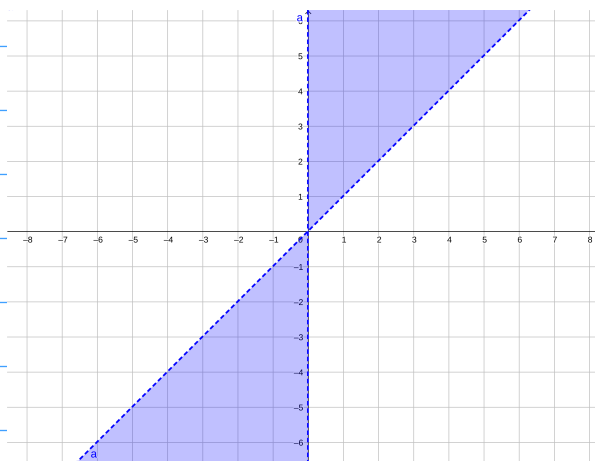


Ejercicios

1. Determine y grafique el dominio de la función
 $f(x,y) = \log(xy - x^2)$

Solución

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy - x^2 > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x(y-x) > 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x > 0 \wedge y-x > 0) \vee (x < 0 \wedge y-x < 0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x > 0 \wedge y > x) \vee (x < 0 \wedge y < x)\}\end{aligned}$$



2. Cada pareja de vectores u, v, w de $\mathbb{R}^n$ forman un ángulo de $\pi/3$. Suponga que $\|u\|=1$, $\|v\|=2$, $\|w\|=3$. Calcule $\|u+v+w\|$.

Solución

$$\|u+v+w\|^2 = (u+v+w) \cdot (u+v+w) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2(u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w)$$

$$u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\pi/3) = 1(2)(1/2) = 1$$

$$u \cdot w = \|u\|\|w\|\cos(\pi/3) = 1(3)(1/2) = \frac{3}{2}$$

$$v \cdot w = \|v\|\|w\|\cos(\pi/3) = 2(3)(1/2) = 3$$

$$\|u+v+w\|^2 = 1 + 4 + 9 + 2\left(1 + \frac{3}{2} + 3\right) = 25$$

$$\Rightarrow \|u+v+w\| = 5$$

3. Determine si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

Notemos $(0,0)$ es un punto de acumulación de $\text{Dom}(f)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0 = f(0,0)$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ entonces f es continua en $(0,0)$

4. Describa y grafique las curvas de nivel 0, 1 y 2 de la función

$$f(x,y) = (\text{sig}(x))y$$

Solución

Las curvas de nivel k se obtienen haciendo $f(x,y) = k$.

Para $k=0$:

$$(\text{sig}(x))y = 0$$

$$\Rightarrow \text{sig}(x) = 0 \vee y = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Para $k=1$:

$$(\text{sig}(x))y = 1$$

$$\text{Si } x > 0, 1(y) = 1 \Rightarrow y = 1$$

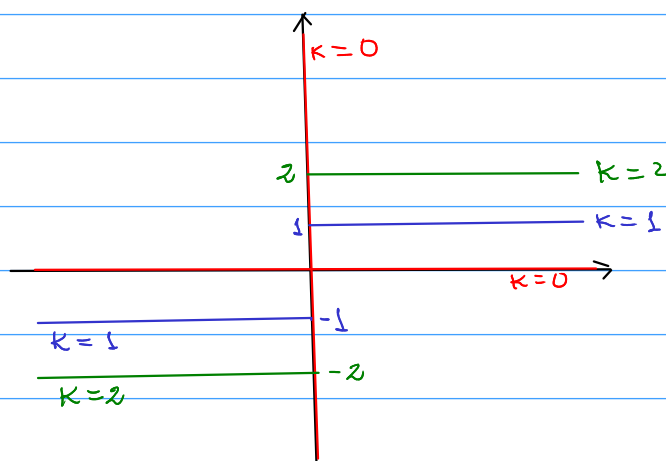
$$\text{Si } x < 0, (-1)y = 1 \Rightarrow y = -1$$

Para $k=2$

$$(\text{sig}(x))y = 2$$

$$\text{Si } x > 0, 1(y) = 2 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Si } x < 0, (-1)y = 2 \Rightarrow y = -2$$



5. Encuentre la recta que pasa por $P_4 = (-5, 2, -1)$ y es ortogonal al plano que pasa por los puntos $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-2, 1, -3)$ y $P_3 = (3, -2, 4)$.

Solución

Dos vectores que generan el plano que pasa por P_1 , P_2 y P_3 son $a = P_2 - P_1 = (-3, 0, -4)$ y $b = P_3 - P_1 = (2, -3, 3)$.

La ecuación del plano que pasa por P_1 , P_2 y P_3 es

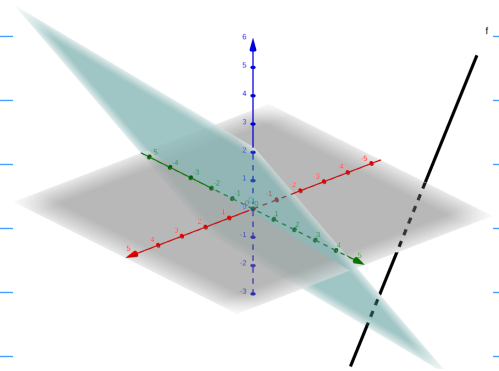
$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(-3, 0, -4) + t(2, -3, 3); s, t \in \mathbb{R}\}$$

Un vector director de la recta L que pasa por P_4 y es ortogonal al plano $\mathcal{P}$ es

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(-12) - j(-1) + k(9) = (-12, 1, 9)$$

$$\therefore L = \{(-5, 2, -1) + t(-12, 1, 9), t \in \mathbb{R}\}$$



Derivadas Parciales

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea la función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f con respecto a la variable x_i en el punto $x = (x_1, \dots, x_n)$, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

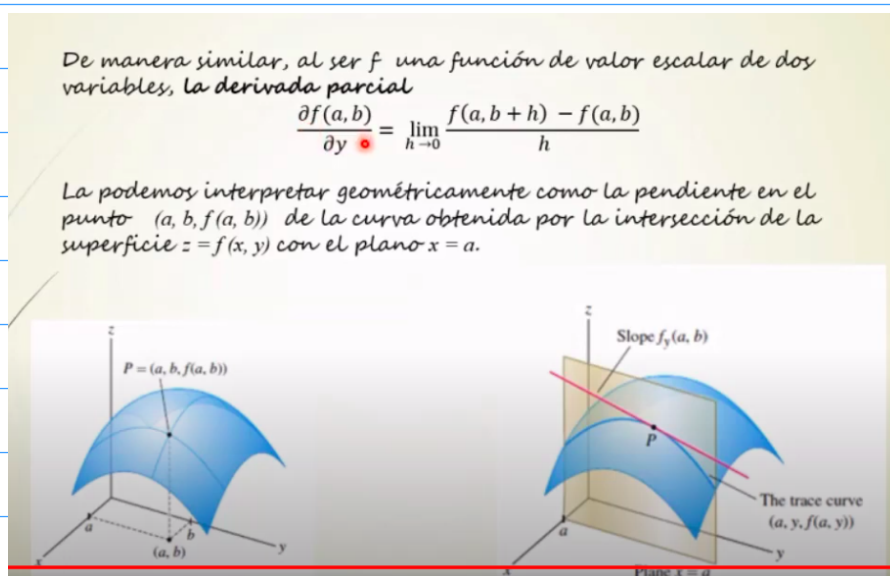
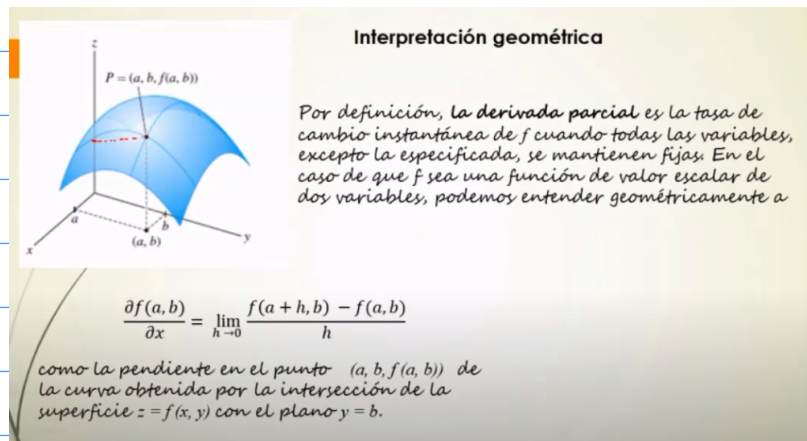
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista. Aquí $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 en la i -ésima posición.

Caso de dos variables

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Observación: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ derivamos de manera ordinaria f respecto a x considerando a y como una constante, y para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ derivamos de manera ordinaria f respecto a y considerando a x como una constante.



Ejemplos

1. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x^2y^2 + y$

Solución

- Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

De acuerdo a la observación dada: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2$

utilizando la definición

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 y^2 + y - (x^2 y^2 + y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2 y^2} + 2hxy^2 + \cancel{h^2 y^2} + y - \cancel{x^2 y^2} - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2xy^2 + hy^2)}{\cancel{h}} = 2xy^2\end{aligned}$$

- Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

De acuerdo a la observación: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 y + 1$

Utilizando la definición

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2(y+h)^2 + y+h - (x^2 y^2 + y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2 y^2} + 2hx^2 y + \cancel{x^2 h^2} + y+h - \cancel{x^2 y^2} - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2x^2 y + hx^2 + 1)}{\cancel{h}} \\ &= 2x^2 y + 1\end{aligned}$$

2. Halle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ en caso existan, donde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución

- Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$

Si $y \neq 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{hy}(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} - 0$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y$$

Si $y = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$$

-Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$

Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0+h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{xh(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 - h^2x}{x^2 + h^2} = x \end{aligned}$$

Si $x = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x, \quad \forall x$$

Derivadas parciales de orden superior

Si f es una función de dos variables x e y , entonces sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ejemplo

Calcule las segundas derivadas parciales de la función

$$f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$$

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} (2x) = \frac{2x}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) = -\frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{2y}{y^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{x^2 - y^2} \right) = \frac{2(x^2 - y^2) - 2x(2x)}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{-2y^2 - 2x^2}{(x^2 - y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 - y^2} \right) = \frac{0 - 2x(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y^2 - x^2} \right) = \frac{-2y(-2x)}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{4xy}{(y^2 - x^2)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y^2 - x^2} \right) = \frac{2(y^2 - x^2) - 2y(2y)}{(y^2 - x^2)^2} \\ &= \frac{2y^2 - 2x^2 - 4y^2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 2y^2}{(y^2 - x^2)^2}\end{aligned}$$