23 OPERAÇÕES I

IGUALDADE ENTRE MATRIZES

Sejam duas matrizes A e B, de mesma dimensão m × n. A e B serão iguais se, e somente se, todos os elementos de mesma posição também forem iguais.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 6 & 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & z \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x = 8 \therefore x = 4 \\ z = 4 \\ 5y = -15 \therefore y = -3 \end{cases}$$

ADIÇÃO DE MATRIZES

Sejam duas matrizes A e B, de mesma dimensão m × n.

A definição de uma matriz C tal que C = A + B será:

$$\boxed{C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Exemplo:

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 0 & 1 \\ -11 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -13 & 1 \\ 55 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 21+8 & 8+6 \\ 0+(-13) & 1+1 \\ -11+55 & 1+(-3) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 29 & 14 \\ -13 & 2 \\ 44 & -2 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

Sejam três matrizes A, B e C de mesma dimensão m × n e O, a matriz nula.

Temos, portanto, as seguintes propriedades:

Comutativa	A + B = B + A
Associativa	(A + B) + C = A + (B + C)
Elemento neutro	A + O = O + A = A
Elemento oposto	A + (-A) = (-A) + A = O

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES POR UMA CONSTANTE K

Sejam k uma constante real e A e B matrizes com dimensão m × n, temos que B = k · A, tal que:

$$\boxed{b_{ij} = k \cdot a_{ij}}$$

Exemplo:

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \therefore 5 \cdot A = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 11 \\ 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 55 \\ -5 & 15 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Seja A uma matriz real quadrada de ordem 2 tal que $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então, o traço da matriz A é igual a:

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

Resolução: A

Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4b & 3a+5b \\ 2c+4d & 3c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+3b=1 \\ 2c+4d=0 \\ 3a+5b=3 \\ 3c+5d=1 \end{cases} \Rightarrow (a,b,c,d) = (1,0,2,-1)$$

$\therefore trA = a + d = 0$

02. Rodrigo, Otavio e Ronaldo gostam muito de comida japonesa e saíram para comer *temaki*, também conhecido como *sushi* enrolado à mão, cujo formato lembra o de um cone.

Foram, então, visitando vários restaurantes, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos *temakis* cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se às quantidades de *temakis* de sábado e D às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de cones que a pessoa i pagou para a pessoa j, sendo Rodrigo o número 1, Otávio, o número 2 e Ronaldo, o número 3 ((a_{ij})representa o elemento da linha i e da coluna j de cada matriz).

Assim, por exemplo, no sábado, Rodrigo pagou 3 *temakis* que ele próprio consumiu (a_{11}), 2 *temakis* consumidos por Otávio (a_{12}) e nenhum por Ronaldo (a_{13}), que corresponde à primeira linha da matriz S. Quantos *temakis* Otávio ficou devendo para Rodrigo neste fim de semana?

a) nenhum
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução: E

Efetuando a soma das matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix}3&2&0\\1&1&2\\0&3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&3&0\\0&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+2&2+3&0+0\\1+0&1+2&2+1\\0+1&3+0&2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&5&0\\1&3&3\\1&3&4\end{bmatrix}$$

Logo:

Rodrigo pagou para Otavio $a_{12} = 5$ *temakis* e Otávio pagou para Rodrigo apenas $a_{21} = 1$ *temaki*, logo Otavio deve 4 *temakis* a Rodrigo.

03. Atualmente, com a comunicação eletrônica, muitas atividades dependem do sigilo na troca de mensagens, principalmente as que envolvem transações financeiras. Os sistemas de envio e recepção de mensagens codificadas chamam-se Criptografia. Uma forma de codificar mensagens é trocar letras por números, como indicado na tabela-código a seguir.

	1	2	3	4	5
1	Z	Y	X	V	U
2	T	S	R	Q	P
3	O	N	M	L	K
4	J	I	H	G	F
5	E	D	C	B	A

Nessa tabela-código, uma letra é identificada pelo número formado pela linha e pela coluna, nessa ordem. Assim, o número 32 corresponde à letra N. A mensagem final **M** é dada por A + B = M, onde **B** é uma matriz fixada, que deve ser mantida em segredo, e **A** é uma matriz enviada ao receptor legal. Cada linha da matriz **M** corresponde a uma palavra da mensagem, sendo o 0 (zero) a ausência de letras ou o espaço entre palavras.

José tuitava durante o horário de trabalho quando recebeu uma mensagem do seu chefe, que continha uma matriz **A**. De posse da matriz **B** e da tabela-código, ele decodificou a mensagem.

O que a chefia informou a José?

Dados:

$$A=\begin{bmatrix}12&20&13&8&50&25&1\\0&0&34&32&3&4&0\\45&26&13&24&0&0&0\\30&45&16&20&11&17&0\\1&50&21&3&35&42&11\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}10&11&10&15&-8&30&-1\\14&31&19&19&-3&-4&0\\6&-4&8&31&0&0&0\\-8&6&16&32&20&-17&0\\44&-8&13&30&20&10&20\end{bmatrix}$$

a) Sorria você está sendo advertido.
b) Sorria você está sendo filmado.
c) Sorria você está sendo gravado.
d) Sorria você está sendo improdutivo.
e) Sorria você está sendo observado.

Resolução: B

A matriz M é tal que

$$M=\begin{bmatrix}12&20&13&8&50&25&1\\0&0&34&32&3&4&0\\45&26&13&24&0&0&0\\30&45&16&20&11&17&0\\1&50&21&3&35&42&11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10&11&10&15&-8&30&-1\\14&31&19&19&-3&-4&0\\6&-4&8&31&0&0&0\\-8&6&16&32&20&-17&0\\44&-8&13&30&20&10&20\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}22&31&23&23&42&55&0\\14&31&53&51&0&0&0\\51&22&21&55&0&0&0\\22&51&32&52&31&0&0\\45&42&34&33&55&52&31\end{bmatrix}.$$

Portanto, a chefia informou a José: "Sorria, você está sendo filmado".

ANOTAÇÕES