

4. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x - y} & , \quad x \neq y \\ x + y & , \quad x = y \end{cases}$$

- a) ¿Es continua la función f en los puntos de la recta $x=y$?
- b) Calcular las derivadas parciales de f en el origen.
- c) ¿Es f diferenciable en el origen?

Solución

a) Veamos si f es continua en los puntos de la forma (a,a) .

$$\text{Tenemos: } f(a,a) = a + a = 2a.$$

Además,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} (x^2 + xy + y^2)$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

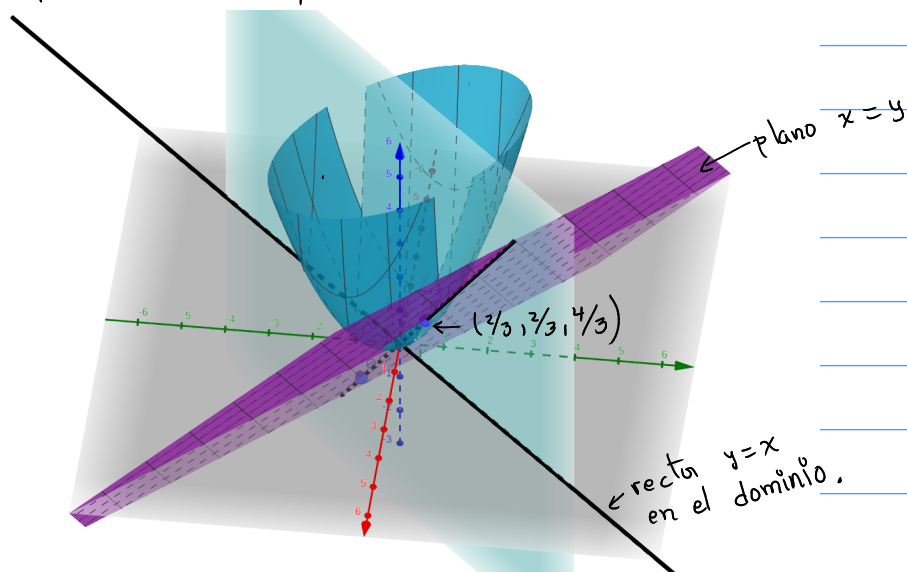
Para que f sea continua en los puntos de la forma (a,a) , se debe satisfacer

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} f(x,y) = 3a^2 = f(a,a) = 2a$$

$$\Rightarrow 3a^2 = 2a$$

$$\Rightarrow a = 0 \quad \vee \quad a = \frac{2}{3}$$

Es decir, sobre la recta $x=y$, f es continua solamente en los puntos $(0,0)$ y $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.



b) Cálculo de las derivadas parciales en el origen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^3}{-h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0\end{aligned}$$

c) Si f es diferenciable en $(0,0)$, debe cumplirse que

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

i) si $h \neq k$

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h^3 - k^3}{h - k} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^2 + hk + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\sqrt{h^2 + k^2} + \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{h}\right)^2}} \right) = 0 + 0 = 0$$

ii) Si $h = k$

$$L = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h + k - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h + h}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{2h}{\sqrt{2}h^2}$$

$$= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{h}{\sqrt{h^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\pm 1) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este caso el límite L no existe

$\therefore f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Gradiente

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se define el gradiente de f en el punto $x_0 \in U$ denotado por $\nabla f(x_0)$, como el vector de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Observaciones:

- Como $D_v f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$, entonces

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

- Si θ es el ángulo entre $\nabla f(x_0)$ y v , entonces

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \|\nabla f(x_0)\| \|v\| \cos \theta = \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta.$$

Como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces

$$-\|\nabla f(x_0)\| \leq \|\nabla f(x_0)\| \cos \theta \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

$$-\|\nabla f(x_0)\| \leq D_v f(x_0) \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

Es decir, en cada punto x el valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(x_0)\|$ y el valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(x_0)\|$.

- El gradiente $\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección del ascenso más pronunciado y es ortogonal a la curva de nivel.

Ejemplos

1. La temperatura en grados Celsius de una placa metálica está dada por $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, 1)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa de crecimiento máximo?

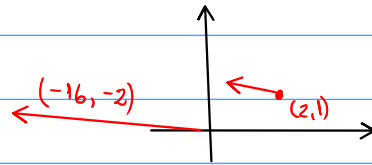
Solución

a) La dirección en la cual aumenta más rápidamente la temperatura a partir del punto $(2,1)$ viene dado por $\nabla f(2,1)$.

Tenemos

$$\nabla f(x,y) = (-8x, -2y)$$

$$\nabla f(2,1) = (-16, -2)$$



b) La tasa de crecimiento máximo de $T(x,y)$ a partir de $(2,1)$ es $\|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{(-16)^2 + (-2)^2} = \sqrt{260} = 16.12^\circ\text{C por cm.}$

2. Supongamos que la temperatura en el punto (x,y,z) de un sistema coordenado rectangular localizado en el espacio está dado por $T(x,y,z) = \frac{100}{x^2+y^2+z^2}$.

a) Calcular la razón de cambio de T en el punto $P(1,3,-2)$ en la dirección del vector $u = (1,1,1)$.

b) ¿En qué dirección a partir de P disminuye más rápidamente la temperatura?

c) ¿Cuál es la razón de cambio máximo de T en P ?

Solucion

a) Tenemos

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{-100(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-100(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-100(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right) \\ &= \frac{-200}{(x^2+y^2+z^2)^2} (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,3,-2) = \frac{-200}{196} (1, 3, -2) = \frac{-50}{49} (1, 3, -2)$$

Un vector unitario en la dirección del vector $u = (1,1,1)$ es

$$w = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

Luego, $D_w f(1,3,-2) = -\frac{50}{49} (1,3,-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1,1,1) = \frac{-50}{49\sqrt{3}} (1+3-2)$

$$= \frac{-100}{49\sqrt{3}} = -1.18$$

b) A partir de $P=(1,3,-2)$, la temperatura decrece más rápidamente en la dirección

$$-\nabla f(1,3,-2) = -\left(-\frac{50}{49} (1,3,-2)\right) = \frac{50}{49} (1,3,-2)$$

c) La razón de cambio máximo a partir de $P=(1,3,-2)$, es

$$\|\nabla f(1,3,-2)\| = \left\| -\frac{50}{49} (1,3,-2) \right\| = \frac{50}{49} \sqrt{14} = 3.82$$

Regla de la cadena para funciones de varias variables

Regla de la cadena: una variable independiente

Si $w=f(x,y)$ es diferenciable y $x=f(t)$, $y=g(t)$ son derivables, entonces

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Ejemplo

Sea $w(x,y) = x^2y - y^2$, $x = \sin t$, $y = e^t$. Calcular $\left. \frac{dw}{dt}(t) \right|_{t=0}$

Solución

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= 2xy \cos t + (x^2 - 2y) e^t$$

$$= 2 \sin t \cdot e^t \cos t + (\sin^2 t - 2e^t) e^t$$

$$\left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = 0 + (0 - 2(1))1 = -2$$

Regla de la cadena: dos variables independientes

Si $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$ son diferenciables, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplos

1. Calcular $\frac{\partial w}{\partial s}(s, t)$ y $\frac{\partial w}{\partial t}(s, t)$ para $w(x, y) = 2xy$, $x = s^2 + t^2$, $y = \frac{s}{t}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (2y)(2s) + (2x)\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \left(2\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}(4s^2 + 2s^2 + 2t^2) = \frac{1}{t}(6s^2 + 2t^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2y)(2t) + (2x)\left(-\frac{s}{t^2}\right) \\ &= \left(2\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(-\frac{s}{t^2}\right) = 4s - \frac{2s}{t^2}(s^2 + t^2) \end{aligned}$$

2. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 e^x$, $x(s, t) = st$, $y(s, t) = s^2 + t^2 + 1$. Calcular:
 $\frac{\partial f}{\partial s}(s, t)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(s, t)$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (2x - y^2 e^x)t + (-2ye^x)(2s) \\ &= 2(st) - (s^2 + t^2 + 1)^2 e^{st} - 2(s^2 + t^2 + 1)e^{st}(2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (2x - y^2 e^x)s + (-2ye^x)(2t) \\ &= (2(st) - (s^2 + t^2 + 1)^2)s - 2(s^2 + t^2 + 1)e^{st}(2t) \\ &= (2st - (s^2 + t^2 + 1)^2)s - 4t(s^2 + t^2 + 1)e^{st} \end{aligned}$$