

A probabilidade é um conceito matemático que nos permite a quantificação da chance de que um evento aconteça ou não, permitindo que ela seja calculada e utilizada para a orientação e tomada de decisões ou mudanças de reações. Mesmo com eventos imprevisíveis é a parte da matemática que permite que a sociedade possa criar possibilidades de soluções para problemas que venham a acontecer. Terá uma ligação muito forte com o estudo da Análise da Combinatória, que quantifica de quantas maneiras um evento pode acontecer.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É qualquer experimento que provoca resultados que não podem ser previstos com certeza, mesmo diante de uma série de repetições. Quando se lança uma moeda honesta com duas faces nomeadas como cara e coroa, não sabemos quantas vezes devemos fazer lançamentos até que se produzam três resultados iguais, por exemplo. O que pode ser feito é calcular a probabilidade de que isso aconteça no terceiro ou no quarto lançamento, por exemplo.

ESPAÇO AMOSTRAL

É o conjunto que reúne todos os eventos possíveis que podem acontecer. No lançamento de um dado que possui 6 faces numeradas de 1 a 6, o espaço amostral pode ser definido como o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, por exemplo. Já no exemplo do nascimento de duas crianças em uma determinada maternidade, o espaço amostral que reúne os possíveis sexos dos bebês 1 e 2 seria, o conjunto $B = \{(\text{menino, menino}); (\text{menino, menina}); (\text{menina, menino}); (\text{menina, menina})\}$.

EVENTO

É um subconjunto do espaço amostral. Terá como elementos uma parte dos elementos do espaço amostral, podendo inclusive ser idêntico ao mesmo. No lançamento de um dado honesto com 6 faces numeradas de 1 a 6, temos espaço amostral $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento "resultado igual a um número primo" pode ser expresso pelo conjunto $B = \{2, 3, 5\}$. No lançamento de duas moedas honestas com as faces cara e coroa, o espaço amostral que expõe os resultados do lançamento das moedas 1 e 2 pode ser definido com o espaço amostral $A = \{(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)\}$. Já o evento "resultados diferentes nas duas moedas" pode ser expresso pelo conjunto $B = \{(cara, coroa); (coroa, cara)\}$.

EVENTOS COMPLEMENTARES

Dois eventos são complementares quando possuem todos os elementos diferentes (ou seja, quando são conjuntos disjuntos) e quando sua união resulta no espaço amostral. No lançamento de um dado honesto com 6 faces numeradas de 1 a 6, os eventos "resultado par" e "resultado ímpar". São complementares. Este conceito nos permitirá resolver algumas questões mais facilmente por meio de cálculos complementares que veremos nos exercícios resolvidos.

CÁLCULO DA PROBABILIDADE

O cálculo da probabilidade é feito por meio da divisão do número de elementos do evento pelo número de elementos do espaço amostral. Assim, se uma pessoa compra 4 rifas de um total de 80 rifas vendidas, a probabilidade de que um dos seus números seja o sorteado será dado pela divisão $\frac{4}{80} = \frac{1}{20}$. Desta forma, podemos expressar a fórmula da probabilidade como:

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número total de casos}}$$

PROBABILIDADE DE UNIÃO DE DOIS EVENTOS

A partir de dois eventos A e B do espaço amostral, podemos calcular a probabilidade de que pelo menos um destes eventos aconteça a partir da teoria de conjuntos, alcançando a fórmula abaixo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Caso o evento que expressa o acontecimento simultâneo dos dois eventos seja impossível, ou seja, caso tenhamos $A \cap B = \{ \}$, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Neste caso, dizemos que os eventos A e B são **independentes**.

PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DO EVENTO COMPLEMENTAR

A probabilidade de ocorrência do evento complementar ao evento A, expresso por $\bar{A}$, pode ser facilmente calculada. Como exemplo, pense que você recebeu a notícia de que a probabilidade de que chova na sua cidade amanhã é de 40%. Desta forma, você chega à conclusão de que a probabilidade de que não chova na sua cidade amanhã é de 60%, visto que os eventos "chover na sua cidade amanhã" e "não chover na sua cidade amanhã" são complementares. Assim, para se calcular a probabilidade de ocorrência de um evento complementar ao evento A será igual a:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Imagine que estejamos trabalhando com uma sucessão de eventos independentes denominados por A, B, C, ... A probabilidade de ocorrência de todos estes eventos pode ser dado pelo produto destas probabilidades. Observe:

$$P = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \dots$$

Assim, se desejarmos calcular a probabilidade de que determinado time de futebol vença uma partida amanhã – com probabilidade $P(A)$ – e que chova na sua cidade amanhã – com probabilidade $P(B)$, considerando que estes eventos sejam independentes, devemos fazer o produto entre estas duas probabilidades.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

É um tipo específico de probabilidade em que o espaço amostral é diminuído a partir de uma condição apresentada no desenrolar da dinâmica. Imagine que tenhamos em uma sala de aula a seguinte disposição:

	Sabem falar inglês	Não sabem falar inglês
Meninos	10	10
Meninas	12	8

A probabilidade de escolher um aluno que saiba falar inglês (P) é:

$$P = s \frac{22}{40} = 0,55 = 55\%$$

A probabilidade de escolher um aluno que saiba falar inglês, sabendo que foi escolhido um menino (P') é:

$$P = \frac{10}{20} = 0,5 = 50\%$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (USS) O celular de um professor tem apenas cinco grupos distintos de conversa, sendo três de trabalho e dois de família. Se uma mensagem for enviada ao acaso para dois grupos diferentes, a probabilidade de ambos serem de família é igual a:

- a) 1/20 b) 1/10 c) 2/5 d) 2/25

Resolução: B

A probabilidade de que isto aconteça é de:

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

02. (USS) Uma empresa de aviação possui um total de 80 aeronaves de diferentes modelos, conforme indica a tabela abaixo.

MODELOS	UNIDADES DE CADA MODELO
767	36
787-8	10
787-9	14
777	10
767-F	8
777-F	2

Ao selecionar uma dessas aeronaves ao acaso, a probabilidade do modelo 787-8 ou do 787-9 ser escolhido é de:

- e) 20% f) 25% g) 30% h) 35%

Resolução: C

A probabilidade deste evento ocorrer é de:

$$P = \frac{24}{80} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$$

03. (USS) Durante uma aula, um professor utiliza 4 canetas, sendo cada uma de uma das seguintes cores: azul, vermelha, preta e verde. Ao final da aula, ele coloca ao acaso em cada caneta uma das 4 tampas. As figuras a seguir representam duas possíveis formas de tampar as canetas.



A probabilidade de apenas duas canetas estarem com as tampas de suas respectivas cores é de:

- a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 1/6

Resolução: C

Para que apenas duas canetas estejam com as tampas erradas, as outras duas devem estar certas. Assim, o número de casos favoráveis pode ser calculado ao se contabilizar de quantas maneiras podemos escolher 2 das 4 cores de caneta para estarem com as tampas corretas. O número total de casos é a permutação das 4 tampas nas 4 posições possíveis. Assim:

$$P = \frac{C_{4,2}}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

04. (UERJ) Um jogo consiste em lançar três dados cúbicos, cujas faces recebem uma numeração de 1 a 6, cada uma com a mesma probabilidade de ocorrer. Para jogar, escolhe-se um número qualquer de 1 a 6. Se um, dois ou os três dados caírem com o número escolhido na face de cima, o jogador ganha, respectivamente, um, dois ou três prêmios. Se um jogador escolheu o número 3, a probabilidade de ele ganhar apenas um prêmio é:

- a) 1/24
b) 2/27
c) 7/36
d) 25/72

Resolução: D

Para ganhar apenas um prêmio devemos ter um resultado igual a 3 e outros dois resultados diferentes deste valor. Assim:

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{75}{216} = \frac{25}{72}$$

05. (UFRGS) Um jogo consiste em responder corretamente a perguntas sorteadas, ao girar um ponteiro sobre uma roleta numerada de 1 a 10, no sentido horário. O número no qual o ponteiro parar corresponde à pergunta a ser respondida. A cada número corresponde somente uma pergunta, e cada pergunta só pode ser sorteada uma vez. caso o ponteiro pare sobre um número que já foi sorteado, o participante deve responder a próxima pergunta não sorteada, no sentido horário. Em um jogo, já foram sorteadas as perguntas 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 10. Assim, a probabilidade de que a pergunta 4 seja a próxima a ser respondida é de:

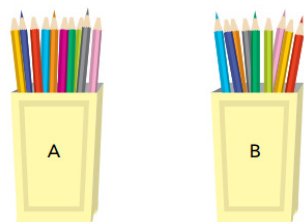
- a) $1/4$ b) $1/3$ c) $1/2$ d) $2/3$ e) $3/4$

Resolução: C

Temos 3 perguntas não respondidas ainda: 4, 8 e 9. Para que a próxima pergunta seja respondida, o ponteiro deve parar no próprio 4 ou no 10, no 1, no 2 ou no 3. Teremos, portanto, 5 casos favoráveis de um total de 10 casos possíveis. Assim:

$$P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

06. (UERJ) Em um escritório, há dois porta-lápis: o porta-lápis A com 10 lápis, dentre os quais 3 estão apontados, e o porta-lápis B com 9 lápis, dentre os quais 4 estão apontados



Um funcionário retira um lápis qualquer ao acaso do porta-lápis A e o coloca no porta-lápis B. Novamente ao acaso, ele retira um lápis qualquer do porta-lápis B. A probabilidade de que este último lápis retirado não tenha ponta é igual a:

- a) 0,64 b) 0,57 c) 0,52 d) 0,42

Resolução: B

Teremos os seguintes casos:

Caso 1: Passamos um lápis apontado de A para B e escolhemos um lápis desapontado de B.

$$P_1 = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{15}{100} = 0,15$$

Caso 2: Passamos um lápis desapontado de A para B e escolhemos um lápis desapontado de B.

$$P_2 = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{100} = 0,42$$

Assim, teremos:

$$P = P_1 + P_2 = 0,15 + 0,42 = \mathbf{0,57}$$

07. (ENEM) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz, podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo.

Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é:

- a) $1/5$
b) $4/5$
c) $19/21$
d) $19/25$
e) $21/25$

Resolução: C

Temos:

	Positivos	Negativos
Saudáveis	20	380
Doentes	60	40

Temos a seguinte probabilidade condicional:

$$P = \frac{380}{420} = \frac{19}{21}$$

08. (UERJ) Uma urna contém uma bola branca, quatro bolas pretas e x bolas vermelhas, sendo $x > 2$. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, é observada e recolocada na urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Se $1/2$ é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, o valor de x é:

- a) 9
b) 8
c) 7
d) 6

Resolução: A

Total de bolas na urna: $x + 5$

Número de bolas vermelhas na urna: x

Probabilidade de retirar duas bolas da mesma cor:

$$\frac{4}{(x+5)} \cdot \frac{4}{(x+5)} + \frac{x}{(x+5)} \cdot \frac{x}{(x+5)} + \frac{1}{(x+5)} \cdot \frac{1}{(x+5)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2 + 17}{x^2 + 10x + 25} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 + 34 = x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ (não pode)} \text{ ou } \mathbf{x = 9}$$

09. (UERJ) Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1000 usuários desses produtos. Observe a matriz A, na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j.

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a:

- a) 20% b) 35% c) 40% d) 65%

Resolução: B

Dos 1000 casos, teremos 350 favoráveis, que são aqueles que se mantêm com o mesmo modelo de ar-condicionado (diagonal principal). Assim:

$$P = \frac{350}{1000} = 35\%$$

10. (FEI) Uma moeda viciada apresenta probabilidade de ocorrer face cara quatro vezes maior que a probabilidade de ocorrer face coroa. Em 2 lançamentos consecutivos dessa moeda qual a probabilidade de ocorrer 2 vezes a face coroa?

- a) 0,2 b) 0,1 c) 0,01 d) 0,02 e) 0,04

Resolução: E

$$P_{\text{CARA}} = 4 \cdot P_{\text{COROA}}$$

Como temos: $P_{\text{CARA}} + P_{\text{COROA}} = 1$, faremos a substituição:

$$5P_{\text{COROA}} = 1 \Rightarrow P_{\text{COROA}} = \frac{1}{5} \text{ e } P_{\text{CARA}} = \frac{4}{5}$$

A probabilidade de ocorrer duas faces coroa será de:

$$P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0,04$$

ANOTAÇÕES