$$2x = 4,4 \rightarrow x = 2,2$$

08. (UEL) Se $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$, então $\log_5 7$ é igual a:

- a) $a + b$
- b) $a - b$
- c) a/b
- d) ab
- e) ab

Resolução: D

Temos que $\log_3 7 = a$ e $\log_5 3 = b$. Assim:

$$\log_5 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 5} = \frac{a}{\left(\frac{\log_5 5}{\log_5 3} \right)} = \frac{a}{\left(\frac{1}{b} \right)} = a \cdot \left(\frac{b}{1} \right) = a \cdot b$$

09. (MACKENZIE) Supondo $\log 3980 = 3,6$, então, dentre as alternativas a seguir, a melhor aproximação inteira de $10^{2,6}/3,98$ é:

- a) 100
- b) 120
- c) 140
- d) 160
- e) 180

Resolução: A

Temos que $\log 3980 = 3,6$. Assim, teremos:

$$\log 3980 = 3,6 \rightarrow \log (3,98 \cdot 10^3) = 3,6 \rightarrow \log 3,98 + \log 10^3 = 3,6 \rightarrow \log 3,98 + 3 = 3,6$$

Desta forma, teremos: $\log 3,98 = 0,6$

Pela definição de logaritmo, teremos:

$$\log 3,98 = 0,6 \rightarrow 3,98 = 10^{0,6}$$

$$\text{Assim, } \frac{10^{2,6}}{3,98} = \frac{10^{2,6}}{10^{0,6}} = 10^{2,6-0,6} = 10^2 = 100$$

10. (MACKENZIE) O valor de $\log_x (\log_3 2 \cdot \log_4 3)$, sendo $x = \sqrt{2}$ é:

- a) 2
- b) $1/2$
- c) $-1/2$
- d) -2
- e) $3/2$

Resolução: D

Cálculo desejado na questão:

$$\log_{\sqrt{2}} (\log_3 2 \cdot \log_4 3) = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \right) = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\log 2}{\log 4} \right) = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\log 2}{\log 2^2} \right) =$$

$$\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\log 2}{2 \cdot \log 2} \right) = \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \right) = \log_{2^{1/2}} 2^{-1} = (-1) \cdot (2) \cdot \log_2 2 = (-2) \cdot (1) = -2$$

ANOTAÇÕES