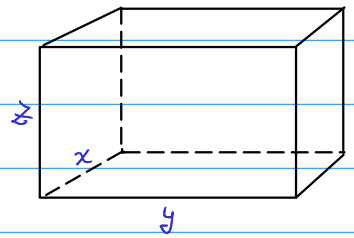
2. Una caja rectangular sin tapa ha de tener una superficie de área S. Encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen.

Solución

Supongamos que la caja tiene dimensiones x, y y z. Luego, el volumen de la caja es xyz y el área de la superficie es $2xz + 2yz + xy = S$.



$$\Rightarrow z(2x+2y) = S - xy$$

$$\Rightarrow z = \frac{S - xy}{2x + 2y}$$

Queremos encontrar el valor máximo de $F(x,y,z) = xyz$ sujeta a la restricción $2xz + 2yz + xy = S$. Sea $f(x,y) = xy\,\dfrac{S - xy}{2x + 2y}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\frac{S - xy}{2x+2y} + xy\,\frac{-y(2x+2y) - (S-xy)2}{(2x+2y)^2}$$

$$= y\,\frac{S - xy}{2x+2y} + xy\,\frac{-2xy - 2y^2 - 2S + 2xy}{(2x+2y)^2}$$

$$= \frac{y(S-xy)(2x+2y) - y(2xy^2 + 2xS)}{(2x+2y)^2}$$

$$= \frac{y(2xS + 2yS - 2x^2y - 2xy^2 - 2xy^2 - 2xS)}{(2x+2y)^2}$$

$$= \frac{2y^2}{(2x+2y)^2}\left[\, S - x^2 - 2xy \,\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\frac{S - xy}{2x+2y} + xy\left[\frac{-x(2x+2y) - (S-xy)2}{(2x+2y)^2}\right]$$

$$= x\,\frac{S - xy}{2x+2y} + xy\left[\frac{-2x^2 - 2xy - 2S + 2xy}{(2x+2y)^2}\right]$$

$$= x\,\frac{(2x+2y)(S-xy)}{(2x+2y)^2} + xy\left[\frac{-2x^2 - 2S}{(2x+2y)^2}\right]$$

$$= \frac{x}{(2x+2y)^2}\left[2xS - 2x^2y + 2yS - 2xy^2 - 2yx^2 - 2yS\right]$$

$$= \frac{2x^2}{(2x+2y)^2}\left[\, S - 2xy - y^2 \,\right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy - 5 = 0 \quad \cdots (1) \\ y^2 + 2xy - 5 = 0 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $x^2 - y^2 = 0 \Longrightarrow (x+y)(x-y) = 0$

$\Longrightarrow x = -y \quad \vee \quad x = y$

Como x y y deben ser positivos, entonces se sigue que $x = y$.

$$x^2 + 2x(x) - 5 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{3}} = y$$

Luego, para $x > 0$, $y > 0$, la función f tiene un valor extremo solamente en $\left(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}\right)$.

Se puede probar que f tiene un valor máximo en $\left(\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}\right)$.

De esta manera, la caja tiene un valor máximo, cuando

$x = \sqrt{5/3}$, $y = \sqrt{5/3}$,

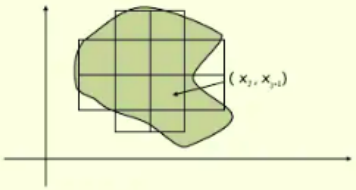
$$z = \frac{5 - xy}{2x + 2y} = \frac{5 - x^2}{4x} = \frac{5 - \left(\sqrt{5/3}\right)^2}{4\sqrt{5/3}} = \frac{5 - \frac{5}{3}}{4\sqrt{5/3}} = \frac{\frac{2S}{3}}{\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\,S}{12\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5/3}$$

Integrales dobles

Sea f, continua en una región R del plano xy . Usando líneas paralelas a los ejes para aproximar R por medio de n rectángulos de área ΔA. Sea (x_j, y_j) un pto del j-esimo rectángulo, entonces la integral doble de f sobre R es:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, y_j)\Delta A$$



Sea R la región de la figura. Vamos a calcular $\iint_R xy\,dA$ usando el orden de integración "$dy\,dx$" y el orden de integración "$dx\,dy$."

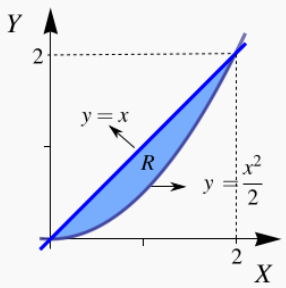


Figura 5.4: Región R

Observe que R se puede describir como

$$R : 0 \le x \le 2,\ \frac{x^2}{2} \le y \le x$$

$$R : 0 \le y \le 2,\ y \le x \le \sqrt{2y}.$$

- Integrando en le orden "$dy\,dx$"

$$\iint_R xy\,dA = \int_0^2 \left[\int_{\frac{x^2}{2}}^{x} xy\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[x\frac{x^2}{2} - x\frac{x^4}{8}\right] dx = \frac{2}{3}$$

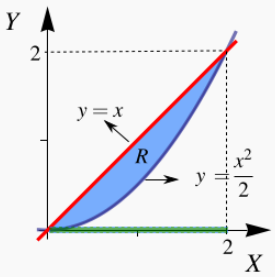


Figura 5.5: Integrando en le orden "$dy\,dx$"

- Integrando en le orden "$dx\,dy$"

$$\iint_R xy\,dA = \int_0^2 \left[\int_{y}^{\sqrt{2y}} xy\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} y\Big|_{y}^{\sqrt{2y}}\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{2y}{2}y - \frac{y^2}{2}y\right] dy = \frac{2}{3}$$

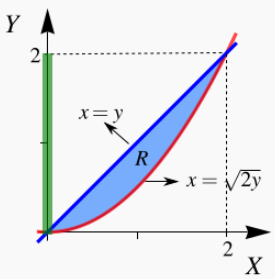


Figura 5.6: Integrando en le orden "$dx\,dy$"