

Cálculo vectorial

(Práctica 2)

* El ángulo θ entre los vectores (no nulos) $x, y \in \mathbb{R}^n$ está dado por

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

1. Los vectores u y v de $\mathbb{R}^n$ forman un ángulo de $\pi/3$. Suponiendo que $\|u\|=3$ y $\|v\|=4$, calcule: $u \cdot v$, $\|u+v\|$, $\|u-v\|$.

Solución

a) $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$

$$\cos(\pi/3) = \frac{u \cdot v}{(3)(4)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{u \cdot v}{12} \Rightarrow u \cdot v = 6$$

b) $\|u+v\|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + u \cdot v + v \cdot u + v \cdot v$
 $= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2$
 $= 3^2 + 2(6) + 16$
 $= 37$

$$\|u+v\| = \sqrt{37}$$

c) $\|u-v\|^2 = (u-v) \cdot (u-v) = \|u\|^2 - 2(u \cdot v) + \|v\|^2$
 $= 9 - 2(6) + 16$
 $= 13$

$$\|u-v\| = \sqrt{13}$$

2. Sean u y v vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|u\| = \|v\| = \|u-v\|$. Demuestre que el ángulo entre u y v es $\pi/3$.

Solución

$$\|u-v\|^2 = (u-v) \cdot (u-v) = \|u\|^2 - 2(u \cdot v) + \|v\|^2$$

$$\cancel{\|u\|^2} = \cancel{\|u\|^2} - 2(u \cdot v) + \|v\|^2 \Rightarrow u \cdot v = \frac{1}{2} \|v\|^2$$

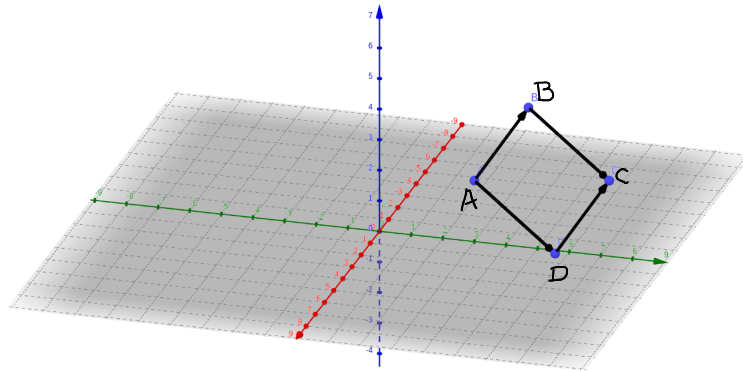
$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{\frac{1}{2} \|v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

3. Verifique que los puntos dados son los vértices de un paralelogramo y calcule su área.

a) $A(0,3,2)$, $B(1,5,5)$, $C(6,9,5)$, $D(5,7,2)$

b) $A(2,-3,1)$, $B(6,5,-1)$, $C(7,2,2)$, $D(3,-6,4)$

Solución



a) Tenemos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,5,5) - (0,3,2) = (1,2,3)$$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (6,9,5) - (5,7,2) = (1,2,3)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6,9,5) - (1,5,5) = (5,4,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5,7,2) - (0,3,2) = (5,4,0)$$

Notemos que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ del cuadrilátero ABCD son paralelos.

Los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ del cuadrilátero ABCD son paralelos.

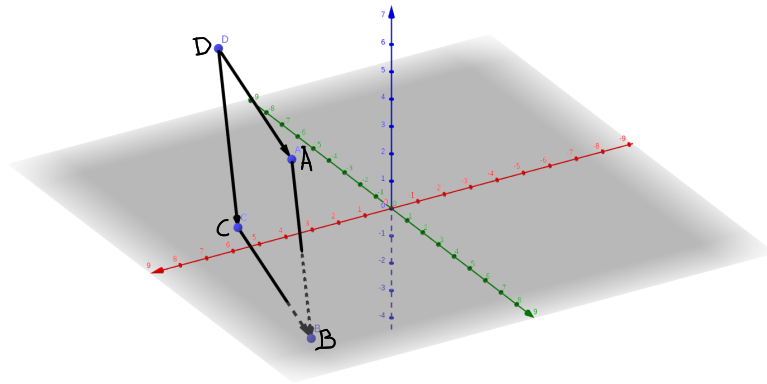
Por lo tanto, el cuadrilátero es un paralelogramo.

$$\text{Además, } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = i(-12) - j(-15) + k(-6) \\ = (-12, 15, -6)$$

Luego, el área del paralelogramo es

$$\text{Área} = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-12)^2 + 15^2 + (-6)^2} = \sqrt{405} = 9\sqrt{5} \text{ u}^2$$

b)



Tenemos

$$\overline{AB} = B - A = (6, 5, -1) - (2, -3, 1) = (4, 8, -2)$$

$$\overline{DC} = C - D = (7, 2, 2) - (3, -6, 4) = (4, 8, -2)$$

$$\overline{DA} = A - D = (2, -3, 1) - (3, -6, 4) = (-1, 3, -3)$$

$$\overline{CB} = B - C = (6, 5, -1) - (7, 2, 2) = (-1, 3, -3)$$

Los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ del cuadrilátero ABCD son paralelos.

Los vectores $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ del cuadrilátero ABCD son paralelos.

Por consiguiente, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Además,

$$\overline{AB} \times \overline{DA} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 8 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = i(-18) - j(-10) + k(20) = (-18, 10, 20)$$

$$= i(-18) - j(-10) + k(20)$$

$$= (-18, 10, 20)$$

Luego, el área del paralelogramo ABCD, es

$$\text{Area} = \|(-18, 10, 20)\| = \sqrt{(-18)^2 + 10^2 + 20^2} = \sqrt{824} \text{ u}^2.$$

x Un conjunto L de puntos de $\mathbb{R}^3$ es una recta si hay un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector no nulo $a \in \mathbb{R}^3$ tal que $L = \{P_0 + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$

* Un conjunto P de puntos de $\mathbb{R}^3$ es un plano si hay un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y dos vectores no paralelos $a, b \in \mathbb{R}^3$ tales que $P = \{P_0 + ta + sb \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

1. Halle la ecuación de la recta que pase por los puntos dados y representarlo geométricamente:

i) $P_0 = (1, 0, 0)$ y $P_1 = (0, 1, 0)$

i) $P_0 = (5, 8, 1)$ y $P_1 = (2, 6, -1)$

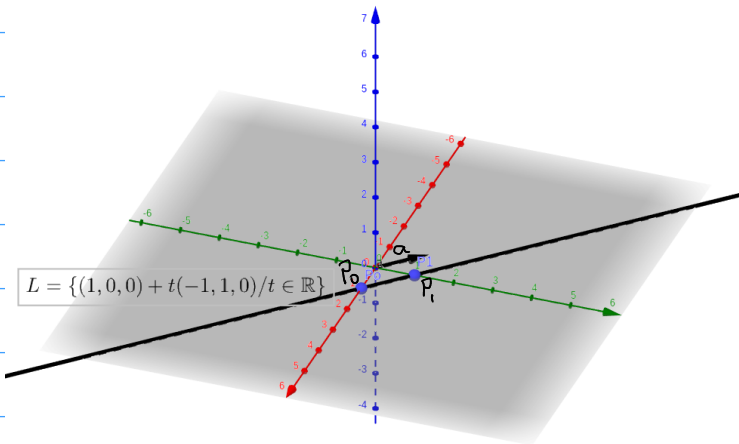
Solución

i) Sea $a = P_1 - P_0 = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$

Luego, la ecuación de la recta que pasa por el punto P_0 y es paralelo al vector a , es

$$\mathcal{L} = \{ p_0 + t a \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathcal{L} = \{ (1, 0, 0) + t(-1, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

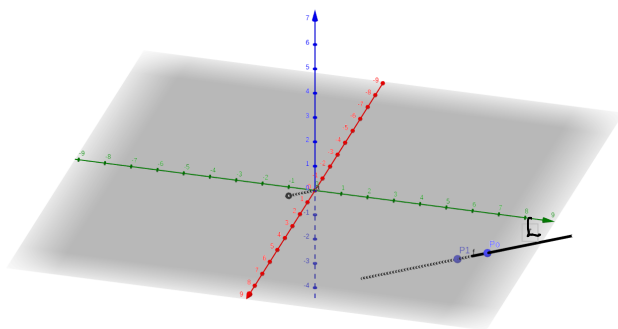


ii) Sea $a = P_1 - P_0 = (2, 6, -1) - (5, 8, 1) = (-3, -2, -2)$

Luego, la ecuación de la recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector a , es

$$L = \{P_0 + ta \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$L = \{(5, 8, 1) + t(-3, -2, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



2. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos

i) $P_0 = (2, 3, 1)$, $P_1 = (1, 1, -4)$, $P_2 = (-3, 4, -2)$

ii) $P_0 = (1, 1, 0)$, $P_1 = (2, 0, 1)$, $P_2 = (-1, 6, -1)$

Solución

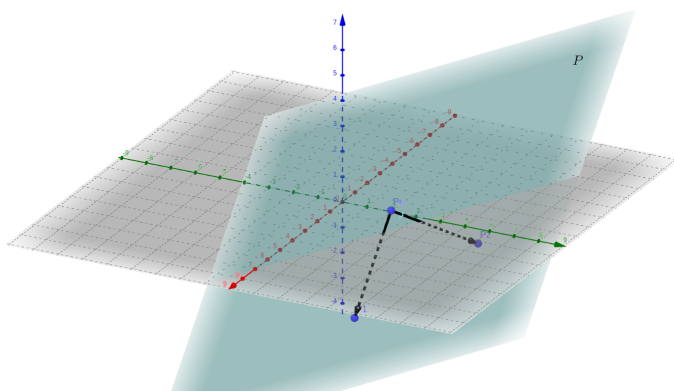
i) Sean $a = P_1 - P_0 = (1, 1, -4) - (2, 3, 1) = (-1, -2, -5)$

$$b = P_2 - P_0 = (-3, 4, -2) - (2, 3, 1) = (-5, 1, -3)$$

Luego, la ecuación del plano que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores a y b , es

$$P = \{P_0 + ta + sb \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$P = \{(2, 3, 1) + t(-1, -2, -5) + s(-5, 1, -3) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$



ii) Sean $a = P_1 - P_0 = (2, 0, 1) - (1, 1, 0) = (1, -1, 1)$

$b = P_2 - P_0 = (-1, 6, -1) - (1, 1, 0) = (-2, 5, -1)$

Luego, la ecuación del plano que pasa por el punto P_0 y es generado por los vectores a y b , es

$$P = \{ P_0 + ta + sb \mid t, s \in \mathbb{R} \}$$

$$P = \{ (1, 1, 0) + t(1, -1, 1) + s(-2, 5, -1) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$$

