

Cálculo Vectorial

(Practica 1)

- * Los vectores $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si $a \cdot b = 0$
- * Los vectores $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$ son paralelos si $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que $a = rb$
- * El producto vectorial de dos vectores es ortogonal a estos vectores.
Es decir, $u \times v \perp u$ y $u \times v \perp v$
- * $\text{Proy}_b a = \frac{a \cdot b}{\|b\|^2} b$

Ejercicios

1. Halle un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que sea ortogonal a $(1, 2)$.

Solución

Un vector ortogonal a $(1, 2)$ es $(-2, 1)$.

En efecto $(-2, 1) \cdot (1, 2) = -2(1) + 1(2) = 0$

Observación :

Cualquier vector paralelo a $(-2, 1)$ es ortogonal a $(1, 2)$.

2. Halle un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que sea ortogonal a $(1, 2)$ y $(-3, -6)$.

Solución

Notemos que $(-3, -6) = -3(1, 2)$. Es decir, los vectores $(-3, -6)$ y $(1, 2)$ son paralelos. Por consiguiente, cualquier vector ortogonal a $(1, 2)$ es también ortogonal a $(-3, -6)$.

Como $(-2, 1) \perp (1, 2)$, entonces $(-2, 1) \perp (-3, -6)$.

3. Halle un vector que sea ortogonal a $(1,2)$ y $(3,5)$.

Solución

Como $(1,2)$ y $(3,5)$ no son paralelos, entonces el único vector ortogonal a ambos es $(0,0)$.

4. Halle un vector que sea ortogonal a $(3,1,1)$.

Solución

Consideremos el vector $(1,0,z)$.

$(1,0,z) \perp (3,1,1)$ si y sólo si $(1,0,z) \cdot (3,1,1) = 0$

$$\Rightarrow 1(3) + 0(1) + z(1) = 0$$

$$\Rightarrow z = -3$$

Luego, el vector $(1,0,-3)$ es ortogonal a $(3,1,1)$.

5. Halle un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $(3,1,1)$ y $(6,2,2)$.

Solución

$(6,2,2) = 2(3,1,1)$. Luego, $(6,2,2)$ y $(3,1,1)$ son paralelos.

Como $(1,0,-3) \perp (3,1,1)$, entonces $(1,0,-3) \perp (6,2,2)$.

6. Halle un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a $(3,1,1)$ y a $(2,1,5)$.

Solución

Un vector ortogonal a $(3,1,1)$ y $(2,1,5)$ es $(3,1,1) \times (2,1,5)$, es decir,

$$(3,1,1) \times (2,1,5) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= i(5-1) - j(15-2) + k(3-2) = 4i - 13j + k$$

$$= (4, -13, 1)$$

7. Sean los puntos $P(5/2, 5)$, $Q(1/3, 13/4)$, $R(-16/5, 7/2)$ y $S(x, y)$. Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ representan el mismo vector. Halle $S(x, y)$.

Solución

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{4}\right) - \left(\frac{5}{2}, 5\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2}, \frac{13}{4} - 5\right) = \left(-\frac{13}{6}, -\frac{7}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (x, y) - \left(-\frac{16}{5}, \frac{7}{2}\right) = \left(x + \frac{16}{5}, y - \frac{7}{2}\right)$$

Luego,

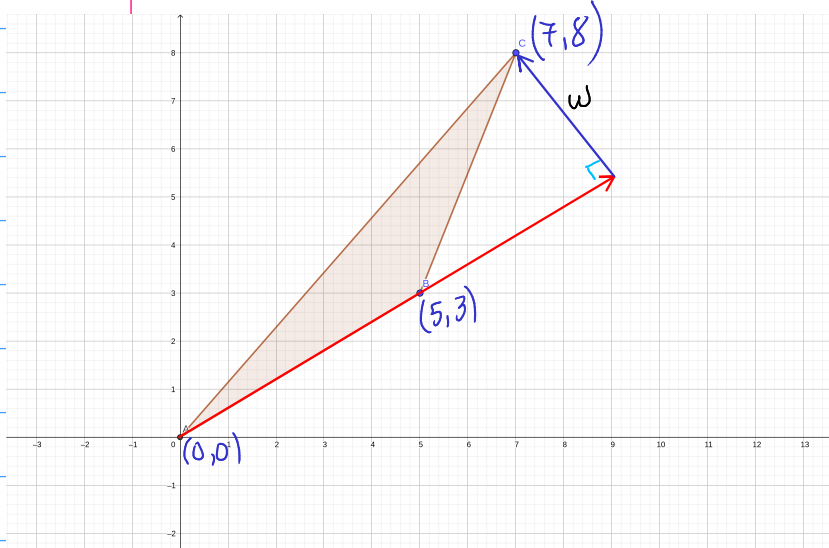
$$x + \frac{16}{5} = -\frac{13}{6} \Rightarrow x = -\frac{16}{5} - \frac{13}{6} = \frac{-96 - 65}{30} = \frac{-161}{30}$$

$$y - \frac{7}{2} = -\frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{2} - \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

8. Use el concepto de proyección de un vector sobre otro para calcular el área del triángulo cuyos vértices son
a) $A = (0, 0)$, $B = (5, 3)$, $C = (7, 8)$.

b) $A = (-2, -3)$, $B = (3, 2)$, $C = (-1, 5)$.

Solución



$$u = \overrightarrow{AC} = (7, 8) - (0, 0) = (7, 8)$$

$$v = \overrightarrow{AB} = (5, 3) - (0, 0) = (5, 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Proy}_v u &= \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v \\ &= \frac{35 + 24}{25 + 9} (5, 3) \\ &= \frac{59}{34} (5, 3) \end{aligned}$$

$$w = u - \text{Proy}_v u = (7, 8) - \frac{59}{34} (5, 3) = (7, 8) - \left(\frac{295}{34}, \frac{177}{34}\right)$$

$$= \left(7 - \frac{295}{34}, 8 - \frac{177}{34} \right) = \left(-\frac{57}{34}, \frac{95}{34} \right) = \frac{1}{34} (-57, 95)$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|v\| \|w\| = \frac{1}{2} \sqrt{34} \left(\frac{1}{34} \sqrt{57^2 + 95^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{34}} \sqrt{12274} = 9.5$$

9. Verifique la desigualdad triangular con los vectores $x = (-2, 0, 2, 1)$, $y = (0, 0, 3, 7)$

Solución

Tenemos

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + 0 + 2^2 + 1} = 3$$

$$\|y\| = \sqrt{0 + 0 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{58} = 7.6$$

$$\|x+y\| = \|(-2, 0, 5, 8)\| = \sqrt{4 + 0 + 25 + 64} = \sqrt{93} = 9.6$$

De donde se deduce :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

∴ Se verifica la desigualdad triangular.