

POLIEDRO – DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Estamos começando nosso estudo na parte da Geometria Espacial. Entendemos por poliedro toda aquela figura geométrica de três dimensões, delimitada por polígonos. Os poliedros têm como elementos principais:

Face: cada um dos polígonos que forma o poliedro.

Aresta: Segmento de reta onde temos o encontro entre duas faces

Vértice: Ponto de encontro entre as arestas.

Observação Importante: Não são poliedros os sólidos que possuem formas arredondadas como os cones, esferas e cilindros.

POLIEDRO CONVEXO

Um poliedro é chamado convexo, em relação a uma de suas faces, se ele está totalmente contido no mesmo semiespaço determinado por esta mesma face.

POLIEDRO CÔNCAVO

É aquele poliedro que não está totalmente contido em um mesmo semiespaço em relação a uma das faces. Podemos interpretar também que é o poliedro que possui concavidade, ou seja, possui abertura na sua composição.

POLIEDRO REGULAR

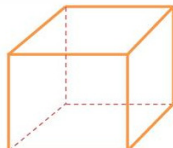
É um poliedro formado por arestas que são congruentes (possuem a mesma medida). O mesmo acontecerá entre os ângulos das faces. Desta forma, todas as suas faces serão polígonos regulares, ou seja, terão todos os lados congruentes, tal como os seus ângulos internos. Dentre eles, destacam-se os chamados de Poliedros de Platão, que são abordados nesta tabela abaixo:

Nome	Tipo de Face	Número de Faces	Número de Arestas	Números de Vértices
Tetraedro	Triângulo	4	6	4
Hexaedro	Quadrilátero	6	12	8
Octaedro	Triângulo	8	12	6
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20
Icosaedro	Triângulo	20	30	12

Observe as figuras abaixo:



Tetraedro Regular



Hexaedro Regular



Octaedro Regular



Dodecaedro Regular



Icosaedro Regular

RELAÇÃO DE EULLER E OUTRAS RELAÇÕES

Relação que foi criada pelo matemático de origem alemã/suíça Leonhard Euler, é uma sentença muito importante para relacionarmos o número de faces, arestas ou faces de qualquer poliedro convexo. Sendo F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas, teremos que:

$$V + F = A + 2$$

Outra relação de extrema importância e muito utilizada nas questões de poliedros convexos envolve o número de arestas com o número de faces (não envolve, portanto, o número de vértices). A diferença é que nessa segunda relação, trabalhamos de forma individual com cada face de natureza distinta. Assim, sendo A o número de faces, F_3 o número de faces triangulares, F_4 o número de faces quadrangulares, F_5 o número de faces pentagonais e assim sucessivamente, teremos que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Também temos uma relação entre o número de arestas e o número de vértices, seguindo a mesma lógica:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

NÚMERO TOTAL DE DIAGONAIS DE UM POLIEDRO

Podemos calcular o número de diagonais de um poliedro de maneira bem simples. Para tal, devemos contabilizar o número de maneiras de se escolher 2 vértices entre o total de vértices à disposição. Posteriormente subtraímos os segmentos que não forma diagonais do poliedro, ou seja: as arestas e as diagonais das faces. Assim, teremos que:

$$D_{\text{POLIEDRO}} = \frac{V \cdot (V-1)}{2} - A - d_{\text{FACES}}$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE TODAS AS FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO

Podemos também calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro. Para isso, devemos utilizar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para cada gênero de polígono. Desenvolvendo essa teoria, chegaremos à seguinte fórmula a seguir:

$$Si_{\text{POLIEDRO}} = 360^\circ \cdot (V - 2)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UNIMONTES) Um poliedro convexo tem como faces um pentágono, dois quadrados e cinco triângulos. Esse poliedro tem:

- a) 28 arestas e 16 vértices
- b) 14 arestas e 8 vértices
- c) 8 arestas e 14 vértices
- d) 16 arestas e 28 vértices

Resolução: B

Neste poliedro, temos:

$$F_3 = 5; F_4 = 2; F_5 = 1$$

Para encontrar o número de faces deste poliedro, somamos o número de faces que temos de cada formato:

$$F = F_3 + F_4 + F_5$$

$$F = 5 + 2 + 1 \rightarrow F = 8$$

Para descobrir a quantidade de arestas deste poliedro relacionaremos esta quantidade com a quantidade de faces de cada formato:

$$2A = 3 \cdot F_3 + 4F_4 + 5F_5$$

$$2A = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$$

$$2A = 15 + 8 + 5$$

$$2A = 28 \rightarrow A = 14$$

Finalmente, descobriremos a quantidade de vértices do poliedro por meio da utilização da Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$V + 8 = 14 + 2$$

$$V + 8 = 16 \rightarrow V = 8$$

Assim, este poliedro apresenta: 14 arestas e 8 vértices

02. (PUC-PR) Quantas arestas tem um poliedro convexo de faces triangulares em que o número de vértices é $\frac{3}{5}$ do número de faces?

- a) 60
- b) 30
- c) 25
- d) 20
- e) 15

Resolução: B

Temos que todas as faces deste poliedro são triangulares, de forma que $F = F_3$. Assim, utilizando a relação que envolve o número de arestas de um poliedro e a quantidade de faces de cada formato, teremos:

$$2A = 3 \cdot F_3$$

$$2A = 3F \rightarrow A = \frac{3F}{2}$$

Sabemos que o número de vértices é $\frac{3}{5}$ do número de faces.

$$\text{Assim: } V = \frac{3F}{5}$$

Utilizando a relação de Euler, teremos:

$$V + F = A + 2$$

$$\frac{3F}{5} + F = \frac{3F}{2} + 2$$

Multiplicando esta equação por 10, teremos:

$$6F + 10F = 15F + 20 \rightarrow F = 20$$

Para encontrar o número de arestas deste poliedro, faremos:

$$A = \frac{3F}{2} \rightarrow A = \frac{3 \cdot (20)}{2} \rightarrow A = \frac{60}{2} \rightarrow A = 30$$

03. (UNITAU) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo vale 720° . Sabendo-se que o número de faces vale $\frac{2}{3}$ do número de arestas, pode-se dizer que o número de faces vale:

- a) 6
- b) 4
- c) 5
- d) 12
- e) 9

Resolução: A

Inicialmente, podemos descobrir o número de vértices deste poliedro:

$$Si = 360^\circ \cdot (V - 2)$$

$$720^\circ = 360^\circ \cdot (V - 2)$$

$$2 = V - 2$$

$$V = 4$$

Lembrando do fato de que $F = \frac{2A}{3}$, utilizaremos a Relação de Euler:

$$V + F = A + 2$$

$$4 + \frac{2A}{3} = A + 2$$

$$12 + 2A = 3A + 6$$

$$A = 6$$

ANOTAÇÕES