

Ejercicios

1. Una compañía fabrica los productos A, B y C. Los gastos de producción se dividen en las tres categorías siguientes: costo de materiales, mano de obra y otros gastos. La tabla 1 presenta un estimado del costo (en miles de nuevos soles) de producir un solo artículo de cada clase.

TABLA 1 - COSTOS DE PRODUCCIÓN POR ARTÍCULO

	A	B	C
Costo de materiales	0.20	0.40	0.25
mano de obra	0.40	0.50	0.35
otros gastos	0.20	0.30	0.25

La tabla 2 presenta un estimado de la cantidad de artículos de cada clase que se podrían producir en cada estación del año.

TABLA 2 - CANTIDAD DE ARTÍCULOS PRODUCIDOS POR ESTACIÓN

	verano	otoño	invierno	primavera
A	5000	5500	5500	5000
B	3000	3600	3400	3200
C	6800	7200	7000	7000

La compañía desea presentar en su reunión de accionistas una tabla sencilla que muestre los costos totales por estación, para cada una de las tres categorías de costo.

Solución

Sean M la matriz que representa los datos de la tabla 1.

N la matriz que representa los datos de la tabla 2.

$$\text{Así, } M = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.40 & 0.25 \\ 0.40 & 0.50 & 0.35 \\ 0.20 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 5000 & 5500 & 5500 & 5000 \\ 3000 & 3600 & 3400 & 3200 \\ 6800 & 7200 & 7000 & 7000 \end{bmatrix}$$

3×3 3×4

MN es una matriz de la forma

$$MN = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{11} = (0.20)(5000) + (0.40)(3000) + (0.25)(6800) = 3900$$

(costos de materiales durante la producción de verano).

$$c_{21} = (0.40)(5000) + (0.50)(3000) + (0.35)(6800) = 5880$$

(costo de la mano de obra durante la producción de verano)

$$c_{31} = (0.20)(5000) + (0.30)(3000) + (0.25)(6800) = 3600$$

(costo generado por otros gastos durante la producción de verano).

La 1^{ra} columna de C representa los gastos de producción durante el verano

" 2 ^{da}	"	"	"	"	"	"	"	"	"	" otoño
" 3 ^{ra}	"	"	"	"	"	"	"	"	"	" invierno
" 4 ^{ta}	"	"	"	"	"	"	"	"	"	la primavera

$$C = \begin{bmatrix} 3900 & 4340 & 4210 & 4030 \\ 5880 & 6520 & 6350 & 6050 \\ 3600 & 3980 & 3870 & 3710 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la tabla que presentará la compañía es:

	Verano	otoño	invierno	primavera	anual
costo de materiales	3900	4340	4210	4030	16480
mano de obra	5880	6520	6350	6050	24800
otros gastos	3600	3980	3870	3710	15160
	<u>13380</u>	<u>14840</u>	<u>14438</u>	<u>13790</u>	<u>56440</u>

2. Dos tiendas T_1 y T_2 reciben diariamente televisores y cocinas de dos fábricas F_1 y F_2 .

Las recepciones se representan como sigue:

$$\begin{matrix} & \text{TV} & \text{cocina} \\ F_1 & \begin{bmatrix} 40 & 50 \end{bmatrix} \\ F_2 & \begin{bmatrix} 70 & 80 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

El precio en dólares por artefacto eléctrico es

$$\begin{matrix} & T_1 & T_2 \\ \text{precio} \times \text{TV} & \begin{bmatrix} 200 & 250 \end{bmatrix} \\ \text{precio} \times \text{cocina} & \begin{bmatrix} 300 & 380 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Determinar los ingresos de cada una de las tiendas al vender cada uno de los artefactos eléctricos.

Solución

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 40 & 50 \\ 70 & 80 \end{bmatrix}}_{\text{nº de unidades}} \underbrace{\begin{bmatrix} 200 & 250 \\ 300 & 380 \end{bmatrix}}_{\text{precio}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\text{ingreso}} = \begin{bmatrix} 23000 & 24000 \\ 38000 & 39900 \end{bmatrix}$$

donde c_{ij} es el ingreso de la tienda j por vender los productos provenientes de la fábrica i .

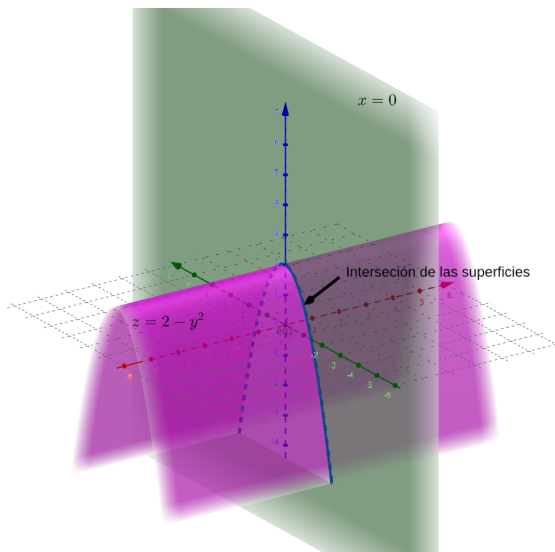
3. Trazar la gráfica en $\mathbb{R}^3$ de cada una de las ecuaciones indicadas y mostrar su intersección en caso exista.

a) $z = 2 - y^2$, $x = 0$

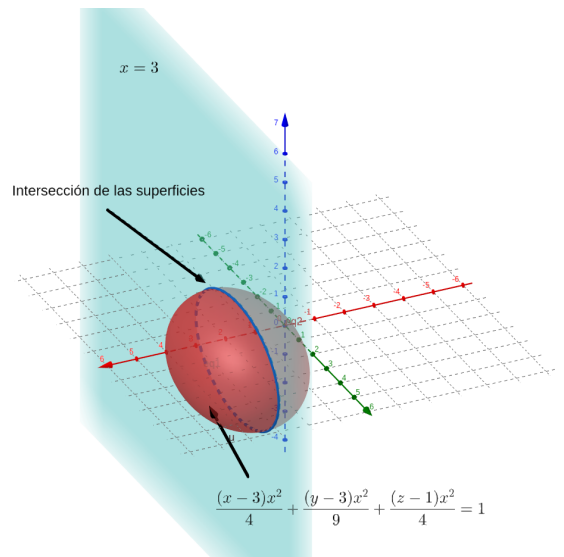
b) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$

Solución

a) $z = 2 - y^2$, $x = 0$



b) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$, $x=3$



Curvas de nivel

Dados $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, se define el nivel c de la función f como el conjunto

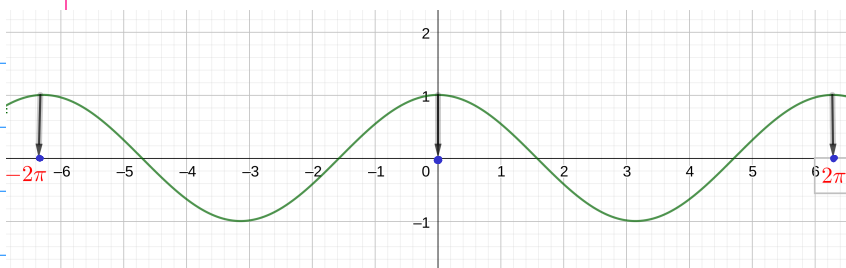
$$\{x \in U / f(x) = c\} = f^{-1}(c)$$

- Cuando $n=1$, es un subconjunto de los números reales.
- Cuando $n=2$, es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ llamado curva de nivel (de la función f correspondiente al nivel c).
- Cuando $n=3$, es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ llamado superficie de nivel.

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$. Halle el nivel 1 de f .

Solución



El nivel 1 de f está dada por

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) &= \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \cos x = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

2. Describa y grafique las curvas de nivel de las funciones indicadas:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

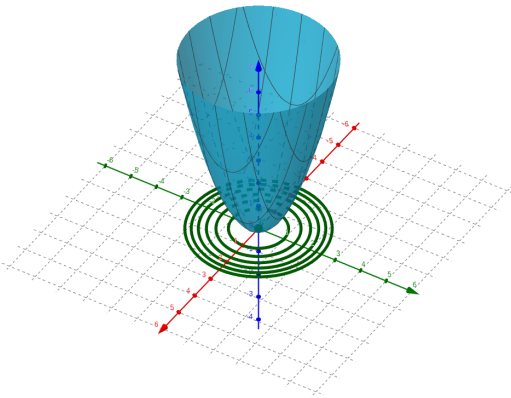
c) $f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

Solución

a) $x^2 + y^2 = c \quad (c \geq 0)$

circunferencias centradas

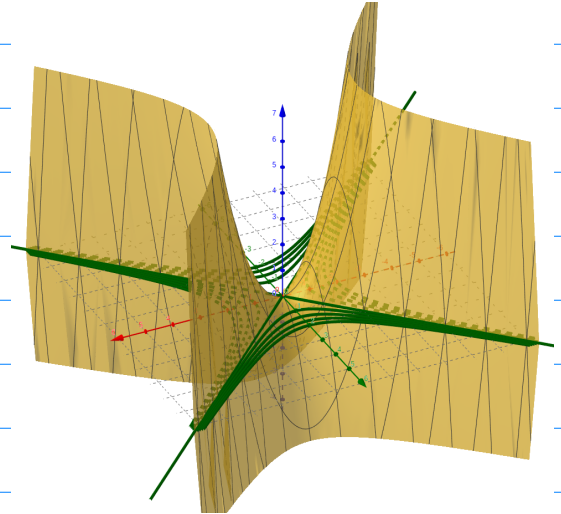
en el origen y radio $\sqrt{c}$



b) $x^2 - y^2 = c$

$\frac{x^2}{c} - \frac{y^2}{c} = 1$

hipérbolas centradas en (0,0)

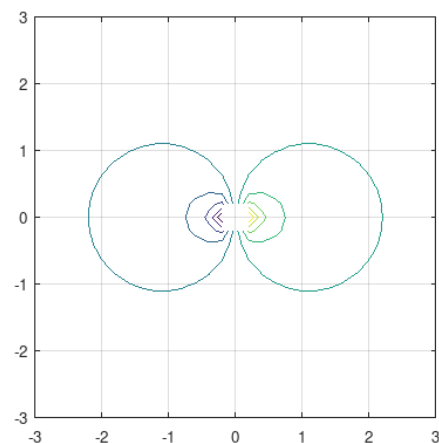
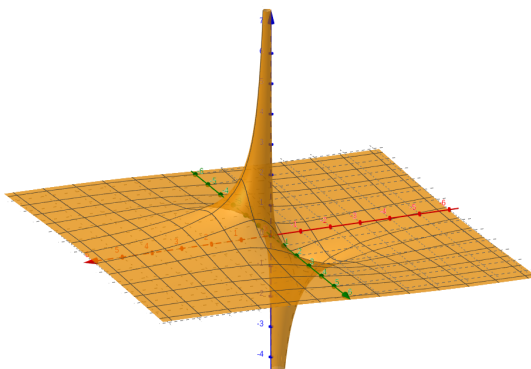


c) $f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = c \Rightarrow 2x = c(x^2 + y^2) \Rightarrow \frac{2}{c}x = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - \frac{2}{c}x + \frac{1}{c^2}\right) + y^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}$$

circunferencias centradas en $\left(\frac{1}{c}, 0\right)$, $c \neq 0$.



Límites

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea x_0 un punto de acumulación de U , definimos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

o equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in [B(x_0, \delta) - \{x_0\}] \cap U \implies f(x) \in B(L, \varepsilon)$$

- Una condición necesaria (no suficiente) para que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ exista, es que los límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, \phi(x)) \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, \psi(x))$$

existan y sean iguales. ($y = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$ son curvas que pasan por (x_0, y_0)).

Ejercicios

1. Para cada una de las funciones $z = f(x,y)$ dados, calcule el límite indicado en caso exista.

a) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$

b) $f(x,y) = \frac{xy^2}{y^4 + x^2}$ en $(0,0)$

c) $f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$ en $(0,0)$

Solución.

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Sea } S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

$$\text{Sea } S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - y^2}{0 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Como al aproximarnos a $(0, 0)$ a través de las curvas S_1 y S_2 los límites son distintos entonces concluimos que

$$\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$