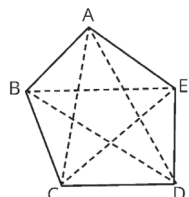




POLÍGONOS

Polígono é uma porção do plano limitada por uma linha fechada simples, formada somente por segmentos de reta.

Veja um exemplo de polígono:



Os pontos A, B, C, D e E são chamados de **vértices**.

Num polígono, os segmentos que unem dois vértices consecutivos são chamados de **lados**.

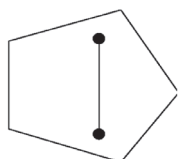
No polígono apresentado na figura, os lados são: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$.

As **diagonais** são os segmentos que unem dois vértices não consecutivos.

CONVEXIDADE DO POLÍGONO

POLÍGONO CONVEXO

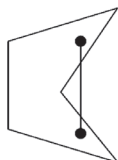
É quando, dados dois pontos quaisquer do polígono, o segmento de reta que o une esses dois pontos está inteiramente contido no polígono.



Polígono convexo

POLÍGONO CÔNCAVO

Um polígono é dito côncavo quando é possível escolher dois pontos do polígono, de modo que o segmento de reta que une esses pontos não está inteiramente contido no polígono.



Polígono côncavo

GÊNERO DO POLÍGONO

Um polígono com n lados possui n vértices. O número de lados nos fornece o gênero do polígono. O nome do polígono depende do número de lados. Como a seguir:

3 lados → Triângulo	12 lados → Dodecágono
4 lados → Quadrilátero	13 lados → Tridecágono
5 lados → Pentágono	14 lados → Tetradecágono
6 lados → Hexágono	15 lados → Pentadecágono
7 lados → Heptágono	16 lados → Hexadecágono
8 lados → Octógono	17 lados → Heptadecágono
9 lados → Eneágono	18 lados → Octadecágono
10 lados → Decágono	19 lados → Eneadecágono
11 lados → Undecágono	20 lados → Icoságono

PROEXPLICA

Curiosidade

Googólgon é um polígono com um googol* de lados. Se regular, para todos os efeitos (devido ao seu ângulo de praticamente 180°), tal figura seria praticamente igual a um círculo. Se os lados de um **googólgon** regular tivessem o mesmo comprimento do raio de um próton (aproximadamente $0,8 \times 10^{-15}m$, ou 0,8 femtometros), o raio do polígono seria de aprox. $1,27 \times 10^{84}m$, e sua área de $5,09 \times 10^{168}m^2$.

Para se ter uma ideia da ordem de grandeza desta figura, o diâmetro do Sol é de "apenas" $1,39 \times 10^9m$, ou 1,39 gigametros, e o comprimento estimado do universo visível (distância percorrida pela luz desde o Big Bang) é de $1,37 \times 10^{26}m$, ou 13,7 bilhões de anos-luz. Em relação à área, o disco da Via Láctea tem uma superfície de cerca de $7 \times 10^{41}m^2$.

Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre.

*O **googol** (lê-se gugol - sua forma de escrita em Portugal) é o número 10^{100} , ou seja, o dígito 1 seguido de cem zeros.

NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO CONVEXO

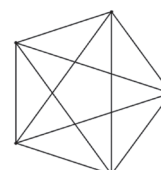
O número de diagonais de um polígono é dado pela fórmula

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Vale ressaltar que o triângulo não possui diagonais mas em todo polígono com quatro ou mais lados é possível calcular a quantidade de diagonais do polígono levando em conta apenas o seu número de lados.

Para isso vamos observar que num polígono a quantidade de diagonais que parte de qualquer um de seus vértices é sempre a mesma.

Observe o pentágono abaixo:



Não importa o vértice que você escolha, sempre partirá dele duas diagonais.

Isso ocorre com qualquer polígono!

Num polígono com n lados quantas diagonais partem de cada vértice?

Lados	Diagonais que partem de um vértice
4	1
5	2
6	3
...	...
n	$n - 3$

Você consegue explicar o motivo dessa relação?

Uma diagonal é o segmento que une dois vértices não consecutivos. Por isso, se temos n vértices formamos $n - 3$ diagonais pois esse vértice não pode ser ligado ao seus vértices consecutivos (um de cada lado) e nem nele próprio.

Dessa forma, fica bastante simples obtermos uma fórmula para o cálculo do total de diagonais de um polígono.

Como o número de vértices é igual ao número de lados do polígono, segue que teremos, com extremidade nos n vértices:

$$d = n \cdot (n - 3)$$

Mas isso não nos dá ainda a fórmula que estamos procurando pois como sabemos que uma diagonal tem extremidades em dois vértices estamos então contando duas vezes cada diagonal. Para resolvermos esse problema basta dividirmos por dois a fórmula anterior:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

A soma dos ângulos internos de um polígono, medida em graus, é dada pela fórmula:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Demonstração:

De forma geral, um polígono convexo pode ser decomposto em triângulos se traçarmos as diagonais a partir de qualquer um de seus vértices:

Observe a figura abaixo:



Note que existe uma relação entre a quantidade de lados do polígono e a quantidade de triângulos que podem formar. Veja a tabela abaixo:

Lados	Triângulos
4	2

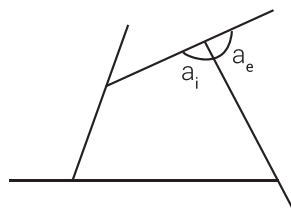
5	3
6	4
7	5
8	6
...	...
n	$n - 2$

Observe que a soma dos ângulos internos do polígono é a soma dos ângulos internos de todos os triângulos obtidos na decomposição proposta.

Dessa forma, temos que a soma dos ângulos internos do polígono pode ser obtida por $S_i = 180^\circ \cdot (n - 2)$.

PROEXPLICA

Cada vértice de um polígono convexo possui um ângulo interno (a_i) e um ângulo externo (a_e), que são suplementares, isto é, $a_i + a_e = 180^\circ$

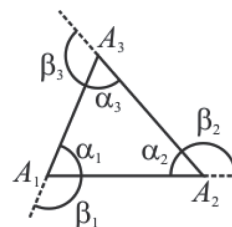


SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é sempre 360° , independente do número de lados do polígono.

$$S_e = 360^\circ$$

Demonstração:



Observe inicialmente o triângulo. Note que em cada vértice a junção do ângulo interno e do ângulo externo gera um ângulo raso (180°).

Dessa forma, para obtermos a soma dos ângulos externos podemos escrever as seguintes equações:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$$

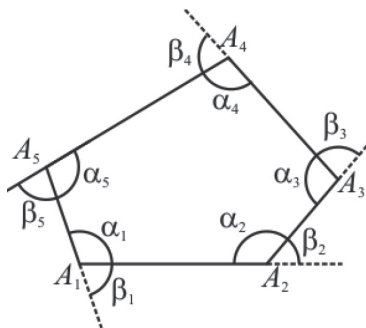
Somando, membro a membro, obtemos:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 540^\circ$$

Sabemos que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^\circ$ portanto $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 360^\circ$.

Será que isso vale para todos os polígonos?
Queremos mostrar que sim!



E para isso, utilizaremos a mesma ideia exposta acima. Escreveremos as equações para todos os vértices de um polígono de n lados:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 180^\circ$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$$

$$\dots$$

$$\alpha_n + \beta_n = 180^\circ$$

Somando, membro a membro, obtemos:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 + \dots + \alpha_n + \beta_n = 180^\circ + 180^\circ + \dots + 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 180^\circ \cdot n$$

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por:

$$S_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = 180^\circ \cdot (n - 2).$$

Substituindo na equação, temos:

$$180^\circ \cdot (n - 2) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 180^\circ \cdot n$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 180^\circ \cdot n$$

$$180^\circ \cdot n - 360^\circ + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n - 180^\circ \cdot n = 0^\circ$$

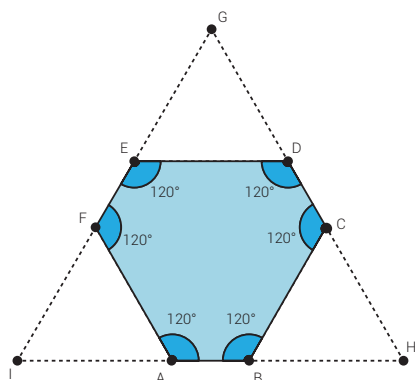
$$-360^\circ + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 0^\circ$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

POLÍGONO EQUIÂNGULO

Um polígono é chamado de equiângulo, quando possui todos os ângulos internos congruentes entre si. Dessa forma, todos seus ângulos externos também serão congruentes entre si.



O polígono equiângulo ABCDEF

MEDIDA DE CADA ÂNGULO INTERNO DO POLÍGONO EQUIÂNGULO

Acabamos de ver que o polígono equiângulo possui todos os ângulos internos congruentes entre si, isto é, com a mesma medida. Logo a medida de cada ângulo interno será a soma de todos os ângulos internos, dividido pelo número de ângulos internos.

$$\text{Então, } a_i = \frac{S_i}{n}.$$

Como $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$, segue que a medida de cada ângulo interno é dada por $a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$.

MEDIDA DE CADA ÂNGULO EXTERNO DO POLÍGONO EQUIÂNGULO

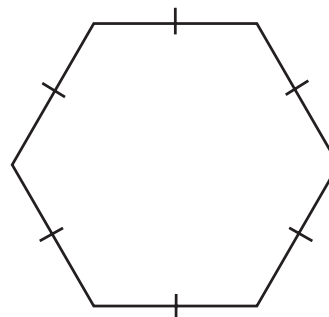
Vimos que o polígono equiângulo, além de possuir todos os ângulos internos congruentes entre si, também possui todos seus ângulos externos congruentes entre si. Usando o mesmo raciocínio,

temos que a medida de cada ângulo externo será $a_e = \frac{S_e}{n}$.

Como podemos escrever que a medida de cada ângulo externo é dada por $a_e = \frac{360^\circ}{n}$.

POLÍGONO EQUILÁTERO

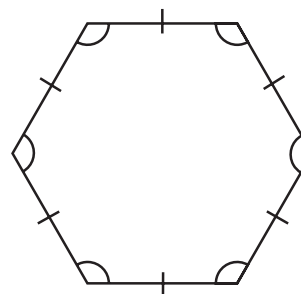
Um polígono é chamado de equilátero quando possui todos os lados congruentes entre si.



Polígono equilátero

POLÍGONO REGULAR

Quando o polígono for equiângulo e equilátero ao mesmo tempo.



Polígono regular

PROEXPLICA

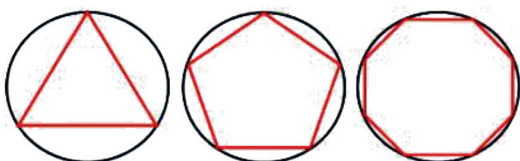
Note que o polígono regular é equiângulo, logo possui todos os ângulos internos congruentes entre si, e todos ângulos externos congruentes entre si. Dessa forma, no polígono regular também podemos dizer que:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ e } a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

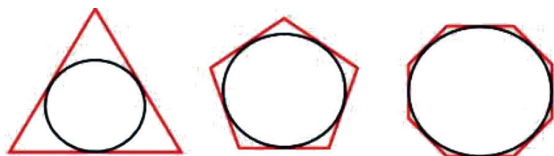
Além disso, quando já se conhece a medida de um desses dois, para calcular a medida do outro, basta lembrar que juntos eles representam meia-volta, isto é 180°

$$a_i + a_e = 180^\circ$$

Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.



Todo polígono regular é circunscritível em uma circunferência.



DIAGONAIS QUE PASSAM PELO CENTRO DE UM POLÍGONO REGULAR

O número de diagonais (d_c) que passam pelo centro de um polígono regular depende do número de lados, e é dado por:

$$d_c = \begin{cases} 0, \text{ quando } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, \text{ quando } n \text{ é par} \end{cases}$$

Isto é, quando o polígono regular tem um número ímpar de lados, o número de diagonais que passam pelo seu centro é zero, ou seja, não existem diagonais passando pelo centro. Exemplos de polígonos regulares com número ímpar de lados: triângulo equilátero, pentágono regular, heptágono regular etc.

Quando o número de lados é par, o número de diagonais que passam pelo centro do polígono regular é a metade do número de lados. Dessa forma, por exemplo, no quadrado o número de lados é 4, então o número de diagonais que passam pelo seu centro é 2. No hexágono regular o número de lados é 6, então o número de diagonais que passam pelo seu centro é 3.

Exemplos:

01. Em um hexágono regular:

- Quantas diagonais partem de cada vértice?
- Qual o total de diagonais?
- Quanto vale a soma dos ângulos internos?
- Quanto vale a soma dos ângulos externos?
- Quanto vale a medida de cada ângulo interno?
- Quanto vale a medida de cada ângulo externo?
- Quantas diagonais passam pelo seu centro?

Resolução:

a) Quantas diagonais partem de cada vértice?

O número de diagonais que partem de cada vértice de um polígono convexo é dada por $n - 3$, pois devemos desconsiderar os vértices consecutivos e o próprio vértice, dessa forma, no hexágono de cada vértice partem 3 diagonais.

b) Qual o total de diagonais?

O total de diagonais é obtido a partir da seguinte fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Como no hexágono $n = 6$ é fácil ver que

$$d = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

c) Quanto vale a soma dos ângulos internos?

A soma dos ângulos internos pode ser obtida a partir da fórmula $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Como no hexágono $n = 6$, temos que $S_i = (6 - 2) \cdot 180^\circ = (4) \cdot 180^\circ = 720^\circ$

d) Quanto vale a soma dos ângulos externos?

A soma dos ângulos externos sempre vale 360° .

e) Quanto vale a medida de cada ângulo interno?

Para obter a medida de cada ângulo interno basta dividir a soma dos ângulos internos por seis, visto que o hexágono possui seis ângulos internos e são todos congruentes.

Dessa forma, temos que $a_i = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

f) Quanto vale a medida de cada ângulo externo?

Para obter a medida de cada ângulo externo basta dividir a soma dos ângulos externos por seis, visto que o hexágono possui seis ângulos externos e são todos congruentes.

Dessa forma, temos que $a_e = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Um outro caminho é perceber que o ângulo interno e o externo são suplementares.

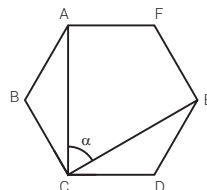
g) Quantas diagonais passam pelo seu centro?

A quantidade de diagonais que passa pelo centro de um polígono regular é

$$\text{dada por } d_c = \begin{cases} 0, \text{ quando } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{2}, \text{ quando } n \text{ é par} \end{cases}$$

No caso do hexágono, temos que $n = 6$, portanto $d_c = \frac{6}{2} = 3$.

02. O hexágono ABCDEF da figura é regular.



Calcule a medida do ângulo α assinalado.

Resolução:

Sabemos que $\overline{AB} = \overline{BC}$ e que o ângulo $\hat{ABC} = 120^\circ$. Dessa forma, é fácil perceber que os ângulos $\hat{BAC}$ e $\hat{BCA}$ medem 30° .

Como os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDE$ são congruentes, sabemos que $\hat{ECD} = 30^\circ$.

Portanto, como o ângulo $\hat{BCD} = \hat{BCA} + \hat{ACE} + \hat{ECD}$ temos que $120^\circ = 30^\circ + \hat{ACE} + 30^\circ \rightarrow \hat{ACE} = 60^\circ$.

03. A,B,C,D e E são, nessa ordem, vértices consecutivos de um pentágono regular ABCDE as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ cortam-se em P. Calcule a medida do ângulo $\hat{CPD}$.

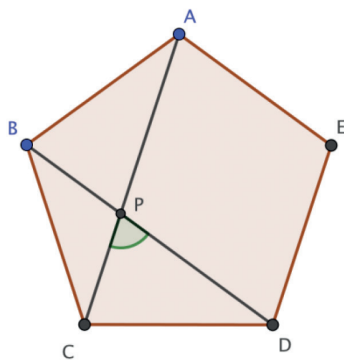
Resolução:

Como temos um pentágono regular podemos determinar os ângulos $\hat{BDC}$ e $\hat{ACD}$ facilmente, pois sabemos que cada ângulo interno do pentágono vale 108° .

Observe que o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles como $\hat{B} = 108^\circ$ temos que $\hat{ACB} = 36^\circ$ daí concluímos que $\hat{ACD} = 72^\circ$.

De forma análoga ao caso anterior temos que o triângulo $\triangle BDC$ é isósceles e o ângulo $\hat{BDC} = 36^\circ$.

Observe a figura abaixo:

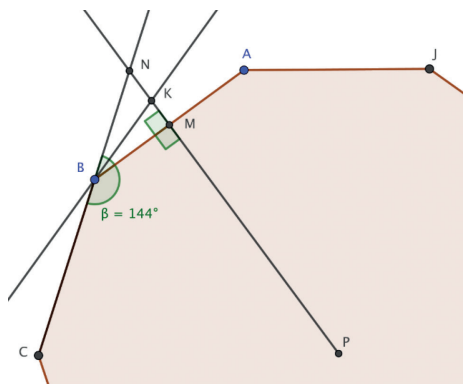


Queremos calcular o ângulo $\hat{CPD}$ e como já sabemos que $\hat{PDC} = 36^\circ$ e $\hat{PCD} = 72^\circ$ podemos concluir que $\hat{CPD} = 72^\circ$ pois a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° .

04. A,B,C,D,E,F,G,H,I e J são, nessa ordem, vértices consecutivos de um decágono regular. Calcule a medida do menor ângulo formado pela mediatriz de AB com a bissetriz externa de $\hat{B}$.

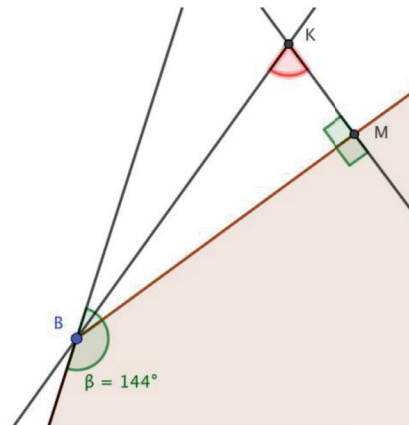
Resolução:

Observe parte do decágono regular representado abaixo:



Sabemos que os ângulos internos medem 144° e os externos 36° . Dessa forma, após o esboço, percebe-se que o ângulo que procuramos é o ângulo $\hat{BKM}$. Note que o ângulo $\hat{KBM} = 18^\circ$ pois é obtido a partir da bissetriz do ângulo externo de $\hat{B}$ e, o ângulo $\hat{KMB} = 90^\circ$ pois é formado pela mediatriz de $\overline{AB}$.

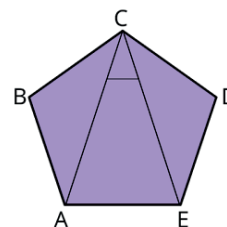
Assim concluímos que o ângulo que procuramos vale 72° pois a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° .

**EXERCÍCIOS PROTREINO**

01. Calcule a soma dos ângulos internos de um decágono.
02. Determine o nome do polígono cuja soma dos ângulos internos é 2160° .
03. Encontre o número de diagonais de um eneadeágono.
04. Calcule o número de diagonais de um polígono cujo ângulo interno mede 135° .
05. A razão entre o ângulo interno e o ângulo externo de um polígono convexo é 8. Determine o número de diagonais do polígono.

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

01. (UNITAU) A medida de cada ângulo externo de um polígono regular convexo que apresenta 54 diagonais é
a) 12° b) 18° c) 20° d) 24° e) 30°
02. (PUCRJ)



Considere o pentágono regular ABCDE. Quanto vale o ângulo ACE?

- a) 24° b) 30° c) 36° d) 40° e) 45°

03. (ENEM)

Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br>. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

- a) 45° .
- b) 60° .
- c) 90° .
- d) 120° .
- e) 180° .

04. (ENEM) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

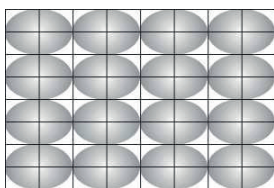


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

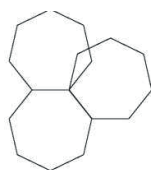


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

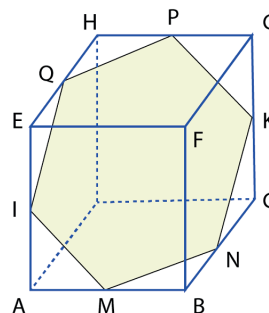
Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

- a) Triângulo.
- b) Quadrado.
- c) Pentágono.
- d) Hexágono.
- e) Eneágono.

05. (ENEM) Um artista utilizou uma caixa cúbica transparente para a confecção de sua obra, que consistiu em construir um polígono IMNKPQ, no formato de um hexágono regular, disposto no interior da caixa. Os vértices desse polígono estão situados em pontos médios de arestas da caixa.

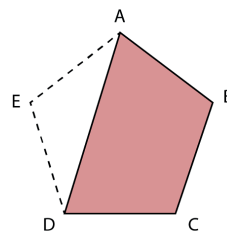
Um pedaço da sua obra pode ser visto na figura.



Considerando as diagonais do hexágono, distintas de IK, quantas têm o mesmo comprimento de IK?

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 8
- e) 0

06. (ENEM) Um gessoiro que trabalhava na reforma de uma casa lidava com placas de gesso com formato de pentágono regular quando percebeu que uma peça estava quebrada, faltando uma parte triangular, conforme mostra a figura.

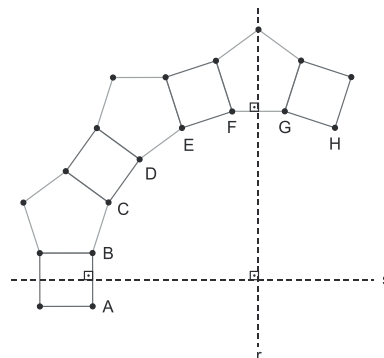


Para recompor a peça, ele precisou refazer a parte triangular que faltava e, por isso, anotou as medidas dos ângulos $x = \widehat{EAD}$, $y = \widehat{EDA}$ e $z = \widehat{AED}$ do triângulo ADE.

As medidas x , y e z , em graus, desses ângulos são, respectivamente,

- a) 18, 18 e 108.
- b) 24, 48 e 108.
- c) 36, 36 e 108.
- d) 54, 54 e 72.
- e) 60, 60 e 60.

07. (UERJ) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir.



Acrescentam-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular ABCDEFGH...A, que possui dois eixos de simetria indicados pelas retas r e s . Se as retas perpendiculares r e s são mediatrizes dos lados AB e FG, o número de lados do polígono ABCDEFGH...A é igual a:

- a) 18
- b) 20
- c) 24
- d) 30

08. (UECE) Se a partir de cada um dos vértices de um polígono convexo com n lados podemos traçar tantas diagonais quanto o total das diagonais de um hexágono convexo, então, o valor de n é

- a) 9
- b) 10
- c) 11
- d) 12

09. (UECE) Se, em um polígono convexo, o número de lados n é um terço do número de diagonais, então o valor de n é

- a) 9.
- b) 11.
- c) 13.
- d) 15.

10. (UERJ)

Física para poetas

O ensino da física sempre foi um grande desafio. Nos últimos anos, muitos esforços foram feitos com o objetivo de ensiná-la desde as séries iniciais do ensino fundamental, no contexto do ensino de ciências. Porém, como disciplina regular, a física aparece no ensino médio, quando se torna "um terror" para muitos estudantes.

Várias pesquisas vêm tentando identificar quais são as principais dificuldades do ensino de física e das ciências em geral. Em particular, a queixa que sempre se detecta é que os estudantes não conseguem compreender a linguagem matemática na qual, muitas vezes, os conceitos físicos são expressos. Outro ponto importante é que as questões que envolvem a física são apresentadas fora de uma contextualização do cotidiano das pessoas, o que dificulta seu aprendizado. Por fim, existe uma enorme carência de professores formados em física para ministrar as aulas da disciplina.

As pessoas que vão para o ensino superior e que não são da área de ciências exatas praticamente nunca mais têm contato com a física, da mesma maneira que os estudantes de física, engenharia e química poucas vezes voltam a ter contato com a literatura, a história e a sociologia. É triste notar que a especialização na formação dos indivíduos costuma deixá-los distantes de partes importantes da nossa cultura, da qual as ciências físicas e as humanidades fazem parte.

Mas vamos pensar em soluções. Há alguns anos, ofereço um curso chamado "Física para poetas". A ideia não é original – ao contrário, é muito utilizada em diversos países e aqui mesmo no Brasil. Seu objetivo é apresentar a física sem o uso da linguagem matemática e tentar mostrá-la próxima ao cotidiano das pessoas. Procuro destacar a beleza dessa ciência, associando-a, por exemplo, à poesia e à música.

Alguns dos temas que trabalho em "Física para poetas" são inspirados nos artigos que publico. Por exemplo, ⁵"A busca pela compreensão cósmica" é uma das aulas, na qual apresento a evolução dos modelos que temos do universo. Começando pelas visões místicas e mitológicas e chegando até as modernas teorias cosmológicas, falo sobre a busca por responder a questões sobre

a origem do universo e, consequentemente, a nossa origem, para compreendermos o nosso lugar no mundo e na história.

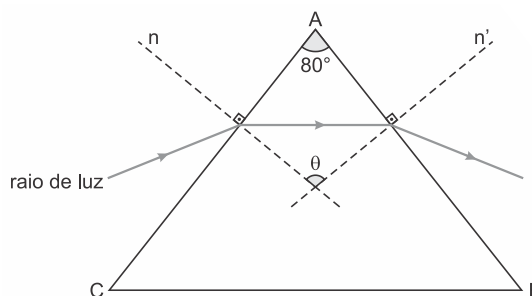
Na aula "Memórias de um carbono", faço uma narrativa de um átomo de carbono contando sua história, em primeira pessoa, desde seu nascimento, em uma distante estrela que morreu há bilhões de anos, até o momento em que sai pelo nariz de uma pessoa respirando. Temas como astronomia, biologia, evolução e química surgem ao longo dessa aula, bem como as músicas "Átimo de pó" e "Estrela", de Gilberto Gil, além da poesia "Psicologia de um vencido", de Augusto dos Anjos.

Em "O tempo em nossas vidas", apresento esse fascinante conceito que, na verdade, vai muito além da física: está presente em áreas como a filosofia, a biologia e a psicologia. Algumas músicas de Chico Buarque e Caetano Veloso, além de poesias de Vinícius de Moraes e Carlos Drummond de Andrade, ajudaram nessa abordagem. Não faltou também "Tempo Rei", de Gil.

A arte é uma forma importante do conhecimento humano. Se músicas e poesias inspiram as mentes e os corações, podemos mostrar que a ciência, em particular a física, também é algo inspirador e belo, capaz de criar certa poesia e encantar não somente aos físicos, mas a todos os poetas da natureza.

Adilson de Oliveira. Adaptado de cienciahoje.org.br, 08/08/2016.

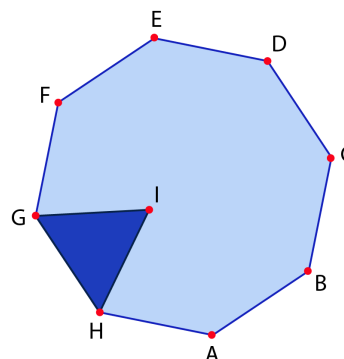
Na imagem a seguir, o triângulo ABC representa uma seção plana paralela à base de um prisma reto. As retas n e n' são perpendiculares aos lados AC e AB, respectivamente, e $\widehat{BAC} = 80^\circ$.



A medida do ângulo θ entre n e n' é:

- a) 90°
- b) 100°
- c) 110°
- d) 120°

11. (ENEM) As Artes Marciais Mistas, tradução do inglês: *MMA – mixed martial arts*, são realizadas num octógono regular. De acordo com a figura, em certo momento os dois lutadores estão respectivamente nas posições G e F, e o juiz está na posição I. O triângulo IGH é equilátero e $\widehat{GIF}$ é o ângulo formado pelas semirretas com origem na posição do juiz, respectivamente passando pelas posições de cada um dos lutadores.



A medida do ângulo $\widehat{GIF}$ é

- a) 120°
- b) 75°
- c) $67,5^\circ$
- d) 60°
- e) $52,5^\circ$

12. (PUCSP 2018) Atribui-se aos pitagóricos a ideia de números figurados. Esses números expressam configurações geométricas e representam um elo entre a geometria e a aritmética. A tabela mostra alguns desses números e suas respectivas expressões algébricas gerais, em que n é um número natural diferente de zero.

Números figurados	Oblongos	Pentagonais	Hexagonais
Expressões algébricas gerais	$n(n+1)$	$\frac{n(3n-1)}{2}$	$2n^2 - n$

Fonte: Carl B. Boyer: História da matemática - Editora Edgar Blücher - 1974 (Adaptado)

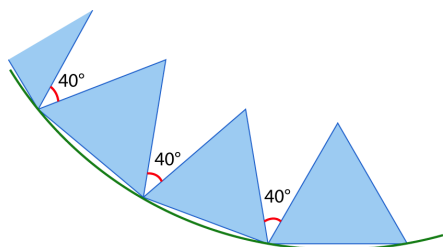
Sabendo que para determinado valor de n , o número pentagonal correspondente possui 3 unidades a menos que o número hexagonal, então, o valor do número oblongo que corresponde ao dobro do valor de n é

- a) 18. b) 26. c) 34 d) 42. e) 51

13. (CFT) Se a razão entre o número de diagonais d e de lados n , com $n > 3$, de um polígono, é um número inteiro positivo, então o número de lados do polígono:

- a) é sempre par
b) é sempre ímpar
c) é sempre múltiplo de 3
d) não existe
e) é sempre primo

14. (UFRGS) Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40° , como indicado na figura. Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

- a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 16.
e) 18.

15. (UECE 2010) Sejam P e Q polígonos regulares. Se P é um hexágono e se o número de diagonais do Q , partindo de um vértice, é igual ao número total de diagonais de P então a medida de cada um dos ângulos internos de Q é

- a) 144 graus.
b) 150 graus.
c) 156 graus.
d) 162 graus.

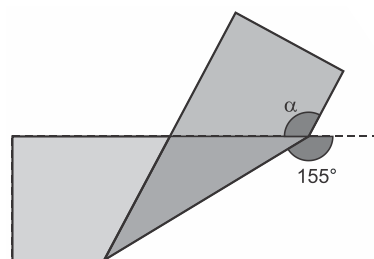
16. (UECE) Considere $WXYZ$ um pentágono regular e XYO um triângulo equilátero em seu interior (o vértice O está no interior do pentágono). Nessas condições, a medida, em graus, do ângulo $XÔZ$ é

- a) 116
b) 96
c) 126
d) 106

17. (UECE) No quadrilátero $XYZW$ as medidas dos ângulos internos Z e W são respectivamente 128 graus e 76 graus. Se as bissetrizes dos ângulos internos X e Y cortam-se no ponto O , pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo $XÔY$ é igual a

- a) 156 graus.
b) 78 graus.
c) 204 graus.
d) 102 graus.

18. (CFTRJ) Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



O valor do ângulo α marcado na figura é

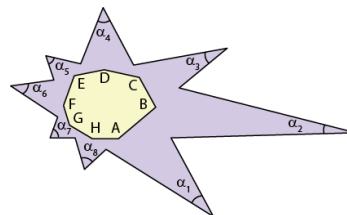
- a) 155°
b) 150°
c) 140°
d) 130°

19. (ENEM) Um fabricante planeja colocar no mercado duas linhas de cerâmicas para revestimento de pisos. Diversas formas possíveis para as cerâmicas foram apresentadas e decidiu-se que o conjunto P de formas possíveis seria composto apenas por figuras poligonais regulares.

Duas formas geométricas que fazem parte de P são

- a) triângulo e pentágono.
b) triângulo e hexágono.
c) triângulo e octógono.
d) hexágono e heptágono.
e) hexágono e octógono.

20. (USP) Prolongando-se os lados de um octógono convexo $ABCDEFGH$, obtém-se um polígono estrelado, conforme a figura.



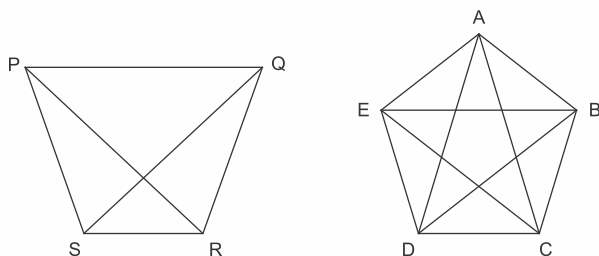
A soma $\alpha_1 + \dots + \alpha_8$ vale

- a) 180° . b) 360° . c) 540° . d) 720° . e) 900° .



EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01. (CP2) Nas figuras abaixo, estão representados dois polígonos convexos e suas respectivas diagonais:



O quadrilátero PQRS possui 2 diagonais e o pentágono ABCDE possui 5 diagonais.

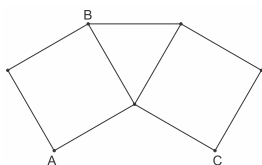
a) Observe a tabela e preencha a última linha.

Quantidade de vértices do polígono	Quantidade de diagonais que partem de cada vértice	Quantidade total de diagonais
3	0	0
4	1	2
5	2	5
6	3	9
7	4	14
n		

b) Quantos vértices possui um polígono convexo que tem 252 diagonais?

02. Determine os ângulos de um quadrilátero convexo, sabendo que eles medem x , $2x$, $3x$ e $4x$.

03. (FGVRJ) A figura abaixo mostra dois quadrados e um triângulo equilátero entre eles.



Determine os ângulos internos do triângulo ABC.

04. (CFTCE) Um polígono regular tem 4 lados mais que outro, e o seu ângulo interno excede de 15° do outro. Quais são esses polígonos?

05. (UFU) Sabendo-se que um polígono regular de n lados está inscrito num círculo de raio 1 e que o polígono possui 9 diagonais, encontre a medida do comprimento de seu lado.

GABARITO

▶ EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 01. E | 05. B | 09. A | 13. B | 17. D |
| 02. C | 06. C | 10. B | 14. E | 18. D |
| 03. D | 07. B | 11. E | 15. B | 19. B |
| 04. B | 08. D | 12. D | 16. C | 20. B |

★ EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

01.

a) Completando a tabela: LINHA 6, COLUNA 1: n ; COLUNA 2: $(n-3)$; COLUNA 3: $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$;

b) Fazendo os cálculos, tem-se: $n = 24$

02. $x = 36^\circ$, $2x = 72^\circ$, $3x = 108^\circ$ e $4x = 144^\circ$.

03. $60^\circ; 75^\circ; 45^\circ$

04. Octógono e dodecágono

05. $\ell = 1$

ANOTAÇÕES

[illegible]