

Derivadas direccionales

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el abierto U de $\mathbb{R}^n$ y sea x_0 un punto de U . Sea v un vector unitario dado. Se define la derivada de f en x_0 , en la dirección del vector v , denotada por $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ ó $D_v f(x_0)$, como

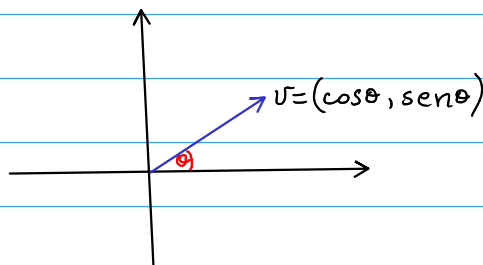
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

- En el caso de una función de dos variables, la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano vertical que contiene al vector en la dirección dada.

Observación

- En el caso de una función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se puede considerar el vector unitario v , como

$$v = (\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



Ejemplos

1. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 3x - 2y$ en la dirección del vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{1}{\sqrt{2}}t, y + \frac{1}{\sqrt{2}}t) - f(x, y)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3(x + \frac{1}{\sqrt{2}}t) - 2(y + \frac{1}{\sqrt{2}}t) - (3x - 2y)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x} + \frac{3}{\sqrt{2}}t - \cancel{2y} - \frac{2}{\sqrt{2}}t - \cancel{3x} + \cancel{2y}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}})}{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$ en el punto $P=(1,1)$ y en la dirección que va desde este punto al punto $Q=(2,3)$.

Solución

$$\text{Sea } u = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 2) \Rightarrow \|u\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

El vector unitario en la dirección del vector u es

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left((1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) - f(1,1)}{t}$$

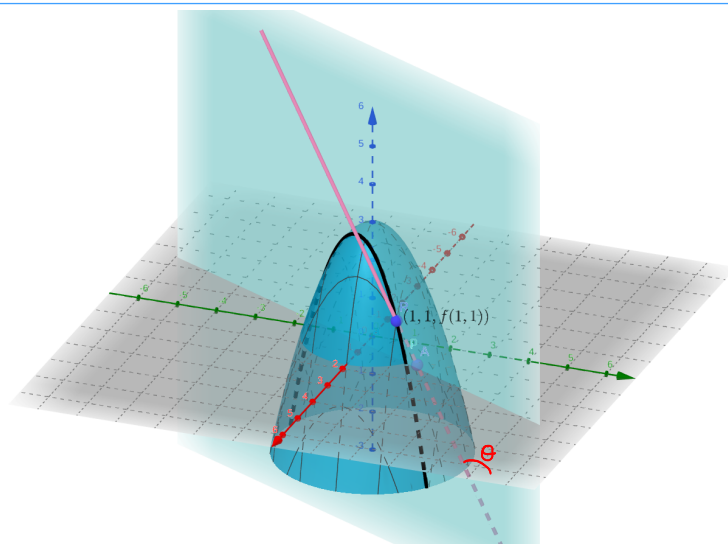
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 - \left(1 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 - (3 - 1 - 1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 - \left(1 + \frac{2t}{\sqrt{5}} + \frac{t^2}{5}\right) - \left(1 + \frac{4t}{\sqrt{5}} + \frac{4t^2}{5}\right) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} - \cancel{1} - \frac{2t}{\sqrt{5}} - \frac{t^2}{5} - \cancel{1} - \frac{4t}{\sqrt{5}} - \frac{4t^2}{5} - \cancel{1}}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{t}{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{4t}{5} \right)}{\cancel{t}}$$

$$= -\frac{6}{\sqrt{5}}$$



3. Dada la función $z = f(x, y)$, demostrar que las derivadas parciales son casos particulares de las derivadas direccionales

Solución

Sea $v = (1, 0)$, entonces

$$\begin{aligned} D_v f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t(1, 0)) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Análogamente, sea ahora $v = (0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} D_v f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x, y) + t(0, 1)) - f(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Funciones diferenciables

- Recordemos que $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in I$ si existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

en tal caso, el valor del límite se llama "derivada de f en x_0 ".

- Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = A$, entonces

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \rightarrow A \text{ cuando } h \rightarrow 0 \text{ (claramente } A = f'(x_0) \text{)}.$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + r(h)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + r(h) \text{ donde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \quad (*)$$

$$\text{Puesto que } A = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{r(h)}{h}$$

y al tomar el límite cuando $h \rightarrow 0$ a ambos miembros se obtiene (*).

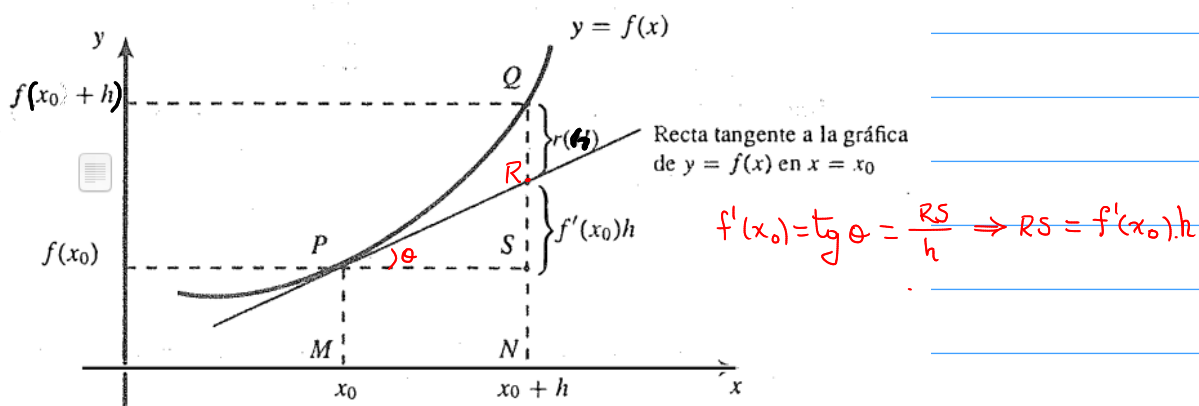


Figura 1. La derivada de una función.

claramente según la gráfica: $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + r(h)$

- Sea la función $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U . f es diferenciable en $p = (x_0, y_0)$ si existen constantes A_1 y A_2 tal que

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$.

- Sea la función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U . f es diferenciable en $x_0 \in U$ si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + r(h) \quad \text{con} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

(Aquí, $h = (h_1, \dots, h_n)$, $x_0 + h \in U$).

Teorema

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si las funciones (derivadas parciales) $\frac{\partial f}{\partial x_i}: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\tilde{U} \subset U$ son continuas en $x_0 \in \tilde{U}$ entonces f es diferenciable en x_0 .

- Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $x_0 \in U$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) v_i$$

Ejemplos

1. Para la función $f(x, y) = 5$ escriba la expresión del residuo de la definición de diferenciability en el punto (x_0, y_0) y demuestre que f es diferenciable.

Solución

Tenemos

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_2 + r(h_1, h_2)$$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x, y) + 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + r(h_1, h_2)$$

$$5 = 5 + r(h_1, h_2)$$

$$0 = r(h_1, h_2)$$

$$\text{Además } \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Como (x_0, y_0) es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^2$, entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

2. Calcule la derivada direccional de la función $f(x, y, z) = 6 - x^2 - y^2 - z^2$ en el punto $p = (1, 1, 1)$ en la dirección del vector $(0, 0, 28)$

Solución

$$\text{El vector } v = \frac{(0, 0, 28)}{\|(0, 0, 28)\|} = \frac{(0, 0, 28)}{\sqrt{(28)^2}} = (0, 0, 1)$$

$$\text{Luego, } \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) \cdot 1$$

$$= -2z \Big|_{(1, 1, 1)} = -2(1) = -2.$$

3. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Solución

a) Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^4 + y^2) - x^2y(4x^3)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5y + 2xy^3 - 4x^5y}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2xy^3 - 2x^5y}{(x^4 + y^2)^2}$$

Si $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3 - 2x^5y}{(x^4 + y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^4 + y^2) - x^2y(2y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

Si $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$