

3. Sea $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2$ donde $x = 4uv^2$, $y = 5u^2 + 10v^2$, $z = u^3$.

Halle $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = (6x)(4v^2) + (2y)(10u) + (2z)(3u^2)$$

$$= 6(4uv^2)(4v^2) + 2(5u^2 + 10v^2)(10u) + 2(u^3)(3u^2) = 96uv^4 + 100u^3 + 200uv^2 + 6u^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = (6x)(8uv) + (2y)(20v) + (2z)(0)$$

$$= 6(4uv^2)(8uv) + 2(5u^2 + 10v^2)(20v) = 192u^2v^3 + 200u^2v + 400v^3$$

4. Sea $z = xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, $xy \neq 0$. Muestre que $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = (x-y)z$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \left(\frac{xy - (x+y)y}{x^2 y^2}\right)$$

$$= y f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= y f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \left(\frac{xy - (x+y)x}{x^2 y^2}\right)$$

$$= x f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

$$= x f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)$$

Luego,

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \left[y f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right] - y^2 \left[x f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \frac{x}{y} f'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \right]$$

$$= x^2 y f\left(\frac{x+y}{xy}\right) - \cancel{xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)} - xy^2 f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + \cancel{xy f'\left(\frac{x+y}{xy}\right)}$$

$$= (x-y)xy f\left(\frac{x+y}{xy}\right) = (x-y)z$$

4. Sea $z = f(u, v)$, donde $u = x - zy$, $v = zx + y$ demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

Solución

Tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot (1) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot (2)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot (1) + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \cdot (2) + 2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot (1) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot (2) \right]$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} (-2) + \frac{\partial z}{\partial v} (1) = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-2 \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$= -2 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$= -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} (-2) - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} (1) + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} (-2) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} (1)$$

$$= 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

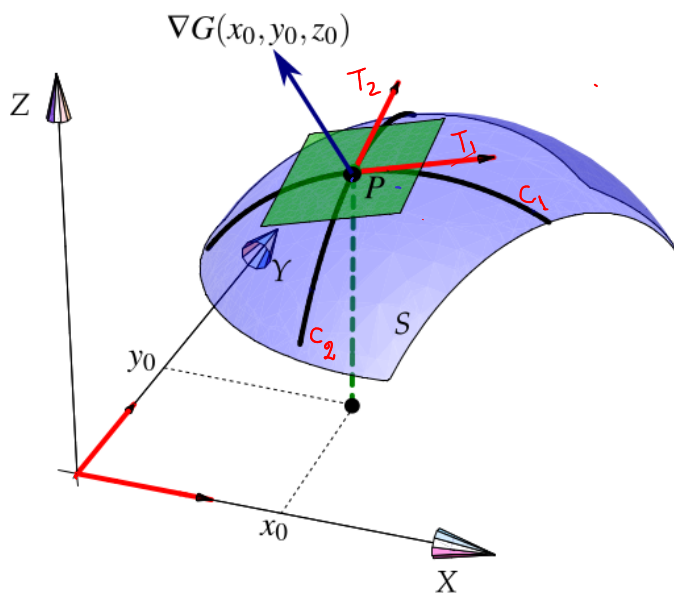
$$\text{Luego, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$= 5 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

Plano tangente y recta normal

Se llama plano tangente a una superficie $S: G(x,y,z)=0$, en un punto $P \in S$, al plano que contiene todas las tangentes en P de las curvas trazadas sobre la superficie S y que pasan por P .

Se llama recta normal a una superficie en un punto P , a la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente en dicho punto.



Si la superficie está dada por $z = f(x,y)$, entonces haciendo $G(x,y,z) = f(x,y) - z$, la superficie se puede expresar por $G(x,y,z) = 0$.

Sea $z = f(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas en (a,b) , cuya gráfica es una superficie S . El plano tangente a S en $P(a,b,f(a,b))$ es el plano que pasa por P y contiene a las rectas tangentes T_1 y T_2 a las curvas

$$C_1 = \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = a \end{cases} \quad \text{y} \quad C_2 = \begin{cases} z = f(x,y) \\ z = b \end{cases}$$

respectivamente.

La dirección de un vector tangente a C_1 es $u = (1, 0, f_x(a,b))$.

La dirección de un vector tangente a C_2 es $v = (0, 1, f_y(a,b))$.

La dirección de un vector normal al plano tangente es

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(a,b) \\ 0 & 1 & f_y(a,b) \end{vmatrix} = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$$

Ecuación del plano tangente

Sea $P(a, b, f(a, b))$ un punto de la superficie S por donde pasa el plano tangente. Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano tangente. Entonces la ecuación del plano tangente a S en el punto P es

$$n \cdot (X - P) = 0$$

Es decir,

$$(-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1) \cdot (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0$$

$$-f_x(a, b)(x - a) - f_y(a, b)(y - b) + z - f(a, b) = 0$$

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

La recta normal a S en P es la recta que pasa por P y tiene la dirección de n .

- Si f es una función diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $G(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. El plano que pasa por P y es normal a $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ es el plano tangente a S en P .

La recta normal a S en P es la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$.

Si (x, y, z) es un punto del plano tangente, entonces el vector

$v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a v , entonces $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \cdot v = 0$.

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie $G(x, y, z) = 0$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$G_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + G_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

1. Hallar el valor de las constantes a y b de forma tal que el plano tangente a la superficie de ecuación $S: x^4 - y + z = 0$ en el punto $P(a, b, 1)$ sea perpendicular a la recta de ecuación

$$l: \frac{x-3}{32} = 1-y = z+4$$

Solución

$$\text{Sea } G(x, y, z) = x^4 - y + z$$

$$\nabla G(x, y, z) = (4x^3, -1, 1)$$

$$\nabla G(a, b, 1) = (4a^3, -1, 1)$$

De la ecuación de la recta $l: \frac{x-3}{32} = 1-y = z+4$, se tiene

$$\frac{x-3}{32} = 1-y = z+4 = t$$

$$\Rightarrow x-3 = 32t, \quad 1-y = t, \quad z+4 = t$$

$$\Rightarrow x = 3 + 32t, \quad y = 1 - t, \quad z = -4 + t$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (3, 1, -4) + t(32, -1, 1) \quad (\text{ecuación vectorial de la recta})$$

El vector director de l es $v = (32, -1, 1)$

Como $\nabla G(a, b, 1)$ es paralelo a v , entonces $\nabla G(a, b, 1) \times v = (0, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4a^3 & -1 & 1 \\ 32 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow (0, 32 - 4a^3, -4a^3 + 32) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow 32 - 4a^3 = 0 \Rightarrow 8 - a^3 = 0 \Rightarrow a = 2.$$

Ahora, como $P \in S$, entonces $a^4 - b + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2^4 - b + 1 = 0 \Rightarrow b = 17.$$

2. Determine los puntos del elipsoide de ecuación

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde su plano tangente corta a los ejes coordenados en puntos equidistantes al origen de coordenadas.

Solución

$$\text{Sea } G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto del elipsoide que cumple con las condiciones del problema.

Tenemos

$$\nabla G(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla G(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right)$$

Luego, la ecuación del plano tangente al elipsoide en el punto P , es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right) = 0$$

$$\frac{2x_0}{a^2} (x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2} (y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2} (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1, \text{ pues } P(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$$

Buscamos puntos $P(x_0, y_0, z_0)$ donde su plano tangente al elipsoide en este punto debe cortar a los ejes coordenados en puntos equidistantes del origen de coordenadas.

$$y = z = 0, \quad x = \frac{a^2}{x_0}$$

$$x = z = 0, \quad y = \frac{b^2}{y_0}$$

$$x = y = 0, \quad z = \frac{c^2}{z_0}$$

Los puntos del elipsoide donde su plano tangente corta a los ejes coordenados en puntos equidistantes del origen de coordenadas, satisfacen

$$\frac{a^2}{x_0} = \frac{b^2}{y_0} = \frac{c^2}{z_0} \quad \gamma \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

Se tiene:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b^2 x_0}{a^2}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\frac{c^2 x_0}{a^2}\right)^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{b^2 x_0^2}{a^4} + \frac{c^2 x_0^2}{a^4} = 1$$

$$\Rightarrow x_0^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} + \frac{c^2}{a^4} \right) = 1 \Rightarrow x_0^2 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^4} \right) = 1$$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow x_0 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{Análogamente, } y_0 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$z_0 = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\therefore$ Los puntos buscados son

$$P_1 = \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

$$P_2 = \left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, -\frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$