24 OPERAÇÕES ENTRE MATRIZES: O PRODUTO MATRICIAL II

MULTIPLICAÇÃO ENTRE MATRIZES.

Sejam duas matrizes A_{mxn} e B_{pxq}. Definiremos o produto das matrizes A e B a matriz C_{mxq} tal que cada elemento c_{ij} é obtido pelo resultado da soma dos produtos dos elementos da **linha i** da matriz **A** pelos da **coluna j** da matriz **B**.

Sendo que:

- Somente é possível multiplicarmos duas matrizes A_{mxn} e B_{pxq} se, e somente se, o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de colunas da segunda matriz. Ou seja: **n = p**.

$$A_{mxn} \cdot B_{nxp}$$
$$\exists\ A \cdot B$$

- A C_{mxq} terá, necessariamente, o número de linhas igual ao número de linhas da primeira matriz, e o número de colunas igual ao número de colunas da segunda matriz.

Exemplo:

Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$..

Observamos que a matriz produto C = A·B existe, pois o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

Calcularemos a matriz produto C = A·B utilizando o seguinte raciocínio:

- Escrevemos, inicialmente, a matriz A e, em seguida, escrevemos a matriz B.
- Multiplicamos cada elemento de uma determinada linha de A pelo elemento correspondente de uma coluna de B.
- Somamos esses produtos, obtendo o elemento correspondente da matriz produto A·B.

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot1+4\cdot0+1\cdot1 & 3\cdot3+4\cdot4+1\cdot1 & 3\cdot1+4\cdot0+1\cdot1\\ 2\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1 & 2\cdot3+(-1)\cdot4+0\cdot3 & 2\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 26 & 4\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES.

Sendo A, B e C matrizes e α um número real temos que:

I) Associativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
II) Distributiva à esquerda	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
III) Distributiva à direita	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
	$A_{mxn} \cdot I_n = A_{mxn}$
	$I_m \cdot A_{mxn} = A_{mxn}$
	$(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

Em caso de A e B serem matrizes passíveis de multiplicação, ou seja, o produto A·B exista, há três possibilidades para B·A.

- B·A pode não existir;
- B·A pode existir e o resultado não ser igual a A·B;
- B·A pode existir e o resultado ser igual a A·B.

No terceiro caso, dizemos que as matrizes **A** e **B comutam na multiplicação**.

Exemplos:

Sejam as matrizes $P=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ e $Q=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, determinar:

a) P^2

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot3\\ 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

b) P·Q

$$\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+0\cdot2 & 2\cdot2+0\cdot0\\ 1\cdot1+3\cdot2 & 1\cdot2+3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 7 & 2\end{bmatrix}$$

c) Q·P

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot3\\ 2\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

Observam que as matrizes Q e P não comutam na multiplicação.

MATRIZES INVERSAS.

Seja a matriz A_{mxn}, define-se a sua inversa como A^{-1}_{mxn}, tal que:

$$\boxed{A_{n\times n}\cdot A^{-1}_{n\times n}=A^{-1}_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=I_{n\times n}}$$

Em que I_{nxn} é a matriz identidade de ordem n.

Uma matriz A pode não possuir inversa. Caso possua, A é dita **invertível**, e sua **inversa é única**. Caso contrário, a matriz A é chamada **singular**.

OBTENÇÃO DA MATRIZ INVERSA:

Queremos calcular a inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$.

Temos que:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a+c & 2b+d\\ 3c & 3d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}2a+c=1\\ 3c=0\end{cases}$$

Temos que:

$a = \frac{1}{2}$

$b = 0$

$\begin{cases} 2b + d = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$

$c = -\frac{1}{6}$

$d = \frac{1}{3}$

Logo, teremos a seguinte inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA MATRIZ INVERSA:

I) $(A^{-1})^{-1} = A$
II) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
III) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

ANOTAÇÕES