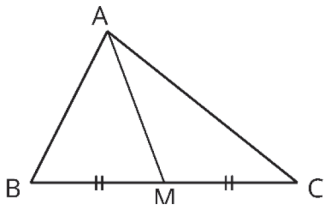
CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Em um triângulo, ceviana é qualquer segmento de reta que une um vértice à reta suporte do lado oposto. As principais cevianas são: mediana, bissetriz e altura. Outra linha que também tem propriedades muito importantes e será estudada neste módulo é a mediatriz.

MEDIANA

Mediana é o segmento de reta que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.



$\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

Baricentro



https://www.needpix.com/photo/1193435/yoga-pose-woman-fitness-exercise-health-workout-yoga-pose-yoga-poses

Você já ouviu falar em centro de gravidade? O centro de gravidade de um corpo, é o ponto onde pode ser considerada a aplicação da força de gravidade de todo o corpo. Podemos pensar que todo o peso de um objeto se concentra no seu centro de gravidade. Dessa forma, o equilíbrio de qualquer objeto depende da posição desse centro de gravidade. E manter algo em equilíbrio é muito mais importante do que pensamos em um primeiro momento.

Veja a figura abaixo:



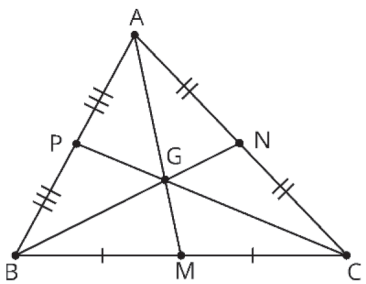
https://pxhere.com/es/photo/916007

Se você estivesse bem perto desse prédio, será que você não se perguntaria como ele não cai? Esse é um dos exemplos da importância do estudo do centro de gravidade de um objeto. Note que essa propriedade é fundamental na engenharia pois torna possível a construção de edifícios com curvaturas visualmente impactantes e curiosas, sem que corram o risco de desabar.

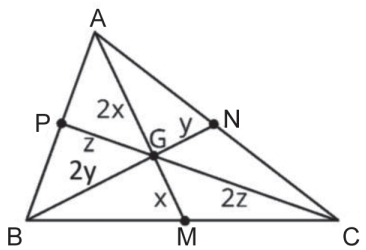
Por enquanto, vamos nos restringir a estudar o centro de gravidade de um triângulo. Aqui vamos sempre chamá-lo de baricentro. Mas onde ele fica em um triângulo?

As três medianas do triângulo se cruzam em um ponto chamado baricentro, aqui indicado pela letra G.

A letra G faz referência ao centro de **gravidade** do triângulo.



Uma propriedade importante é que o baricentro divide cada mediana na razão de 2 : 1 (Leia-se 2 para 1). Isto é, em cada mediana, a distância do baricentro até o vértice é o dobro da distância do baricentro até o respectivo lado.



Assim, podemos escrever que:

$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$.

$\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GN}$.

$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GP}$.

Podemos escrever também que:

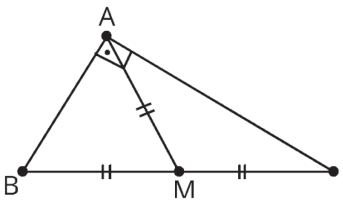
$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$ e $\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM}$ ..

$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BN}$ e $\overline{GN} = \frac{1}{3}\overline{BN}$

$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CP}$ e $\overline{GP} = \frac{1}{3}\overline{CP}$

PROEXPLICA

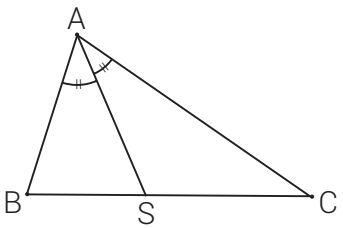
Em um triângulo retângulo, a mediana traçada sobre a hipotenusa mede metade da hipotenusa:



$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$

BISSETRIZ

Bissetriz de um ângulo do triângulo é o segmento de reta que divide esse ângulo em duas partes de mesma medida. Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo Â.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

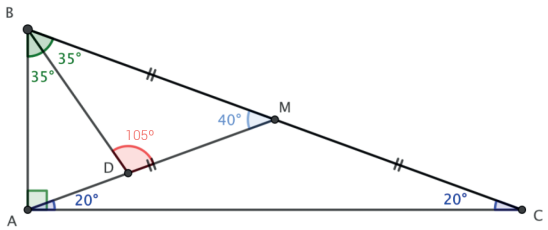
01. Num ΔABC, retângulo em Â, a mediana $\overline{AM}$ intersecta a bissetriz interna de B̂ em D̂. Quanto mede o ângulo BD̂M, sabendo que Ĉ = 20º

Resolução

A mediana $\overline{AM}$ é congruente aos segmentos $\overline{MB}$ e $\overline{MC}$ portanto, o ΔAMC é isósceles. Assim, é fácil concluir que o ângulo MÂC = 20º. Como o ângulo BM̂D é externo ao triângulo ΔAMC, temos que BM̂D = 40º. Como B̂ é complemento de Ĉ (são ângulos agudos do triângulo retângulo ΔABC) concluímos que B̂ = 70º e $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo B̂ o que implica no ângulo DB̂M = 35º.

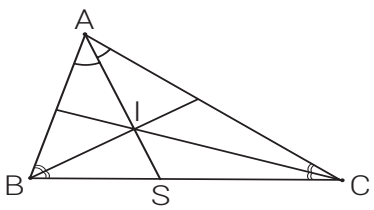
A soma dos ângulo internos de todo triângulo vale 180º temos portanto o valor do ângulo BD̂M = 180º – 35º – 40º = 105º.

Use a figura abaixo como suporte:



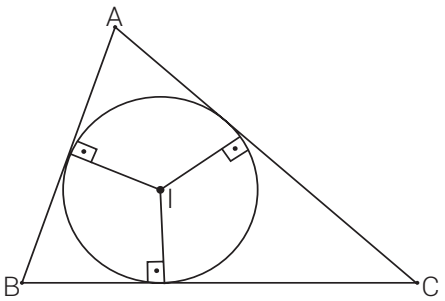
Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo se cruzam em um ponto chamado **Incentro**.



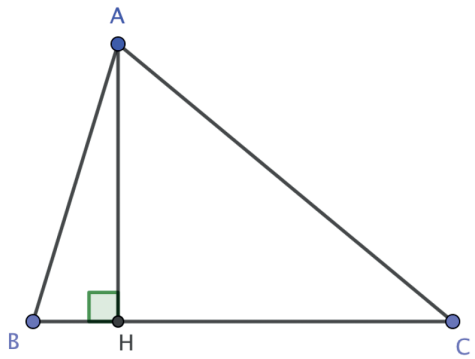
PROEXPLICA

- O incentro é o centro do círculo inscrito ao triângulo.
- O incentro é equidistante dos três lados do triângulo. (e essa distância é o raio do círculo inscrito, conforme a figura)



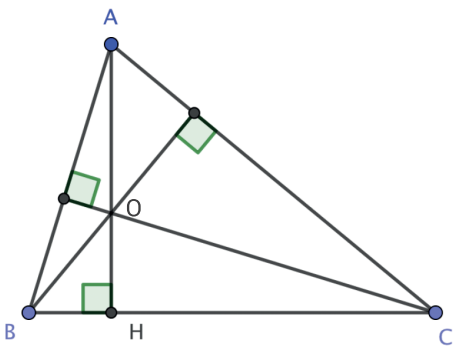
ALTURA

Altura é o segmento de reta que parte de um vértice e é perpendicular à reta suporte do lado oposto. Na figura, $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.



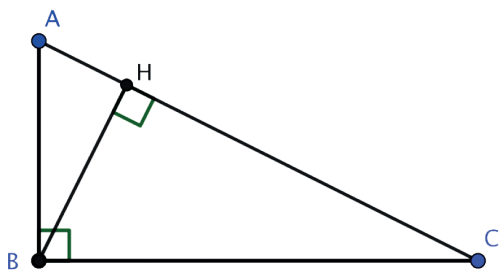
Ortocentro

As três alturas de um triângulo se cruzam em um ponto chamado **Ortocentro**. Na figura, o Ortocentro está representado pela letra O.



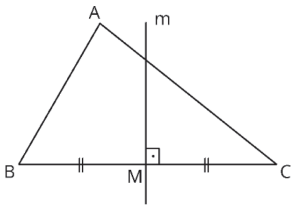
PROEXPLICA

Em um triângulo retângulo o ortocentro fica exatamente sobre o vértice do ângulo reto.



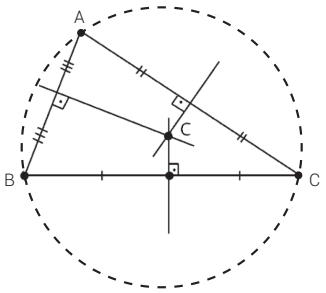
MEDIATRIZ

A mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio de um lado do triângulo, formando um ângulo reto com esse lado. Na figura, a reta *m* é mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$.



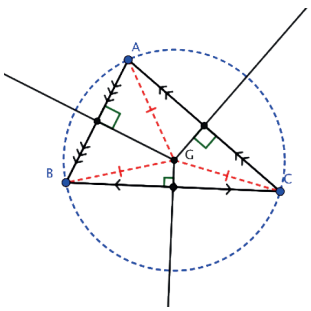
Circuncentro

As três mediatrizes do triângulo se cruzam em um ponto chamado **circuncentro**. Na figura, o circuncentro está representado pela letra C.

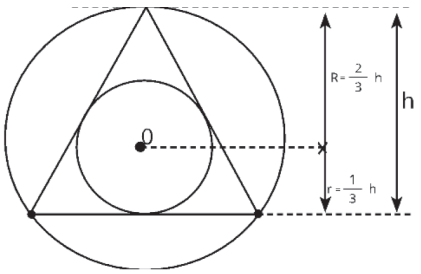


PROEXPLICA

- Uma observação importante é que o Circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo.
- O Circuncentro é o centro do círculo circunscrito ao triângulo.



- O centro do triângulo equilátero é ao mesmo tempo baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro, isto é, todos esses quatro pontos são coincidentes (estão em um mesmo local). Veja a figura abaixo:

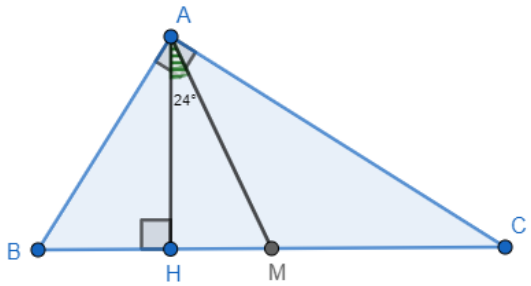


EXERCÍCIOS PROTREINO

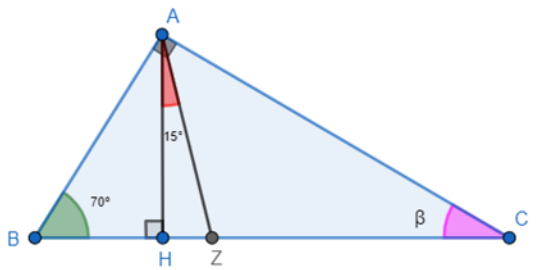
01. Explique com suas palavras qual dos pontos notáveis do triângulo pode ser em um de seus vértices.

02. Encontre o ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices A e B do triângulo ABC, onde Â=40° e B̂= 40°.

03. Calcule o valor dos ângulos agudos do triângulo retângulo ABC abaixo, sabendo que $\overline{AM}$ é uma mediana e $\overline{AH}$ é uma altura.



04.

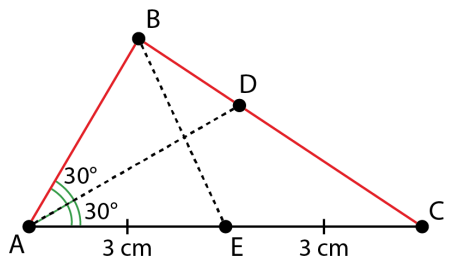


Da figura a seguir, sabemos que $\overline{AH}$ é altura e $\overline{AZ}$ é bissetriz do ângulo BÂC no triângulo ABC. Se B̂=70° e HÂZ=15° , determine o valor de β.

05. O triângulo MNP é tal que M̂=50° e P̂=60°. Encontre a medida do ângulo obtuso formado pela bissetriz do ângulo interno de N e o lado MP.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (LAPLACE 2020) Podemos dizer que os segmentos de reta BE e AD, do triângulo ABC, são denominados, respectivamente,

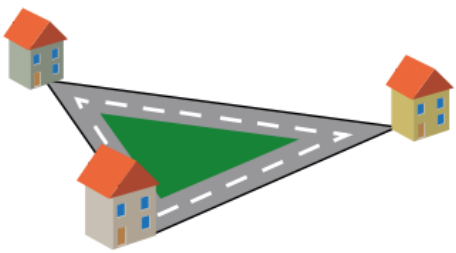


a) mediana e bissetriz.
b) mediana e altura.
c) bissetriz e altura.
d) altura e mediana.

02. (CFT) Pretende-se construir um posto policial num ponto p, situado à mesma distância de três casas em uma área plana de um condomínio. Em geometria, este ponto p é conhecido com o nome de:

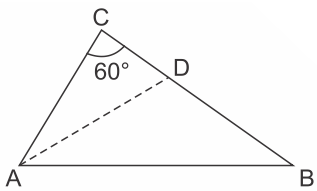
a) baricentro.
b) ortocentro.
c) circuncentro.
d) incentro.
e) ex-incentro.

03. (CFT) Imagine que se tenham três casas de um condomínio como na figura abaixo e que seus donos desejem colocar segurança particular numa quarta pequena casa a ser construída de forma que ela deva ficar numa posição equidistante das ruas que interligam as casas duas a duas. A posição que deve ser escolhida corresponde a que ponto notável do triângulo formado por essas ruas?



a) Ponto de encontro das medianas.
b) Ponto de encontro das bissetrizes externas.
c) Ponto de encontro das bissetrizes internas.
d) Ponto de encontro das alturas.
e) Ponto de encontro das mediatrizes.

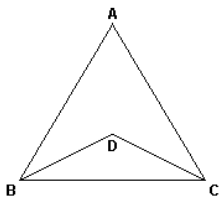
04. (UNICAMP 2019) No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a

a) 60°
b) 70°
c) 80°
d) 90°

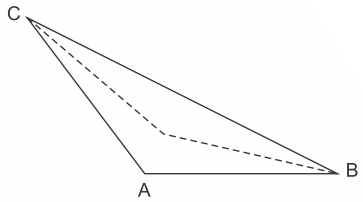
05. (CFTMG 2006) Na figura a seguir, AB = AC, D é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo BDC é o triplo do ângulo A.



Então, a medida do ângulo B é

a) 54°
b) 60°
c) 72°
d) 84°

06. (FGV 2007) Num triângulo isósceles ABC, de vértice A, a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos B e C é 140º.



Então, as medidas dos ângulos A,B e C são, respectivamente:

a) 120º, 30º e 30º
b) 80º, 50º e 50º
c) 100º, 40º e 40º
d) 90º, 45º e 45º
e) 140º, 20º e 20º

07. (UFJF) No triângulo ABC, BÂC = 80°. Qual a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos em B e C?

a) 35° b) 40° c) 50° d) 65° e) 100°

08. (FUVEST) Num triângulo ABC, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem 50° e 70°, respectivamente. A bissetriz relativa ao vértice A forma com a reta BC ângulos proporcionais a:

a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 3 e 4 d) 4 e 5 e) 5 e 6

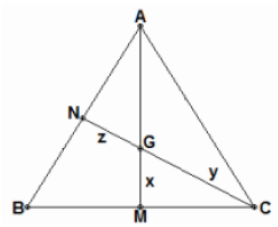
09. (UFES) Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

a) 20° b) 40° c) 60° d) 80° e) 140°

10. (VUNESP 2015) Num triângulo ABC, as bissetrizes interna em B e externa em C se intersectam segundo um ângulo de 50°. Qual é a medida do ângulo interno em A?

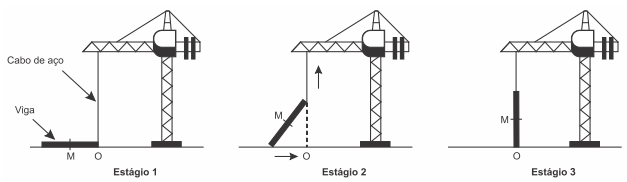
a) 50°. b) 80°. c) 90°. d) 100°. e) 130°.

11. (CFT) No triângulo ABC, da figura, AM e CN são medianas que se interceptam em G. Sendo AG = 10 cm e CN = 18 cm, o valor de x+ y + z é



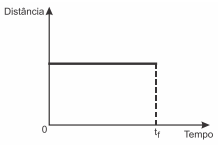
a) 20 cm b) 21 cm c) 22 cm d) 23 cm e) 24 cm

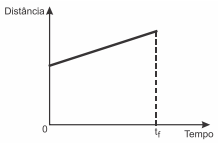
12. (ENEM 2018) Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicial mente no solo.

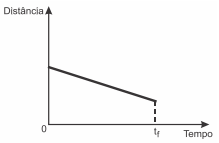


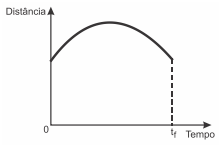
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo t = 0 (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3). Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto o O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

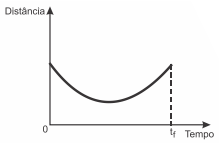
O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O em função do tempo, entre t = 0 e t_f, é

a)


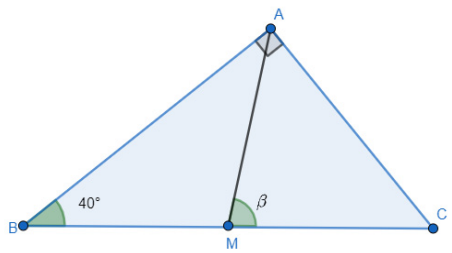
b)


c)


d)


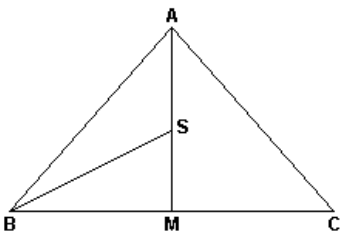
e)


13. (CFTRJ 2015) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A e M é o ponto médio do lado BC. Então a medida de β, em graus, é:



a) 80° b) 90° c) 100° d) 110° e) 120°

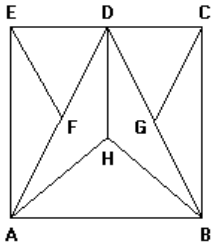
14. (CFTMG 2006) Na figura, A = 90°, $\overline{BM} = \overline{CM}$, BS é bissetriz do ângulo B e ASB = 126°.



Nessas condições, o ângulo C mede

a) 30° c) 44°
b) 36° d) 54°

15. (UNIRIO)



Na figura anterior, o triângulo ABD é equilátero, e seu lado mede 3m.; H é o ortocentro, sendo que os pontos F e G são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Quantos rolos de fita adesiva serão necessários, no mínimo, para cobrir todos os segmentos da figura, se cada rolo possui 1m de fita?

a) 18 b) 20 c) 22 d) 24 e) 26

16. (UECE 2018) No triângulo XYZ o ponto D, no lado YZ, pertence à mediatriz do lado XZ. Se XD é a bissetriz do ângulo interno no vértice X e se a medida do ângulo interno em Y é 105 graus, então, a medida, em graus, do ângulo interno em Z é

a) 30 b) 20 c) 35 d) 25

17. (UECE 2014) Sejam XY um segmento de reta cujo comprimento é 4 m e Z um ponto da mediatriz do segmento XY cuja distância ao segmento XY é 6 m. Se P é um ponto equidistante de X, Y e Z, então a distância, em metros, de P ao segmento XY é igual a

a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{7}{4}$ e) $\frac{9}{5}$

18. (OBM) O triângulo ABC é equilátero. Prolonga-se o lado BC de um segmento CP, e toma-se, sobre a bissetriz de BÂC, um ponto Q, de forma que BQ seja perpendicular a AP. Quanto mede o ângulo QPC?

a) 15°. b) 30°. c) 45°. d) 60°. e) 25°

19. (CFTMG 2016) No triângulo isósceles ABC, de base AC e vértice B = 40º, traça-se uma ceviana CM, e toma-se I, incentro do triângulo BMC. Sabe-se que os ângulos AMC e IAC são iguais. Quanto mede BÂI?

a) 10°. b) 20°. c) 30°. d) 40°. e) 50°.

20. (CMRJ 2018) Considere um ponto A equidistante de outros dois pontos B e C. Sabe-se ainda que o ângulo BÂC é 10º menor que seu complemento. A bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta o segmento AC em D e, ao traçar uma ceviana CE, E sobre o segmento AB, notamos que o ângulo AÊD é o dobro do ângulo $B\hat{C}E$. Além disso, o triângulo CDE é semelhante ao triângulo CEA.

Então podemos afirmar que o número que expressa a medida do ângulo $E\hat{D}B$, em graus, é um

a) quadrado perfeito.
b) múltiplo de 3.
c) múltiplo de 7.
d) cubo perfeito.
e) primo.

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (ITA) Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo BĈA em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

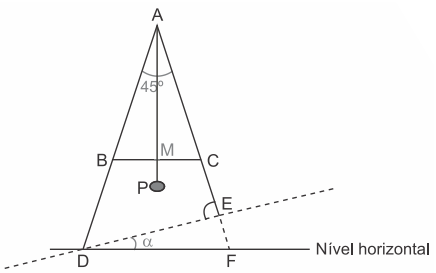
a) A medida da mediana em função de ℓ.
b) Os ângulos CÂB, AB̂C e BĈA.

02. (PUCRJ) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1cm em que O é o ponto de encontro das alturas. Quando mede o segmento AO?

03. (UERJ) Uma ferramenta utilizada na construção de uma rampa é composta pela seguinte estrutura:

- duas varas de madeira, correspondentes aos segmentos AE e AD, que possuem comprimentos diferentes e formam o ângulo DÂE igual a 45°;
- uma travessa, correspondente ao segmento BC, que une as duas varas e possui uma marca em seu ponto médio M;
- um fio fixado no vértice A e amarrado a uma pedra P na outra extremidade;
- nesse conjunto, os segmentos AB e AC são congruentes.

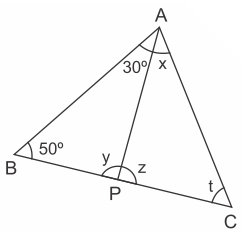
Observe o esquema que representa essa estrutura:



Quando o fio passa pelo ponto M, a travessa BC fica na posição horizontal. Com isso, obtém-se, na reta que liga os pontos D e E, a inclinação α desejada.

Calcule α, supondo que o ângulo AÊD mede 85°.

04. PA é bissetriz do triângulo ABC. Determine x, y, z, t.



05. (FGV) Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ e a mediatriz de D, se interceptam no ponto D, sendo que $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo AB̂C. Se AD=9 cm e DC=7 cm, determine a área do triângulo ABD, em cm^2,

GABARITO

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. A	05. C	09. B	13. A	17. A
02. C	06. C	10. D	14. D	18. B
03. C	07. C	11. D	15. E	19. A
04. C	08. D	12. A	16. D	20. A

EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. a) $\overline{CM} = \frac{l}{2}$
b) $C\hat{A}B = 57°30'$
$A\hat{B}C = 22°30'$
$B\hat{C}A = 90°$

02. AO = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

03. 17°30'

04. x = 30°; y = 100°; z = 80°; t = 70°.

05. área = $14\sqrt{5}\,cm^2$