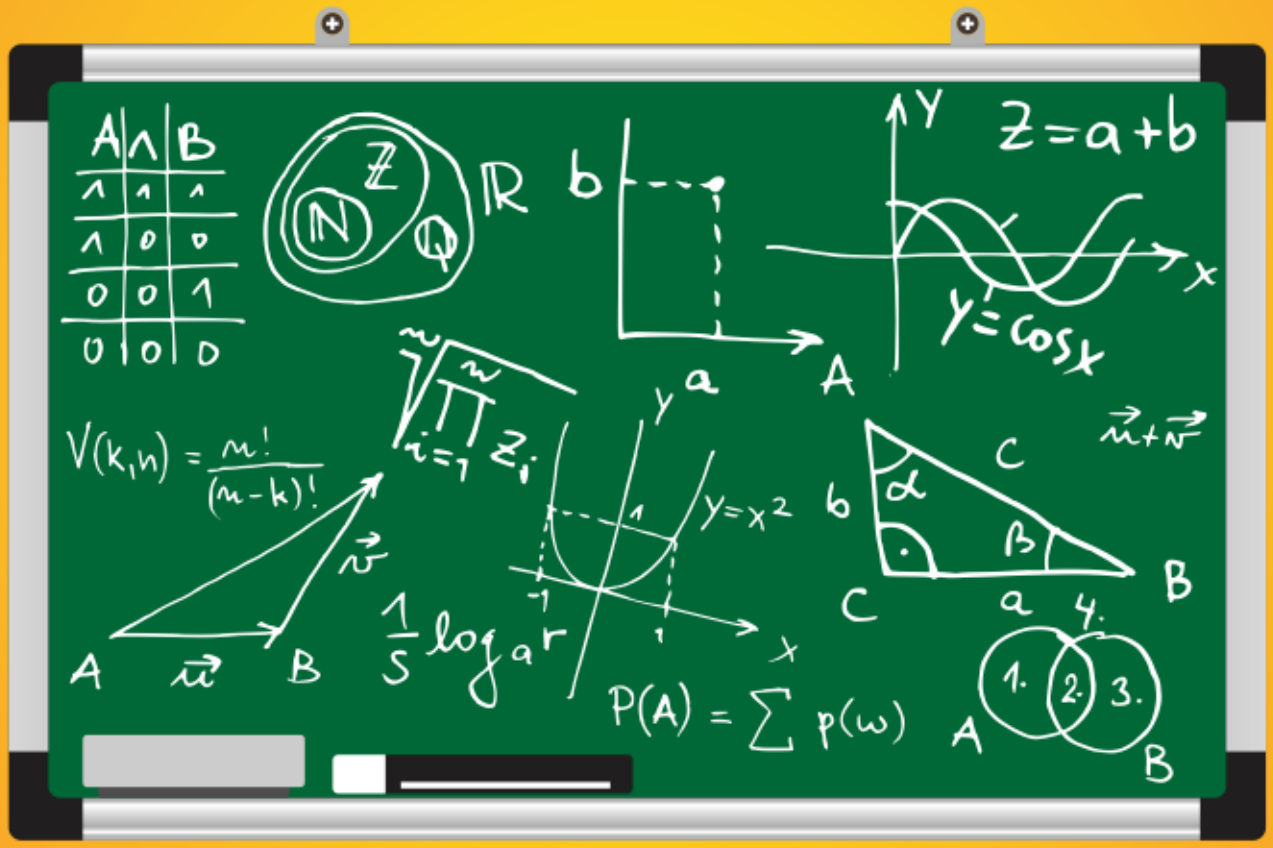
Maxi Educa

www.maxieduca.com.br

Polícia Militar de São Paulo

Matemática





Sumário

1. - Números Inteiros: Operações e Propriedades. 2. - Números Racionais, Representação Fracionária e Decimal: Operações e Propriedades.....**1**
3. - Mínimo Múltiplo Comum.....**23**
4. - Razão e Proporção.....**32**
5. - Porcentagem.....**47**
6. - Regra de Três Simples.....**55**
7. - Média Aritmética.....**60**
8. - Equação do 1º grau.....**64**
9. - Sistema de Equações do 1º grau.....**69**
10. - Sistema Métrico: Medidas de Tempo, Comprimento, Superfície e Capacidade.....**74**
11. - Relações entre Grandezas: Tabelas e Gráficos.....**92**
12. - Noções de Geometria: Forma, Perímetro, Área, Volume, Ângulo, Teorema de Pitágoras.....**108**
13. - Raciocínio Lógico. 14. - Resolução de Situações-Problema.....**125**

Candidatos ao Concurso Público,

O Instituto Maximize Educação disponibiliza o e-mail professores@maxieduca.com.br para dúvidas relacionadas ao conteúdo desta apostila como forma de auxiliá-los nos estudos para um bom desempenho na prova.

As dúvidas serão encaminhadas para os professores responsáveis pela matéria, portanto, ao entrar em contato, informe:

- Apostila (concurso e cargo);

- Disciplina (matéria);

- Número da página onde se encontra a dúvida; e

- Qual a dúvida.

Caso existam dúvidas em disciplinas diferentes, por favor, encaminhá-las em e-mails separados. O professor terá até cinco dias úteis para respondê-la.

Bons estudos!

1. - Números Inteiros: Operações e Propriedades.
2. - Números Racionais, Representação Fracionária e Decimal: Operações e Propriedades

www.maxieduca.com.br

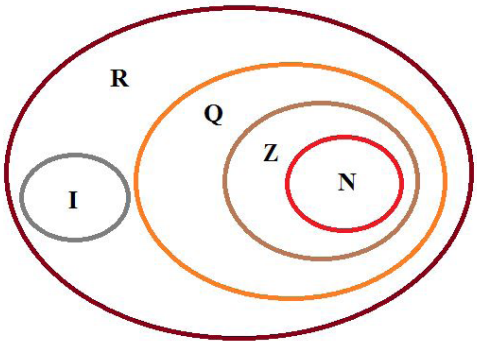
Evandro Marques

Mestre e Graduado em Matemática;
Especialista e Graduado em Direito;
Professor da Rede Estadual Pública de São Paulo.

MAXI Educa

O conjunto dos **números reais** *R* é uma expansão do conjunto dos números racionais que engloba não só os naturais, inteiros e os fracionários, positivos e negativos, mas também todos os números irracionais.

- Números Naturais (N): N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}
- Números Inteiros (Z): Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}
- Números Racionais (Q): Q = {...,1/2, 3/4, –5/4...}
- Números Irracionais (I): I = {...,√2, √3,√7, 3,141592....}



Números Naturais

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula *N* e estes números são construídos com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, que também são conhecidos como algarismos indo-arábicos.

Embora o zero não seja um número natural no sentido que tenha sido proveniente de objetos de contagens naturais, iremos considerá-lo como um número natural uma vez que ele tem as mesmas propriedades algébricas que os números naturais. Na verdade, o zero foi criado pelos hindus na montagem do sistema posicional de numeração para suprir a deficiência de algo nulo.

Na sequência consideraremos que os naturais têm início com o número zero e escreveremos este conjunto como: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$. As reticências (três pontos) indicam que este conjunto não tem fim. *N* é um conjunto com infinitos números.

Excluindo o zero do conjunto dos números naturais, o conjunto será representado por: $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$

- Todo número natural dado tem um sucessor (número que vem depois do número dado), considerando também o zero. Exemplos:

O sucessor de m é m+1.
O sucessor de 0 é 1.
O sucessor de 1 é 2.
O sucessor de 19 é 20.

- Se um número natural é sucessor de outro, então os dois números juntos são chamados números consecutivos. Exemplos:

1 e 2 são números consecutivos.
5 e 6 são números consecutivos.
50 e 51 são números consecutivos.

- Vários números formam uma coleção de números naturais consecutivos se o segundo é sucessor do primeiro, o terceiro é sucessor do segundo, o quarto é sucessor do terceiro e assim sucessivamente. Exemplos:

1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são consecutivos.
5, 6 e 7 **são consecutivos.**
50, 51, 52 e 53 são consecutivos.

- Todo número natural dado *N*, exceto o zero, tem um antecessor (número que vem antes do número dado). Exemplos:

O antecessor do número m é m-1.
O antecessor de 2 é 1.
O antecessor de 56 é 55.
O antecessor de 10 é 9.

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais pares. Embora uma sequência real seja outro objeto matemático denominado função, algumas vezes utilizaremos a denominação sequência dos números naturais pares para representar o conjunto dos números naturais pares: $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$

O conjunto abaixo é conhecido como o conjunto dos números naturais ímpares, às vezes também chamados, a sequência dos números ímpares. $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...\}$

A adição de números naturais

A primeira operação fundamental da Aritmética tem por finalidade reunir em um só número, todas as unidades de dois ou mais números. Antes de surgir os algarismos indo-arábicos, as adições podiam ser realizadas por meio de tábuas de calcular, com o auxílio de pedras ou por meio de ábacos.

Propriedades da Adição

- Fechamento: A adição no conjunto dos números naturais é fechada, pois a soma de dois números naturais é ainda um número natural. O fato que a operação de adição é fechada em *N* é conhecido na literatura do assunto como: A adição é uma lei de composição interna no conjunto *N*.

- Associativa: A adição no conjunto dos números naturais é associativa, pois na adição de três ou mais parcelas de números naturais quaisquer é possível associar as parcelas de quaisquer modos, ou seja, com três números naturais, somando o primeiro com o segundo e ao resultado obtido somarmos um terceiro, obteremos um resultado que é igual à soma do primeiro com a soma do segundo e o terceiro. $(A + B) + C = A + (B + C)$

- Elemento neutro: No conjunto dos números naturais, existe o elemento neutro que é o zero, pois tomando um número natural qualquer e somando com o elemento neutro (zero), o resultado será o próprio número natural.

- Comutativa: No conjunto dos números naturais, a adição é comutativa, pois a ordem das parcelas não altera a soma, ou seja, somando a primeira parcela com a segunda parcela, teremos o mesmo resultado que se somando a segunda parcela com a primeira parcela.

Multiplicação de Números Naturais

É a operação que tem por finalidade adicionar o primeiro número denominado multiplicando ou parcela, tantas vezes quantas são as unidades do segundo número denominadas multiplicador. Exemplo:

4 vezes 9 é somar o número 9 quatro vezes: $4 \times 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36$

O resultado da multiplicação é denominado produto e os números dados que geraram o produto, são chamados fatores. Usamos o sinal x ou · ou x, para representar a multiplicação.

Propriedades da multiplicação

- Fechamento: A multiplicação é fechada no conjunto *N* dos números naturais, pois realizando o produto de dois ou mais números naturais, o resultado estará em *N*. O fato que a operação de multiplicação é fechada em *N* é conhecido na literatura do assunto como: a multiplicação é uma lei de composição interna no conjunto *N*.

- Associativa: Na multiplicação, podemos associar 3 ou mais fatores de modos diferentes, pois se multiplicarmos o primeiro fator com o segundo e depois multiplicarmos por um terceiro número natural, teremos o mesmo resultado que multiplicar o terceiro pelo produto do primeiro pelo segundo. $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p) \rightarrow (3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5) = 60$

- Elemento Neutro: No conjunto dos números naturais existe um elemento neutro para a multiplicação que é o 1. Qualquer que seja o número natural *n*, tem-se que: 1 . n = n . 1 = n → 1 . 7 = 7 . 1 = 7

- Comutativa: Quando multiplicamos dois números naturais quaisquer, a ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, multiplicando o primeiro elemento pelo segundo elemento teremos o mesmo resultado que multiplicando o segundo elemento pelo primeiro elemento. m . n = n . m → 3 . 4 = 4 . 3 = 12

- Distributiva: Multiplicando um número natural pela soma de dois números naturais, é o mesmo que multiplicar o fator, por cada uma das parcelas e a seguir adicionar os resultados obtidos. m . (p + q) = m . p + m . q → 6 x (5 + 3) = 6 x 5 + 6 x 3 = 30 + 18 = 48

Divisão de Números Naturais

Dados dois números naturais, às vezes necessitamos saber quantas vezes o segundo está contido no primeiro. O primeiro número (o maior) é denominado dividendo e o outro número (o menor) é o divisor. O resultado da divisão é chamado quociente. Se multiplicarmos o divisor pelo quociente obteremos o dividendo. No conjunto dos números naturais, a divisão não é fechada, pois nem sempre é possível dividir um número natural por outro número natural e na ocorrência disto a divisão não é exata.

Relações essenciais numa divisão de números naturais
- Em uma divisão exata de números naturais, o divisor deve ser menor do que o dividendo. 35 : 7 = 5
- Em uma divisão exata de números naturais, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente. 35 = 5 x 7
- A divisão de um número natural *n* por zero não é possível, pois se admitíssemos que o quociente fosse *q*, então poderíamos escrever: n ÷ 0 = q e isto significaria que: n = 0 x q = 0 o que não é correto. Assim, a divisão de *n* por 0 não tem sentido ou ainda é dita impossível.

Potenciação de Números Naturais

Para dois números naturais *m* e *n*, a expressão m^n é um produto de *n* fatores iguais ao número *m*, ou seja: m^n = m . m . m ... m . m → m aparece *n* vezes
O número que se repete como fator é denominado base que neste caso é *m*. O número de vezes que a base se repete é denominado expoente que neste caso é *n*. O resultado é denominado potência.
Esta operação não passa de uma multiplicação com fatores iguais, como por exemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \rightarrow 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

Propriedades da Potenciação

- Uma potência cuja base é igual a 1 e o expoente natural é *n*, denotada por 1^n, será sempre igual a 1. Exemplos:

$1^n = 1 \times 1 \times ... \times 1$ (n vezes) = 1
$1^3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$
$1^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

- Se *n* é um número natural não nulo, então temos que $n^0 = 1$. Por exemplo:

$n^0 = 1$
$5^0 = 1$
$49^0 = 1$

- Qualquer que seja a potência em que a base é o número natural *n* e o expoente é igual a 1, denotada por n^1, é igual ao próprio *n*. Exemplo:

$n^1 = n$
$5^1 = 5$
$64^1 = 64$

- Toda potência 10^n é o número formado pelo algarismo 1 seguido de *n* zeros. Exemplos:

$10^3 = 1000$
$10^8 = 100.000.000$
$10^0 = 1$

Números Inteiros

Definimos o conjunto dos números inteiros como a união do conjunto dos números naturais N = {0, 1, 2, 3, 4,..., n,...}, o conjunto dos simétricos dos números naturais (ou seja, os números naturais com o sinal negativo) e o zero. Este conjunto é denotado pela letra Z (Zahlen = "número" em alemão).

Este conjunto pode ser escrito por: $Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- O conjunto dos números inteiros **não nulos**, ou seja, todos os elementos, menos o número zero (0), representado por:
$Z^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4,...\}$;
$Z^* = Z - \{0\}$

- O conjunto dos números inteiros **não negativos**, ou seja, o zero e os números positivos, representado por:
$Z_+ = \{0, 1, 2, 3, 4,...\}$
Z_+ é o próprio conjunto dos números naturais: $Z_+ = N$

- O conjunto dos números inteiros **positivos**, ou seja, somente os números positivos, representado por:
$Z^*_+ = \{1, 2, 3, 4,...\}$

- O conjunto dos números inteiros **não positivos**, ou seja, o zero e os números negativos, representado por:
$Z_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

- O conjunto dos números inteiros **negativos**, ou seja, somente os números negativos, representado por:
$Z^*_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$

Módulo: chama-se módulo de um número inteiro a distância ou afastamento desse número até o zero, na reta numérica inteira. Representa-se o módulo por | |.

O módulo de 0 é 0 e indica-se $|0| = 0$
O módulo de +7 é 7 e indica-se $|+7| = 7$
O módulo de –9 é 9 e indica-se $|-9| = 9$

O módulo de qualquer número inteiro, diferente de zero, é sempre positivo.

Números Opostos: Dois números inteiros são ditos opostos um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Exemplo: O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0

No geral, dizemos que o oposto, ou simétrico, de *a* é – *a*, e vice-versa; particularmente o oposto de zero é o próprio zero.

Adição de Números Inteiros

Para melhor entendimento desta operação, associaremos aos números inteiros positivos a ideia de ganhar e aos números inteiros negativos a ideia de perder.
Ganhar 5 + ganhar 3 = ganhar 8 = (+5) + (+3) = (+8)
Perder 3 + perder 4 = perder 7 = (-3) + (-4) = (-7)
Ganhar 8 + perder 5 = ganhar 3 = (+8) + (-5) = (+3)
Perder 8 + ganhar 5 = perder 3 = (-8) + (+5) = (-3)

O sinal (+) antes do número positivo pode ser dispensado, mas o sinal (–) antes do número negativo nunca pode ser dispensado.

Propriedades da adição de números inteiros: O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado para a adição, isto é, a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todo *a*, *b*, *c* em $\mathbb{Z}$:
a + (b + c) = (a + b) + c
2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7

Comutativa: Para todos *a*, *b* em $\mathbb{Z}$:
a + b = b + a
3 + 7 = 7 + 3

Elemento Neutro: Existe 0 em $\mathbb{Z}$, que adicionado a cada *z* em $\mathbb{Z}$, proporciona o próprio *z*, isto é:
z + 0 = z
7 + 0 = 7

Elemento Oposto: Para todo *z* em $\mathbb{Z}$, existe (-z) em $\mathbb{Z}$, tal que
z + (–z) = 0
9 + (–9) = 0

Exemplos

1º) Certo caminhão, quando vazio, tem 8250 Kg. Esse caminhão foi carregado com determinada mercadoria, cuja massa era de 4976 Kg. Quantos quilogramas têm juntos o caminhão e a mercadoria transportada?
Solução:
Para se saber o peso total, basta somar os dois valores:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 8250 \\ +4976 \\ \hline 13226 \end{array}$$ kg

2º) Tiago, Paula e Rita são irmãos e desejam comprar um computador no valor de R$ 1549,00. Tiago possui R$ 380,00, Paula, R$ 436,00 e Rita, R$ 756,00.

a) Quantos reais os três irmãos têm juntos?

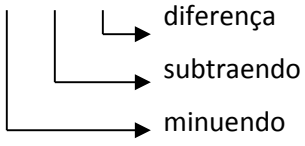
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,\,\,} \\ 380{,}00 \\ +436{,}00 \\ 756{,}00 \\ \hline 1572{,}00 \end{array}$$

b) A quantia que os irmãos têm juntos é suficiente para comprar o computador à vista?
Resposta: sim.

Subtração de Números Inteiros

A subtração é empregada quando:
- Precisamos tirar uma quantidade de outra quantidade;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto uma delas tem a mais que a outra;
- Temos duas quantidades e queremos saber quanto falta a uma delas para atingir a outra.

A subtração é a operação inversa da adição.
Observe que: 9 – 5 = 4 4 + 5 = 9



Ainda no exemplo anterior, vamos responder:

c) Qual o valor que sobra na compra do computador?

$$\begin{array}{r} 1\overset{6}{\cancel{7}}2,00 \\ \underline{-1549,00} \\ 0023,00 \end{array}$$

No cálculo da subtração, não é possível subtrair 9 de 2; por isso, emprestamos 1 da dezena 7, que se torna 6, e a operação continua normalmente.

Mas quando o número negativo é considerado, as seguintes situações podem ocorrer:

1- Na segunda-feira, a temperatura de Monte Sião passou de +3 graus para +6 graus. Qual foi a variação da temperatura?
Esse fato pode ser representado pela subtração: (+6) – (+3) = +3

2- Na terça-feira, a temperatura de Monte Sião, durante o dia, era de +6 graus. À Noite, a temperatura baixou de 3 graus. Qual a temperatura registrada na noite de terça-feira?
Esse fato pode ser representado pela adição: (+6) + (–3) = +3

Se compararmos as duas igualdades, verificamos que (+6) – (+3) é o mesmo que (+5) + (–3).

Temos:
(+6) – (+3) = (+6) + (–3) = +3
(+3) – (+6) = (+3) + (–6) = –3
(–6) – (–3) = (–6) + (+3) = –3

Daí podemos afirmar: Subtrair dois números inteiros é o mesmo que adicionar o primeiro com o oposto do segundo.

Multiplicação de Números Inteiros

A multiplicação funciona como uma forma simplificada de uma adição quando os números são repetidos. Poderíamos analisar tal situação como o fato de estarmos ganhando repetidamente alguma quantidade, como por exemplo, ganhar 1 objeto por 30 vezes consecutivas, significa ganhar 30 objetos e esta repetição pode ser indicada por um **x**, isto é: 1 + 1 + 1 ... + 1 + 1 = 30 x 1 = 30

Se trocarmos o número 1 pelo número 2, obteremos:
2 + 2 + 2 + ... + 2 + 2 = 30 x 2 = 60

Se trocarmos o número 2 pelo número -2, obteremos:
(–2) + (–2) + ... + (–2) = 30 x (-2) = –60

Observamos que a multiplicação é um caso particular da adição onde os valores são repetidos.

Na multiplicação o produto dos números *a* e *b*, pode ser indicado por ***a* x *b***, ***a* . *b*** ou ainda ***ab***, sem nenhum sinal entre as letras.

Para realizar a multiplicação de números inteiros, devemos obedecer à seguinte regra de sinais:
(+1) x (+1) = (+1)
(+1) x (-1) = (-1)
(-1) x (+1) = (-1)
(-1) x (-1) = (+1)

Com o uso das regras acima, podemos concluir que:

Sinais dos números	Resultado do produto
Iguais	Positivo
Diferentes	Negativo

Propriedades da multiplicação de números inteiros: O conjunto Z é fechado para a multiplicação, isto é, a multiplicação de dois números inteiros ainda é um número inteiro.

Associativa: Para todo a, b, c em Z:
a x (b x c) = (a x b) x c
2 x (3 x 7) = (2 x 3) x 7

Comutativa: Para todo a, b em Z:
a x b = b x a
3 x 7 = 7 x 3

Elemento neutro: Existe 1 em Z, que multiplicado por todo *z* em Z, proporciona o próprio *z*, isto é:
z x 1 = z
7 x 1 = 7

Elemento inverso: Para todo inteiro *z* diferente de zero, existe um inverso $z^{-1} = \frac{1}{z}$ em Z, tal que
z x z^{-1} = z x (1/z) = 1
9 x 9^{-1} = 9 x (1/9) = 1

Distributiva: Para todo *a*, *b*, *c* em *Z*:
a x (b + c) = (a x b) + (a x c)
3 x (4 + 5) = (3 x 4) + (3 x 5)

Exemplo

Para encher uma piscina, que estava totalmente vazia, foi utilizado um encanamento que despejava 300 litros de água por minuto.

a) Quantos litros de água foram despejados na piscina após 7 minutos? E após 1 hora?

300 = 1 minuto
x = 7 minutos

Logo: x = 300.7

x = 2100 litros em 7 minutos.

300 = 1 minuto
x = 60 minutos

Logo: x = 300.60

x = 18000 litros após uma hora.

b) Sabendo que a piscina foi completamente cheia após 1h35min, qual a capacidade, em litros, dessa piscina?

1h 35min = 60 min + 35 min = 95 min

95
x 300
28500 litros

Divisão de Números Inteiros

Dividendo | Divisor
Resto Quociente

Quociente . Divisor + Resto = Dividendo

Sabemos que na divisão exata dos números naturais:

40 : 5 = 8, pois 5 . 8 = 40
36 : 9 = 4, pois 9 . 4 = 36

Vamos aplicar esses conhecimentos para estudar a divisão exata de números inteiros. Veja o cálculo:

(–20) : (+5) = q ⇨ (+5) . q = (–20) ⇨ q = (–4)
Logo: (–20) : (+5) = +4

Considerando os exemplos dados, concluímos que, para efetuar a divisão exata de um número inteiro por outro número inteiro, diferente de zero, dividimos o módulo do dividendo pelo módulo do divisor. Daí:

- Quando o dividendo e o divisor têm o mesmo sinal, o quociente é um número inteiro positivo.
- Quando o dividendo e o divisor têm sinais diferentes, o quociente é um número inteiro negativo.
- A divisão nem sempre pode ser realizada no conjunto Z. Por exemplo, (+7) : (–2) ou (–19) : (–5) são divisões que não podem ser realizadas em Z, pois o resultado não é um número inteiro.
- No conjunto Z, a divisão não é comutativa, não é associativa e não tem a propriedade da existência do elemento neutro.

1- Não existe divisão por zero.
Exemplo: (–15) : 0 não tem significado, pois não existe um número inteiro cujo produto por zero seja igual a –15.

2- Zero dividido por qualquer número inteiro, diferente de zero, é zero, pois o produto de qualquer número inteiro por zero é igual a zero.
Exemplos: a) 0 : (–10) = 0 b) 0 : (+6) = 0 c) 0 : (–1) = 0

Exemplo

Célio tem arquivado em seu computador 117 músicas que comprou em um *site*. Ele pretende gravar essas músicas em 9 CD's, com quantidades iguais em cada CD. Quantas músicas Célio gravará em cada CD? (R.: 13 músicas)

```
117 |9
 27 13
  0
```

Na verdade, podemos resolver esta divisão efetuando a operação de multiplicação, perguntando "quantas vezes o 9 cabe dentro do 117?", e efetuando tentativas, sem passar do 117, no caso.

Assim, 9 . 10 = 90 (pouco); 9 . 11 = 99 (pouco); 9 . 12 = 108 (pouco); 9 . 13 = 117 (certo); 9 . 14 = 126 (passou de 117).

Potenciação de Números Inteiros

A potência a^n do número inteiro a, é definida como um produto de n fatores iguais. O número a é denominado a *base* e o número n é o *expoente*.
a^n = a x a x a x a x a x ... x a
a é multiplicado por a n vezes

Exemplos:
$3^3 = (3) \times (3) \times (3) = 27$
$(-5)^5 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = -3125$
$(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$
$(+9)^2 = (+9) \times (+9) = 81$

- Toda potência de **base positiva** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = +9$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente par** é um número **inteiro positivo**.
Exemplo: $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$

- Toda potência de **base negativa** e **expoente** ímpar é um número **inteiro negativo**.
Exemplo: $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

Propriedades da Potenciação:

Produtos de potências com bases iguais: Conserva-se a base e somam-se os expoentes. $(-7)^3 \cdot (-7)^6 = (-7)^{3+6} = (-7)^9$

Quocientes de potências com bases iguais: Conserva-se a base e subtraem-se os expoentes. $(+13)^8 : (+13)^6 = (+13)^{8-6} = (+13)^2$

Potência de potência: Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes. $[(+4)^5]^2 = (+4)^{5 \cdot 2} = (+4)^{10}$

Potência de expoente 1: É sempre igual à base. $(+9)^1 = +9$ $(-13)^1 = -13$

Potência de expoente zero e base diferente de zero: É igual a 1. Exemplo: $(+14)^0 = 1$ $(-35)^0 = 1$

Radiciação de Números Inteiros

A raiz n-ésima (de ordem *n*) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo b* que elevado à potência *n* fornece o número *a*. O número *n* é o índice da raiz enquanto que o número *a* é o radicando (que fica sob o sinal do radical).

A raiz quadrada (de ordem 2) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro *não negativo* que elevado ao quadrado coincide com o número *a*.

Observação: Não existe a raiz quadrada de um número inteiro negativo no conjunto dos números inteiros.
Observamos que não existe um número inteiro não negativo que multiplicado por ele mesmo resulte em um número negativo.

Exemplos
(a) $\sqrt{4} = 2$, pois $2^2 = 8$.

(b) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$.

(c) $\sqrt{81} = 9$, pois $9^2 = 81$.

(d) $\sqrt{-4} = ?$.

Não há um número negativo vezes ele mesmo resulta em um número positivo. Por isso não há raiz quadrada de número negativo. Veja:
$(-2).(-2) = +4$ e $(+2).(-2) = -4$, mas aqui -2 **é** diferente de +2, e a multiplicação deve ser entre mesmos números.

A raiz cúbica (de ordem 3) de um número inteiro *a* é a operação que resulta em outro número inteiro que elevado ao cubo seja igual ao número *a*. Aqui não restringimos os nossos cálculos somente aos números não negativos.

Exemplos

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.

(b) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

(c) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.

(d) $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

Observação: Ao obedecer à regra dos sinais para o produto de números inteiros, concluímos que:
(a) Se o índice da raiz for par, não existe raiz de número inteiro negativo.
(b) Se o índice da raiz for ímpar, é possível extrair a raiz de qualquer número inteiro.

Exercícios

1) Qual é o maior quadrado perfeito que se escreve com dois algarismos?

2) Um número inteiro é expresso por (53 – 38 + 40) – 51 + (90 – 7 + 82) + 101. Qual é esse número inteiro?

3) Calcule:
a) (+12) + (–40)
b) (+12) – (–40)
c) (+5) + (–16) – (+9) – (–20)
d) (–3) – (–6) – (+4) + (–2) + (–15)

4) Determine o valor de *x* de modo a tornar as sentenças verdadeiras:
a) x + (–12) = –5
b) x + (+9) = 0
c) x – (–2) = 6
d) x + (–9) = –12
e) –32 + x = –50
f) 0 – x = 8

5) Qual a diferença prevista entre as temperaturas no Piauí e no Rio Grande do Sul, num determinado dia, segundo as informações?
Tempo no Brasil: Instável a ensolarado no Sul.
Mínima prevista -3º no Rio Grande do Sul.
Máxima prevista 37° no Piauí.

6) Qual é o produto de três números inteiros consecutivos em que o maior deles é –10?

7) Três números inteiros são consecutivos e o menor deles é +99. Determine o produto desses três números.

8) Copie as igualdades substituindo o x por números inteiros de modo que elas se mantenham:
a) (–140) : x = –20
b) 144 : x = –4
c) (–147) : x = +21
d) x : (+13) = +12
e) x : (–93) = +45
f) x : (–12) = –36

9) Adicionando –846 a um número inteiro e multiplicando a soma por –3, obtém-se +324. Que número é esse?

10) Numa adição com duas parcelas, se somarmos 8 à primeira parcela, e subtrairmos 5 da segunda parcela, o que ocorrerá com o total?

Respostas

1) Resposta "9^2".
Solução: Basta identificar os quadrados perfeitos.
Os números quadrados perfeitos são:
$1^2 = 1$ (menor que dois algarismos)
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$ (dois algarismos)
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$ (mais que dois algarismos)

Logo, o maior quadrado perfeito é o $9^2 = 81$

2) Resposta "270".
Solução:
$(53 – 38 + 40) – 51 + (90 – 7 + 82) + 101$
$55 – 51 + 165 + 101 = 270$

Portanto, o número inteiro é 270.

3) Solução:
a) $(+12) + (–40) = 12 – 40 = -28$
b) $(+12) – (–40) = 12 + 40 = 52$
c) $(+5) + (–16) – (+9) – (–20) = +5 -16 – 9 + 20 = 25 – 25 = 0$
d) $(–3) – (–6) – (+4) + (–2) + (–15) = -3 + 6 – 4 – 2 – 15 = 6 – 24 = -18$

4) Solução:
a) $x + (–12) = –5 \rightarrow x = -5 + 12 \rightarrow x = 7$
b) $x + (+9) = 0 \rightarrow x = -9$
c) $x – (–2) = 6 \rightarrow x = 6 – 2 \rightarrow x = 4$
d) $x + (–9) = –12 \rightarrow x = -12 + 9 \rightarrow x = -3$
e) $–32 + x = –50 \rightarrow x = -50 + 32 \rightarrow x = -18$
f) $0 – x = 8 \rightarrow x = -8$

5) Resposta "40°".
Solução:
A diferença está entre -3º e +37º. Se formos ver... -3º, -2º, -1º, 0º, 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º... será +40º.

6) Resposta "-1320".
Solução:
$(x) . (x+1) . (x+2) = ?$

$x+2 = -10$
$x= -10 -2$
$x = -12$

$(-12) . (-12+1) . (-12+2) =$
$= (-12) . (-11) . (-10) = - 1320$

7) Resposta "999900".
Solução:
$(x) . (x+1) . (x+2) = ?$

$x= 99$

$(99) . (99+1) . (99+2) =$
$99 . 100 . 101 = 999900$

8) Solução:
a) (–140) : x = –20
-20x = -140
x = 7

b) 144 : x = –4
-4x = 144
x = -36

c) (–147) : x = +21
21x = -147
x = -7

d) x : (+13) = +12
x = 12 . 13
x = 156

e) x : (–93) = +45
x = 45 . (-93)
x = -4185

f) x : (–12) = –36
x = -36 . (-12)
x = 432

9) Resposta “738”.
Solução:
x + (-846) . (-3) = 324
x – 846 . (-3) = 324
-3 (x – 846) = 324
-3x + 2538 = 324
3x = 2538 – 324
3x = 2214
x =
x = 738

10) Resposta “3”.
Solução: Seja *t* o total da adição inicial.
Ao somarmos 8 a uma parcela qualquer, o total é acrescido de 8 unidades: t + 8
Ao subtrairmos 5 de uma parcela qualquer, o total é reduzido de 5 unidades: Temos:

t + 8 - 5 = t + 3

Portanto o total ficará acrescido de 3 unidades.

Números Racionais

Adição e Subtração

Frações com denominadores iguais:

A parte de cima da fração é chamada de **numerador**, e a parte de baixo é chamada de **denominador**.

Assim, na fração $\frac{1}{5}$, 1 é o numerador e 5 é o denominador.

Exemplo
José gastou $\frac{1}{5}$ de seu salário com roupas e gastou $\frac{3}{5}$ do salário com aluguel e compras. Qual a fração do salário que José gastou?

Observe que $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$

Portanto, José gastou $\frac{4}{5}$ de seu salário.

Na adição e subtração de duas ou mais frações que têm denominadores iguais, conservamos o denominador comum e somamos ou subtraímos os numeradores.

Outro Exemplo:

$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3+5-7}{2}=\frac{1}{2}$

Frações com denominadores diferentes:

Calcular o valor de $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$. Inicialmente, devemos reduzir as frações ao mesmo denominador comum:

mmc (8,6) = 24 $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{9}{24}+\frac{20}{24}$

(24 : 8) . 3 = 9
(24 : 6) . 5 = 20

Devemos proceder, agora, como no primeiro caso, simplificando o resultado, quando possível:

$\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\frac{9+20}{24}=\frac{29}{24}$

Portanto: $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=\frac{9}{24}+\frac{20}{24}=\frac{9+20}{24}=\frac{29}{24}$

Na adição e subtração de duas ou mais frações que têm os denominadores diferentes, reduzimos inicialmente as frações ao menor denominador comum, após o que procedemos como no primeiro caso.

Multiplicação

Exemplo

De uma caixa de frutas, $\frac{4}{5}$ são bananas. Do total de bananas, $\frac{2}{3}$ estão estragadas. Qual é a fração de frutas da caixa que estão estragadas?

Repare que o problema proposto consiste em calcular o valor de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$. Toda vez que precisamos calcular uma fração DE um outro número, o "de" significa que devemos multiplicar a fração por esse número. Assim, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ equivale a $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. Assim sendo:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

Ou seja:

$\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15}$

O produto de duas ou mais frações **é** uma fração cujo numerador **é** o produto dos numeradores e cujo denominador **é** o produto dos denominadores das frações dadas.

Outro exemplo: $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{7}{9}=\frac{2.4.7}{3.5.9}=\frac{56}{135}$

Observação: Sempre que possível, antes de efetuar a multiplicação, podemos simplificar as frações entre si, dividindo os numeradores e os denominadores por um fator comum. Esse processo de simplificação recebe o nome de cancelamento.

$\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}^{1}}\frac{4}{5}\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}^{5}}=\frac{12}{25}$

Divisão

Duas frações são inversas ou recíprocas quando o numerador de uma é o denominador da outra e vice-versa.

Exemplo

$\frac{2}{3}$ é a fração inversa de $\frac{3}{2}$.
5 ou $\frac{5}{1}$ é a fração inversa de $\frac{1}{5}$.

Considere a seguinte situação:

Lúcia recebeu de seu pai os $\frac{4}{5}$ dos chocolates contidos em uma caixa. Do total de chocolates recebidos, Lúcia deu a terça parte para o seu namorado. Que fração dos chocolates contidos na caixa recebeu o namorado de Lúcia?

A solução do problema consiste em dividir o total de chocolates que Lúcia recebeu de seu pai por 3, ou seja, $\frac{4}{5} : 3$.
Por outro lado, dividir algo por 3 significa calcular $\frac{1}{3}$ desse algo.
Portanto: $\frac{4}{5} : 3 = \frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}$
Como $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5} = \frac{1}{3} . \frac{4}{5} = \frac{4}{5} . \frac{1}{3}$, resulta que $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} : \frac{3}{1} = \frac{4}{5} . \frac{1}{3}$
São frações inversas

Observando que as frações $\frac{3}{1}$ e $\frac{1}{3}$ são frações inversas, podemos afirmar que:
Para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira pelo inverso da segunda.

Portanto $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} : \frac{3}{1} = \frac{4}{5} . \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$

Ou seja, o namorado de Lúcia recebeu $\frac{4}{15}$ do total de chocolates contidos na caixa.

Outro exemplo: $\frac{4}{3} : \frac{8}{5} = \frac{\cancel{4}^{1}}{3} . \frac{5}{\cancel{8}^{2}} = \frac{5}{6}$

Observação:

Note a expressão: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}}$. Ela é equivalente à expressão $\frac{3}{2} : \frac{1}{5}$.

Portanto $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{5} = \frac{3}{2} . \frac{5}{1} = \frac{15}{2}$

Números Decimais

Adição e Subtração

Vamos calcular o valor da seguinte soma:

5,32 + 12,5 + 0, 034

Transformaremos, inicialmente, os números decimais em frações decimais:

$$5,32 + 12,5 + 0,034 = \frac{352}{100} + \frac{125}{10} + \frac{34}{1000} =$$

$$= \frac{5320}{1000} + \frac{12500}{1000} + \frac{34}{1000} = \frac{17854}{1000} = 17,854$$

Portanto: 5,32 + 12,5 + 0, 034 = 17, 854

Na prática, a adição e a subtração de números decimais são obtidas de acordo com a seguinte regra:

- Igualamos o número de casas decimais, acrescentando zeros.
- Colocamos os números um abaixo do outro, deixando vírgula embaixo de vírgula.
- Somamos ou subtraímos os números decimais como se eles fossem números naturais.
- Na resposta, colocamos a vírgula alinhada com a vírgula dos números dados.

Exemplo

2,35 + 14,3 + 0, 0075 + 5

Disposição prática:

```
  2,3500
 14,3000
  0,0075
  5,0000
---------
21,6575
```

Multiplicação

Vamos calcular o valor do seguinte produto: 2,58 x 3,4.
Transformaremos, inicialmente, os números decimais em frações decimais:

$$2{,}58 \times 3{,}4 = \frac{258}{100} \cdot \frac{34}{10} = \frac{8772}{1000} = 8{,}772$$

Portanto 2,58 x 3,4 = 8,772

Na prática, a multiplicação de números decimais é obtida de acordo com as seguintes regras:

- Multiplicamos os números decimais como se eles fossem números naturais.
- No resultado, colocamos tantas casas decimais quantas forem as do primeiro fator somadas às do segundo fator.

Exemplo: 652,2 x 2,03

Disposição prática:

```
   652,2  → 1 casa decimal
   x 2,03 → 2 casas decimais
  -------
   19566
   0000
  13044
-------
1323,966 → 1 + 2 = 3 casas decimais
```

DIVISÃO

Numa divisão em que:

D é o dividendo
d é o divisor temos: D | d
q é o quociente r q
r é o resto

$D = q \cdot d + r$

Numa divisão, o resto é sempre menor que o divisor.

Vamos, por exemplo, efetuar a seguinte divisão: 24 : 0,5.

Inicialmente, multiplicaremos o dividendo e o divisor da divisão dada por 10.

24 : 0,5 = (24 . 10) : (0,5 . 10) = 240 : 5

A vantagem de tal procedimento foi a de transformarmos em número natural o número decimal que aparecia na divisão. Com isso, a divisão entre números decimais se transforma numa equivalente com números naturais.

Portanto: 24 : 0,5 = 240 : 5 = 48

Na prática, a divisão entre números decimais é obtida de acordo com as seguintes regras:

- Igualamos o número de casas decimais do dividendo e do divisor.
- Cortamos as vírgulas e efetuamos a divisão como se os números fossem naturais.

Exemplo 1

24 : 0,5

Disposição prática:

```
24,0|0,5
 40 48
  0
```

Nesse caso, o resto da divisão é igual à zero. Assim sendo, a divisão é chamada de divisão exata e o quociente é exato.

Exemplo 2

9,775 : 4,25

Disposição prática:

```
9,775|4,250
1 275   2
```

Nesse caso, o resto da divisão é diferente de zero. Assim sendo, a divisão é chamada de divisão aproximada e o quociente é aproximado.

Se quisermos continuar uma divisão aproximada, devemos acrescentar zeros aos restos e prosseguir dividindo cada número obtido pelo divisor. Ao mesmo tempo em que colocamos o primeiro zero no primeiro resto, colocamos uma vírgula no quociente.

```
 9,775 | 4,250
1 2750   2,
```

Acrescentamos um zero ao primeiro resto.

```
 9,775 | 4,250
1 2750   2,3
    0000
```

Colocamos uma vírgula no quociente.

Exemplo 3

0,14 : 28

```
0,14000 |28,00
   0000 0,005
```

Exemplo 4

2 : 16

$$\begin{array}{r|l} 20 & 16 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}125 \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

Exercícios

1) Indique as divisões em forma de fração:
a) 14 : 7
b) 18 : 8
c) 5 : 1
d) 15 : 5
e) 18 : 9
f) 64 : 8

2) Efetue as adições:
a) 3/6 + 2/6
b) 13/7 + 1/7
c) 2/7+ 1/7 + 5/7
d) 4/10 + 1/10 + 3/10

3) Efetue as subtrações:
a) 7/9 – 5/9
b) 9/5 – 2/5
c) 2/3 – 1/3
d) 8/3 – 2/3

4) (Vunesp/2014 – Administrador USP) Xavier e Yuri têm dívidas e pretendem pagá-las com o salário recebido. Sabe-se que $\frac{1}{5}$ do valor da dívida de Xavier corresponde a $\frac{3}{25}$ do valor da dívida de Yuri e que ambos, juntos, devem R$ 2.000,00. Desse modo, se Xavier pagar apenas $\frac{3}{5}$ do valor total da sua dívida, ele ainda continuará devendo
(A) R$ 750,00
(B) R$ 400,00
(C) R$ 350,00
(D) R$ 300,00
(E) R$ 250,00

5) (Vunesp/2014 – Analista Técnico Legislativo - SJC) No mês de janeiro, Augusto gastou $\frac{1}{4}$ de seu salário com o imposto do seu carro. No mesmo mês, ele ainda teve gastos de seguro e manutenção com o carro, sendo que cada um desses gastos equivaleu a $\frac{1}{3}$ do que sobrou de seu salário após o imposto. Se os gastos com seu carro no mês de janeiro totalizaram R$ 2.700,00, conclui-se que o salário de Augusto, nesse mês, foi de
(A) R$ 3.000,00
(B) R$ 3.300,00
(C) R$ 3.600,00
(D) R$ 3.900,00
(E) R$ 4.200,00

6) (Vunesp/2014 – Assistente Administrativo EMPLASA) Sabe-se que o salário mensal de André corresponde a $\frac{4}{5}$ do salário líquido mensal de seu irmão Bruno e que, a cada mês, Bruno reserva $\frac{2}{5}$ do valor recebido para pagar a mensalidade da faculdade, restando, ainda, R$ 1.830,00 para outros gastos. Desse modo, é correto afirmar que a diferença entre os salários líquidos mensais de Bruno e de André é igual a
(A) R$ 720,00
(B) R$ 690,00
(C) R$ 610,00
(D) R$ 590,00
(E) R$ 520,00

7) (Vunesp/2014 – Soldado PM/SP) Uma empresa lançou no mercado uma garrafa de refrigerante com 3,25 litros. Uma família comprou uma garrafa desse refrigerante e durante o almoço consumiu $\frac{2}{5}$ do total. No jantar foram consumidos $\frac{2}{3}$ do que ainda estava na garrafa. Em relação à capacidade total da garrafa, a fração que representa corretamente a quantidade de refrigerante que restou dentro da garrafa, após o jantar, é

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{5}{7}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{1}{5}$

8) (Vunesp/2013 – Escrevente/SP) Em um dia de muita chuva e trânsito caótico, $\frac{2}{5}$ dos alunos de certa escola chegaram atrasados, sendo que $\frac{1}{4}$ dos atrasados tiveram mais de 30 minutos de atraso. Sabendo que todos os demais alunos chegaram no horário, pode-se afirmar que nesse dia, na escola, a razão entre o número de alunos que chegaram com mais de 30 minutos de atraso e o número de alunos que chegaram no horário, nessa ordem, foi de

(A) 2:3
(B) 1:3
(C) 1:6
(D) 3:4
(E) 2:5

9) (Vunesp/2011 – Escrevente TJ Militar/SP) Do valor total recebido por um trabalho executado, Pedro ficou com $\frac{2}{5}$ e João ficou com o restante. Da parte que lhe coube, João emprestou R$ 800,00 a Pedro, para que ele pudesse comprar uma televisão e, assim, Pedro ficou com o quádruplo da quantia que restou a João. Após o empréstimo, Pedro ficou com

(A) R$ 2.000,00
(B) R$ 1.800,00
(C) R$ 1.700,00
(D) R$ 1.600,00
(E) R$ 1.400,00

Respostas

1) Solução:

a) $\frac{14}{7}$

b) $\frac{18}{8}$

c) $\frac{5}{1}$

d) $\frac{15}{5}$

e) $\frac{18}{9}$

f) $\frac{64}{8}$

2) Solução:

a) $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$.

b) $\frac{13}{7}+\frac{1}{7}=\frac{13+1}{7}=\frac{14}{7}$.

c) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}+\frac{5}{7}=\frac{2+1+5}{7}=\frac{8}{7}$.

d) $\frac{4}{10}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4+1+3}{120}=\frac{8}{10}$.

3) Solução:

a) $\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$.

b) $\frac{9}{5}-\frac{2}{5}=\frac{9-2}{5}=\frac{7}{5}$.

c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$.

d) $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8-2}{3}=\frac{6}{3}$.

4) Solução:

Chamando a dívida de Xavier de ***x*** e a dívida de Yuri de ***y***, temos:

$\frac{1}{5}x=\frac{3}{25}y$ e $x+y=2000$

Como queremos calcular parte da dívida de Xavier, precisamos isolar o ***y*** da 1ª equação: $y=\frac{1.25}{3.5}x$ e $y=\frac{25}{15}x$ e $y=\frac{5}{3}x$.

Substituindo na 2ª equação:

$x+\frac{5}{3}x=2000$ e $\frac{3x+5x=6000}{3}$.

Depois do m.m.c. feito em ambos os lados da igualdade, podemos excluir o denominador 3. Assim, temos:

$3x+5x=6000$ e $8x=6000$ e $x=\frac{6000}{8}$ e $x=750$

Como Xavier vai pagar apenas $\frac{3}{5}$ da dívida, temos que $\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$, que continuará devendo.

Então, $\frac{2}{5}.750=300$

Resposta D.

5) Solução:

$\frac{1}{4}x+2.\frac{1}{3}.\left(\frac{3}{4}x\right)=2700$ e $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x=2700$ e $\frac{x+2x=10800}{4}$

$3x=10800$ e $x=\frac{10800}{3}$ e $x=3600$

Resposta C.

6) Solução:

$A=\frac{4}{5}B$ e $\frac{3}{5}B=1830$

Da 2ª equação, temos: $B=\frac{5.1830}{3}$ e $B=3050$

Ainda, da 1ª equação: $A=\frac{4}{5}.3050$ e $A=2440$

A diferença é: $3050-2440=610$

Resposta C.

7) Solução:

No almoço, sobrou $\frac{3}{5}$ e no jantar, sobrou $\frac{1}{3}.\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$.

Resposta E.

8) Solução:

Atrasados: $\frac{2}{5}$.
Mais de 30 minutos: $\frac{1}{4}.\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$.

No horário: $\frac{3}{5}$

Razão dos 30 minutos atrasados em relação aos que chegaram no horário:

$$\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{5.1}{3.10}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

Resposta C.

9) Solução:

Pedro: $\frac{2}{5}x$ e João: $\frac{3}{5}x$

$\frac{2}{5}x+800=4.\left(\frac{3}{5}x-800\right)$ e $\frac{2}{5}x+800=\frac{12}{5}x-3200$ e $-\frac{10}{5}x=-4000$

$x=\frac{4000}{2}$ e $x=2000$

Pedro: $\frac{2}{5}.2000+800=800+800=1600$

Resposta D.

Números Irracionais

Existe, entretanto, outra classe de números que não podem ser escritos na forma de fração a/b, conhecidos como números irracionais. Exemplo:

O número real abaixo é um número irracional, embora pareça uma dízima periódica:

x = 0,10100100010000100000...

Observe que o número de zeros após o algarismo 1 aumenta a cada passo. Existem infinitos números reais que não são dízimas periódicas e dois números irracionais muito importantes, são:

e = 2,718281828459045...,
Pi () = 3,14159265358979323846264 3...

Que são utilizados nas mais diversas aplicações práticas como: cálculos de áreas, volumes, centros de gravidade, previsão populacional, etc.

Existem dois tipos de números irracionais:

- Números reais algébricos irracionais: são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Todo número real que pode ser representado através de uma quantidade finita de somas, subtrações, multiplicações, divisões e raízes de grau inteiro a partir dos números inteiros é um número algébrico, por exemplo:

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{42}{5}-\sqrt[5]{7}}.$$

A recíproca não é verdadeira: existem números algébricos que não podem ser expressos através de radicais, conforme o teorema de *Abel-Ruffini*.

- Números reais transcendentes: não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros. Várias constantes matemáticas são transcendentes, como pi () e o número de Euler (***e***). Pode-se dizer que existem *mais* números transcendentes do que números algébricos (a comparação entre conjuntos infinitos pode ser feita na teoria dos conjuntos). A definição mais genérica de números algébricos e transcendentes é feita usando-se números complexos.

Fundamentado nas explanações anteriores, podemos afirmar que:

- Todas as dízimas periódicas são números racionais.
- Todos os números inteiros são racionais.
- Todas as frações ordinárias são números racionais.
- Todas as dízimas não periódicas são números irracionais.
- Todas as raízes inexatas são números irracionais.
- A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
- A diferença de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$ e 0 é um número racional.

- O quociente de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ e 2 é um número racional.

- O produto de dois números irracionais, pode ser um número racional.

Exemplo: $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$ e 5 é um número racional.

- A união do conjunto dos números irracionais com o conjunto dos números racionais, resulta num conjunto denominado **conjunto *R* dos números reais**.
- A interseção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, não possui elementos comuns e, portanto, é igual ao conjunto vazio ($\varnothing$).

Simbolicamente, teremos:

$Q \cup I = R$
$Q \cap I = \varnothing$

3. - Mínimo Múltiplo Comum

www.maxieduca.com.br

José Rubens Antoniazzi Silva

**Licenciatura em Matemática pelas Faculdades Adamantinenses Integras
e em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho.
Professor coordenador de núcleo pedagógico
na Diretoria de Ensino Região de Tupã**

MAXI Educa

Máximo Divisor Comum

Dois números naturais sempre têm divisores comuns. Por exemplo: os divisores comuns de 12 e 18 são 1,2,3 e 6. Dentre eles, 6 é o maior. Então chamamos o **6** de **máximo divisor comum de 12 e 18** e indicamos **m.d.c.(12,18) = 6**.

O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de **máximo divisor comum** desses números. Usamos a abreviação **m.d.c.**

Alguns exemplos:
mdc (6,12) = 6
mdc (12,20) = 4
mdc (20,24) = 4
mdc (12,20,24) = 4
mdc (6,12,15) = 3

CÁLCULO DO MDC POR DIVISÕES SUCESSIVAS

Determinar o MDC entre 30 e 72.

1. Construímos uma grade com 3 linhas e algumas colunas, pondo os números dados na linha do meio. Na primeira coluna coloque o maior deles e na segunda coluna o menor.

72	30			

2. Realizamos a divisão do maior pelo menor colocando o quociente no espaço sobre o número menor na primeira linha e o resto da divisão no espaço logo abaixo do maior número na terceira linha.

	2			
72	30			
12				

3. Passamos o resto da divisão para o espaço localizado à direita do menor número na linha central.

	2			
72	30	12		
12				

4. Realizamos agora a divisão do número 30, pelo resto obtido anteriormente que é 12. Novamente, o quociente será colocado sobre o número 12 e o resto da divisão ficará localizado abaixo do número 30.

	2	2		
72	30	12		
12	6			

5. Realizamos agora a (última!) divisão do número 12, pelo resto obtido anteriormente que é 6. De novo, o quociente será posto sobre o número 6 e o resto da divisão ficará localizado abaixo do número 12.

	2	2	2	
72	30	12	6	
12	6	0		

6. Como o resto da última divisão é 0 (zero), o último quociente obtido representa o MDC entre 30 e 72, logo denotamos tal fato por:

O **m.d.c.** de dois ou mais números, **quando fatorados**, é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Dois ou mais números são **primos entre si** quando o máximo divisor comum desses números é **1**.

Exemplos:
Os números 35 e 24 **são** números primos entre si, pois mdc (35,24) = 1.
Os números 35 e 21 **não são** números primos entre si, pois mdc (35,21) = 7.

PROPRIEDADE DO M.D.C.

Dentre os números 6, 18 e 30, o número 6 é divisor dos outros dois. Neste caso, 6 é o m.d.c.(6,18,30). Observe:
$6 = 2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$30 = 2 \times 3 \times 5$
Portanto m.d.c.(6,18,30) = 6

Dados dois ou mais números, **se um deles é divisor de todos os outros**, então **ele é o m.d.c.** dos números dados.

DECOMPOSIÇÃO EM FATORES PRIMOS

Para obtermos o mdc de dois ou mais números por esse processo, procedemos da seguinte maneira:

- Decompomos cada número dado em fatores primos.
- O mdc é o produto dos fatores comuns obtidos, cada um deles elevado ao seu menor expoente.

Exemplo

Achar o mdc entre 300 e 504.

300 | 2	504 | 2
150 | 2	252 | 2
75 | 3	126 | 2
25 | 5	63 | 3
5 | 5	21 | 3
1 |	7 |

$300 = 2^2 . 3 . 5^2$
$504 = 2^3 . 3^2 . 7$

mdc (300, 504) = $2^2 . 3 = 4 . 3 = 12$

1) Determine o MDC entre os números:

a) (80 e 60)
b) (36,90)
c) (48,42 e 24)
d) (108, 132 180)
e) (150 e 140)
f) (100,200 e 250)

2) Duas tábuas devem ser cortadas em pedaços de mesmo comprimento, sendo esse comprimento o maior possível. Se uma tábua tem 90 centímetros e a outra tem 126 centímetros, qual deve ser o comprimento de cada pedaço se toda a madeira deve ser aproveitada?

3) Dois rolos de corda, um de 200 metros e outro de 240 metros de comprimento, precisam ser cortados em pedaços iguais e no maior comprimento possível.

Respostas:

1)
a) (80 e 60) ***20***
b) (36,90) ***18***
c) (48,42 e 24) ***6***
d) (108, 132 180) ***12***
e) (150 e 140) ***150***
f) (100,200 e 250) ***50***

2) MDC (90 e 126) = 18

1º) Pegue a tábua de 90 cm e divida-a em pedaços de 18cm cada um. Vai conseguir 5 pedaços

2º) Pegue a tábua de 126 cm e divida-a em pedaços de 18 cm. Vai obter 7 pedaços.

Agora você dispõe de 12 pedaços de madeira (tábuas), cada um com 18 cm (todos do mesmo tamanho).

1) Basta tirar o MDC de 200 e 240 para achar o comprimento de cada pedaço.

MDC(200,240) = 40

Agora vamos achar o n° de pedaços:

1° rolo: 200/40 = 5 pedaços
2° rolo: 240/40 = 6 pedaços

Número de pedaços = 5 + 6 = 11 pedaços

Mínimo Múltiplo Comum

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número positivo que é múltiplo comum de todos os números dados. Consideremos:

- O número 6 e os seus múltiplos positivos:
$M^*_+(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...\}$

- O número 8 e os seus múltiplos positivos:
$M^*_+(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, ...\}$

Podemos descrever, agora, os múltiplos positivos comuns:
$M^*_+(6) \cup M^*_+(8) = \{24, 48, 72, ...\}$

Observando os múltiplos comuns, podemos identificar o mínimo múltiplo comum dos números 6 e 8, ou seja: MMC (6,8) = 24

Outra técnica para o cálculo do MMC:

DECOMPOSIÇÃO ISOLADA EM FATORES PRIMOS

Para obter o mmc de dois ou mais números por esse processo, procedemos da seguinte maneira:

- Decompomos cada número dado em fatores primos.
- O mmc é o produto dos fatores comuns e não-comuns, cada um deles elevado ao seu maior expoente.

Exemplo

Achar o mmc entre 18 e 120.

		120	2
		60	2
18	3	30	2
9	3	15	3
3	3	5	5
1		1	

$18 = 2 . 3^2$
$120 = 2^3 . 3 . 5$

mmc (18, 120) = $2^3 . 3^2 . 5 = 8 . 9 . 5 = 360$

PROCESSO DA DECOMPOSIÇÃO SIMULTÂNEA

Neste processo decompomos todos os números ao mesmo tempo, num dispositivo como mostra a figura ao lado. O produto dos fatores primos que obtemos nessa decomposição é o m.m.c. desses números. Ao lado vemos o cálculo do m.m.c.(15,24,60)

15, 24, 60	2
15, 12, 30	2
15, 6, 15	2
15, 3, 15	3
5, 1, 5	5
1, 1, 1	

Portanto, m.m.c.(15,24,60) = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = **120**

PROPRIEDADE DO M.M.C.

Entre os números 3, 6 e 30, o número 30 é múltiplo dos outros dois. Neste caso, 30 é o m.m.c.(3,6,30). Observe:

3, 6, 30	2
3, 3, 15	3
1, 1, 5	5
1, 1, 1	

m.m.c.(3,6,30) = 2 x 3 x 5 = **30**

Dados dois ou mais números, **se um deles é múltiplo de todos os outros**, então **ele é o m.m.c.** dos números dados.

Considerando os números 4 e 15, que são primos entre si. O m.m.c.(4,15) é igual a 60, que é o produto de 4 por 15. Observe:

4, 15	2
2, 15	2
1, 15	3
1, 5	5
1, 1	

m.m.c.(4,15) = 2 x 2 x 3 x 5 = **60**

Dados dois **números primos entre si**, o **m.m.c.** deles é o produto desses números.

Exercícios

1) Determine o menor número inteiro positivo de três algarismos, que é divisível, ao mesmo tempo, por 4,8,12.

2) Determine o menor número positivo que é múltiplo, ao mesmo tempo, de 5, 6 e 7.

3) Suponhamos que o Presidente de uma multinacional tenha mandato de trabalho colocado por força maior, este tempo é de 4 anos, os assessores deles também tem este mandato que é de 6 anos e os auxiliares tem o mesmo mandato de 3 anos. Se em 2001 houve eleição interna nesta empresa, por voto de todos os colaboradores, para os 03 cargos, em que ano se realizarão novamente e simultaneamente as eleições para esses cargos?

Respostas:

1) Ser divisível por 4,8,12 é ser múltiplo. Desta forma procuramos o MMC

MMC (4,8,12) = 24

Fatore os números

4, 8, 12	2
2, 4, 6	2
1, 2, 3	2
1, 1, 3	3
1, 1, 1	

Como 24 não têm três algarismos, o número procurado deverá ser múltiplo de 24 que tenha três algarismos.

Assim: 24 x 1 = 24, 24 x 2 = 48... 24 x 5 = 120
O menor múltiplo positivo de 24 de três algarismos é 120, que deste modo é o número procurado.

2) O menor número chamamos de MMC (5,6,7)

Fatore os números:

5, 6, 7	2
5, 3, 7	3
5, 1, 7	5
1, 1, 7	7
1, 1, 1	

MMC (5,6,7) = 2 x 3 x 5 x 7 = 210

3) Calculando o MMC (4, 6 e 3) = 12
Desta forma é encontrado o número de anos necessários para que tenham novas eleições conjuntas.
Como a última eleição foi feita no ano de 2001, então temos: 2001 + 12 = 2013.
Assim somente no ano de 2013 haverá votação simultânea entre todos os cargos.

Questões de Concursos

DICA: Como identificar se a questão se trata de MDC ou MMC?
Simples, questões que envolvem MDC sempre solicitam maior tamanho possível e que não haja perda de material ou alguma escrita do tipo. Já questões que envolvem MMC, sempre apresentam um ciclo de alguma situação que ocorre de tempos em tempos e, ao final, geralmente perguntam quando ocorrerão as situações juntas novamente. É o que vamos ver agora! Bom trabalho!

1) (Coren-Fiscal-2013-Vunesp) Duzentas pessoas inscreveram-se em um curso sobre hotelaria. Da região Norte, inscreveram-se 48 pessoas; da região Centro-Oeste, 88; e, da região Sul, 64 pessoas. Para a realização de uma atividade prática, a organização do curso decidiu montar grupos com esses inscritos de modo que os grupos tivessem o mesmo número de pessoas e também cada grupo tivesse pessoas somente de uma mesma região. Como cada grupo terá um instrutor, o menor número de instrutores que devem ser contratados para essa atividade prática é

(A) 8.
(B) 12.
(C) 21.
(D) 25.
(E) 32.

2) (Nossa Caixa-SP-Aux.Adm-2002- Vunesp) Em um painel quadrangular decorativo deverão ser colocadas 80 fotografias que medem 16 cm por 20 cm cada uma. As fotos serão colocadas lado a lado, sem espaço entre as mesmas, e o painel deverá estar totalmente preenchido. Para tanto, a medida do lado deste painel deverá ser

(A) 2,40 m.
(B) 1,80 m.
(C) 1,60 m.
(D) 1,50 m.
(E) 1,06 m.

3) (TER-RGN-Téc.Jud. -2005-Fcc) O controle estatístico de uma indústria produtora de veículos pretende estabelecer um regime de acompanhamento de 4 itens do produto final da seguinte maneira:

- A cada lote de 10 unidades é testado o motor da última unidade produzida;
- A cada lote de 6 unidades é testado a injeção eletrônica da última unidade produzida;
- A cada lote de 4 unidades é testado o ar condicionado da última unidade;
- A cada lote de 3 unidades é testada a qualidade dos freios da última unidade.

Iniciando o processo descrito no início da manhã de segunda-feira e prevendo uma produção de 360 unidades até o final da semana, quantas unidades produzidas terão 3 ou mais itens testados simultaneamente?

(A) 6
(B) 12
(C) 18
(D) 30
(E) 36

4) (Tacil-Of.Just.-2004-Vunesp) O total de números naturais, com três algarismos, divisíveis, simultaneamente, por 5, 9 e 15, é

(A) 20.
(B) 19.
(C) 18.
(D) 17.
(E) 16

5) (TRT-Téc. Jud -22ª-2004-Fcc) Sistematicamente, Fábio e Cíntia vão a um mesmo restaurante: Fábio a cada 15 dias e Cíntia a cada 18 dias. Se em 10 de outubro de 2004 amos estiveram em tal restaurante, outro provável encontro dos dois nesse restaurante ocorrerá em:

A) 9 de dezembro de 2004.
B) 10 de dezembro de 2004.
C) 8 de janeiro de 2005.
D) 9 de janeiro de 2005.
E) 10 de janeiro de 2005.

6) (Tacil-Escr.Téc.Jud. -2004-Vunesp) A raiz quadrada do produto entre o máximo divisor comum (MDC) e o mínimo múltiplo comum (MMC) dos números **n** e 20 é 30. A razão entre o MDC e o MMC é 1/36. Então, a soma dos números vale

(A) 30.
(B) 45.
(C) 65.
(D) 70.
(E) 75.

7) (Trib.Just.-Esc.Téc.Jud. - 2004-Vunesp) A cobertura de um piso retangular de 12 x 18 metros será feita com placas quadradas de lado igual a L metros. Se L é um número natural, para que haja uma cobertura perfeita do piso, sem cortes ou sobreposições de placas, é necessário e suficiente que

(A) L seja um número par.
(B) L divida 12.
(C) L divida 18.
(D) L divida o MDC (12,18).
(E) L divida o MMC (12,18).

8) (Sbc-Contr. Traf. Veic. -2004-Moura Melo) Dois pilotos de fórmula X largam juntos num determinado circuito e completam cada volta em 60 segundos e 64 segundos, respectivamente. Depois de quantas voltas, contados a partir da largada, o mais rápido ultrapassa o piloto mais lento em

(A) 16 voltas.
(B) 8 voltas.
(C) 21 voltas.
(D) 30 voltas.

9) (Tacil-Ag.Fisc.- 2004-Vunesp) Eliseu completa cada volta de uma pista oficial em 1 min e 10 s. Fred completa a mesma volta em 1 min e 20 s. Partindo juntos da largada, o número de voltas dadas por Fred e Eliseu ao cruzarem juntos o ponto de partida respectivamente, é

(A) 7 e 8.
(B) 6 e 7.
(C) 7e 6.
(D) 8 e 7.
(E) 8 e 6.

10) (Pmsp-Assist.Téc.Adm. -2002-Vunesp) Dois sinais de trânsito fecham ao mesmo tempo, mas enquanto um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, o outro permanece os mesmos 10 segundos fechado, porém fica 50 segundos aberto. O número mínimo de minutos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez, é

(A) 3.
(B) 4.
(C) 5.
(D) 6.
(E) 7.

11) (Pmsp-Aux.Zoonoses- 2002-Vunesp) Um animal precisa ser medicado com um antiinflamatório de 6 em 6 horas e um analgésico de 4 em 4 horas. Sabendo-se que a 1ª dose dos dois medicamentos foi administrada, ao mesmo tempo, às 6 horas, o próximo horário em que os dois medicamentos serão dados, novamente, juntos, será às

(A) 12 horas.
(B) 14 horas.
(C) 16 horas.
(D) 18 horas.

12) (Zôo-Sp-Aux.Adm. -2005-Vunesp) Três trenzinhos partem da portaria do Zôo juntos. O primeiro dá uma volta a cada 4 minutos; o segundo, a cada 5 minutos e o terceiro, a cada 6 minutos. No fim de quanto tempo voltarão os três trenzinhos a se encontrar na portaria?

(A) 20 minutos.
(B) 30 minutos.
(C) 40 minutos.
(D) 50 minutos.
(E) 60 minutos.

13) (CRC-Aux.Adm. -2005-Vunesp) Rui e Roberto fazem a segurança noturna de uma empresa e devem acionar o relógio de controle ao final de cada ronda, que tem percursos diferentes para cada um. A ronda de Rui dura 30 minutos, e a de Roberto, 40 minutos. Se eles acionaram simultaneamente o relógio de controle às 23h 45 min, então um novo acionamento simultâneo só deverá se repetir às

(A) 0 h 20 min.
(B) 0 h 55 min.
(C) 1 h 30 min.
(D) 1 h 40 min.
(E) 1 h 45 min.

14) (CRC-Aux.Adm. -2005-Vunesp) Foram habilitados na 1ª fase de um concurso, 88 candidatos da cidade A e 110 da cidade B. Para a 2ª fase, foram formados grupos, todos necessariamente com o mesmo número de candidatos. Sabe-se que os candidatos inscritos em uma cidade não poderão fazer a prova na outra. Juntando-se o menor número possível de grupos formados na cidade A com o menor número de grupos da cidade B, teremos um total de

(A) 10.
(B) 9.
(C) 8.
(D) 7.
(E) 6.

15) (AUX. ADM-Sorocaba-2006-Vunesp) Três viaturas partem às 6 horas da manhã para distribuir vigilantes a seus postos. A 1.ª retorna à base a cada 30 minutos, a 2.ª, a cada 40 minutos e a 3.ª, a cada 1 hora. As três viaturas voltarão a se encontrar pela 1.ª vez, na base, às

(A) 7 h 40 min.
(B) 8 horas.
(C) 8 h e 40 min.
(D) 9 horas.
(E) 9 h e 30 min.

16) (Nossa Caixa-2007-Vunesp) Em um colégio de São Paulo, há 120 alunos na 1.ª série do Ensino Médio, 144, na 2.ª e 60, na 3.ª. Na semana cultural, todos esses alunos serão organizados em equipes com o mesmo número de elementos, sem que se misturem alunos de séries diferentes. O número máximo de alunos que pode haver em cada equipe é igual a

(A) 7.
(B) 10.
(C) 12.
(D) 28.
(E) 30.

17) (Trib. Just. Militar-Motorista-2013-VUNESP) Ônibus de duas linhas circulares partem de um mesmo ponto inicial. Os ônibus da linha X, de percurso menor, partem a cada 20 minutos, e os da linha Y, de percurso maior, a cada 35 minutos. Se ônibus de ambas as linhas partiram simultaneamente do referido ponto inicial às 7 h 25 min, então a próxima partida simultânea de ônibus de ambas as linhas ocorrerá às

(A) 9 h 30 min.
(B) 9 h 45 min.
(C) 10 h 10 min.
(D) 10 h 35 min.
(E) 10 h 50 min.

Gabarito das Questões

01	D	10	C
02	C	11	D
03	E	12	E
04	A	13	E
05	C	14	B
06	C	15	B
07	D	16	C
08	A	17	B
09	A		

4. - Razão e Proporção

www.maxieduca.com.br

José Rubens Antoniazzi Silva

**Licenciatura em Matemática pelas Faculdades Adamantinenses Integras
e em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho.
Professor coordenador de núcleo pedagógico
na Diretoria de Ensino Região de Tupã**

MAXI Educa

Vamos considerar um carro de corrida com 4m de comprimento e um kart com 2m de comprimento. Para compararmos as medidas dos carros, basta dividir o comprimento de um deles pelo outro. Assim:

$\frac{4}{2}=2$ (o tamanho do carro de corrida é duas vezes o tamanho do kart).
Podemos afirmar também que o kart tem a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ do comprimento do carro de corrida.

A comparação entre dois números racionais, através de uma divisão, chama-se **razão**.

A razão $\frac{1}{2}$ pode também ser representada por 1:2 e significa que cada metro do kart corresponde a 2m do carro de corrida.

Denominamos de **razão** entre dois números *a* e *b* (*b* diferente de zero) o quociente $\frac{a}{b}$ ou *a:b*.

A palavra **razão**, vem do latim *ratio*, e significa "divisão". Como no exemplo anterior, são diversas as situações em que utilizamos o conceito de razão.

Exemplos:

• Dos 1200 inscritos num concurso, passaram 240 candidatos.
Razão dos candidatos aprovados nesse concurso:

- $240:1200 = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5}$ (:240 acima e :240 abaixo)

(de cada 5 candidatos inscritos, 1 foi aprovado).

• Para cada 100 convidados, 75 eram mulheres.
Razão entre o número de mulheres e o número de convidados:

- $75:100 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ (:25 acima e :25 abaixo)

(de cada 4 convidados, 3 eram mulheres).

Observações:

1) A razão entre dois números racionais pode ser apresentada de três formas.

Exemplo:
Razão entre 1 e 4: 1:4 ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25.

2) A razão entre dois números racionais pode ser expressa com sinal negativo, desde que seus termos tenham sinais contrários.

Exemplos:

A razão entre 1 e -8 é $\frac{-1}{8}$.

A razão entre $\frac{-1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ é $\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{-4}{5}$.

Termos de uma razão

Observe a razão:

$a:b=\frac{a}{b}$ (lê-se "a está para b" ou "a para b").

Na razão *a:b* ou $\frac{a}{b}$, o número *a* é denominado antecedente e o número *b* é denominado consequente.

Veja o exemplo:

$3:5=\frac{3}{5}$ → O antecedente é 3.
→ O consequente é 5.

Leitura da razão: *3 está para 5* ou *3 para 5*.

Razões inversas

Considere as razões $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$.

Observe que o produto dessas duas razões é igual a 1, ou seja, $\frac{4}{5}.\frac{5}{4}=1$.

Nesse caso, podemos afirmar que $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$ são razões inversas.

Duas razões são inversas entre si quando o produto delas é igual a 1.

Exemplo:

$\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$ são razões inversas, pois $\frac{3}{7}.\frac{7}{3}=1$.

Verifique que nas razões inversas o antecedente de uma é o consequente da outra, e vice-versa.

Observações:

1) Uma razão de antecedente zero não possui inversa.
2) Para determinar a razão inversa de uma razão dada, devemos permutar (trocar) os seus termos.
3) Exemplo: O inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$.

Razões equivalentes

Dada uma razão entre dois números, obtemos uma razão equivalente da seguinte maneira:

Multiplicando-se ou dividindo-se os termos de uma razão por um mesmo número racional (diferente de zero), obtemos uma razão equivalente.

Exemplos:

$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ (×2, ×2) → $\frac{5}{6}$ e $\frac{10}{12}$ são razões equivalentes.

$\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ (:5, :5) → $\frac{15}{35}$ e $\frac{3}{7}$ são razões equivalentes.

Razões entre grandezas da mesma espécie

O conceito é o seguinte:

Denomina-se razão entre grandezas de mesma espécie o quociente entre os números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplos:

1) Calcular a razão entre a altura de dois anões, sabendo que o primeiro possui uma altura h_1= 1,20m e o segundo possui uma altura h_2= 1,50m. A razão entre as alturas h_1 e h_2 é dada por:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1{,}20\,\cancel{m}}{1{,}50\,\cancel{m}} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{4}{5}$$

2) Determinar a razão entre as áreas das superfícies das quadras de vôlei e basquete, sabendo que a quadra de vôlei possui uma área de 162m^2 e a de basquete possui uma área de 240m^2.

Razão entre as área da quadra de vôlei e basquete:

$$\frac{A_v}{A_b} = \frac{162\,\cancel{m^2}}{240\,\cancel{m^2}} = \frac{162}{240} = \frac{27}{40}$$

Razões entre grandezas de espécies diferentes

O conceito é o seguinte:

Para determinar a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, determina-se o quociente entre as medidas dessas grandezas. Essa razão deve ser acompanhada da notação que relaciona as grandezas envolvidas.

Exemplos:

1) Consumo médio:

Beatriz foi de São Paulo a Campinas (92Km) no seu carro. Foram gastos nesse percurso 8 litros de combustível. Qual a razão entre a distância e o combustível consumido? O que significa essa razão?

Solução:

Razão = $\frac{92\,km}{8\ell} = 11{,}5\,km/\ell$

Razão = 11,5 km/l (lê-se "11,5 quilômetros por litro").
Essa razão significa que a cada litro consumido foram percorridos em média 11,5 km.

2) Velocidade média:

Moacir fez o percurso Rio-São Paulo (450Km) em 5 horas. Qual a razão entre a medida dessas grandezas? O que significa essa razão?

Solução:

Razão = $\frac{450\,km}{5\,h} = 90\,km/h$

Razão = *90 km/h* (lê-se "90 quilômetros por hora").

Essa razão significa que a cada hora foram percorridos em média 90 km.

3) Densidade demográfica:

O estado do Ceará no último censo teve uma população avaliada em 6.701.924 habitantes. Sua área é de 145.694 km^2. Determine a razão entre o número de habitantes e a área desse estado. O que significa essa razão?

Solução:

Razão = $\frac{6.701.924\,hab}{145.694\,km^2} = 46\ hab/km^2$

Razão = *46 hab/km^2* (lê-se "46 habitantes por quilômetro quadrado").

Essa razão significa que em cada quilômetro quadrado existem em média 46 habitantes.

4) Densidade absoluta ou massa específica:

Um cubo de ferro de 1cm de aresta tem massa igual a 7,8g. Determine a razão entre a massa e o volume desse corpo. O que significa essa razão?

Solução:

Volume = 1cm . 1cm . 1cm = 1cm^3

Razão = $\frac{7,8\,g}{1\,cm^3} = 7,8\ g/cm^3$

Razão = *7,8 g/cm^3* (lê-se "7,8 gramas por centímetro cúbico").

Essa razão significa que 1cm^3 de ferro pesa 7,8g.

Proporções

Rogerio e Claudinho passeiam com seus cachorros. Rogerio pesa 120kg, e seu cão, 40kg. Claudinho, por sua vez, pesa 48kg, e seu cão, 16kg.

Observe a razão entre o peso dos dois rapazes:

$$\frac{120kg}{48kg} = \frac{5}{2}$$

(: 24 sobre 120kg; : 24 sob 48kg)

Observe, agora, a razão entre o peso dos cachorros:

$$\frac{40kg}{16kg} = \frac{5}{2}$$

(: 8 sobre 40kg; : 8 sob 16kg)

Verificamos que as duas razões são iguais. Nesse caso, podemos afirmar que a igualdade $\frac{120}{48} = \frac{40}{16}$ **é** um proporção. Assim:

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Elementos de uma proporção

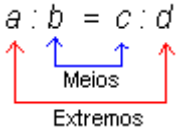
Dados quatro números racionais a, b, c, d, não-nulos, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão do 1º para o 2º for igual **à** razão do 3º para o 4º. Assim:

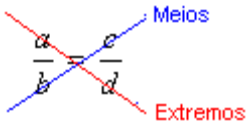
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a:b=c:d$

(lê-se "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*")

Os números *a, b, c* e *d* são os termos da proporção, sendo:

b e *c* os meios da proporção.
a e *d* os extremos da proporção.





Exemplo:
Dada a proporção $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$, temos:
Leitura: 3 está para 4 assim como 27 está para 36.

Meios: 4 e 27 *Extremos:* 3 e 36

Propriedade fundamental das proporções

Observe as seguintes proporções:

$\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ Produto dos meios = 4.30 = 120
Produto dos extremos = 3.40 = 120

$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ Produto dos meios = 9.20 = 180
Produto dos extremos = 4.45 = 180

$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$ Produto dos meios = 8.45 = 360
Produto dos extremos = 5.72 = 360

De modo geral, temos que:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

Daí podemos enunciar a propriedade fundamental das proporções:

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Determinação do termo desconhecido de uma proporção

Exemplos:

Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{5}{8}=\frac{15}{x}$$

Solução:

5 . x = 8 . 15 (aplicando a propriedade fundamental)
5 . x = 120

$$x=\frac{120}{5}$$

x = 24

Logo, o valor de *x* **é** 24.

Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{x-3}{2x+1}=\frac{4}{5},\ \text{sendo}\ x\neq\frac{-1}{2}.$$

Solução:

5 . (x-3) = 4 . (2x+1) (aplicando a propriedade fundamental)
5x - 15 = 8x + 4
5x - 8x = 4 + 15
-3x = 19
3x = -19

$$x=\frac{-19}{3}$$

Logo, o valor de *x* **é** $\frac{-19}{3}$.

Os números 5, 8, 35 e x formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x.

Solução:

$\frac{5}{8}=\frac{35}{x}$ **(aplicando** a propriedade fundamental)
5 . x = 8 . 35
5x = 280

$$x=\frac{280}{5}$$

x = 56
Logo, o valor de *x* **é** 56.

Resolução de problemas envolvendo proporções

Exemplo:
Numa salina, de cada metro cúbico (m^3) de **água** salgada, são retirados 40 dm^3 de sal. Para obtermos 2 m^3 de sal, quantos metros cúbicos de **água** salgada são necessários?

Solução:

A quantidade de sal retirada **é** proporcional ao volume de **água** salgada.
Indicamos por x a quantidade de **água** salgada a ser determinada e armamos a proporção:

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{\text{Quantidade de água salgada}}{\text{Quantidade de sal}}$$

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{x}{2m^3}$$

Lembre-se que $40dm^3 = 0{,}04m^3$.

$$\frac{1m^3}{0{,}04m^3} = \frac{x}{2m^3}$$ **(aplicando** a propriedade fundamental)

$1 \cdot 2 = 0{,}04 \cdot x$

$0{,}04x = 2$

$$x = \frac{2}{0{,}04}$$

$x = 50\ m^3$

Logo, são necessários 50 m^3 de **água** salgada.

Quarta proporcional

Dados três números racionais *a, b* e *c*, não-nulos, denomina-se quarta proporcional desses números um número *x* tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Exemplo:

Determine a quarta proporcional dos números 8, 12 e 6.

Solução: Indicamos por x a quarta proporcional e armamos a proporção:

$$\frac{8}{12} = \frac{6}{x}$$ **(aplicando** a propriedade fundamental)

$8 \cdot x = 12 \cdot 6$

$8 \cdot x = 72$

$$x = \frac{72}{8}$$

$x = 9$

Logo, a quarta proporcional **é** 9.

Proporção contínua

Considere a seguinte proporção: $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$

Observe que os seus meios são iguais, sendo, por isso, denominada proporção contínua. Assim:

Proporção contínua **é** toda a proporção que apresenta os meios iguais.

De um modo geral, uma proporção contínua pode ser representada por:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Terceira proporcional

Dados dois números naturais *a* e *b*, não-nulos, denomina-se terceira proporcional desses números o número *x* tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Exemplo:

Determine a terceira proporcional dos números 20 e 10.

Solução

Indicamos por *x* a terceira proporcional e armamos a proporção:

$\frac{20}{10} = \frac{10}{x}$ **(aplicando** a propriedade fundamental)

20 . x = 10 . 10

20x = 100

$x = \frac{100}{20}$

x = 5

Logo, a terceira proporcional **é** 5.

Propriedades das proporções

1ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo,assim como a soma dos dois **últimos** está para o 4º (ou 3º).

Exemplo:
Determine x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo que x+y=84.

Solução:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{3+4}{4}$$

Assim:

$$\frac{84}{y} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{84.4}{7} = 48$$

x+y = 84 => x = 84-y => x = 84-48 => x=36.

Logo, *x=36* e *y=48*.

2ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo,/assim como a diferença dos dois **últimos** está para o 4º (ou 3º).

Exemplo:
Sabendo-se que *x-y=18*, determine *x* e *y* na proporção $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$.

Solução:

Pela 2ª propriedade temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{5-2}{2} \Rightarrow \frac{18}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{18.2}{3} = 12$$

x-y = 18 => x=18+y => x = 18+12 => x=30.

Logo, x=30 e y=12.

3ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

Aplicando a 1ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

4ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Exemplo:
Sabendo que $a-b = -24$, determine a e b na proporção $\frac{a}{5}=\frac{b}{7}$.

Solução:

Pela 4ª propriedade, temos que:

$$\frac{a-b}{5-7}=\frac{a}{5}=\frac{b}{7}$$

$$\frac{-24}{-2}=\frac{a}{5}\Rightarrow a=\frac{5.(-24)}{-2}\Rightarrow a=60$$

$$\frac{-24}{-2}=\frac{b}{7}\Rightarrow b=\frac{7.(-24)}{-2}\Rightarrow b=84$$

5ª propriedade:

Numa proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b}.\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}=\frac{a.c}{b.d}$$

Assim:

$$\frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Observação: a 5ª propriedade pode ser estendida para qualquer número de razões.

Exemplo:

$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{e^3}{f^3}$$

Exercícios

1. Em um mapa verifica-se que a escala é 1 : 22 000 000. Duas cidades estão distantes de São Paulo, respectivamente, 4 e 6 cm. Se fosse feita uma estrada ligando as três cidades, qual seria o mínimo de extensão que ela teria?

2. Em um mapa, a distância em linha reta entre Brasília e Palmas, no Tocantins é de 10 cm. Sabendo que a distância real entre as duas cidades é de 700 km, qual a escala utilizada na confecção do mapa?

3. Uma estátua de bronze tem 140 kg de massa e seu volume é de 16 dm³. Qual é a sua densidade?

4. Um trem percorreu 453 km em 6 horas. Qual a velocidade média do trem nesse percurso?

5. O estado de Tocantins ocupada uma área aproximada de 278 500 km². De acordo com o Censo/2000 o Tocantins tinha uma população de aproximadamente 1 156 000 habitantes. Qual é a densidade demográfica do estado de Tocantins?

6. A diferença entre a idade de **Ângela** e a idade de Vera **é** 12 anos. Sabendo-se que suas idades estão uma para a outra assim como $\frac{5}{2}$, determine a idade de cada uma.

7. Um segmento de 78 cm de comprimento **é** dividido em duas partes na razão de Determine o comprimento de cada uma das partes.

8. Sabe-se que as casas do braço de um violão diminuem de largura seguindo uma mesma proporção. Se a primeira casa do braço de um violão tem 4 cm de largura e a segunda casa, 3 cm, calcule a largura da quarta casa.

9. **Água** e tinta estão misturadas na razão de 9 para 5. Sabendo-se que há 81 litros de **água** na mistura, o volume total em litros **é** de:

a) 45
b) 81
c) 85
d) 181
e) 126

10. A diferença entre dois números **é** 65. Sabe-se que o primeiro está para 9 assim como o segundo está para 4. Calcule esses números.

Questões de Concurso

11. (BB-Escr-2006-FCC) Em um determinado banco, o funcionário Antônio, trabalhando sozinho, realiza uma tarefa em 10 dias. Dando início ao trabalho e tendo trabalhado sozinho apenas 2 dias, no terceiro dia Antônio junta-se ao funcionário Bernardo e em 3 dias de trabalho concluíram a tarefa. Supondo constante o desempenho desenvolvido por esses funcionários para realizarem seus trabalhos, tem-se que Bernardo, trabalhando sozinho, realizaria toda a tarefa em

(A) 10 dias.
(B) 8 dias.
(C) 6 dias.
(D) 5 dias.
(E) 4 dias.

12. (Trf-Téc.Jud-2007-FCC) Trabalhando ininterruptamente, dois técnicos judiciários arquivaram um lote de processos em 4 horas. Se, sozinho, um deles realizasse essa tarefa em 9 horas de trabalho ininterrupto, o esperado **é** que o outro fosse capaz de realizá-la sozinho se trabalhasse ininterruptamente por um período de

(A) 6 horas.
(B) 6 horas e 10 minutos.
(C) 6 horas e 54 minutos.
(D) 7 horas e 12 minutos.
(E) 8 horas e meia.

13. (TRF-4ª-TÉC.JUD.-2010-FCC) Sejam x , y e z três números inteiros e positivos, tais que x< y < z. Sabe-se que o maior **é** a soma dos outros dois, e que o menor **é** um sexto do maior. Nessas condições, x, y e z são, nesta ordem, diretamente proporcionais a

(A) 1, 3 e 6.
(B) 1, 4 e 6.
(C) 1, 5 e 6.
(D) 1, 6 e 7.
(E) 1, 7 e 8.

14. (TRT-SP-2008-FCC) Um feirante comprou maçãs de dois fornecedores: um deles as vendeu na base de 5 maçãs por R$ 2,00 e o outro na base de 4 por R$ 3,00. Se ele comprou a mesma quantidade de maçãs de cada um desses fornecedores, então, para não ter lucro e nem prejuízo, pode revender todas as maçãs que comprou na base de

(A) 18 unidades por R$ 25,00.
(B) 20 unidades por R$ 23,00.
(C) 32 unidades por R$ 24,00.
(D) 36 unidades por R$ 25,00.
(E) 40 unidades por R$ 23,00.

15. (Atend.-Atibaia-2005-VUNESP) A razão entre as alturas de Fernando e Marina **é** de 7/8. Sendo a altura de Fernando 1,40 m, a altura de Marina **é**

(A) 1,70 m.
(B) 1,65 m.
(C) 1,60 m.
(D) 1,55 m.
(E) 1,50 m.

16. (Nossa Caixa-2005-VUNESP) Andando sempre com uma determinada velocidade média, um trem de carga percorre regularmente um trajeto de 210 km em x horas. Se a velocidade média usual desse trem fosse aumentada em 5 km por hora, o tempo que ele leva para percorrer esse trajeto seria diminuído em uma hora. Portanto, na velocidade original, o tempo x que ele gasta para fazer o percurso **é** de

(A) 9 horas.
(B) 8 horas.
(C) 7 horas.
(D) 6 horas.
(E) 5 horas.

17. (Nossa Caixa-2005-VUNESP) Pretendendo comprar um determinado modelo de televisão, Pedro fez uma pesquisa e constatou que os preços das lojas A e B para esse produto estão na razão de 7 para 6. Se a diferença entre os dois preços **é** de R$ 160,00, então o preço menor **é** igual a

(A) R$860,00.
(B) R$960,00.
(C) R$ 980,00.
(D) R$ 1.020,00.
(E) R$ 1.120,00

18. (Of.Just.Tacil-2004-VUNESP) Para ir do marco do quilômetro 150 de uma estrada ao marco do quilômetro 152, um motorista levou 75 segundos. A velocidade média do motorista, em km/h, foi de

(A) 37,5.
(B) 74.
(C) 82.
(D) 96.
(E) 100.

19. (Escr.Téc.Jud. -Tacil-2004-VUNESP) Pedro tem um sítio 2,5 vezes maior que o sítio de Antônio. Se Pedro comprar mais 20 000 m^2 de **área,** qual será a nova razão entre o sítio de Pedro e o sítio de Antônio, sabendo-se que os dois possuem juntos 35 000 m^2 ?

(A) 3,5.
(B) 3,8.
(C) 4,0.
(D) 4,2.
(E) 4,5.

20. (Assist.Téc.Adm.Pmsp-2002-VUNESP) Numa reportagem publicada no jornal Folha de S. Paulo (06.01.02) sobre dicas de como limpar manchas nas paredes internas de uma residência, a empresa Tintas Coral sugere uma receita caseira que deve ser feita com 10 partes de **água,** 5 de **álcool** e 1 de detergente multiuso. Se uma diarista deseja preparar 4 litros dessa receita, deverá usar de **álcool,** em litros, o correspondente a

(A) 1,00.
(B) 1,25.
(C) 1,50.
(D) 1,75.
(E) 2,00.

Respostas

1) Resposta "1320 km".
Solução: 1cm (no mapa) = 22.000.000cm (na realidade)

SP ---------- cidade A ---------- cidade B
4cm 6cm

O mínimo de extensão será a da cidade mais longe (6cm)

22.000.000 x 6 = 132.000.000 cm = 1320 km.
Logo, o mínimo de extensão que ela teria corresponde à 1320 km.

2) Resposta "1: 7 000 000".
Solução: Dados:
Comprimento do desenho: 10 cm
Comprimento no real: 700 km = (700 . 100 000) cm = 70 000 000 cm

$$escala = \frac{comprimento\ do\ desenho}{comprimento\ real} =$$

$$= \frac{10}{70\,000\,000} = \frac{1}{7\,000\,000}\ ou\ 1:7\,000\,000$$

A escala de 1: 7 000 000 significa que:
- 1 cm no desenho corresponde a 7 000 000 cm no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 000 m no real;
- 1 cm no desenho corresponde a 70 km no real.

3) Resposta "8,75 kg/dm³".
Solução: De acordo com os dados do problema, temos:

$$densidade = \frac{140\ kg}{16\ dm^3} = 8{,}75\ \text{kg/dm}^3$$

Logo, a densidade da estátua é de 8,75 kg/dm³, que lemos como: 8,75 quilogramas por decímetro cúbico.

4) Resposta "75,5 km/h".
Solução: De acordo com que o enunciado nos oferece, temos:

$$velocidade\ média = \frac{453\ km}{6\ h} = 75{,}5\ \text{km/h}$$

Logo, a velocidade média do trem, nesse percurso, foi de 75,5 km/h, que lemos: 75,5 quilômetros por hora.

5) Resposta "4,15 hab./km²
Solução: O problema nos oferece os seguintes dados:

A $densidade\ demográfica = \frac{1\ 156\ 000\ hab.}{278\ 500\ km^2} = 4{,}15$ hab./km²

6) Resposta "Ângela 20; Vera 8".
Solução:

A – V = 12 anos
A = 12 + V

$$\frac{A}{V} = \frac{5}{2} \rightarrow \frac{12+V}{V} = \frac{5}{2}$$

2 (12+V) = 5V
24 + 2V = 5V
5V – 2V = 24
3V = 24

$$V = \frac{24}{3}$$

V (Vera) = 8

A – 8 = 12
A = 12 + 8
A (Ângela) = 20

7) Resposta "24 cm; 54 cm".
Solução:
x + y = 78 cm
x = 78 - y

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{78-y}{y} = \frac{4}{9}$$

9 (78 - y) = 4y
702 – 9y = 4y
702 = 4y + 9y
13y = 702

$$y = \frac{702}{13}$$

y = 54cm

x + 54 = 78
x = 78 - 54
x = 24 cm

8) Resposta " $\frac{27}{16}\ cm$ ".
Solução: Caso a proporção entre a 2ª e a 1ª casa se mantenha constante nas demais, é só determinar qual é esta proporção existente entre elas: no caso, $\frac{3}{4}$ = 0,75, ou seja, a largura da 2ª casa é 75% a largura da 1ª; Portanto a largura da 3ª casa é (3 . 0,75) = 2,25 cm.
Logo, a largura da 4ª casa é de (2,25 . 0,75) = 1,69 cm.
Portanto a sequência seria: (4...3...$\frac{9}{4}$...$\frac{27}{16}$...) e assim por diante.

Onde a razão de proporção é $\frac{3}{4}$... e pode ser representada pela expressão:
T_i . P elevado à (n - 1)

Onde:
T_i = termo inicial, neste caso: 4
P^i = proporção entre T_i e o seguinte (razão), neste caso: $\frac{3}{4}$
n = número sequencial do termo que se busca, neste caso: 4

Teremos:

$(T_i = 4; P = \frac{3}{4}; n - 1 = 3)$

$4 . \frac{3^3}{4} = \frac{27}{16}$

9) Resposta "E".
Solução:
A = 81 litros

$$\frac{A}{T} = \frac{9}{5} \rightarrow \frac{81}{T} = \frac{9}{5}$$

$9T = 405$

$T = \frac{405}{9}$

$T = 45$

A + T = ?
81 + 45 = 126 litros

10) Resposta "117 e 52".
Solução:
x – y = 65
x = 65 + y

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{65 + y}{y} = \frac{9}{4}$$

9y = 4 (65 + y)
9y = 260 + 4y
9y – 4y = 260
5y = 260

$y = \frac{260}{5}$

y = 52

x – 52 = 65
x = 65 + 52
x = 117

Gabarito das Questões

1	C
2	D
3	C
4	E
5	C
6	C
7	B
8	D
9	E
10	B

5. - Porcentagem

www.maxieduca.com.br

José Rubens Antoniazzi Silva

**Licenciatura em Matemática pelas Faculdades Adamantinenses Integras
e em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho.
Professor coordenador de núcleo pedagógico
na Diretoria de Ensino Região de Tupã**

MAXI Educa

É uma fração de denominador centesimal, ou seja, é uma fração de denominador 100. Representamos porcentagem pelo símbolo % e lê-se: "por cento".

Deste modo, a fração $\frac{50}{100}$ é uma porcentagem que podemos representar por 50%.

Forma Decimal: É comum representarmos uma porcentagem na forma decimal, por exemplo, 35% na forma decimal seriam representados por 0,35.

$75\% = \frac{75}{100} = 0{,}75$

Cálculo de uma Porcentagem: Para calcularmos uma porcentagem p% de V, basta multiplicarmos a fração $\frac{p}{100}$ por V.

$P\%\text{ de }V = \frac{p}{100} . V$

Exemplo 1

$23\%\text{ de }240 = \frac{23}{100} . 240 = 55{,}2$

Exemplo 2

Em uma pesquisa de mercado, constatou-se que 67% de uma amostra assistem a um certo programa de TV. Se a população é de 56.000 habitantes, quantas pessoas assistem ao tal programa?

Resolução: $67\%\text{ de }56\,000 = \frac{67}{100}.56000 = 37520$

Resposta: 37 520 pessoas.

Porcentagem que o lucro representa em relação ao preço de custo e em relação ao preço de venda

Chamamos de lucro em uma transação comercial de compra e venda a diferença entre o preço de venda e o preço de custo.

Lucro = preço de venda – preço de custo

Caso essa diferença seja negativa, ela será chamada de **prejuízo**.
Assim, podemos escrever:

Preço de custo + lucro = preço de venda
Preço de custo – prejuízos = preço de venda

Podemos expressar o lucro na forma de porcentagem de duas formas:

Lucro sobre o custo = lucro/preço de custo. 100%
Lucro sobre a venda = lucro/preço de venda. 100%

Observação: A mesma análise pode ser feita para o caso de prejuízo.

Exemplo

Uma mercadoria foi comprada por R$ 500,00 e vendida por R$ 800,00.

Pede-se:
- o lucro obtido na transação;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de custo;
- a porcentagem de lucro sobre o preço de venda.

Resposta:

Lucro = 800 – 500 = R$ 300,00

$L_c = \frac{300}{500} = 0,60 = 60\%$

$L_v = \frac{300}{800} = 0,375 = 37,5\%$

Aumento

Aumento Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um aumento de p% de seu valor. Chamemos de *A* o valor do aumento e V_A o valor após o aumento. Então, A = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_A = V + A = V + \frac{p}{100}$. V

$V_A = (1 + \frac{p}{100})$. V

Em que $(1 + \frac{p}{100})$ é o fator de aumento.

Desconto

Desconto Percentual: Consideremos um valor inicial *V* que deve sofrer um desconto de p% de seu valor. Chamemos de *D* o valor do desconto e V_D o valor após o desconto. Então, D = p% de V = $\frac{p}{100}$. V

$V_D = V - D = V - \frac{p}{100}$. V

$V_D = (1 - \frac{p}{100})$. V

Em que $(1 - \frac{p}{100})$ é o fator de desconto.

Exemplo

Uma empresa admite um funcionário no mês de janeiro sabendo que, já em março, ele terá 40% de aumento. Se a empresa deseja que o salário desse funcionário, a partir de março, seja R$ 3 500,00, com que salário deve admiti-lo?

Resolução: $V_A = 1,4$. V

3 500 = 1,4 . V

$V = \frac{3500}{1,4} = 2500$

Resposta: R$ 2 500,00

Aumentos e Descontos Sucessivos: Consideremos um valor inicial *V*, e vamos considerar que ele irá sofrer dois aumentos sucessivos de p_1% e p_2%. Sendo V_1 o valor após o primeiro aumento, temos:

$V_1 = V . (1 + \frac{p_1}{100})$

Sendo V_2 o valor após o segundo aumento, temos:

$V_2 = V_1 . (1 + \frac{p_2}{100})$

$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 + \frac{p_2}{100})$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer dois descontos sucessivos de $p_1\%$ e $p_2\%$.

Sendo V_1 o valor após o primeiro desconto, temos:

$$V_1 = V.(1 - \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o segundo desconto, temos:

$$V_2 = V_1 . (1 - \frac{p_2}{100})$$

$$V_2 = V . (1 - \frac{p_1}{100}) . (1 - \frac{p_2}{100})$$

Sendo V um valor inicial, vamos considerar que ele irá sofrer um aumento de $p_1\%$ e, sucessivamente, um desconto de $p_2\%$.

Sendo V_1 o valor após o aumento, temos:

$$V_1 = V . (1+ \frac{p_1}{100})$$

Sendo V_2 o valor após o desconto, temos:

$$V_2 = V_1 . (1 - \frac{p_2}{100})$$

$$V_2 = V . (1 + \frac{p_1}{100}) . (1 - \frac{p_2}{100})$$

Exemplo

(VUNESP-SP) Uma instituição bancária oferece um rendimento de 15% ao ano para depósitos feitos numa certa modalidade de aplicação financeira. Um cliente deste banco deposita 1 000 reais nessa aplicação. Ao final de n anos, o capital que esse cliente terá em reais, relativo a esse depósito, são:

Resolução: $V^A = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .v$

$$V^A = \left(1.\frac{15}{100}\right)^n .1000$$

$$V^A = 1\,000 . (1{,}15)n$$

$$V^A = 1\,000 . 1{,}15n$$

$$V^A = 1\,150{,}00n$$

QUESTÕES

1. (PREF. AMPARO/SP – AGENTE ESCOLAR – CONRIO/2014) Se em um tanque de um carro for misturado 45 litros de etanol em 28 litros de gasolina, qual será o percentual aproximado de gasolina nesse tanque?

A) 38,357%
B) 38,356%
C) 38,358%
D) 38,359%

Mistura: 28 + 45 = 73
73------100%
28------x
X = 38,356%

RESPOSTA: "B".

2. (SABESP – APRENDIZ – FCC/2012) Observe a tabela que indica o consumo mensal de uma mesma torneira da pia de uma cozinha, aberta meia volta por um minuto, uma vez ao dia.

	Torneira alimentada por água de rua	Torneira alimentada por água da caixa
Consumo mensal por 1 minuto de uso, 1 vez ao dia	28,026 m^3	7,2 m^3

(http://www.sabesp.com.br/CalandraWeb/animacoes/index.html. Acessado em 15/03/2012)

Em relação ao cosumo mensal da torneira alimentada pela água da rua, o da torneira alimentada pela água da caixa representa, aproximadamente,

A) 20%
B) 26%
C) 30%
D) 35%
E) 40%

$$\frac{7,2}{28,026} = 0,256 \approx 26\%$$

RESPOSTA: "B".

3. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O preço de uma mercadoria, na loja J, é de R$ 50,00. O dono da loja J resolve reajustar o preço dessa mercadoria em 20%. A mesma mercadoria, na loja K, é vendida por R$ 40,00. O dono da loja K resolve reajustar o preço dessa mercadoria de maneira a igualar o preço praticado na loja J após o reajuste de 20%. Dessa maneira o dono da loja K deve reajustar o preço em

A) 20%.
B) 50%.
C) 10%.
D) 15%.
E) 60%.

Loja J: 50 + 0,2 . 50 = 60
Loja K: 40 + x . 40 = 60

40x = 20
x = 0,5

O reajuste deve ser de 50%

RESPOSTA: "B".

4. (CÂMARA DE SÃO PAULO/SP – TÉCNICO ADMINISTRATIVO – FCC/2014) O preço de venda de um produto, descontado um imposto de 16% que incide sobre esse mesmo preço, supera o preço de compra em 40%, os quais constituem o lucro líquido do vendedor. Em quantos por cento, aproximadamente, o preço de venda é superior ao de compra?

A) 67%.
B) 61%.
C) 65%.
D) 63%.
E) 69%.

Preço de venda: PV
Preço de compra: PC

PV-0,16PV=1,4PC
0,84PV=1,4PC

$$\frac{PV}{PC} = \frac{1,4}{0,84} = 1,67$$

O preço de venda é 67% superior ao preço de compra.

RESPOSTA: "A".

5. (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Um comerciante comprou uma mercadoria por R$ 350,00. Para estabelecer o preço de venda desse produto em sua loja, o comerciante decidiu que o valor deveria ser suficiente para dar 30% de desconto sobre o preço de venda e ainda assim garantir lucro de 20% sobre o preço de compra. Nessas condições, o preço que o comerciante deve vender essa mercadoria é igual a

A) R$ 620,00.
B) R$ 580,00.
C) R$ 600,00.
D) R$ 590,00.
E) R$ 610,00.

Preço de venda: PV
Preço de compra: 350
30% de desconto, deixa o produto com 70% do seu valor.
Como ele queria ter um lucro de 20% sobre o preço de compra, devemos multiplicar por 1,2(350+0,2.350)
0,7PV=1,2.350

$$PV = 1{,}2 \cdot \frac{350}{0{,}7} = 600$$

O preço de venda deve ser R$600,00

RESPOSTA: "C".

6. (DPE/SP – AGENTE DE DEFENSORIA PÚBLICA – FCC/2013) Uma bolsa contém apenas 5 bolas brancas e 7 bolas pretas. Sorteando ao acaso uma bola dessa bolsa, a probabilidade de que ela seja preta é

A) maior do que 55% e menor do que 60%.
B) menor do que 50%.
C) maior do que 65%.
D) maior do que 50% e menor do que 55%.
E) maior do que 60% e menor do que 65%.

Ao todo tem 12 bolas, portanto a probabilidade de se tirar uma preta é:

$$P = \frac{7}{12} = 0{,}583 = 58{,}3\%$$

RESPOSTA: "A".

7. (PREF. JUNDIAI/SP – ELETRICISTA – MAKIYAMA/2013) Das 80 crianças que responderam a uma enquete referente a sua fruta favorita, 70% eram meninos. Dentre as meninas, 25% responderam que sua fruta favorita era a maçã. Sendo assim, qual porcentagem representa, em relação a todas as crianças entrevistadas, as meninas que têm a maçã como fruta preferida?

A) 10%
B) 1,5%
C) 25%
D) 7,5%
E) 5%

Tem que ser menina E gostar de maçã.

Meninas:100 – 70 = 30%

$$P = \frac{30}{100} \cdot \frac{25}{100} = \frac{7{,}5}{100}$$

RESPOSTA: "D".

8. (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Numa liquidação de bebidas, um atacadista fez a seguinte promoção:

Cerveja em lata: R$ 2,40 a unidade.
Na compra de duas embalagens com 12 unidades cada, ganhe 25% de desconto no valor da segunda embalagem.

Alexandre comprou duas embalagens nessa promoção e revendeu cada unidade por R$3,50. O lucro obtido por ele com a revenda das latas de cerveja das duas embalagens completas foi:
A) R$33,60
B) R$28,60
C) R$26,40
D) R$40,80
E) R$43,20

2,40 . 12 = 28,80
Segunda embalagem: 28,80 . 0,75 = 21,60

As duas embalagens: 28,80 + 21,60 = 50,40
Revenda: 3,5 . 24 = 84,00

Lucro: R$84,00 – R$50,40 – R$33,60

O lucro de Alexandre foi de R$33,60

RESPOSTA: "A".

9. (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Leilão de veículos apreendidos do Detran aconteceu no dia 7 de dezembro.

O Departamento Estadual de Trânsito de Sergipe – Detran/SE – realizou, no dia 7 de dezembro, sábado, às 9 horas, no Espaço Emes, um leilão de veículos apreendidos em fiscalizações de trânsito. Ao todo foram leiloados 195 veículos, sendo que 183 foram comercializados como sucatas e 12 foram vendidos como aptos para circulação.

Quem arrematou algum dos lotes disponíveis no leilão pagou 20% do lance mais 5% de comissão do leiloeiro no ato da arrematação. OS 80% restantes foram pagos impreterivelmente até o dia 11 de dezembro.
Fonte: http://www.ssp.se.gov.br05/12/13 (modificada).

Vitor arrematou um lote, pagou o combinado no ato da arrematação e os R$28.800,00 restantes no dia 10 de dezembro. Com base nas informações contidas no texto, calcule o valor total gasto por Vitor nesse leilão.

A) R$34.600,00
B) R$36.000,00
C) R$35.400,00
D) R$32.000,00
E0 R$37.800,00

R$28.800-------80%
x----------------100%

$$x = \frac{28.800 \cdot 100}{80} = 36.000$$

Valor da comissão: $\frac{36.000 \cdot 5}{100} = 1800$
Valor total: R$36.000,00+R$1.800,00=R$37.800,00

RESPOSTA: "E".

10. (PM/SE – SOLDADO 3ªCLASSE – FUNCAB/2014) Na queima de estoque de uma loja, uma família comprou dois televisores, três aparelhos de ar-condicionado, uma geladeira e uma máquina de lavar.

Produtos	Valores unitários antes da liquidação	Desconto
Televisor	R$ 2.000,00	20%
Ar-condicionado	R$ 1.000,00	10%
Geladeira	R$ 900,00	30%
Máquina de lavar	R$ 1.500,00	40%

Calcule o valor total gasto por essa família.
A) R$7.430,00
B) R$9.400,00
C) R$5.780,00
D) R$6.840,00
E) R$8.340,00

Como é desconto, devemos fazer cada porcentagem: 1-desconto, assim teremos o valor de cada item.
Televisor: 1- 0,2 = 0,8
Ar-condicionado: 1- 0,1 = 0,9
Geladeira: 1 - 0,3 = 0,7
Máquina: 1- 04 = 0,6

Televisor: 2 000 . 0,8 = 1 600
Ar-condicionado: 1 000 . 0,9 = 900
Geladeira: 900 . 0,7 = 630
Máquina: 1 500 . 0,6 = 900

1 600 . 2 + 900 . 3 + 630 + 900 = 7 430

O valor total gasto pela família foi de R$7.430,00.

RESPOSTA: “A”.

6. - Regra de Três Simples

www.maxieduca.com.br

José Rubens Antoniazzi Silva

Licenciatura em Matemática pelas Faculdades Adamantinenses Integras
e em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho.
Professor coordenador de núcleo pedagógico
na Diretoria de Ensino Região de Tupã

MAXI Educa

Regra de Três Simples

Os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos através de um processo prático, chamado **regra de três simples**.

Exemplo 1: Um carro faz 180 km com 15L de álcool. Quantos litros de álcool esse carro gastaria para percorrer 210 km?

Solução:

O problema envolve duas grandezas: distância e litros de álcool.
Indiquemos por x o número de litros de álcool a ser consumido.
Coloquemos as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x

Na coluna em que aparece a variável x ("litros de álcool"), vamos colocar uma flecha:

Distância (km)	Litros de álcool
180	15
210	x ↓

Observe que, se duplicarmos a distância, o consumo de álcool também duplica. Então, as grandezas **distância** e **litros de** álcool são **diretamente proporcionais**. No esquema que estamos montando, indicamos esse fato colocando uma flecha na coluna "distância" no **mesmo sentido** da flecha da coluna "litros de álcool":

Distância (km)	Litros de álcool
↓ 180	15 ↓
210	x

mesmo sentido

Armando a proporção pela orientação das flechas, temos:

$\frac{180^{6}}{210^{7}} = \frac{15}{x}$ ➔ 6x = 7 . 15 ➔6x = 105 ➔ x = $\frac{105}{6}$ ➔ x =17,5

Resposta: O carro gastaria 17,5 L de álcool.

Exemplo 2: Viajando de automóvel, à velocidade de 60 km/h, eu gastaria 4 h para fazer certo percurso. Aumentando a velocidade para 80 km/h, em quanto tempo farei esse percurso?
Solução: Indicando por x o número de horas e colocando as grandezas de mesma espécie em uma mesma coluna e as grandezas de espécies diferentes que se correspondem em uma mesma linha, temos:

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
60	4
80	x

Na coluna em que aparece a variável x ("tempo"), vamos colocar uma flecha:

Velocidade (km/h	Tempo (h)
60	4 ↓
80	x ↓

Observe que, se duplicarmos a velocidade, o tempo fica reduzido à metade. Isso significa que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**. No nosso esquema, esse fato é indicado colocando-se na coluna "velocidade" uma flecha em **sentido contrário** ao da flecha da coluna "tempo":

Velocidade (km/h	Tempo (h)
↑ 60	4 ↓
80	x ↓

sentidos contrários

Na montagem da proporção devemos seguir o sentido das flechas. Assim, temos:

$$\frac{4}{x} = \frac{\cancel{80}^{4}}{\cancel{60}^{3}} \rightarrow 4x = 4 \cdot 3 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{4} \rightarrow x = 3$$

Resposta: Farei esse percurso em 3 h.

Exemplo 3: Ao participar de um treino de Fórmula 1, um competidor, imprimindo velocidade média de 200 km/h, faz o percurso em 18 segundos. Se sua velocidade fosse de 240 km/h, qual o tempo que ele teria gasto no percurso?

Vamos representar pela letra *x* o tempo procurado.
Estamos relacionando dois valores da grandeza velocidade (200 km/h e 240 km/h) com dois valores da grandeza tempo (18 s e *x* s).
Queremos determinar um desses valores, conhecidos os outros três.

Velocidade	**Tempo gasto para fazer o percurso**
200 km/h	18 s
240 km/h	*x*

Se duplicarmos a velocidade inicial do carro, o tempo gasto para fazer o percurso cairá para a metade; logo, as grandezas são inversamente proporcionais. Assim, os números 200 e 240 são inversamente proporcionais aos números 18 e *x*.
Daí temos:

$200 \cdot 18 = 240 \cdot x$
$3\,600 = 240x$
$240x = 3\,600$

$$x = \frac{3600}{240}$$

$x = 15$

O corredor teria gasto 15 segundos no percurso.

Exercícios

1. Completamente abertas, 2 torneiras enchem um tanque em 75 min. Em quantos minutos 5 torneiras completamente abertas encheriam esse mesmo tanque?

2. Um trem percorre certa distância em 6 h 30 min, à velocidade média de 42 km/h. Que velocidade deverá ser desenvolvida para o trem fazer o mesmo percurso em 5 h 15 min?

3. Usando seu palmo, Samanta mediu o comprimento e a largura de uma mesa retangular. Encontrou 12 palmos de comprimento e 5 palmos na largura. Depois, usando palitos de fósforo, mediu novamente o comprimento do tampo da mesa e encontrou 48 palitos. Qual estratégia Samanta usou para obter largura do tampo da mesa em palitos de fósforo?

4. Ao participar de um treino de fórmula Indy, um competidor, imprimindo a velocidade média de 180 km/h, faz o percurso em 20 segundos. Se a sua velocidade fosse de 200 km/h, que tempo teria gasto no percurso?

5. Com 3 pacotes de pães de fôrma, Helena faz 63 sanduíches. Quantos pacotes de pães de fôrma ela vai usar para fazer 105 sanduíches?

Respostas

1) Resposta “30min”.
Solução:

Como aumentar as torneiras diminui o tempo, então a regra de três é inversa:
5 tor. ------ 75min
2 tor. ------ x

5x = 2 . 75 =
5x = 150 =
x = $\frac{150}{5} = 30\ min.$
2) Resposta “52 km”.
Solução:

Como diminuir o tempo aumentaria a velocidade, então a regra de três é inversa:
6h30min = 390min
5h15min = 315min

315min ------ 42km/h
390min ------ x

315x = 390 . 42 =
315x = 16380 =
X = km/h.

3) Resposta “20 palitos de fósforo”.
Solução: Levando os dados dado no enunciado temos:
Palmos: 12 palmos de comprimento e 5 palmos de largura.
Palitos de Fósforo: 48 palitos de comprimento e x palitos de largura.

Portanto temos:

Comprimento	Largura
12 palmos	5 palmos
48 palitos	X palitos

Observe que o comprimento da mesa aumentou 4 vezes quando passamos de “palmo” para “palito”. O que ocorre da mesma forma na largura.

As grandezas são diretamente proporcionais. Daí podemos fazer:

$$\frac{12}{48} = \frac{5}{x} \rightarrow 12x = 48.5 \rightarrow 12x = 240 \rightarrow x = \frac{240}{12} \rightarrow x = 20.$$

Logo, concluímos que o tampo da mesa tem 20 palitos de fósforo de largura.

4) Resposta "18 segundos".
Solução: Levando em consideração os dados:
Velocidade média: 180 km/h ⟶ tempo do percurso: 20s
Velocidade média: 200 km/h ⟶ tempo do percurso: ?

Vamos representar o tempo procurado pela letra x. Estamos relacionando dois valores de grandeza "velocidade" (180 km/h e 200 km/h) com dois valores de grandeza "tempo" (20s e xs).
Conhecido os 3 valores, queremos agora determinar um quarto valor. Para isso, organizamos os dados na tabela:

Velocidade km/h	Tempo (s)
180	20
200	x

Observe que, se duplicarmos a velocidade inicial, o tempo gasto para percorrer o percurso vai cair para a metade. Logo, as grandezas são "inversamente proporcionais". Então temos:

$$180 \cdot 20 = 200 \cdot x \longrightarrow 200x = 3600 \longrightarrow x = \frac{3600}{200} \rightarrow x = 18.$$

Conclui-se, então, que se o competidor tivesse andando em 200 km/h, teria gasto 18 segundos para realizar o percurso.

5) Resposta "5 pacotes".
Solução: Analisando os dados dado no enunciado temos:
Pacotes de Pães: 3 pacotes ⟶ Sanduíches: 63.
Pacotes de Pães: x pacotes ⟶ Sanduíches: 105.

Pacotes de Pães	Sanduíches
3	63
x	105

Basta fazermos apenas isso:

$$63 \cdot x = 3 \cdot 105 \longrightarrow 63x = 315 \longrightarrow x = \frac{315}{63} \rightarrow x = 5.$$

Concluímos que ela precisará de 5 pacotes de pães de forma.

7. - Média Aritmética

www.maxieduca.com.br

MAXI Educa

Considere um conjunto numérico $A = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ e efetue uma certa operação com todos os elementos de A. Se for possível substituir cada um dos elementos do conjunto A por um número x de modo que o resultado da operação citada seja o mesmo diz-se, por definição, que x será a média dos elementos de A relativa a essa operação.

Média Aritmética Simples

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição é chamada média aritmética. Se x for a média aritmética dos elementos do conjunto numérico $A = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$, então, por definição:

$x + x + x + ... + x = x_1; x_2; x_3; ...; x_n$ $\underbrace{\quad}_{n}$ $n \cdot x = x_1; x_2; x_3; ...; x_n$ e, portanto,

n parcelas

$$x = \frac{x_1; x_2; x_3; \ ...; \ x_n}{n}$$

Conclusão: A média aritmética dos n elementos do conjunto numérico A é a soma de todos os seus elementos, dividida por n. Exemplo:

Calcular a média aritmética entre os números 3, 4, 6, 9, e 13.

Resolução: Se x for a média aritmética dos elementos do conjunto (3, 4, 6, 9, 13), então x será a soma dos 5 elementos, dividida por 5. Assim:

$$x = \frac{3+4+6+9+13}{5} \leftrightarrow x = \frac{35}{5} \leftrightarrow x = 7$$

A média aritmética é 7.

Média Aritmética Ponderada

A média dos elementos do conjunto numérico A relativa à adição e na qual cada elemento tem um "determinado peso" é chamada média aritmética ponderada. Se x for a média aritmética ponderada dos elementos do conjunto numérico $A = \{x_1; x_2; x_3; ...; x_n\}$ com "pesos" $P_1; P_2; P_3; ...; P_n$, respectivamente, então, por definição:

$P_1 \cdot x + P_2 \cdot x + P_3 \cdot x + ... + P_n \cdot x =$
$= P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + ... + P_n \cdot x_n$
$(P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n) \cdot x =$
$= P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + ... + P_n \cdot x_n$ e, portanto,

$$x = \frac{P_1 . x_1; P_2 \, x_2; \ P_3 x_3; \ ...; \ P_n x_n}{P_1 + \ P_2 + P_3 + \ ... + \ P_n}$$

Observe que se $P_1 = P_2 = P_3 = ... = P_n = 1$, então: $x = \frac{x_1; x_2; x_3; \ ...; \ x_n}{n}$ é a média aritmética simples.

Conclusão: A média aritmética ponderada dos n elementos do conjunto numérico A é a soma dos produtos de cada elemento multiplicado pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos. Exemplo:

Calcular a média aritmética ponderada dos números 35, 20 e 10 com pesos 2, 3, e 5, respectivamente.

Resolução: Se x for a média aritmética ponderada, então:

$$x = \frac{2 \, .35 + 3 \, .20 + 5 \, .10}{2+3+5} \leftrightarrow x = \frac{70+60+50}{10} \leftrightarrow x = \frac{180}{10} \leftrightarrow x = 18$$

A média aritmética ponderada é 18.

Observação**:** A palavra média, sem especificar se é aritmética, deve ser entendida como média aritmética.

Questões

1- Determine a média aritmética entre 2 e 8.

2- Determine a média aritmética entre 3, 5 e 10.

3- Qual é a média aritmética simples dos números 11, 7, 13 e 9?

4- A média aritmética simples de 4 **números pares distintos, pertences ao conjunto dos números inteiros não nulos é igual a 44. Qual é o maior valor que um desses números pode ter?**

5- Calcule a média aritmética simples em cada um dos seguintes casos:
a) 15; 48; 36
b) 80; 71; 95; 100
c) 59; 84; 37; 62; 10
d) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

6- Qual é a média aritmética ponderada dos números 10, 14, 18 e 30 sabendo-se que os seus pesos são respectivamente 1, 2, 3 e 5?

7- Calcular a média ponderada entre 3, 6 e 8 para os respectivos pesos 5 , 3 e 2.

8- Numa turma de 8ª série 10 alunos possuem 14 anos, 12 alunos possuem 15 anos e oito deles 16 anos de idade. Qual será a idade média dessa turma?

9- Determine a média salarial de uma empresa, cuja folha de pagamento é assim discriminada:

Profissionais	→	*Quantidade*	→	*Salário*
Serventes	→	20 profissionais	→	R$ 320,00
Técnicos	→	10 profissionais	→	R$ 840,00
Engenheiros	→	5 profissionais	→	R$ 1.600,00

10- Calcule a média ponderada entre 5, 10 e 15 para os respectivos pesos 10, 5 e 20.

Respostas:

1- Resposta “5”.
Solução:
M.A. (2 e 8) = 2 + 8 / 2 = 10 / 2 = 5 → M.A. (2 e 8) = 5.

2- Resposta “6”.
Solução:
M.A. (3, 5 e 10) = 3 + 5 + 10 / 3 = 18 / 3 = 6 → M.A. (3, 5 e 10) = 6.

3- Resposta “10”.
Solução: Para resolver esse exercício basta fazer a soma dos números e dividi-los por quatro, que é a quantidade de números, portanto:

$$M.A = \frac{11 + 7 + 13 + 9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Logo, a média aritmética é 10.

4- Resposta “164”.
Solução: Quando falamos de média aritmética simples, ao diminuirmos um dos valores que a compõe, precisamos aumentar a mesma quantidade em outro valor, ou distribuí-la entre vários outros valores, de sorte que a soma total não se altere, se quisermos obter a mesma média.

Neste exercício, três dos elementos devem ter o menor valor possível, de sorte que o quarto elemento tenha o maior valor dentre eles, tal que a média aritmética seja igual a 44. Este será o maior valor que o quarto elemento poderá assumir.

Em função do enunciado, os três menores valores inteiros, pares, distintos e não nulos são: 2, 4 e 6. Identificando como x este quarto valor, vamos montar a seguinte equação:

$$M.A = \frac{11 + 7 + 13 + 9}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

Solucionando-a temos:

$$\frac{2 + 4 + 6 + x}{4} = 44 \rightarrow 2 + 4 + 6 + x = 44.4 \rightarrow 12 + x = 176 \rightarrow x = 176 - 12 = 164.$$

Logo, o maior valor que um desses números pode ter é 164.

5- Solução:
a) (15 + 48 + 36)/3 = 99/3 = 33

b) (80 + 71 + 95 + 100)/4 = 346/4 = 86,5

c) (59 + 84 + 37 + 62 + 10)/5 = 252/5 = 50,4

d) (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)/9 = 45/9 = = 5

6- Resposta “22”.

Solução: Neste caso a solução consiste em multiplicarmos cada número pelo seu respectivo peso e somarmos todos estes produtos. Este total deve ser então dividido pela soma total dos pesos:

$$\frac{10.1 + 14.2 + 18.3 + 30.5}{1 + 2 + 3 + 5} = \frac{10 + 28 + 54 + 150}{11} = \frac{242}{11} = 22$$

Logo, a média aritmética ponderada é 22.

7- Resposta “4,9”.
Solução:

$$MP = \frac{3.5 + 6.3 + 8.2}{5 + 3 + 2} = \frac{15 + 18 + 16}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9.$$

8- Resposta “± 14,93“.
Solução:

$$MP = \frac{14.10 + 15.12 + 16.8}{10 + 12 + 8} = \frac{140 + 180 + 128}{30} = \frac{448}{30} = \pm\, 14{,}93.$$

9) Resposta “≃ 651,43”.

Solução: Estamos diante de um problema de média aritmética ponderada, onde as quantidades de profissionais serão os pesos. E com isso calcularemos a média ponderada entre R$ 320,00 , R$ 840,00 e R$ 1 600,00 e seus respectivos pesos 20 , 10 e 5. Portanto:

$$mp = \frac{320.20 + 840.10 + 1600.5}{20 + 10 + 5} = \frac{22.800}{35} \cong R\$651{,}43$$

10- Resposta “11,42”.
Solução:

$$MP = \frac{5.10 + 10.5 + 15.20}{10 + 5 + 20} = \frac{50 + 50 + 300}{35} = \frac{400}{35} = 11{,}42.$$

8. - Equação do 1º grau

www.maxieduca.com.br

Joaquim J. Estevam

Graduado em Matemática pela UNIFMU – Univ. Faculdades Metropolitanas Unidas – São Paulo (curso com duração de 4 anos, sendo Licenciatura Curta em Ciências, Licenciatura Plena em Matemática e Bacharelado em Informática); Professor há 30 anos na área de Matemática.

MAXI Educa

É toda sentença matemática do tipo **ax + b = 0**, onde **a** e **b** são chamados de coeficientes e pode ser qualquer número que pertence ao Conjunto dos Números Reais, com **a ≠ 0**. Exemplos:

1) – 5x + 6 = 0; a = - 5 e b = 6
2) x – 10 = 0; a = 1 e b = -10
3) 3x = 0; a = 3 e b = 0

Resolução: Resolver uma equação é determinar o valor de x que torna a equação verdadeira:

ax + b = 0
ax = - b

$$x = \frac{-b}{a}$$

Exemplo:
x – 6 = 0 ➔ x = 6, portanto o conjunto verdade é: V = {6}

Veja estas equações, nas quais há apenas uma incógnita:

3x – 2 = 16 (equação de 1º grau)

$2y^3 - 5y = 11$ (equação de 3º grau)

$1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$ (equação de 1º grau)

O método que usamos para resolver a equação de 1º grau é isolando a incógnita, isto é, deixar a incógnita sozinha em um dos lados da igualdade. Para conseguir isso, há dois recursos:
- inverter operações;
- efetuar a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Exemplo: Resolução da equação 3x – 2 = 16, invertendo operações.

Procedimento e justificativa: Se 3x – 2 dá 16, conclui-se que 3x dá 16 + 2, isto é, 18 (invertemos a subtração). Se 3x é igual a 18, é claro que x é igual a 18 : 3, ou seja, 6 (invertemos a multiplicação por 3).

Registro

3x – 2 = 16
3x = 16 + 2
3x = 18

$$x = \frac{18}{3}$$

x = 6

Exemplo: Resolução da equação $1 - 3x + \frac{2}{5} = x + \frac{1}{2}$, efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade.

Procedimento e justificativa: Multiplicamos os dois lados da equação por mmc (2;5) = 10. Dessa forma, são eliminados os denominadores. Fazemos as simplificações e os cálculos necessários e isolamos x, sempre efetuando a mesma operação nos dois lados da igualdade. No registro, as operações feitas nos dois lados da igualdade são indicadas com as setas curvas verticais.

Registro

1 – 3x + 2/5 = x + 1 /2
10 – 30x + 4 = 10 x + 5
-30x -10x = 5 – 10 – 4
-40x = -9 (-1)
40x = 9
x = 9/40
x = 0,225

Há também um processo prático, bastante usado, que se baseia nessas ideias e na percepção de um padrão visual.

- Se a + b = c, conclui-se que a = c + b.

Na primeira igualdade, a parcela *b* aparece somando no lado esquerdo; na segunda, a parcela *b* aparece subtraindo no lado direito da igualdade.

- Se a . b = c, conclui-se que a = c + b, desde que b ≠ 0.

Na primeira igualdade, o número *b* aparece multiplicando no lado esquerdo; na segunda, ele aparece dividindo no lado direito da igualdade.

O processo prático pode ser formulado assim:

- Para isolar a incógnita, coloque todos os termos com incógnita de um lado da igualdade e os demais termos do outro lado.
- Sempre que mudar um termo de lado, inverta a operação.

Exemplo

Resolução da equação $\frac{5(x+2)}{2} = \frac{(x+2)(x-3)}{3} - \frac{x^2}{3}$, usando o processo prático.

Procedimento e justificativa: Iniciamos da forma habitual, multiplicando os dois lados pelo mmc (2;3) = 6. A seguir, passamos a efetuar os cálculos indicados. Neste ponto, passamos a usar o processo prático, colocando termos com a incógnita à esquerda e números à direita, invertendo operações.

Registro

$$\frac{5(x+2)}{2} - \frac{(x+2)(x-3)}{3} = -\frac{x^2}{3}$$

$$6.\frac{5(x+2)}{2} - 6.\frac{(x+2)(x-3)}{3} = 6.\frac{x^2}{3}$$

$15(x + 2) – 2(x + 2)(x – 3) = – 2x^2$
$15x + 30 – 2(x^2 – 3x + 2x – 6) = – 2x^2$
$15x + 30 – 2(x^2 – x – 6) = – 2x^2$
$15x + 30 – 2x^2 + 2x + 12 = – 2x^2$
$17x – 2x^2 + 42 = – 2x^2$
$17x – 2x^2 + 2x^2 = – 42$
$17x = – 42$

$$x = -\frac{42}{17}$$

Note que, de início, essa última equação aparentava ser de 2º grau por causa do termo $-\frac{x^2}{3}$ no seu lado direito. Entretanto, depois das simplificações, vimos que foi reduzida a uma equação de 1º grau (17x = – 42).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Resolvendo, em **R**, a equação $x.[2x – (3 – x)] – 3.(x^2 – 1) = 0$, temos que x é igual a:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2) Em um programa de televisão, um candidato deve responder a 20 perguntas. A cada pergunta respondida corretamente, o candidato ganha R$ 500,00 e perde R$ 300,00 por pergunta não respondida ou respondida incorretamente. Se o candidato ganhou R$ 7.600,00, o número de perguntas que acertou é:
a) 19
b) 16
c) 20
d) 17
e) 18

3) O conjunto verdade da equação do 1º grau $ax + 3 = 23$ é 5, o valor de **a** é:
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

4) Resolvendo, em **R**, a equação $x - \frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{6} + 2$, o valor de **x** é:

a) $\frac{3}{11}$

b) $\frac{11}{5}$

c) 11

d) 3

e) $\frac{11}{3}$

5) A equação $4x – 12 + 4(x – 3)$ tem como solução:
a) Qualquer número real.
b) 0
c) 1
d) – 1
e) 2

RESOLUÇÕES

1) primeiro eliminamos os parênteses aplicando a distributiva:

$x.[2x – 3 + x] – 3x^2 + 3 = 0$
$x.[3x – 3] – 3x^2 + 3 = 0$
eliminando os colchetes:
$3x^2 – 3x – 3x^2 + 3 = 0$
$- 3x = - 3 x(- 1)$
$3x = 3$
$x = 3:3$
$x = 1$
Alternativa a

2) Chamando de **x** o número de questões certas, como temos 20 questões, o número de erradas é **20 – x**, então:

500x – 300(20 –x) = 7.600
500x – 6.000 + 300x = 7.600
800 x = 7.600 + 6.000
800 x = 13.600 :(100)
8x = 136
x = 136:8
x = 17
Alternativa d

3) Substituímos x por 5:

a.5 + 3 = 23
5a = 23 – 3
5a = 20
a = 20:5
a = 4
Alternativa b

4) Primeiro temos que o mmc(3, 6) = 6, então:

$$\frac{x}{1} - \frac{x-1}{3} = \frac{x+1}{6} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{6x - 2(x-1)}{6} = \frac{x+1+12}{6}$$

6x – 2x + 2 = x + 13
6x – 2x – x = 13 – 2
3x = 11

$$x = \frac{11}{3}$$

Alternativa e

5) Aplicando a distributiva, temos:

4x – 12 = 4x – 12
4x – 4x = - 12 + 12
0x = 0 que é uma sentença sempre verdadeira, qualquer que seja x multiplicado por zero é igual a zero.

Alternativa a
Observação: esse tipo de equação em que o 1º membro é igual ao 2º membro é chamada de**equação identidade**.

9. - Sistema de Equações do 1º grau

www.maxieduca.com.br

Joaquim J. Estevam

Graduado em Matemática pela UNIFMU – Univ. Faculdades Metropolitanas Unidas – São Paulo (curso com duração de 4 anos, sendo Licenciatura Curta em Ciências, Licenciatura Plena em Matemática e Bacharelado em Informática); Professor há 30 anos na área de Matemática.

MAXI Educa

Utilizamos sistemas para resolver problemas que têm duas variáveis. Pois, se tivermos uma só equação com duas variáveis podemos ter infinitas soluções.

Exemplo: x + y = 9; x = 1 e y = 8; ou x = 8 e y = 1; ou x = 10 e y = - 1; ou x = 7 e y = 2; são alguns pares x e y que são soluções desta equação.

Então, quando temos problemas com duas variáveis temos que ter duas equações.

Métodos de resolução

Para resolver um sistema temos dois métodos que são mais utilizados.

1º método: Adição

Resolver um sistema pelo método da adição consiste em somar as duas equações de maneira que uma das variáveis seja cancelada. Para que isso aconteça, às vezes precisamos multiplicar uma das equações por um número para que se possa cancelar a variável.

Exemplo:
Resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Para poder cancelar uma das variáveis devemos ter dois números opostos, então vamos multiplicar a 1ª equação por **2** e teremos **– 2y** na primeira equação e **+ 2y** na segunda equação.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \ .(2) \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

somamos membro a membro as duas equações.

$$7x = 7$$

$$x = \frac{7}{7}$$

x = 1, substituímos x na primeira equação ➔ 2.1 – y = 1 ➔ 2 – 1 = y ➔ y = 1

V = {(1, 1)}, a solução ou conjunto verdade é dada na forma de um par ordenado (x, y).

2º método: Substituição

Este método consiste em isolar uma das variáveis em uma das equações e substituir na outra.

Exemplo:
Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \quad (I) \\ 3x + 2y = 5 \quad (II) \end{cases}$$

Em (I), temos que ➔ 2x – y = 1 ➔ 2x – 1 = y, isto é: y = 2x – 1, este valor de **y** nós substituímos em (II) e temos:

3x + 2.(2x – 1) = 5
3x + 4x – 2 = 5
7x = 5 + 2
7x = 7

$x = \frac{7}{7}$

x = 1, substituindo x em (I) novamente ➔ y = 2.1 – 1 ➔ y = 2 – 1 ➔ y = 1
V={(1, 1)}

QUESTÕES

1) O conjunto verdade do sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases}$ é:
a) V = {(- 2, 1)}
b) V = {(2, 1)}
c) V = {(2, - 1)}
d) V = {(- 2, - 1)}
e) Nenhuma das anteriores.

2) Numa determinada livraria, a soma dos preços de aquisição de dois lápis e um estojo é R$ 10,00. O preço do estojo é R$ 5,00 mais barato que o preço de três lápis. A soma dos preços de aquisição de um estojo e de um lápis é:
a) R$ 3,00
b) R$ 4,00
c) R$ 6,00
d) R$ 7,00
e) R$ 12,00

3) O professor João tem R$ 275,00 em notas de R$ 5,00 e R$ 10,00; se o número total de cédulas é 40, a diferença entre o número de notas de R$ 5,00 e R$ 10,00 é:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 15
e) 20

4) Numa fazenda há patos e porcos, num total de 60 animais. O número de patos é o dobro do número de porcos, quantos patos há na fazenda:
a) 30
b) 40
c) 50
d) 10
e) 15

5) No sistema $\begin{cases} x + y = 20 \\ 7x + 3y = 108 \end{cases}$ o valor de **x** é:
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Resoluções:

1) Para resolver o sistema dado temos que multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda por – 2, para eliminarmos o **x**:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 & x(3) \\ 3x + 2y = -4 & x(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 15y = 3 \\ -6x - 4y = 8 \end{cases} +$$

$$11y = 11$$

$$y = \frac{11}{11}$$

y = 1, substituindo y na primeira equação ➔ 2x + 5.1 = 1 ➔ 2x + 5 = 1 ➔ 2x = 1 – 5 ➔ 2x = - 4 ➔ x = ➔ x $\frac{-4}{2}$ = - 2.

Alternativa a

2) Neste problema, primeiro precisamos montar as equações. Sendo **x** o preço de um lápis e **y** o preço de um estojo, então:

$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$, neste caso o sistema já esta pronto para resolver pelo método da adição, pois temos **y** e **– y** nas equações:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases} +$$

$$5x = 15$$

$$x = \frac{15}{5}$$

x = 3, substituindo x na 1ª equação ➔ 2.3 + y = 10 ➔ 6 + y = 10 ➔ y = 10 – 6 ➔ y = 4

Então um lápis custa R$ 3,00 e um estojo R$ 4,00 ➔ 3,00 + 4,00 = 7,00

Alternativa d

3) Sendo **x** o número de cédulas de R$ 5,00 e **y** o números de cédulas de R$ 10,00, então:

$\begin{cases} x + y = 40 & (I) \\ 5x + 10y = 275 & (II) \end{cases}$

Na equação (I) ➔ x + y = 40, isolamos o **x** ➔ x = 40 – y, substituindo em (II):

$$5.(40 - y) + 10y = 275$$
$$200 - 5y + 10y = 275$$
$$5y = 275 - 200$$
$$5y = 75$$
$$y = \frac{75}{5}$$
$$y = 15$$

substituindo y em (I) ➔ x = 40 – 15 ➔ x = 25

a diferença é x – y = 25 – 15 = 10

Alternativa c

4) Sendo **x** o número de patos e **y** o número de porcos:

$$\begin{cases} x + y = 60 & (I) \\ x = 2y & (II) \end{cases}$$

Neste caso o **x** já está isolado, então é só substituir (II) em (I)

$2y + y = 60$
$3y = 60$
$y = \frac{60}{3}$
$y = 20$

substituindo y em (II) ➔ $x = 2.20$ ➔ $x = 40$ patos.

Alternativa b

5) Para determinar o valor de **x** somente, basta isolar o **y**:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (I) \\ 7x + 3y = 108 & (II) \end{cases}$$

Em (I) ➔ $x + y = 20$ ➔ $y = 20 - x$, substituindo em (II):

$7x + 3.(20 - x) = 108$
$7x + 60 - 3x = 108$
$7x - 3x = 108 - 60$
$4x = 48$
$x = \frac{48}{4}$
$x = 12$

Alternativa e

10. - Sistema Métrico: Medidas de Tempo, Comprimento, Superfície e Capacidade

www.maxieduca.com.br

Evandro Marques

Mestre e Graduado em Matemática;
Especialista e Graduado em Direito;
Professor da Rede Estadual Pública de São Paulo.

MAXI Educa

Sistema de Medidas Decimais

Um sistema de medidas é um conjunto de unidades de medida que mantém algumas relações entre si. O sistema métrico decimal é hoje o mais conhecido e usado no mundo todo.

Medidas de Comprimento

Na tabela seguinte, listamos as unidades de medida de comprimento do sistema métrico. A unidade fundamental é o metro, porque dele derivam as demais.

Unidades de Comprimento						
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
1000m	100m	10m	1m	0,1m	0,01m	0,001m

Há, de fato, unidades quase sem uso prático, mas elas têm uma função. Servem para que o sistema tenha um padrão: cada unidade vale sempre 10 vezes a unidade menor seguinte.

Por isso, o sistema é chamado decimal.

E há mais um detalhe: embora o decímetro não seja útil na prática, o decímetro cúbico é muito usado com o nome popular de litro.

Medidas de Superfície (área)

As unidades de área do sistema métrico correspondem às unidades de comprimento da tabela anterior.

São elas: quilômetro quadrado (km^2), hectômetro quadrado (hm^2), etc. As mais usadas, na prática, são o quilômetro quadrado, o metro quadrado e o hectômetro quadrado, este muito importante nas atividades rurais com o nome de hectare (ha): 1 hm^2 = 1 ha.

No caso das unidades de área, o padrão muda: uma unidade é 100 vezes a menor seguinte e não 10 vezes, como nos comprimentos. Entretanto, consideramos que o sistema continua decimal, porque $100 = 10^2$.

Unidades de Área						
km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**
quilômetro quadrado	hectômetro quadrado	decâmetro quadrado	metro quadrado	decímetro quadrado	centímetro quadrado	milímetro quadrado
1000000m^2	10000m^2	100m^2	1m^2	0,01m^2	0,0001m^2	0,000001m^2

Medidas de Volume

Agora, vejamos as unidades de volume. De novo, temos a lista: quilômetro cúbico (km^3), hectômetro cúbico (hm^3) etc. Na prática, são muitos usados o metro cúbico e o centímetro cúbico.

Nas unidades de volume, há um novo padrão: cada unidade vale 1000 vezes a unidade menor seguinte. Como $1000 = 10^3$, o sistema continua sendo decimal.

Unidades de Volume						
km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**
quilômetro cúbico	hectômetro cúbico	decâmetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
1000000000m^3	1000000m^3	1000m^3	1m^3	0,001m^3	0,000001m^3	0,000000001m^3

Medidas de Capacidade

A noção de capacidade relaciona-se com a de volume. Se o volume da água que enche um tanque é de 7000 litros, dizemos que essa é a capacidade do tanque. A unidade fundamental para medir capacidade é o litro (l); 1 litro equivale a 1 dm^3.

Cada unidade vale 10 vezes a unidade menor seguinte.

Unidades de Capacidade						
kl	**hl**	**dal**	**l**	**dl**	**Cl**	**ml**
quilolitro	hectolitro	decalitro	litro	decilitro	centímetro	mililitro
1000l	100l	10l	1l	0,1l	0,01l	0,001l

Medidas de Massa

O sistema métrico decimal inclui ainda unidades de medidas de massa. A unidade fundamental é o grama.

Unidades de Massa						
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
quilograma	hectograma	decagrama	grama	decigrama	centigrama	miligrama
1000g	100g	10g	1g	0,1g	0,01g	0,001g

Dessas unidades, só têm uso prático o quilograma, o grama e o miligrama. No dia-a-dia, usa-se ainda a tonelada (t): 1t = 1000 kg.

Medidas de Tempo

Desse grupo, o sistema hora – minuto – segundo, que mede intervalos de tempo, é o mais conhecido.

2h = 2 . 60min = 120 min = 120 . 60s = 7 200s

Para passar de uma unidade para a menor seguinte, multiplica-se por 60.

Vejamos que 0,3h não indica 30 minutos nem 3 minutos; como 1 décimo de hora corresponde a 6 minutos, conclui-se que 0,3h = 18min.

Há outras representações do tempo:
1 milênio = 1000 anos
1 século = 100 anos
1 década = 10 anos
1 ano = 12 meses = 365 dias
1 mês = 30 dias

Apesar de haver meses com 30 dias e outros com 31 dias e 29 dias, para os cálculos matemáticos, leva-se em conta o mês de 30 dias.

Ainda:
1 dia = 24 horas
1 hora = 60 minutos
1 minuto = 60 segundos

A partir de 1 segundo, a divisão dele pode ser expressa em décimos (1/10 = 0,1), centésimos (1/100 = 0,01) e milésimos(1/1000 = 0,001) de segundo, retornando a numeração decimal.

Medidas de Ângulos

Para medir ângulos, também temos um sistema não decimal. Nesse caso, a unidade básica é o grau. Na astronomia, na cartografia e na navegação são necessárias medidas inferiores a 1º. Temos, então:

1 grau equivale a 60 minutos (1º = 60')
1 minuto equivale a 60 segundos (1' = 60")

A forma de divisão dos ângulos (grau – minuto – segundo) são parecidos com a forma de divisão do tempo (hora – minutos – segundos). Há uma coincidência de divisão, mas os símbolos que os indicam são diferentes:

1h32min24s é um intervalo de tempo ou um instante do dia.
1º 32' 24" é a medida de um ângulo.

Assim, os cálculos no sistema hora – minuto – segundo são similares a cálculos no sistema grau – minuto – segundo, embora esses sistemas correspondam a grandezas distintas.

Há ainda um sistema não-decimal, criado há algumas décadas, que vem se tornando conhecido. Ele é usado para medir a informação armazenada em memória de computadores, disquetes, discos compacto, etc. As unidades de medida são bites (b), bytes (B), kilobytes (KB), megabytes (MB), gigabytes (GB) e terabyte (TB). Apesar de se usarem os prefixo "kilo", essas unidades não formam um sistema decimal, mas um sistema binário (de base 2).

Medida de armazenamento	Número de caracteres (baites)	Tamanho do arquivo
1 byte (B)	1	8 bites
1 quilobyte (KB)	1024	1024 B
1 megabyte (MB)	$1024^2 = 1048576$	1024 KB
1 gigabyte (GB)	$1024^3 = 1073741824$	1024 MB
1 terabyte (TB)	$1024^4 = 1099511627776$	1024 GB

QUESTÕES

1) Raquel saiu de casa às 13h 45min, caminhando até o curso de inglês que fica a 15 minutos de sua casa, e chegou na hora da aula cuja duração é de uma hora e meia. A que horas terminará a aula de inglês?
a) 14h
b) 14h 30min
c) 15h 15min
d) 15h 30min
e) 15h 45min

2) 348 mm^3 equivalem a quantos decilitros?

3) Quantos decalitros equivalem a 1 m^3?

4) Passe 50 dm^2 para hectômetros quadrados.

5) Quantos quilômetros cúbicos equivalem a 14 mm^3?

6) Quantos centilitros equivalem a 15 hl?

7) Passe 5.200 gramas para quilogramas.

8) Converta 2,5 metros em centímetros.

9) Quantos minutos equivalem a 5h05min?

10) Quantos minutos se passaram das 9h50min até as 10h35min?

Respostas

1) Resposta "D".

Solução: Basta somarmos todos os valores mencionados no enunciado do teste, ou seja:
13h 45min + 15 min + 1h 30 min = 15h 30min

Logo, a questão correta é a letra D.

2) Resposta "0,00348 dl".

Solução: Como 1 cm^3 equivale a 1 ml, é melhor dividirmos 348 mm^3 por mil, para obtermos o seu equivalente em centímetros cúbicos: 0,348 cm^3.

Logo 348 mm^3 equivalem a 0, 348 ml, já que cm^3 e ml se equivalem.

Neste ponto já convertemos de uma unidade de medida de volume, para uma unidade de medida de capacidade.

Falta-nos passarmos de mililitros para decilitros, quando então passaremos dois níveis à esquerda. Dividiremos então por 10 duas vezes:

$$(0{,}348mL : 10) : 10 = 0{,}00348dL$$

Logo, 348 mm^3 equivalem a 0,00348 dL.

3) Resposta "100 dal".

Solução: Sabemos que 1 m^3 equivale a 1.000 l, portanto para convertermos de litros a decalitros, passaremos um nível à esquerda.

Dividiremos então 1.000 por 10 apenas uma vez:

$$1000L : 10 = 100daL$$

Isto equivale a passar a vírgula uma casa para a esquerda.

Poderíamos também raciocinar da seguinte forma:

Como 1 m^3 equivale a 1 kl, basta fazermos a conversão de 1 kl para decalitros, quando então passaremos dois níveis à direita. Multiplicaremos então 1 por 10 duas vezes:

$$1kL.10.10 = 100daL$$

Logo, 100 dal equivalem a 1 m^3.

4) Resposta "0, 00005 hm^2".

Solução: Para passarmos de decímetros quadrados para hectômetros quadrados, passaremos três níveis à esquerda.

Dividiremos então por 100 três vezes:

$$[(50dm^2 : 100) : 100] : 100 = 0{,}00005hm^2$$

Isto equivale a passar a vírgula seis casas para a esquerda.

Portanto, 50 dm^2 é igual a 0, 00005 hm^2.

5) Resposta "0,000000000000000014 km^3, ou a 1,4 x 10^{-17} km^3".

Solução: Para passarmos de milímetros cúbicos para quilômetros cúbicos, passaremos seis níveis à esquerda. Dividiremos então 14 por 1000 seis vezes:

$$\{[(((14mm^3 :1000):1000):1000):1000]:1000\}:1000 = 14:10^{18}\,km^3 =$$

$$= 14.10^{-18}\,km^3 = 1{,}4.10^{-17}\,km^3 = 0{,}000000000000000014km^3$$

Portanto, 0, 000000000000000014 km^3, ou a 1,4 x 10^{-17} km^3 se expresso em notação científica equivalem a 14 mm^3.

6) Resposta "150.000 cl".

Solução: Para irmos de hectolitros a centilitros, passaremos quatro níveis à direita.

Multiplicaremos então 15 por 10 quatro vezes:

$$15hL.10.10.10.10 = 150000cl$$

Isto equivale a passar a vírgula quatro casas para a direita.

Logo, 150.000 cl equivalem a 15 hl.

7) Resposta "5,2 kg".

Solução: Para passarmos 5.200 gramas para quilogramas, devemos dividir (porque na tabela grama está à direita de quilograma) 5.200 por 10 três vezes, pois para passarmos de gramas para quilogramas saltamos três níveis à esquerda.

Primeiro passamos de grama para decagrama, depois de decagrama para hectograma e finalmente de hectograma para quilograma:

$$[(5200g:10):10]:10 = 5{,}2kg$$

Isto equivale a passar a vírgula três casas para a esquerda.

Portanto, 5.200 g são iguais a 5,2 kg.

8) Resposta "250 cm".

Solução: Para convertermos 2,5 metros em centímetros, devemos multiplicar (porque na tabela metro está à esquerda de centímetro) 2,5 por 10 duas vezes, pois para passarmos de metros para centímetros saltamos dois níveis à direita.

Primeiro passamos de metros para decímetros e depois de decímetros para centímetros:

$$2{,}5m.10.10 = 250cm$$

Isto equivale a passar a vírgula duas casas para a direita.

Logo, 2,5 m é igual a 250 cm.

9) Resposta "305 min".

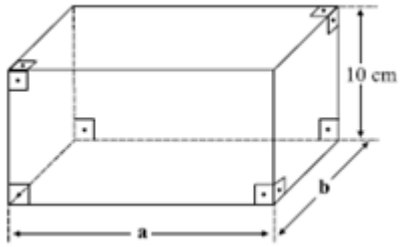
Solução: (5 . 60) + 5 = 305 min.

10) Resposta "45 min".

Solução: 45 min

QUESTÕES COMPLEMENTARES

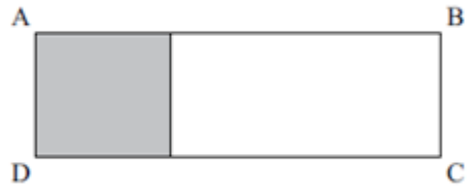
11) (Vunesp/2014 – Administrador USP) Certo produto é vendido em uma embalagem com o formato de um bloco retangular, mostrada na figura. Sabe-se que a razão entre as medidas, em centímetros, indicadas por ***b*** e ***a***, nessa ordem, é $\frac{1}{2}$, e que seu volume é igual a 1280 cm³.



Por razões mercadológicas, o fabricante teve que modificar a embalagem. Manteve a medida da altura (10 cm) e aumentou a medida da largura (***b***) em 2 cm. Para que o volume não fosse alterado, a medida do comprimento (***a***) foi reduzida para

(A) 14,6 cm (B) 14 cm (C) 13,8 cm (D) 13 cm (E) 12,8 cm

12) (Vunesp/2014 – Assistente Administrativo EMPLASA) Na figura, a área da região sombreada, de formato quadrado, é igual a 81 m² e representa 30% da área do terreno retangular ABCD.



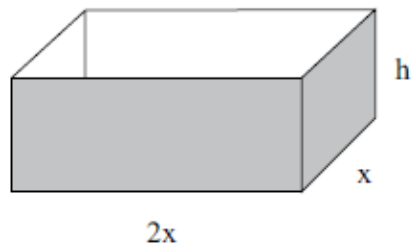
O perímetro do terreno ABCD é igual, em metros, a

(A) 60 (B) 68 (C) 74 (D) 78 (E) 80

13) (Vunesp/2014 – Assistente Administrativo EMPLASA) Com uma vazão constante de 40 litros de água por minuto, uma torneira preenche $\frac{3}{4}$ da capacidade total de um reservatório cúbico, inicialmente vazio, em 18 min 45 s. Nessas condições, é correto afirmar que, para preencher a metade da capacidade total desse reservatório são necessários, apenas,

(A) 12 min 50 s. (B) 12 min 30 s. (C) 11 min 40 s. (D) 11 min 25 s. (E) 10 min 45 s.

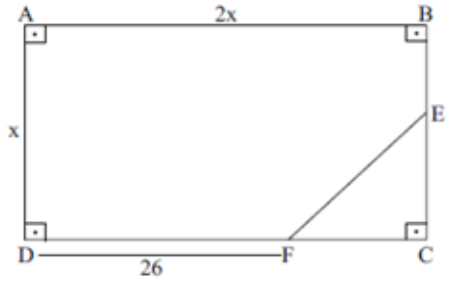
14) (Vunesp/2014 – Assistente Administrativo EMPLASA) Pretende-se construir uma caixa com faces retangulares e ângulos retos, sem tampa, conforme mostra a figura, sendo que essa caixa deverá ter volume igual a 800 cm³.



Sabendo-se que a altura indicada por ***h*** na figura mede 5 cm, pode-se concluir que a área da base retangular dessa caixa é igual, em centímetros quadrados, a

(A) 200 (B) 180 (C) 170 (D) 160 (E) 140

15) (Vunesp/2014 – Assistente de Informática UNESP) Pedro pretende construir em um terreno retangular ABCD, com área de 512 m², e reservou uma região triangular ECF, nos fundos do terreno, para a construção da churrasqueira, conforme mostrado na figura, cujas dimensões indicadas estão em metros.



Sabe-se que E é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, e que Pedro pretende separar a área da churrasqueira da área restante por meio de uma cerca viva, indicada na figura pelo segmento $\overline{FE}$. Nessas condições, é correto afirmar que a extensão da cerca viva será igual, em metros, a

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

16) (Vunesp/2014 – Assistente de Informática UNESP) As figuras mostram os consumos médios diários de água por pessoa, em São Paulo, e o recomendado pela ONU.

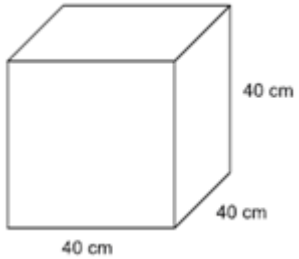


(*Veja São Paulo*. 02.04.2014)

Suponha que uma família de quatro pessoas residente em São Paulo adote o consumo recomendado pela ONU, e coloque a quantidade de água "economizada" diariamente em um reservatório com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, inicialmente vazio, e de dimensões iguais a 1,5 m, 1,2 m e 1,0 m. Desse modo, esse reservatório estará completamente cheio em um número de dias igual a

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 18

17) (Vunesp/2014 – Mestre em Edificações USP) Uma empresa tem, em seu estoque, várias caixas cúbicas de 4 cm de lado, conforme mostra a figura.



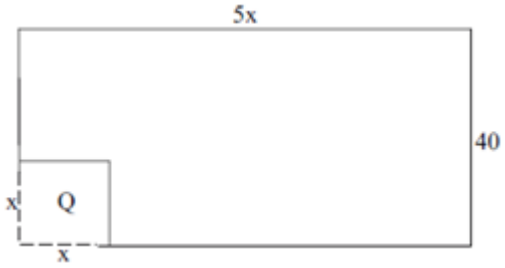
Sabendo que uma pilha contém 10 caixas e que o volume total ocupado por todas as pilhas juntas é de 16 m³, pode-se concluir que o número de pilhas é
(A) 28 (B) 25 (C) 21 (D) 18 (E) 15

18) (Vunesp/2014 – Soldado PM/SP) Seguindo recomendações médicas, uma pessoa caminha 300 metros e para por 3 minutos para descansar, caminha mais 300 metros e para por mais 3 minutos, e assim sucessivamente, até completar um total de 1,5 km. Sabendo que, sempre que esteve caminhando, essa pessoa manteve uma velocidade constante de 4 metros por segundo, pode-se concluir que o tempo total gasto para percorrer a distância de 1,5 km foi
(A) 18 min 15 s. (B) 19 min 20 s. (C) 19 min 05 s. (D) 18 min 05 s. (E) 18 min 30 s.

19) (Vunesp/2014 – Soldado PM/SP) Uma área retangular de 30 km² será reflorestada e, para isso, os técnicos dividiram essa área em quadrados com 2 m de lado onde será plantada uma árvore no centro de cada quadrado. O número de árvores que serão plantadas nessa área será
(A) 7500 (B) 750 (C) 75 000 (D) 7 500 000 (E) 750 000

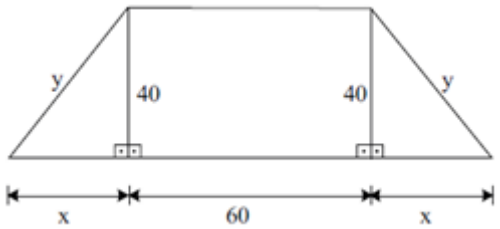
20) (Vunesp/2014 – Soldado PM/SP) Foram retiradas de um caldeirão, que continha 3 litros de sopa, 20 conchas cheias, restando ainda 1,2 litro de sopa no caldeirão. Sabendo que uma pessoa colocou 3 dessas conchas de sopa em seu prato e que, para tomá-la, utilizou uma colher com 12 mL de capacidade, pode-se concluir que o menor número de colheradas necessárias para tomar a sopa toda do prato foi
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 25 (E) 23

21) (Vunesp/2013 – Escrevente/SP) A figura mostra um terreno retangular cujas dimensões indicadas estão em metros.



O proprietário cedeu a um vizinho a região quadrada indicada por Q na figura, com área de 225 m². O perímetro (soma das medidas dos lados), em metros, do terreno remanescente, após a cessão, é igual a
(A) 240 (B) 210 (C) 200 (D) 230 (E) 260

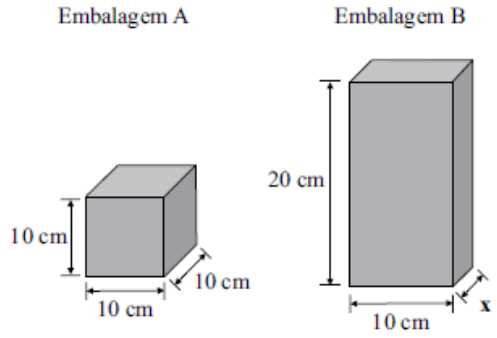
22) (Vunesp/2014 – Administrador USP) A figura, com dimensões indicadas em centímetros, mostra uma placa informativa com o formato de um trapézio isósceles.



Se essa placa tem área de 3600 cm², então o seu perímetro, em metros, é igual a
(A) 2,8 (B) 2,6 (C) 2,2 (D) 2,0 (E) 1,8

23) (Vunesp/2013 – Agente Administrativo) Dr. Lucas quer trocar o piso da sala de exames de seu consultório. Sabe-se que a sala tem formato retangular, que a medida da largura tem dois metros a menos que a medida do comprimento, e que a terça parte da medida do comprimento é igual à metade da medida da largura. Nessas condições, a quantidade mínima de piso que ele deverá comprar é, em metros quadrados, igual a
(A) 36 (B) 32 (C) 24 (D) 20 (E) 16

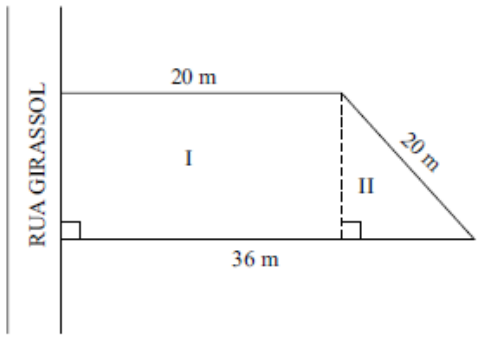
24) (Vunesp/2013 – Agente Administrativo) Um mesmo produto é vendido na embalagem A, de formato cúbico, e na embalagem B, com a forma de um paralelepípedo reto retângulo, cujo volume é 30% maior que o volume da embalagem A.



Desse modo, pode-se concluir que a medida, em centímetros, da largura da embalagem B, indicada por x, na figura, é

(A) 6 (B) 6,5 (C) 7 (D) 7,5 (E) 8

25) (Vunesp/2013 – Agente Administrativo) Para a elaboração de um projeto arquitetônico, um terreno com a forma de um trapézio retângulo foi dividido em duas regiões, I e II, conforme mostra a figura.



A medida da frente desse terreno, voltada para a Rua Girassol, é igual, em metros, a

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 18

26) (Vunesp/2013 – Agente Administrativo) Uma caixa d'água de formato cúbico, cuja aresta mede 2 metros, estava completamente cheia. Para esvaziá-la, abriu-se uma torneira cuja vazão, constante, é de 8 litros a cada 30 segundos. Se a torneira foi aberta às 8h30min, então essa caixa d'água estará totalmente vazia às

(A) 18h15min (B) 18h10min (C) 17h50min (D) 17h30min (E) 16h50min

27) (Vunesp/2013 – Agente Administrativo) Dona Marta fez 1 litro de suco com 12 laranjas. Deu 250 mL de suco para sua filha e o restante guardou na geladeira. Pode-se afirmar que o suco guardado na geladeira corresponde a

(A) 3 laranjas (B) 5 laranjas (C) 7 laranjas (D) 9 laranjas (E) 11 laranjas

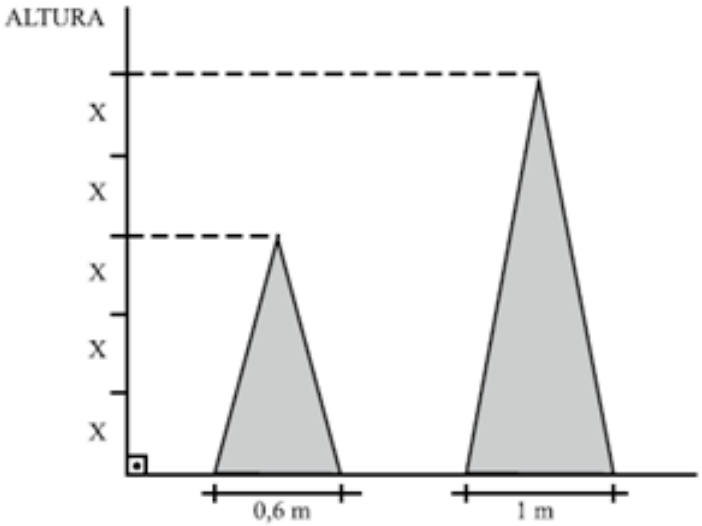
28) (Vunesp/2012 – Agente de Escolta) Valdomiro cronometrou as voltas que correu em uma pista de 400 m e anotou os tempos na tabela a seguir.

Volta	Tempo
1.ª	1 minuto e 15 segundos
2.ª	1 minuto e 18 segundos
3.ª	1 minuto e 23 segundos
4.ª	1 minuto e 24 segundos

Pode-se afirmar que o tempo médio dessas quatro voltas foi, em segundos, de
(A) 80 (B) 82 (C) 84 (D) 86 (E) 88

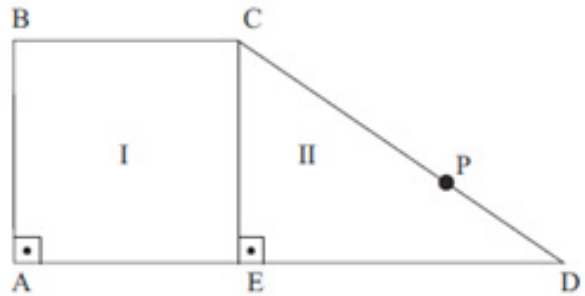
29) (Vunesp/2012 – Agente de Escolta) O perímetro de um terreno retangular é 80 m e a área é 300 m². O comprimento desse terreno supera a largura em
(A) 14 metros (B) 16 metros (C) 17 metros (D) 18 metros (E) 20 metros

30) (Vunesp/2011 – Escrevente/SP) A figura compara as alturas, medidas em metros, de dois paineis decorativos triangulares, fixados em uma parede, que simulam árvores de Natal. Sabendo-se que a soma das medidas das alturas dos dois paineis é igual a 4 m, e que em cada painel foram instaladas 200 lampadazinhas coloridas por metro quadrado, pode-se concluir que o número de lâmpadas instaladas no painel de maior altura foi igual a



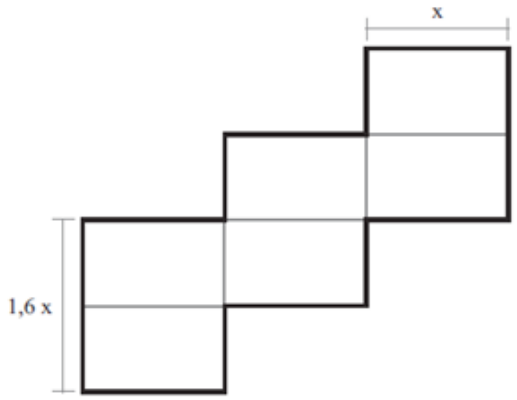
(A) 200 (B) 250 (C) 275 (D) 300 (E) 325

31) (Vunesp/2011 – Escrevente TJ Militar/SP) Na figura, que representa uma pequena praça, a região I tem a forma de um quadrado (ABCE) com área de 225 m², e a região II tem a forma de um triângulo retângulo (CDE). Para se ir do ponto A ao ponto P, contornando a praça, pode-se optar pelo trajeto ABCP, ou pelo trajeto AEDP, sendo que, em ambos os casos, as distâncias percorridas serão iguais. Sabendo-se que o segmento CD mede 25 m, pode-se afirmar que a distância entre os pontos D e P é igual a



(A) 8,5 m (B) 9,0 m (C) 10,0 m (D) 10,5 m (E) 11,0 m

32) (Vunesp/2011 – Escrevente TJ Militar/SP) Um grande terreno foi dividido em 6 lotes retangulares congruentes, conforme mostra a figura, cujas dimensões indicadas estão em metros.



Sabendo-se que o perímetro do terreno original, delineado em negrito na figura, mede $x + 285$, conclui-se que a área total desse terreno é, em m², igual a

(A) 2400 (B) 2600 (C) 2800 (D) 3000 (E) 3200

Respostas

11) Solução:

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ e a = 2b

V = 1280 cm³

a . b . 10 = 1280 e $2b.b = \frac{1280}{10}$ e $b^2 = \frac{128}{2}$ e $b = \sqrt{64}$ e b = 8cm

a = 2 . 8 e a = 15 cm

a' . 10 . 10 = 1280 e $a' = \frac{1280}{100}$ e a' = 12,8 cm

Resposta E.

12) Solução:

Pela Regra de Três:

%	m²
30	81
70	x

30x = 70 . 81 e x = 189m²

9 . y = 189 e $y = \frac{189}{9}$ e y = 21m

p = 4 . 9 + 2 . 21 = 36 + 42

p = 78m

Resposta D.

13) Solução:

Pela Regra de Três:

capacidade	tempo
$\frac{3}{4}$	18 min 45 seg
$\frac{1}{2}$	x

$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}$ (18min 45seg) e $x = \frac{4}{3}.\frac{1}{2}$ (18min 45 seg)

$x = \frac{37\,\text{min}\,30seg}{3}$ e x = 12 min 30 seg

Resposta B.

14) Solução:

V = 2x . x . 5 = 800 e $x^2 = \frac{800}{10}$ e $x = \sqrt{80} = \sqrt{2^4.5} = 2^2.\sqrt{5}$

$x = 4.\sqrt{5}cm$

$A = 2.4.\sqrt{5}.4.\sqrt{5}$ e A = 32 . 5

A = 160 cm^2

Resposta D.

15) Solução:

A = 521m^2 e 2x . x = 512 e $x^2 = \frac{512}{2}$ e $x = \sqrt{516}$

x = 16m

FC = 32 - 26 = 6m

Pelo Teorema de Pitágoras:

$y^2 = 6^2 + 8^2$ e y^2 = 36 + 64 e y^2 = 100 e $y = \sqrt{100}$

y = 10m

Resposta A.

16) Solução:

1m = 10dm
1,2m = 12dm
1,5m = 15dm



140 - 110 = 30 l e 30 . 4 = 120l

V = 15 . 12 . 10

V = 1800l

1800l : 120l = 15 dias

Resposta C.

17) Solução:

V_c = 40 . 40 . 40

V_c = 64000cm^3

$V_{1\ pilha}$ = 10 . 64000

$V_{1\ pilha}$ = 640000 cm^3

$V_{1\ pilha}$ = 0,64 cm^3

1600 : 0,64 = 25 pilhas

Resposta B.

18) Solução:

1,5 km = 1500 m e 3 min = 180 seg

1500 : 300 = 5 partes

5 partes + 4 paradas

Pela Regra de Três:

metros	segundos
4	1
300	x

4 . x = 300 . 1 e $x = \frac{300}{4}$

x = 75 seg

5 . 75 + 4 . 180 = 375 seg + 720 seg = 1095 seg

1095seg : 60 seg = 18min, com resto = 15seg

Resposta A.

19) Solução:

A = 2 . 2 = 4m^2

30 km^2 = 30.000.000^2

30.000.000 : 4 = 7.500.000 árvores

Resposta D.

20) Solução:

$20 \cdot c + 1{,}2 = 3$ e $c = \frac{1{,}8}{20}$

$c = 0{,}9l = 30\,ml$

$3 \cdot 90 = 270\,ml$ (prato)

270 : 12 = 22 colheradas e resto 6 (que significa uma parte de 1 colherada), ou seja,

23 colheradas.

Resposta E.

21) Solução:

$x^2 = 225$ e $x = \sqrt{225}$

x = 15m

5 . 15 = 75m

p = 75 + 40 + 75 + 40 = 150 + 80

p = 230m

Resposta D.

22) Solução:

$A_{total} = 3600\ m^2$

$A_{retângulo} = 60 \cdot 40 = 2400\ cm^2$

$2 \cdot A_{retângulo} = 3600 - 2400$ e $A_{triângulo} = \frac{1200}{2}$

$A_{triângulo} = 600\ m^2$

$\frac{x.40}{2} = 600$ e $x = \frac{1200}{40}$

x = 30 cm

Pelo Teorema de Pitágoras:

$y^2 = 30^2 + 40^2$ e $y^2 = 900 + 1600$ e $y^2 = 2500$ e $y = \sqrt{2500}$

y = 50 cm

p = 60 + 30 + 30 + 60 + 50 + 50 = 280 cm

p = 2,8m

Resposta A.

23) Solução:

$x - 2\frac{1}{3}x = \frac{x-2}{2}$ e $3.(x - 2) = 2x$ e $3x - 6 = 2x$
x $3x - 2x = 6$ e $x = 6$
$A = 6 . 4 = 24\ m^2$

Resposta C.

24) Solução:

$V_A = 10 . 10 . 10 = 1000\ cm^3$

$V_B = V_A + 30\% . V_A$

$10 . 20 . x = 1000 + \frac{30}{100}$ e $200 . x = 1000 + 300$ e $x = \frac{1300}{200}$ e $x = 6,5$ cm

Resposta B.

25) Solução: Utilizar o Teorema de Pitágoras:

$X^2 + 16^2 = 20^2$
$x^2 = 400 - 256$
$x^2 = 144$
$x = \sqrt{144}$
x = 12m

Resposta A.

26) Solução:

$V = 2 . 2 . = 8\ m^3 = 8000\ dm^2 = 8000$ L

Pela Regra de Três:

L	seg
8	30
8000	x

$8x = 30 . 8000$ e $x = \frac{240000}{8}$ e x = 30.000 seg

3000 : 60 = 500 min e 500 : 60 = 8h 20 min.

Assim: 8h 30 min + 8h 20 min = 18h 50 min

Resposta E.

27) Solução:

Pela Regra de Três:

mL	laranjas
1000	12
750	x

$1000x = 12 . 750$ e $x = \frac{900}{100}$ e x = 9

Resposta D.

28) Solução:

* 1 min = 60 seg.

1ª volta = 1 min 15 seg = 75 seg

2ª volta = 1 min 18 seg = 78 seg

3ª volta = 1 min 23 seg = 83 seg

4ª volta = 1 min 24 seg = 84 seg

A média é calculada somando-se os 4 valores e divide-se por 4:

$M = \frac{75+76+83+84}{4}$ e $x = \frac{320}{4}$ e x = 80 seg

Resposta A.

29) Solução:

Chamando os lados do retângulo de x e y, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 80 \\ x.y = 300 \end{cases}$$

Simplificando a primeira equação, temos:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x.y = 300 \end{cases}$$

Isolando a segunda equação, $y = \frac{300}{x}$ e substituindo na segunda, temos:

$x + \frac{300}{x} = 40$ e $x^2 + 300 = 40x$ e $x^2 - 40x + 300 = 0$

Resolvendo esta equação do 2º grau, pela soma e produto das raízes (por tentativa), temos:

- soma: 10 + 30 = 40
- produto: 10 . 30 = 300

Descobrimos que as raízes são 10m e 30m.

O cálculo das raízes também pode ser feito utilizando a fórmula de Baskara.

Para x = 10, $y = \frac{300}{10} = 30m$

30 - 10 = 20 m

Se fizermos x = 30m, y = 10m e 30 - 10 = 20 m

Resposta E.

30) Solução:

Somando as alturas das árvores, temos:

3x + 5x = 4 e 8x = 4 e $x = \frac{4}{8}$

x = 0,5 m

$A_{triângulomaior} = \frac{1.5.0,5}{2} = \frac{2,5}{2}$

$A_{triângulomaior} = 1,25\ m^2$

Pela Regra de Três:

lâmpadas	m²
200	1
y	1,25

1 . y = 1,25 . 200

y = 250 lâmpadas

Resposta B.

31) Solução:

$A_I = 225$ m

Chamando o lado do quadrado ABCE de x, temos:

$x^2 = 225$ e $x = \sqrt{225}$

x = 15 m

Chamando ED de t, por Pitágoras, na Área II, temos que:

$t^2 + 15^2 = 25^2$ e $t^2 = 625 - 225$ e $t^2 = 400$ e $t = \sqrt{400}$
t = 20 m

Chamando DP de y e CP de 25 - y, e ainda sabendo que AE + ED + DP = AB + BC + CP, temos que:

$15 + 20 + y = 15 + 15 + 25 - y$ e $2y = 55 - 35$ e $y = \frac{20}{2}$

y = 10 m

Resposta C.

32) Solução:

p = 6x + 1,6x + 1,6x + 1,6x + 1,6x = x + 285

$12,4x - x = 285$ e $x = \frac{285}{11,4}$

x = 25 m

$A_{total} = 3.(1,6x\ .\ x)$ e $A_{total} = 3.(1,6\ .\ 25\ .\ 25)$

$A_{total} = 3000\ m^2$

Resposta D.

11. - Relações entre Grandezas: Tabelas e Gráficos

www.maxieduca.com.br

José Rubens Antoniazzi Silva

Licenciatura em Matemática pelas Faculdades Adamantinenses Integras e em Pedagogia pela Universidade Nove de Julho.
Professor coordenador de núcleo pedagógico na Diretoria de Ensino Região de Tupã

MAXI Educa

Números Diretamente Proporcionais

Considere a seguinte situação:

Joana gosta de queijadinha e por isso resolveu aprender a fazê-las. Adquiriu a receita de uma amiga. Nessa receita, os ingredientes necessários são:

3 ovos
1 lata de leite condensado
1 xícara de leite
2 colheres das de sopa de farinha de trigo
1 colher das de sobremesa de fermento em pó
1 pacote de coco ralado
1 xícara de queijo ralado
1 colher das de sopa de manteiga

Veja que:

- Para se fazerem 2 receitas seriam usados 6 ovos para 4 colheres de farinha;
- Para se fazerem 3 receitas seriam usados 9 ovos para 6 colheres de farinha;
- Para se fazerem 4 receitas seriam usados 12 ovos para 8 colheres de farinha;
- Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de ovos: 6 9 12
Sucessão do número de colheres de farinha: 4 6 8

Nessas sucessões as razões entre os termos correspondentes são iguais:

$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Assim: $\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Dizemos, então, que:

- os números da sucessão 6, 9, 12 são **diretamente proporcionais** aos da sucessão 4, 6, 8;

- o número $\frac{3}{2}$, que é a razão entre dois termos correspondentes, é chamado **fator de proporcionalidade**.

Duas sucessões de números não-nulos **são diretamente proporcionais quando as razões entre cada termo da primeira sucessão e o termo correspondente da segunda sucessão são iguais.**

Exemplo1: Vamos determinar *x* e *y*, de modo que as sucessões sejam diretamente proporcionais:

2 8 *y*
3 *x* 21

Como as sucessões são diretamente proporcionais, as razões são iguais, isto é:

$\frac{2}{3}=\frac{8}{x}=\frac{y}{21}$

$\frac{2}{3}=\frac{8}{x}$ $\frac{2}{3}=\frac{y}{21}$

$2x = 3 . 8$ $3y = 2 . 21$

$2x = 24$ $\qquad$ $3y = 42$

$x = \frac{24}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{42}{3}$

$x = 12$ $\qquad$ $y = 14$

Logo, x = 12 e y = 14

Exemplo 2: Para montar uma pequena empresa, Júlio, César e Toni formaram uma sociedade. Júlio entrou com R$ 24.000,00, César com R$ 27.000,00 e Toni com R$ 30.000,00. Depois de 6 meses houve um lucro de R$ 32.400,00 que foi repartido entre eles em partes diretamente proporcionais à quantia investida. Calcular a parte que coube a cada um.

Solução:
Representando a parte de Júlio por x, a de César por y, e a de Toni por z, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y + z = 32400 \\ \frac{x}{24000} = \frac{y}{27000} = \frac{z}{30000} \end{cases}$$

$$\frac{x}{24000} = \frac{y}{27000} = \frac{z}{30000} = \frac{\overbrace{x + y + z}^{32400}}{\underbrace{24000 + 27000 + 30000}_{81000}}$$

Resolvendo as proporções:

$$\frac{x}{24000} = \frac{32400^{4}}{81000^{10}} \qquad \frac{y}{27000} = \frac{4}{10} \qquad \frac{z}{3000} = \frac{4}{10}$$

$10x = 96\,000$ $\qquad$ $10y = 108\,000$ $\qquad$ $10z = 120\,000$
$x = 9\,600$ $\qquad$ $y = 10\,800$ $\qquad$ $z = 12\,000$

Logo, Júlio recebeu R$ 9.600,00, César recebeu R$ 10.800,00 e Toni, R$ 12.000,00.

Números Inversamente Proporcionais

Considere os seguintes dados, referentes à produção de sorvete por uma máquina da marca x-5:

1 **máquina x-5 produz 32 lit**ros de sorvete em 120 min.
2 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 60 min.
4 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 30 min.
6 máquinas x-5 produzem 32 litros de sorvete em 20 min.

Observe agora as duas sucessões de números:

Sucessão do número de máquinas: 1 2 4 6
Sucessão do número de minutos: 120 60 30 20

Nessas sucessões as razões entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do termo correspondente da segunda são iguais:

$$\frac{1}{\frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{1}{60}} = \frac{4}{\frac{1}{30}} = \frac{6}{\frac{1}{20}} = 120$$

Dizemos, então, que:

- os números da sucessão 1, 2, 4, 6 são inversamente proporcionais aos da sucessão 120, 60, 30, 20;
- o número 120, que é a razão entre cada termo da primeira sucessão e o inverso do seu correspondente na segunda, é chamado fator de proporcionalidade.

Observando que

$\frac{1}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo **que 1 .** 120 = 120 $\qquad$ $\frac{4}{\frac{1}{30}}$ é o mesmo que 4 . 30 = 120

$\frac{2}{\frac{1}{60}}$ é o mesmo que 2 . 60 = 120 $\qquad$ $\frac{6}{\frac{1}{20}}$ é o mesmo que 6 . 20 = 120

podemos dizer que: Duas sucessões de números não-nulos são inversamente proporcionais quando os produtos de cada termo da primeira sucessão pelo termo correspondente da segunda sucessão são iguais.

Exemplo 1: Vamos determinar x e y, de modo que as sucessões sejam inversamente proporcionais:

4 x 8
20 16 *y*

Para que as sucessões sejam inversamente proporcionais, os produtos dos termos correspondentes deverão ser iguais. Então devemos ter:

4 . 20 = 16 . x = 8 . y

16 . x = 4 . 20
16x = 80
x = 80/16
x = 5

8 . y = 4 . 20
8y = 80
y = 80/8
y = 10

Logo, x = 5 e y = 10.

Exemplo 2: Vamos dividir o número 104 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 4.

Representamos os números procurados por *x*, *y* e *z*. E como as sucessões (*x, y, z*) e (2, 3, 4) devem ser inversamente proporcionais, escrevemos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{\overbrace{x+y+z}^{104}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$$

Como , vem: $\frac{104}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{104}{\frac{6+4+3}{12}} = \frac{104}{\frac{13}{12}} = 104 : \frac{13}{12} = 104^{8} . \frac{12}{13^{1}} = \frac{\cancel{96}}{\cancel{1}}$

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{96}{1} \quad \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{96}{1} \quad \frac{z}{\frac{1}{4}} = \frac{96}{1}$$

$$x = \cancel{96}^{48} . \frac{1}{\cancel{2}^{1}} \qquad y = 96^{32} . \frac{1}{\cancel{3}^{1}} \qquad z = 96^{24} . \frac{1}{\cancel{4}^{1}}$$

x = 48 $\qquad$ y = 32 $\qquad$ z = 24

Logo, os números procurados são 48, 32 e 24.

Grandezas Diretamente Proporcionais

Considere uma usina de açúcar cuja produção, nos cinco primeiros dias da safra de 2005, foi a seguinte:

Dias	Sacos de açúcar
1	5 000
2	10 000
3	15 000
4	20 000
5	25 000

Com base na tabela apresentada observamos que:

- duplicando o número de dias, duplicou a produção de açúcar;
- triplicando o número de dias, triplicou a produção de açúcar, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **tempo** e **produção** são **diretamente proporcionais**.

Observe também que, duas a duas, as razões entre o número de dias e o número de sacos de açúcar são iguais:

$$\frac{1}{2}=\frac{5000}{10000} \quad \frac{1}{4}=\frac{5000}{20000} \quad \frac{2}{3}=\frac{10000}{15000} \quad \frac{2}{5}=\frac{10000}{25000} \quad \frac{3}{5}=\frac{15000}{25000}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5000}{15000} \quad \frac{1}{5}=\frac{5000}{25000} \quad \frac{2}{4}=\frac{10000}{20000} \quad \frac{3}{4}=\frac{15000}{20000} \quad \frac{4}{5}=\frac{20000}{25000}$$

Isso nos leva a estabelecer que: Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual à razão entre os valores da segunda.

Tomemos agora outro exemplo.

Com 1 tonelada de cana-de-açúcar, uma usina produz 70l de álcool.
De acordo com esses dados podemos supor que:

- com o dobro do número de toneladas de cana, a usina produza o dobro do número de litros de álcool, isto é, 140l;
- com o triplo do número de toneladas de cana, a usina produza o triplo do número de litros de álcool, isto é, 210l.

Então concluímos que as grandezas quantidade de cana-de-açúcar e número de litros de álcool são **diretamente proporcionais.**

Grandezas Inversamente Proporcionais

Considere uma moto cuja velocidade média e o tempo gasto para percorrer determinada distância encontram-se na tabela:

Velocidade	Tempo
30 km/h	12 h
60 km/h	6 h
90 km/h	4 h
120 km/h	3 h

Com base na tabela apresentada observamos que:

- duplicando a velocidade da moto, o número de horas fica reduzido à metade;

- triplicando a velocidade, o número de horas fica reduzido à terça parte, e assim por diante.

Nesse caso dizemos que as grandezas **velocidade** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Observe que, duas a duas, as razões entre os números que indicam a velocidade são iguais ao inverso das razões que indicam o tempo:

$\frac{30}{60} = \frac{6}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{6}$

$\frac{60}{90} = \frac{4}{6}$ inverso da razão $\frac{6}{4}$

$\frac{30}{90} = \frac{4}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{4}$

$\frac{60}{120} = \frac{3}{6}$ inverso da razão $\frac{6}{3}$

$\frac{30}{120} = \frac{3}{12}$ inverso da razão $\frac{12}{3}$

$\frac{90}{120} = \frac{3}{4}$ inverso da razão $\frac{4}{3}$

Podemos, então, estabelecer que: Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores da segunda.

Acompanhe o exemplo a seguir:

Cinco máquinas iguais realizam um trabalho em 36 dias. De acordo com esses dados, podemos supor que:

- o dobro do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na metade do tempo, isto é, 18 dias;
- o triplo do número de máquinas realiza o mesmo trabalho na terça parte do tempo, isto é, 12 dias.

Então concluímos que as grandezas **quantidade de máquinas** e **tempo** são **inversamente proporcionais**.

Tabelas e Gráficos

As tabelas são quadros organizados em linhas e colunas, que resumem conjuntos de informações. Há elementos característicos da tabela:

Título: indica assunto da tabela.

Cabeçalho: indica o que cada coluna contém.

Corpo: são os dados da tabela.

Fonte: mostra onde foram recolhidos os dados para organizar a tabela servindo para dar mais credibilidade aos dados.

Veja um exemplo:

INFLUÊNCIA IDEOLÓGICA
A Palestina recebeu mais ajuda humanitária brasileira que a maioria dos vizinhos da América Latina

Principais receptores Entre 2005 e 2009	Em R$ milhões
Cuba	33,5
Haiti	29,8
Territórios palestinos (Palestina e Faixa de Gaza)	19,9
Honduras	15,6
Organizações Internacionais	13,9
Paraguai	6,2
Bolívia	6,1
Guiné – Bissau	5,4
Jamaica	3,9
Argentina	2,8

Fonte: Revista Época (2010)

Em todos os gráficos, há um eixo vertical e um eixo horizontal. Em um eixo, lemos a frequência de cada um dos dados, e no outro, a variável que estamos estudando.

Podemos observar que os gráficos em barras permitem comparar rapidamente os dados obtidos nos estudos realizados com diferentes variáveis:

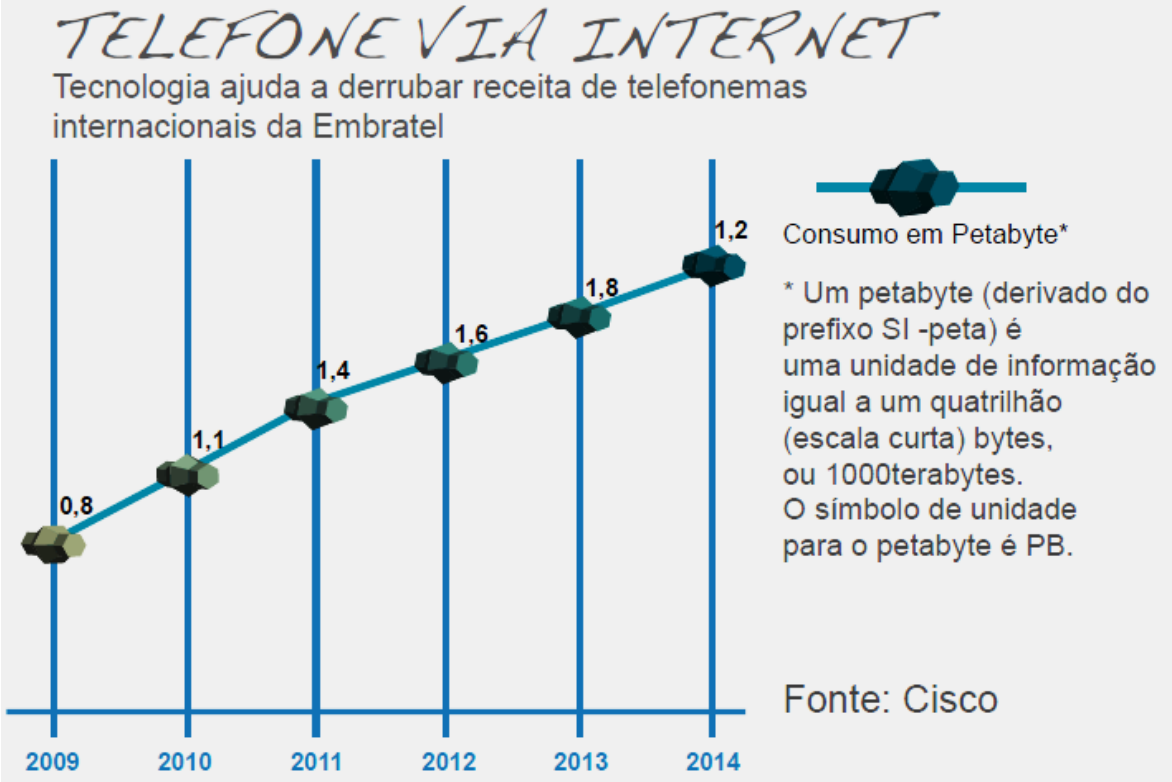


Gráfico em barras verticais

Esse tipo de gráfico permite apresentar, por exemplo, o número de preferências para um produto ou um candidato; o número de vezes que um fenômeno ou fato acorre. Geralmente, é utilizado quando os dados da pesquisa são discretos (dados enumeráveis que podemos contar um a um; por exemplo, o número de irmãos, o número de livros lidos durante o ano, número do sapato das pessoas, o número de animais de estimação etc.). As barras que formam esse gráfico podem ser dispostas horizontal ou verticalmente, permitindo uma fácil comparação entre os dados. As variáveis pesquisadas podem ser numéricas ou quantitativas (número de sapatos, número de irmãos) e não-numéricas ou qualitativas (sorvete preferido, esporte predileto). Exemplos de temas que permitem a construção de gráficos de barras: programa de televisão predileto, alimento preferido, profissão dos pais, estado onde os pais nasceram, número de irmãos, número de pessoas que moram em casa.

Gráfico em linha

Esse tipo de gráfico é utilizado quando as variáveis da pesquisa são quantitativas (estatura e temperatura, por exemplo). Ele representa a variação de uma quantidade ao longo de um período de tempo, identificando aumento ou diminuição de valores numéricos da informação pesquisada. Vejamos um exemplo desse tipo de gráfico:



Exemplos de temas que permitem a construção de gráficos de linha: crescimento de uma planta num período de tempo; notas de um aluno durante um semestre; variação da temperatura média do ambiente durante uma semana.

Gráficos Múltiplos

Há representações gráficas que utilizam um mesmo sistema de eixos para representar dois gráficos. A seguir, temos um gráfico em barras múltiplas verticais e outro em linhas múltiplas:

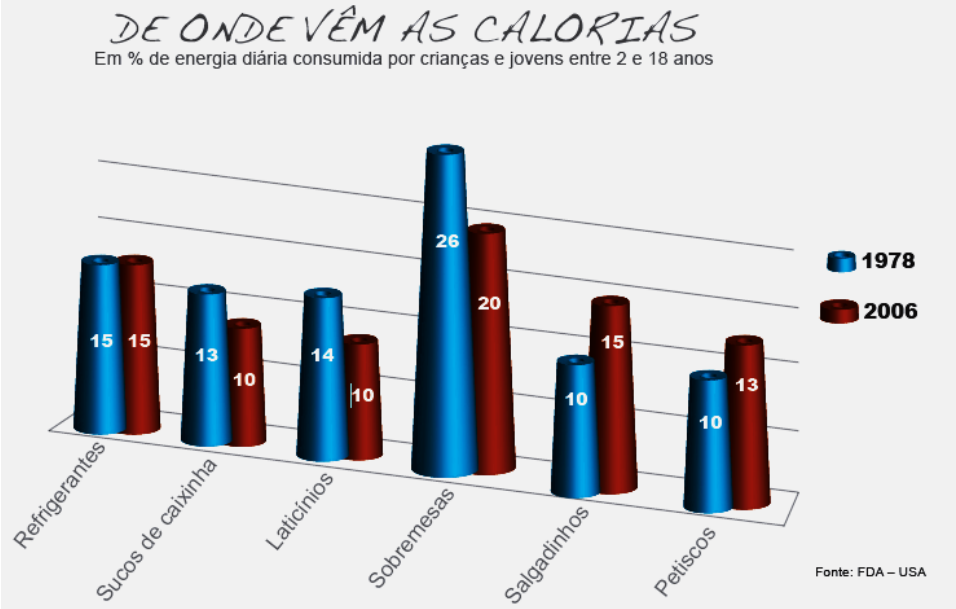
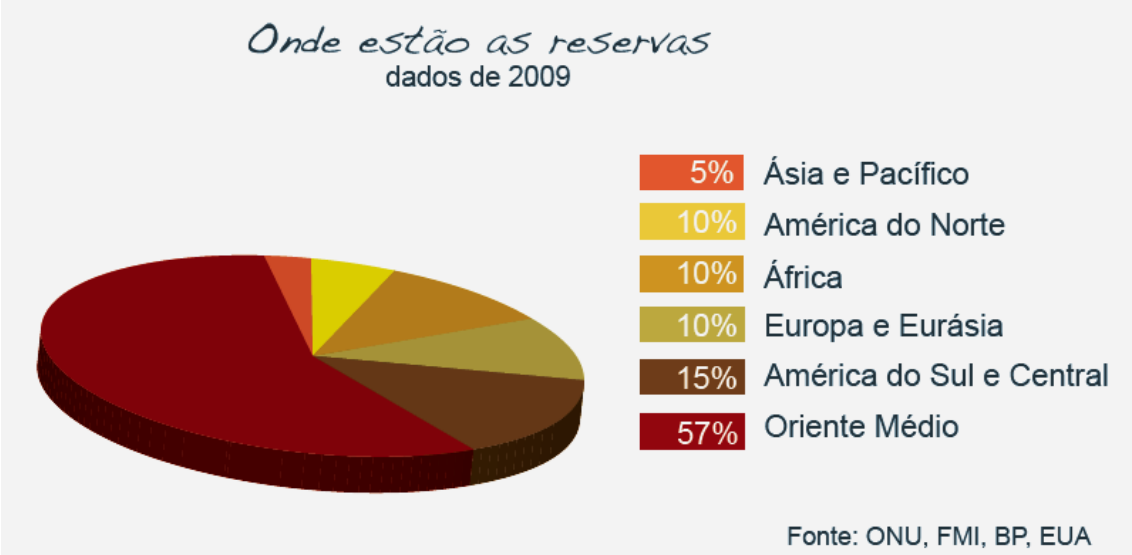


Gráfico em Setores

Esse tipo de gráfico é outra forma de representação do gráfico em barras. Optamos por ele quando queremos evidenciar tendências percentuais e não apenas os totais absolutos pesquisados. Os gráficos de setores têm a característica de comunicar visualmente e de forma muito concisa as preferências ou escolhas de uma população, explicando o percentual de votos. Observe um exemplo a seguir:



QUESTÕES

1) (AUX.ADM.- ATIBAIA - 2005) Segundo a revista Exame – 22.06.05, o Brasil tem o menor custo de produção de açúcar e de álcool entre os principais competidores do mercado internacional. Comparando-se os dados do quadro, pode-se afirmar que, em termos porcentuais, os custos de produção de açúcar e de álcool da Austrália são superiores aos custos do Brasil em, respectivamente,

	Açúcar (em dólares por tonelada)		Álcool (em dólar por litro)	
Produtor	Custo	Matéria-prima	Custo	Matéria-prima
Brasil	120	cana-de-açucar	0,20	cana-de-açucar
Tailândia	178	cana-de-açucar	0,29	cana-de-açucar
Austrália	195	cana-de-açucar	0,32	cana-de-açucar

(A) 61,5% e 37%.
(B) 61,5% e 45%.
(C) 62,5% e 45%.
(D) 62,5% e 60%.
(E) 62,5% e 65%.

Resolução:
a) custo de fabricação de açúcar:

Brasil: 120
Austrália: 195
diferença: 195 – 120 = 75
para sabermos o aumento porcentual: x%, resolvemos a proporção:

$$\frac{120}{100\%} = \frac{75}{x\%} \Rightarrow 120x\% = 7500 \Rightarrow$$

$$x\% = \frac{7500}{120} \Rightarrow x\% = 62,5$$

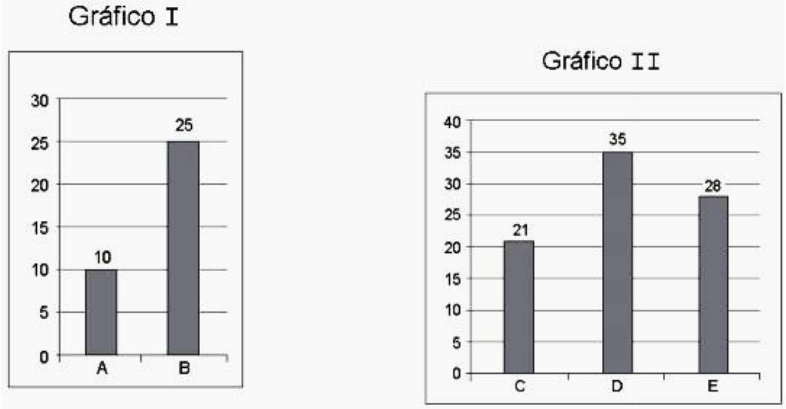
b) custo de fabricação de álcool:
Brasil: 0,20
Austrália: 0,32
diferença: 0,32 – 0,20 = 0,12
para sabermos o aumento porcentual: y%, resolvemos a

$$\frac{0,20}{100\%} = \frac{0,12}{y\%} \Rightarrow 0,20y\% = 12 \Rightarrow$$

$$y\% = \frac{12}{0,20} \Rightarrow y\% = 60$$

Resposta: Alternativa D

2)(**BB – Fundação Carlos Chagas-2013)** O supervisor de uma agência bancária obteve dois gráficos que mostravam o número de atendimentos realizados por funcionários. O Gráfico I mostra o número de atendimentos realizados pelos funcionários A e B, durante 2 horas e meia, e o Gráfico II mostra o número de atendimentos realizados pelos funcionários C, D e E, durante 3 horas e meia.



Observando os dois gráficos, o supervisor desses funcionários calculou o número de atendimentos, por hora, que cada um deles executou. O número de atendimentos, por hora, que o funcionário B realizou a mais que o funcionário C é:

(A) 4.
(B) 3.
(C) 10.
(D) 5.
(E) 6.

Resolução:

Funcionário B:
25 atendimentos / 2,5 horas = 10 clientes por hora

Funcionário C:
21 atendimentos / 3,5 horas = 6 clientes por hora

Diferença: 10 – 6 = 4
Resposta: Alternativa A

3) (**Sejus ES– Vunesp –2013)** Observe os gráficos e analise as afirmações I, II e III.

Procura por graduação aumenta ano a ano

Explosão do número de inscritos



I. Em 2010, o aumento percentual de matrículas em cursos tecnológicos, comparado com 2001, foi maior que 1 000%.
II. Em 2010, houve 100,9 mil matrículas a mais em cursos tecnológicos que no ano anterior.
III. Em 2010, a razão entre a distribuição de matrículas no curso tecnológico presencial e à distância foi de 2 para 5.

É correto o que se afirma em

(A) I e II, apenas.
(B) II, apenas.
(C) I, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

I. CERTO
Matrículas em 2001: 69800;
Matrículas em 2010: 781600;
Crescimento: 781600 – 69800 = 711800
Crescimento em porcentagem: 711800/69800 = 10,19 ou 119%

II. CERTO
Matrículas em 2010: 781600
Matrículas em 2009: 680700
Crescimento: 781600 – 680700 = 100900

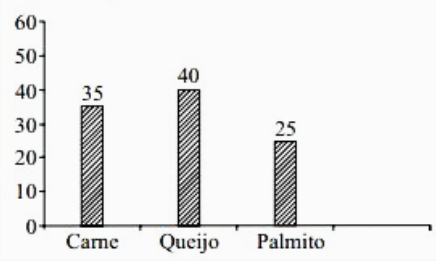
II. CERTO
Em 2010 tivemos 10 matrículas presenciais e 25 à distância:
10/25 = 2/5

4) (**PM SP –VUNESP-2012)**Para uma festa junina, foi contratada uma barraca de pastéis, que levou os seguintes tipos de recheios: carne, queijo e palmito. A tabela a seguir mostra a quantidade de pastéis vendidos na festa.

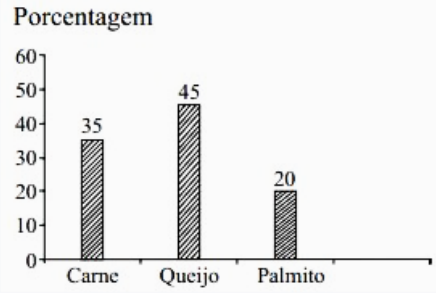
Recheios	Número de pastéis vendidos
Carne	56
Queijo	72
Palmito	32

Em relação ao número total de pastéis vendidos na festa, o gráfico que representa essas informações, em porcentagem, é:

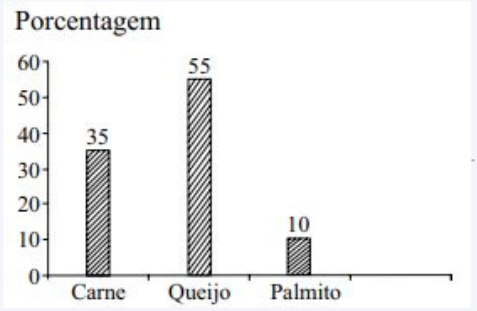
A



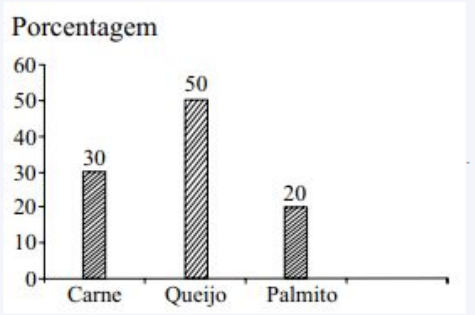
B



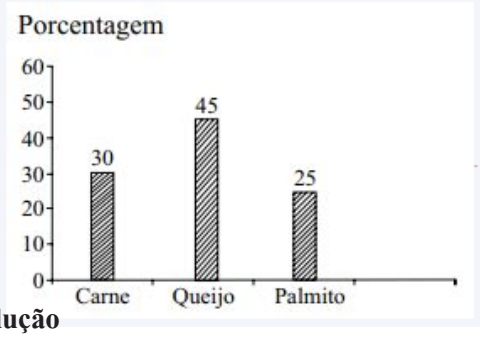
C



D



E



Resolução

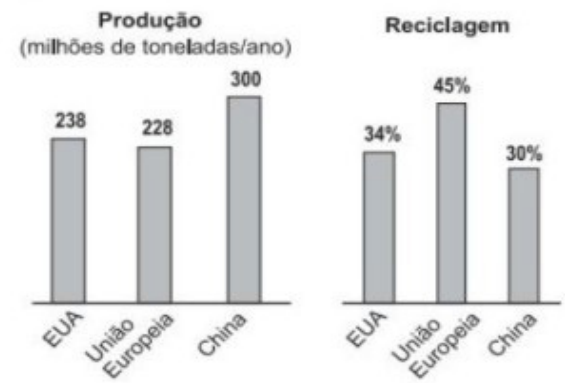
Total de pastéis vendidos: 56 + 72 + 32 = 160

Carne: 56/160 = 0,35 = 35%
Queijo: 72/160 = 0,45 = 45%
Palmito: 0,20 = 20%

Letra B

5) (**Banco do Brasil– Cesgranrio-2012)**

15



Os gráficos acima apresentam dados sobre a produção e a reciclagem de lixo em algumas regiões do planeta. Baseando-se nos dados apresentados, qual é, em milhões de toneladas, a diferença entre as quantidades de lixo recicladas na China e nos EUA em um ano?

(A) 9,08
(B) 10,92
(C) 12,60
(D) 21,68
(E) 24,80

Resolução

A China produz 300 milhões e recicla 30%, ou seja, recicla 90 milhões.
Os EUA produzem 238 milhões e recicla 34%, ou seja, reciclam 80,92 milhões.

China – EUA = 90 – 80,92 = 9,08 milhões de toneladas.

6) (PM Pará-UEPA-2012). O gráfico abaixo mostra a produção diária de lixo orgânico de duas pessoas. O dia da semana que o gráfico mostra que as produções de lixo das duas pessoas foram iguais é:



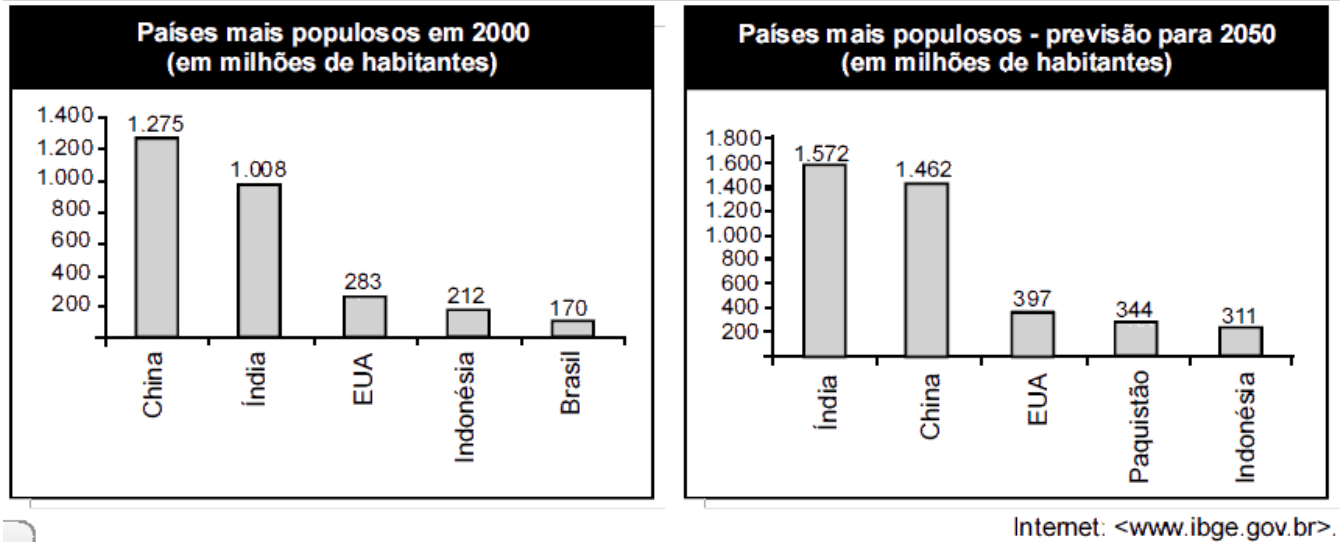
a) 2ª feira
b) 4ª feira
c) 6ª feira
d) Sábado
e) Domingo

Resolução

Repare que existe interseção das linhas azul e vermelha apenas no Domingo, onde cada uma produziu 10 kg de lixo orgânico. Resposta E

7) **(Enem - 2006)**

Nos últimos anos, ocorreu redução gradativa da taxa de crescimento populacional em quase todos os continentes. A seguir, são apresentados dados relativos aos países mais populosos em 2000 e também as projeções para 2050.



Internet: <www.ibge.gov.br>.

Com base nas informações dos gráficos mostrados, suponha que, no período 2050-2100, a taxa de crescimento populacional da Índia seja a mesma projetada para o período 2000-2050. Sendo assim, no início do século XXII, a população da Índia, em bilhões de habitantes, será:

a) inferior a 2,0.
b) superior a 2,0 e inferior a 2,1.
c) superior a 2,1 e inferior a 2,2.
d) superior a 2,2 e inferior a 2,3.
e) superior a 2,3.

Resolução

Analisando cada opção, temos:

a) (F) A taxa de crescimento da China será: $i = \frac{1462 - 1275}{1275} \cong 0{,}15 \rightarrow 15\% > 0$

b) (F) Se a população do Brasil dobrar passaria a 340 milhões e estaria representada no 2º gráfico.

c) (F) Comparando, temos

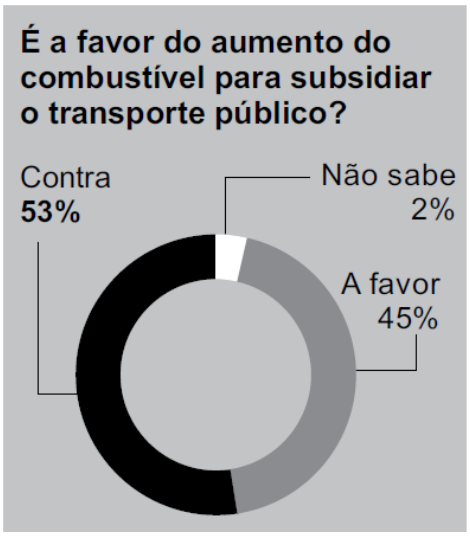
$$i\,(Indonésia) = \frac{311 - 212}{212} \cong 0{,}47 \rightarrow 47\%$$

$$i\,(EUA) = \frac{397 - 283}{283} \cong 0{,}40 \rightarrow 40\%$$

d) (V) O Paquistão não aparece no 1º gráfico. Isto indica que possuía menos que 170 milhões (Brasil). No 2º está com 344 milhões, mais que o dobro de 170 milhões. Houve crescimento de mais de 100%.

e) (F) Os crescimentos da Indonésia e EUA já contradizem essa informação.

8) **(Coren-VUNESP-2013)** O gráfico mostra o resultado de uma das questões de uma pesquisa sobre a mobilidade no trânsito paulistano:



Considere x o número de pessoas que se manifestaram de forma contrária e y o número de pessoas que se manifestaram de forma favorável ao aumento de combustível para subsidiar o transporte público. Se x – y = 64, então o número total de pessoas entrevistadas nessa pesquisa foi

(A) 450.
(B) 500.
(C) 540.
(D) 600.
(E) 800.

Resolução

Seja z o número total de pessoas entrevistadas. Do gráfico, temos

x = 53% de z = 0,53z

e

y = 45% de z = 0,45z

Substituindo essa nova incógnita na equação x - y = 64, podemos facilmente resolver o problema:

x - y = 64
0,53z - 0,45z = 64
0,08z = 64
8z = 64.100
z = 64.100/8 = 8.100 = 800

Alternativa E

Referências

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/matematica.pdf>.

CAVALCANTI, M. R. G., NATRIELLI, K. R.; GUIMARÃES, G. L. Gráficos na mídia impressa. Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, n. 36, p. 733-751, ago. 2010. Disponível em: <http://www. periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4038/3275>.

Calculo Básico. Banco do Brasil. Disponível em: http://www.calculobasico.com.br/concurso-banco-do-brasil-questoes-comentadas-parte3/

Saber Matemática. Prova Resolvida PM. Disponível em: http://sabermatematica.com.br/prova-resolvida-pm-para-2012.html

12. - Noções de Geometria: Forma, Perímetro, Área, Volume, Ângulo, Teorema de Pitágoras

www.maxieduca.com.br

Joaquim J. Estevam

Graduado em Matemática pela UNIFMU – Univ. Faculdades Metropolitanas Unidas – São Paulo (curso com duração de 4 anos, sendo Licenciatura Curta em Ciências, Licenciatura Plena em Matemática e Bacharelado em Informática); Professor há 30 anos na área de Matemática.

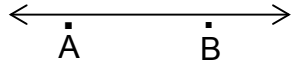
MAXI Educa

É o estudo das figuras em um só plano, por isso é chamada de Geometria Plana.

A Geometria estuda, basicamente, os três princípios fundamentais (ou também chamados de "entes primitivos") que são: **Ponto**, **Reta** e **Plano**. Estes três princípios **não tem definição** e **nem dimensão (tamanho)**.

Para representar um ponto usamos "." e para dar nome usamos letras maiúsculas do nosso alfabeto. Exemplo: . A (ponto A).

Para representar uma reta usamos ⟷ e para dar nome usamos letras minúsculas do nosso alfabeto ou dois pontos por onde esta reta passa. Exemplo: t (reta t ou reta $\overleftrightarrow{AB}$).



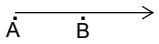
Para representar um plano usamos uma figura chamada paralelogramo e para dar nome usamos letras minúsculas do alfabeto grego (α, β, ϖ, θ,....).
Exemplo:



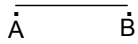
Plano alfa

Partes de uma reta
Estudamos, particularmente, duas partes de uma reta:

- **Semirreta**: é uma parte da reta que tem origem em um ponto e é *infinita*.
Exemplo: (semirreta $\overrightarrow{AB}$), tem origem em A e passa por B.



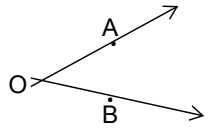
- **Segmento de reta**: é uma parte *finita* (tem começo e fim) da reta.
Exemplo: (segmento de reta $\overrightarrow{AB}$).



Observação: $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ e $\overline{AB} = \overline{BA}$.

ÂNGULO

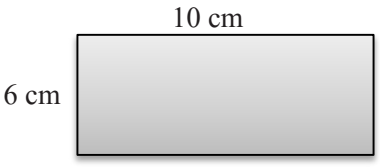
Definição: é uma região limitada por duas semirretas de mesma origem.



- Todo ângulo tem dois lados, no exemplo temos as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.
- O ponto **O** é chamado de vértice do ângulo.
- Nomenclatura: no exemplo temos o ângulo $A\hat{O}B$.

Outras definições importantes

- **Perímetro**: é a soma de todos os lados de uma figura plana.
Exemplo:



➔ perímetro = 10 + 10 + 6 + 6 = 32 cm

- Área: é uma medida de superfície, tendo como unidade básica o m^2, que é um quadrado que mede 1 m x 1 m. Pode ser representada por S (superfície) ou A (área).

ÁREA

As figuras planas mais conhecidas e estudadas são:

- **Retângulo**: S = b.h



h (altura)

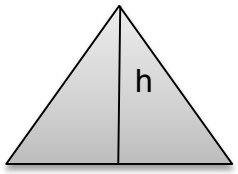
b (base)

- **Paralelogramo**: S = b.h

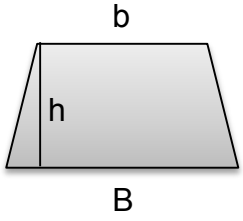


b (base)

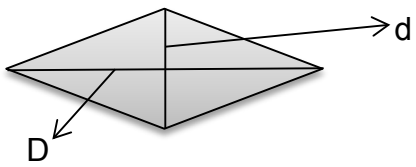
- **Triângulo**: $S = \frac{b.h}{2}$



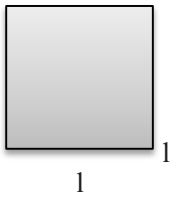
- **Trapézio**: $S = \frac{(B+b).h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h altura.



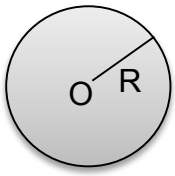
- **Losango**: $S = \frac{D.d}{2}$, onde D é a diagonal maior e d é a diagonal menor.



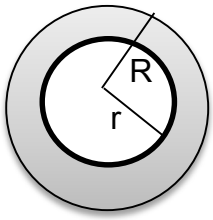
- **Quadrado**: $S = l^2$, onde l é o lado.



- **Círculo**: $S = \pi R^2$, onde R é o raio e O é o centro.

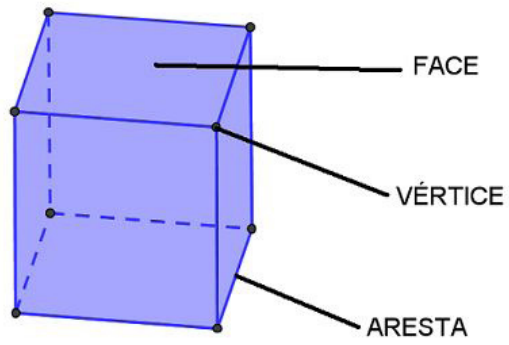


- **Coroa circular**: $S = \pi(R^2 - r^2)$ onde R é o raio maior e r é o raio menor.



VOLUME

Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces em que:
-Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono
-a interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.



Poliedros de Platão

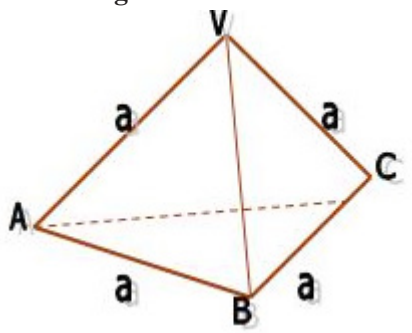
Chamamos de poliedros de Platão, quando todas as faces têm o mesmo número de lados, quando em todos os vértices coincidem o número de arestas e quando segue a relação de Euler (V – A + F =2).

Poliedros Regulares

Um poliedro convexo é denominado poliedro regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

NOME	TIPO DE FACE	Nº DE FACES	Nº DE ARESTAS	Nº DE VÉRTICES
Tetraedro	Triângulo	4	6	4
Hexaedro	Quadrilátero	6	12	8
Octaedro	Triângulo	8	12	6
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20
Icosaedro	Triângulo	20	30	12

Tetraedro Regular



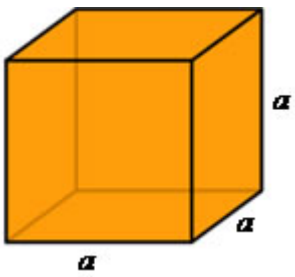
$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Hexaedro



$$V = a^3$$

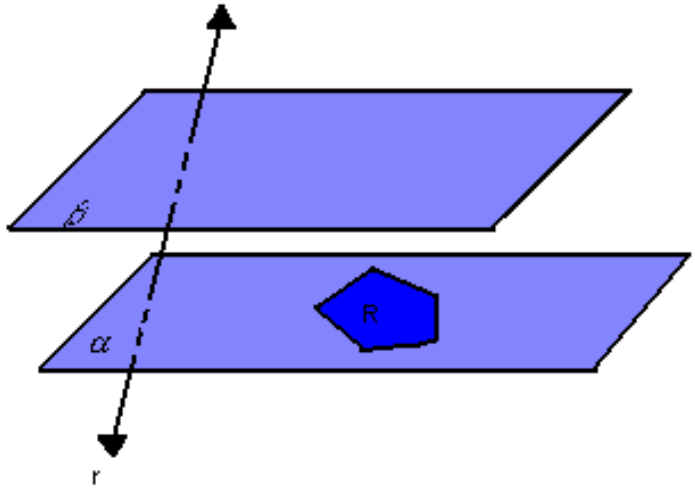
$$A_t = 6a^2$$

Fórmula de Euler

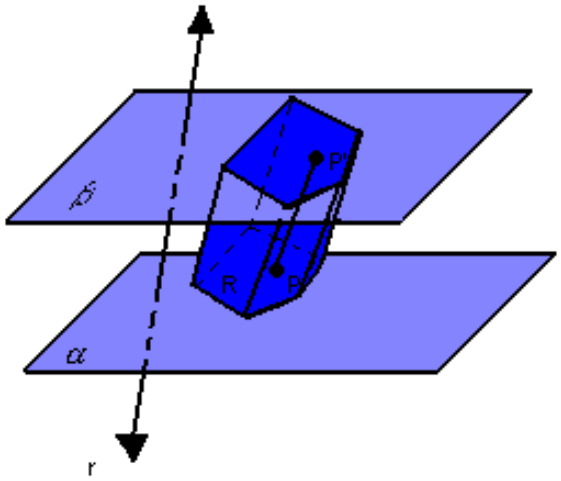
Estabelece que, para todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação:
V-A+F=2

Prismas

Considere dois planos α e β paralelos, um polígono R contido em α e uma reta r concorrente aos dois.



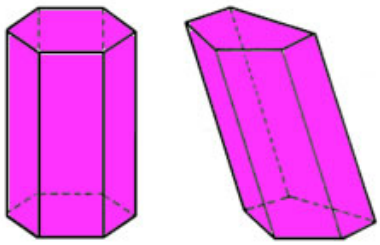
Chamamos prisma o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a r, com extremidades no polígono R e no plano β.



Assim, um prisma é um poliedro com duas faces congruentes e paralelas cujas outras faces são paralelogramos obtidos ligando-se os vértices correspondentes das duas faces paralelas.

Classificação

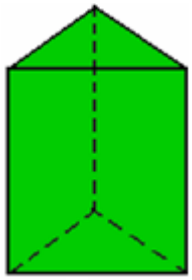
Reto: Quando as arestas laterais são perpendiculares às bases
Oblíquo: quando as faces laterais são oblíquas à base.



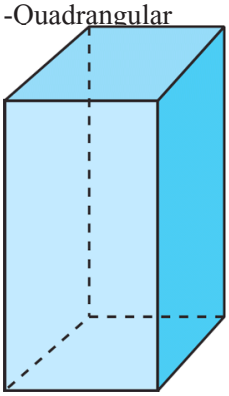
Prisma Reto | Prisma Oblíquo

Classificação pelo polígono da base

-Triangular



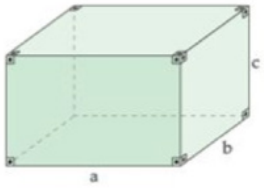
-Ouadrangular



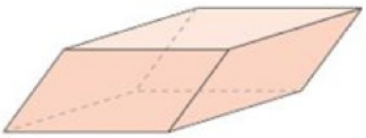
E assim por diante...

Paralelepípedos

Os prismas cujas bases são paralelogramos denominam-se paralelepípedos.

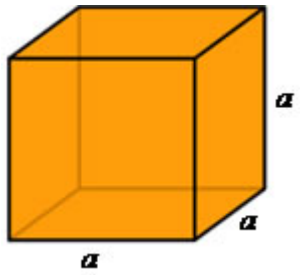


Paralelepípedo reto



Paralelepípedo Oblíquo

Cubo é todo paralelepípedo retângulo com seis faces quadradas.



Prisma Regular

Se o prisma for reto e as bases forem polígonos regulares, o prisma é dito regular.

As faces laterais são retângulos congruentes e as bases são congruentes (triângulo equilátero, hexágono regular,...)

Área

Área cubo: $S_t = 6a^2$

Área paralelepípedo: $S_t = 2\,(ab + ac + bc)$

A área de um prisma: $S_t = 2S_b + S_t$

Onde: S_t=área total

S_b = área da base

S_l= área lateral, soma-se todas as áreas das faces laterais.

Volume

Paralelepípedo:V = a . b . c

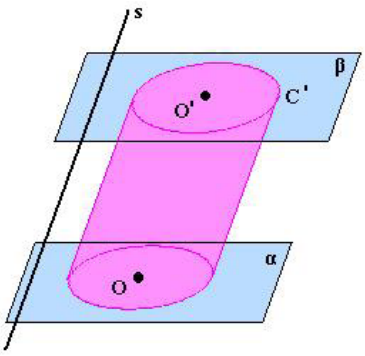
Cubo: $V = a^3$

Demais: Sb . h

Cilindros

Considere dois planos, α e β, paralelos, um círculo de centro O contido num deles, e uma reta s concorrente com os dois.

Chamamos cilindro o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a s, com extremidades no círculo e no outro plano.

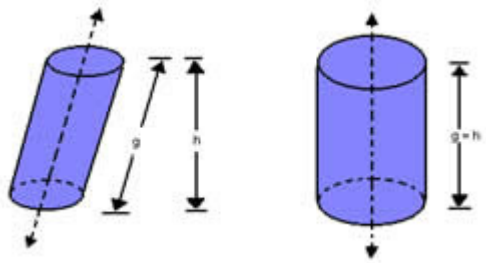


Classificação

Reto: Um cilindro se diz reto ou de revolução quando as geratrizes são perpendiculares às bases.

Quando a altura é igual a 2R(raio da base) o cilindro é equilátero.

Oblíquo: faces laterais oblíquas ao plano da base.



Área

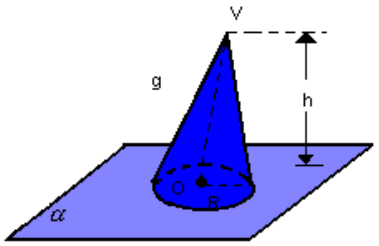
Área da base: $S_b = \pi r^2$
Área lateral: $S_l = 2\pi r^2$
Área total: $S_t = S_l + 2S_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

Volume

$\mathbf{V} = \pi r^2 \,.\, h$

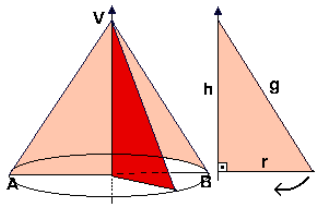
Cones

Na figura, temos um plano α, um círculo contido em α, um ponto V que não pertence ao plano.
A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade no ponto V e a outra num ponto do círculo denomina-se cone circular.



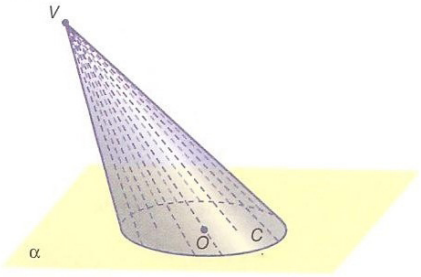
Classificação

- Reto: eixo VO perpendicular à base;
Pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Por isso o cone reto é também chamado de cone de revolução.
Quando a geratriz de um cone reto é 2R, esse cone é denominado cone equilátero.



$g^2 = h^2 + r^2$

- Oblíquo: eixo não é perpendicular



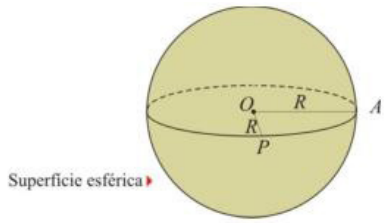
Área
Área lateral: $S_l = \pi rg$
Área da base: $S_b = \pi r^2$
Área total: $S_t = \pi r^2 + \pi rg = \pi r(r + g)$

Volume

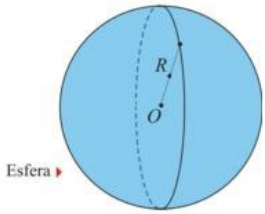
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Esferas

Superfície esférica de centro O é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual a R.

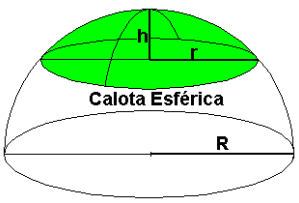


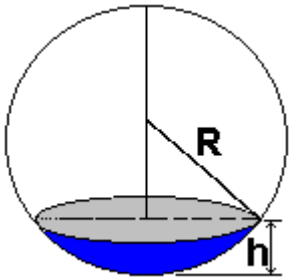
Esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual ou menor que o raio R.



Calotas esféricas

É a parte da esfera cortada por um plano.





Áreas

$S_e = 4\pi R^2$

$S^e_{calota} = \pi h(4 - h)$

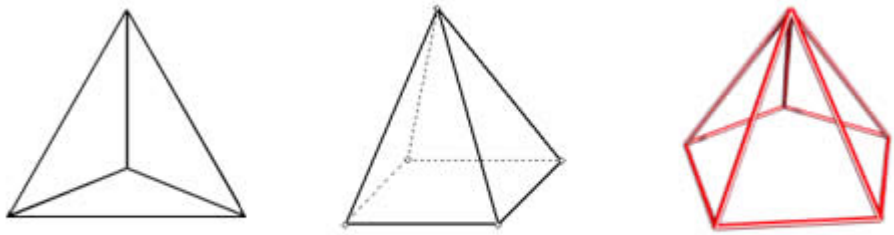
Volumes

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{calota} = \frac{\pi h^2(3R - h)}{3}$$

Pirâmides

As pirâmides são também classificadas quanto ao número de lados da base.



Pirâmide triangular Pirâmide quadrangular Pirâmide pentagonal

Área e Volume

Área lateral: S_l = *n . área do triângulo.*

Onde n= quantidade de lados

$S_{total} = S_b + S_l$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

QUESTÕES

1) A área, em cm^2, de uma coroa circular cujos raios são 9 cm e 5 cm é igual a:

a) 4 π.
b) 81 π.
c) 56 π.
d) 25 π.
e) 30 π.

2) Num trapézio isósceles, as bases medem 8 cm e 18 cm e os lados transversos medem 13 cm cada um. A área desse trapézio é:

a) 156 cm^2.
b) 145 cm^2.
c) 150 cm^2.
d) 125 cm^2.
e) 165 cm^2.

3) Um retângulo tem perímetro igual a 28 cm e sua altura é $\frac{3}{4}$ de seu comprimento, as medidas dos lados desse retângulo, em cm, são:

a) 6 e 4.
b) 8 e 4.
c) 8e 10.
d) 6 e 8.
e) 6 e 10.

4) A área de um triângulo é igual a 38,4 m^2. A altura desse triângulo é 8 m, então sua base, em m, é:

a) 8,6.
b) 9,6.
c) 7,6.
d) 6,6.
e) 10.

5) O perímetro de um quadrado vale 56, então a área desse quadrado é:

a) 169.
b) 144.
c) 196.
d) 132.
e) 150.

06) Dado o cilindro circular equilátero (h = 2r), calcular a área lateral e a área total.

07) Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

08) As áreas das bases de um cone circular reto e de um prisma quadrangular reto são iguais. O prisma tem altura 12 cm e volume igual ao dobro do volume do cone. Determinar a altura do cone.

09) Anderson colocou uma casquinha de sorvete dentro de uma lata cilíndrica de mesma base, mesmo raio R e mesma altura h da casquinha. Qual é o volume do espaço (vazio) compreendido entre a lata e a casquinha de sorvete?

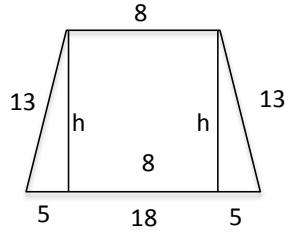
Resoluções:

1) Sendo R = 9 cm e r = 5 cm, temos:

$S = \varpi(R^2 - r^2)$
$S = \varpi(9^2 - 5^2)$
$S = \varpi(81 - 25) = 56\ \varpi\ cm^2$

Alternativa C

2) Um trapézio isósceles tem dois lados iguais e pelo enunciado, temos:



Pelo teorema de Pitágoras:
$13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow 169 = h^2 + 25 \rightarrow 169 - 25 = h^2 \rightarrow h^2 = 144 \rightarrow = 12$

$$S = \frac{(B + b).h}{2}$$

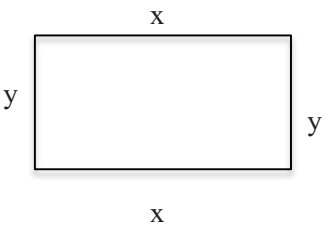
$$S = \frac{(18 + 8).12}{2}$$

$$S = \frac{26.12}{2} = \frac{312}{2}$$

S = 156 cm^2

Alternativa A

3) Pelo enunciado temos:



x + x + y + y = 28

2x + 2y = 28 :(2)

x + y = 14 (I)

$y = \frac{3.x}{4}$ (II), substituindo (II) em (I)

$$x + \frac{3.x}{4} = 14$$

$$\frac{4x + 3x}{4} = \frac{56}{4}$$

7x = 56

$$x = \frac{56}{7} = 8$$

$$y = \frac{3.8}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Assim, os lados medem 6 cm e 8 cm.

Alternativa B

4) Pelo enunciado:

S = 38,4

$$\frac{b.h}{2} = 38{,}4$$

$$\frac{b.8}{2} = 38{,}4$$

$$b = \frac{38{,}4.2}{8} = \frac{76{,}8}{8}$$

b = 9,6 m

Alternativa B

5) Perímetro é a soma dos lados, então:
1 + 1+ 1 + 1 = 56
41 = 56

$$l = \frac{56}{4} = 14$$

$S = 1^2$
$S = 14^2$
$S = 196$

Alternativa C

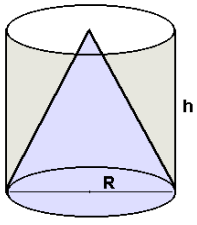
6) Solução: No cilindro equilátero, a área lateral e a área total é dada por:



$A_{lat} = 2\ \pi r.\ 2r = 4\ \pi r^2$
$A^{tot} = A_{lat} + 2\ A_{base}$
$A^{tot} = 4\ \pi r^2 + 2\ \pi r^2 = 6\ \pi r^2$
$V^{tot} = A_{base}\ h = \pi r^2.\ 2r = 2\ \pi r^3$

7) Solução: Cálculo da Área lateral $A_{lat} = 2\ \pi r\ h = 2\ \pi 2.3 = 12\ \pi cm^2$
Cálculo da Área total $A_{tot} = A_{lat} + 2\ A_{base} A_{tot} = 12\ \pi + 2\ \pi 2^2 = 12\ \pi + 8\ \pi = 20\ \pi cm^2$
Cálculo do Volume $V = Abase \times h = \pi r^2 \times h\ V = \pi 2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12\ \pi cm^{33}$

8) Solução:
$h_{prisma} = 12$
$A_{base\ do\ prisma} = A_{base\ do\ cone} = A$
$V^{prisma} = 2\ V_{cone}$
$A\ h_{prisma} = 2(A\ h)/3$
$12 = 2.h/3$
$h = 18\ cm$



9) Solução:
$V = V_{cilindro} - V_{cone}$

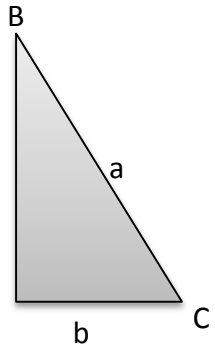
$V = A_{base}\ h - (1/3)\ A_{base}\ h$

$V = Pi\ R^2\ h - (1/3)\ Pi\ R^2\ h$

$V = (2/3)\ Pi\ R^2\ h\ cm^3$

TEOREMA DE PITÁGORAS

Em todo triângulo retângulo, o maior lado é chamado de **hipotenusa** e os outros dois lados são os **catetos**.



- "Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

QUESTÕES

1) Millor Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

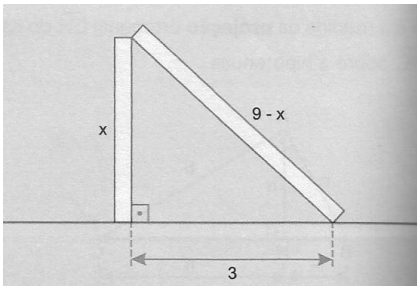
Às folhas tantas de um livro de Matemática, um Quociente apaixonou-se um dia doidamente por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável e viu-a do Ápice à Base: uma figura Ímpar; olhos romboides, boca trapezoide, corpo retangular, seios esferoides.
Fez da sua uma vida paralela à dela, até que se encontraram no Infinito.
"Quem és tu" – indagou ele em ânsia Radical.
"Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa." (Millôr Fernandes – Trinta Anos de Mim Mesmo).
A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:
a) "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."
b) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de Hipotenusa."
c) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."
d) "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da Hipotenusa."
e) Nenhuma das anteriores.

2) Um barco partiu de um ponto A e navegou 10 milhas para o oeste chegando a um ponto B, depois 5 milhas para o sul chegando a um ponto C, depois 13 milhas para o leste chagando a um ponto D e finalmente 9 milhas para o norte chegando a um ponto E. Onde o barco parou relativamente ao ponto de partida?
a) 3 milhas a sudoeste.
b) 3 milhas a sudeste.
c) 4 milhas ao sul.
d) 5 milhas ao norte.
e) 5 milhas a nordeste.

3) Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 13 cm e um dos catetos mede 5 cm, qual é a medida do outro cateto?
a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

4) A diagonal de um quadrado de lado *l* é igual a
a) $l\sqrt{2}$.
b) $l\sqrt{3}$.
c) $l\sqrt{5}$.
d) $l\sqrt{4}$.
e) Nenhuma das anteriores.

5) Durante um vendaval, um poste de iluminação de 9 m de altura quebrou-se em um ponto a certa altura do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base dele, conforme a figura abaixo. A que altura do solo se quebrou o poste?

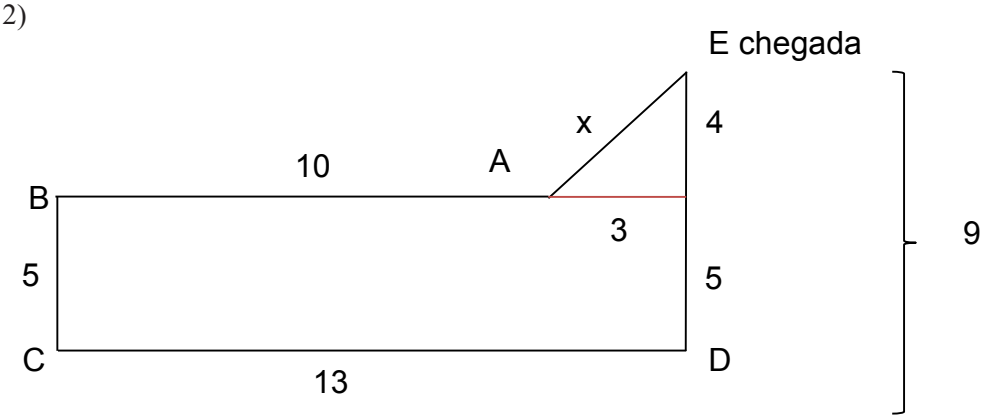


a) 4 m.
b) 4,5 m.
c) 5 m.
d) 5,5 m.
e) 6 m.

Resoluções:

1) Teórica. **Alternativa d**

2)



$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25} = 5$

Alternativa e

3) $13^2 = x^2 + 5^2$

$169 = x^2 + 25$

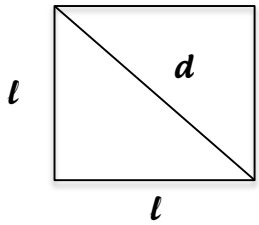
$169 - 25 = x^2$

$x^2 = 144$

$x = \sqrt{144} = 12$ cm

Alternativa c

4)



$d^2 = l^2 + l^2$
$d^2 = 2l^2$
$d = \sqrt{2l^2}$
$d = l\sqrt{2}$

Alternativa a

5) $(9 - x)^2 = x^2 + 3^3$

$9^2 - 2.9.x + x^2 = x^2 + 9$

$81 - 18x = 9$

$81 - 9 = 18x$

$72 = 18x$

$x = \frac{72}{18}$

$x = 4$ m

Alternativa a

13. - Raciocínio Lógico.
14. - Resolução de Situações-Problema

www.maxieduca.com.br

Raissa Y. Y. Rodrigues

Engenheira Eletricista com ênfase em eletrônica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

MAXI Educa

01. (TCE/RJ – Auditor de controle externo - CESPE/2012) João adora subir e descer degraus, o que faz de um jeito um pouco estranho, mas sistemático. Em cada movimento, João sobe um ou mais degraus e desce zero ou mais degraus. Numa dessas subidas, os primeiros movimentos de João foram:

1. subiu um e desceu zero
2. subiu um e desceu um
3. subiu dois e desceu um
4. subiu três e desceu dois
5. subiu cinco e desceu três

João pisou pela primeira vez no trigésimo (30) degrau da escada no movimento de número:

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Seguindo-se o padrão apresentado tem-se que, a partir do terceiro passo, adiciona-se as quantidades de subir e descer dos dois passos anteriores, como na sequência de Fibonacci:

etapa	subiu	desceu	alcançou o	parou no
1	1	0	1º	1º
2	1	1	2º	1º
3	2	1	3º	2º
4	3	2	5º	3º
5	5	3	8º	5º
6	8	5	13º	8º
7	13	8	21º	13º
8	21	13	34º	21º

Portanto, o trigésimo degrau será alcançado no movimento 8

RESPOSTA: “C”.

02. (TCE/RJ – Auditor de controle externo - CESPE/2012) Num campeonato de futebol, todos os times jogaram entre si duas vezes, em turno e returno. Houve 132 jogos. O número de times participando do campeonato era de:

A) 8;
B) 9;
C) 10;
D) 11;
E) 12

Para que um time jogue uma partida com todos os outros times de um campeonato com turno apenas, tem-se (N-1) + (N-2) + ... + 3 + 2 + 1, onde N é a quantidade de times. Para o returno basta dobrar a quantidade de partidas.

Times	Turno	Total
8	7+6+5+4+3+2+1=28	56
9	8+28 = 36	72
10	9+36 = 45	90
11	10+45 = 55	110
12	11+55 = 66	132

RESPOSTA: “E”.

03. (FATEC/SP - Professor Associado - FATEC/2014) Observe que, em cada linha do quadro, a sequencia de algarismos da coluna (II) foi formada a partir da sequencia de algarismos da coluna (I), aplicando-se critérios diferentes para os algarismos impares e para os algarismos pares.

Com base nos mesmos critérios, a sequencia de algarismos que substitui, corretamente, o ponto de interrogação da quarta linha e segunda coluna do quadro é

A) 143092
B) 183496
C) 321496
D) 941032
E) 983416

(I)	(II)
189654	165492
567498	547296
743856	325674
369214	?

Um critério para os algarismos pares e que "os da coluna II" são duas unidades a menos que os correspondentes algarismos da coluna (I).

	8		6		4
	6		4		8
	4		8		6
	6		2		4

	6		4		2
	4		2		6
	2		6		4
	④		⓪		②

Um critério para os algarismos impares e que os da coluna (II) são os mesmos da coluna (I) escritos em ordem crescente, da esquerda para a direita.

(I)

1		9		5	
5		7		9	
7		3		5	
3		9		1	

(II)

1		5		9	
5		7		9	
3		5		7	
①		③		⑨	

De acordo com os critérios citados, a sequencia de algarismos que substitui, corretamente, o ponto de interrogação da quarta linha e segunda coluna **é**

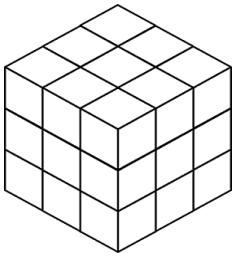
1	4	3	0	9	2

RESPOSTA: "A".

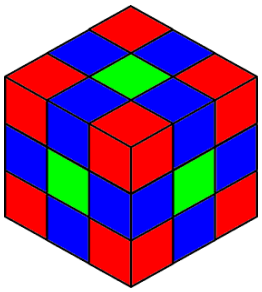
04. (TCE/RJ – Auditor de controle externo - CESPE/2012) Um cubo feito de madeira maciça clara teve suas faces pintadas de preto. Se esse cubo for serrado regularmente e dividido em 27 cubos, todos do mesmo tamanho, o número dos cubos resultantes com apenas duas de suas faces pintadas de preto é:

A) 8;
B) 12;
C) 16;
D) 20;
E) 24.

Ao dividir-se o cubo de madeira em 27 cubos menores tem-se:

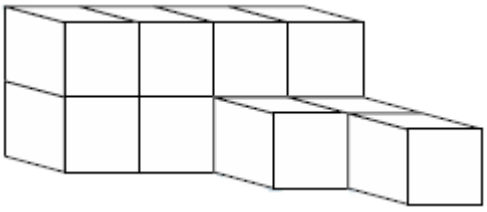


Os 8 cubinhos dos vértices do cubo (realçados de vermelho) terão três faces pintadas de preto.
Os 6 cubinhos do centro das faces do cubo (realçados de verde) terão uma face pintada de preto.
1 cubinho ficará no centro do cubo (não visível de nenhum ângulo) e não terá nenhuma face pintada de preto.
Tem-se então que um total de 15 cubinhos não terão duas faces pintadas de preto.
Logo, dos 27 cubinhos, (27 - 15 = 12) 12 deles (realçados de azul) terão duas faces pintadas de preto.



RESPOSTA: "B".

05. (FATEC/SP - Professor Associado - FATEC/2014) O solido da figura e formado por cubos de aresta 1 cm os quais foram sobrepostos e/ou colocados lado a lado.



Para se completar esse solido, formando um paralelepípedo reto retângulo com dimensões 3 cm - 3 cm - 4 cm, são necessários N cubos de aresta 1 cm.
O valor mínimo de N e
A) 13.
B) 18.
C) 19.
D) 25.
E) 27.

O numero N de cubos de aresta 1 cm necessários, e suficientes, para completar um paralelepípedo reto retângulo com dimensões 3 cm x 3 cm x 4 cm é
N = (3 . 3 . 4) – 11 = 36 – 11 = 25

RESPOSTA: "D".

06. (HUB/EBSERH – Técnico em informática - IBFC/2013) Em uma escola, são conhecidos os seguintes dados sobre os alunos formados no Ensino Médio, em certo ano:

	rapazes	***moças***
aprovados em algum vestibular	171	178
reprovados nos vestibulares que fizeram		95
não fizeram vestibular	52	

Analisando o quadro acima, percebe-se que alguns dados não foram divulgados. Sabe-se que o total dos alunos formados no Ensino Médio, nesse ano é de 632 e, desses, o número de rapazes é 315.

Sobre esta situação hipotética, assinale a RESPOSTA: correta.

A) O número de rapazes formados é maior do que o de moças formadas.

B) O número de rapazes aprovados em algum vestibular é maior do que o de moças aprovadas em algum vestibular.

C) O número de rapazes que não fizeram vestibulares é maior do que o de moças que não fizeram vestibular.

D) O número de todos os alunos aprovados em vestibular é inferior à soma dos reprovados com os que não fizeram.

E) O número total de alunos aprovados em vestibular não atinge a metade dos alunos formados nesse ano.

Insira uma linha e uma coluna no final da tabela, indicando o total.

O número total de alunos é igual a 632 é que o número de rapazes é igual a 315, então:

	rapazes	**moças**	**total**
aprovados em algum vestibular	171	178	
reprovados nos vestibulares que fizeram		95	
não fizeram vestibular	52		
total	315		632

Logo,

O número de moças será igual a 632 – 315 = 317

O número de rapazes reprovados nos vestibulares: 315 – 171 – 52 = 92

O número total de aprovados em algum vestibular: 171 + 178 = 349

	rapazes	**moças**	**total**
aprovados em algum vestibular	171	178	349
reprovados nos vestibulares que fizeram	92	95	
não fizeram vestibular	52		
total	315	317	632

Prosseguindo no preenchimento dos quadros:

O número total de reprovados nos vestibulares: 92 + 95 = 187

O número de moças que não fizeram o vestibular: 317 – 178 – 95 = 44

O número total de alunos que não fizeram vestibular: 52 + 44 = 96

	rapazes	**moças**	**total**
aprovados em algum vestibular	171	178	349
reprovados nos vestibulares que fizeram	92	95	187
não fizeram vestibular	52	44	96
total	315	317	632

Após todas etapas, constatamos que o número de rapazes que não fizeram vestibular (52) é maior que o número de moças que não fizeram vestibular (44).

RESPOSTA: “C”.

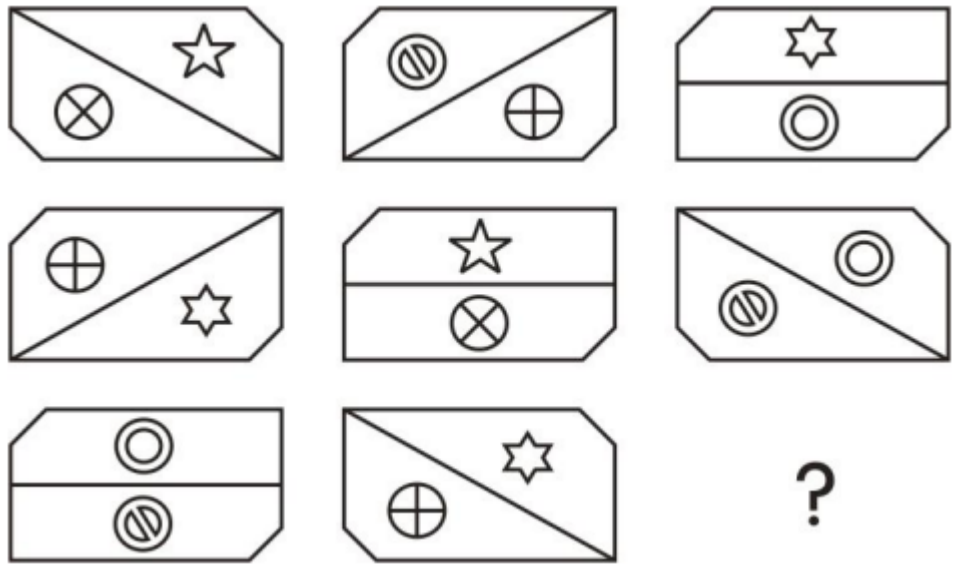
07. (SEAP/DF - ANALISTA DE COMUNICAÇÃO – IADES/2013) Se todo arquiteto é desenhista, existe professor que é arquiteto, mas algum desenhista não é professor, então é correto afirmar que

A) existe professor que não é arquiteto.
B) existe arquiteto que não é professor.
C) algum professor não é desenhista.
D) todo arquiteto que é professor é também desenhista. (E) algum desenhista

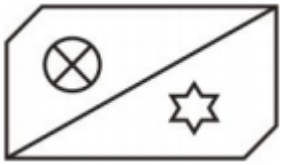
A única opção que podemos ter certeza que está certa é a RESPOSTA: D, pois como todo arquiteto é desenhista, logo se ele é professor também, logicamente também será desenhista.

RESPOSTA: "D".

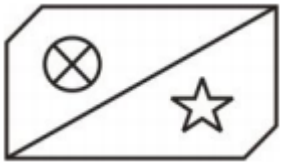
08. (ANVISA - TÉCNICO ADMINISTRATIVO - CETRO/2012) Observe a sequência abaixo e, em seguida, assinale a RESPOSTA: que preenche corretamente o espaço do ponto de interrogação.



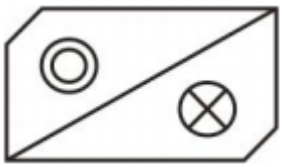
A)



B)



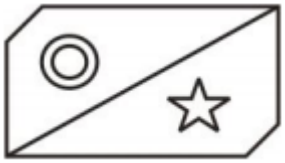
C)



D)



E)



Essa sequência lógica apresenta 3 padrões distintos, a saber:

1º padrão lógico: a figura externa. Observem que sempre vão conter, em cada linha, os seguintes formatos de figuras:



Sendo a última linha formada pelas figuras:



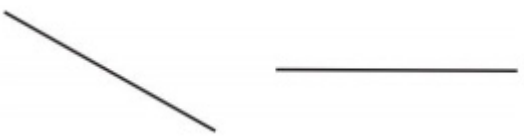
Logo, a 3ª figura deverá ser formada pela seguinte figura:



2º padrão lógico: o traço interno da figura. Observem que sempre vão conter, em figura, internamente, os seguintes traços:



Sendo a última linha formada pelos traços:



Logo, a 3ª figura deverá ser preenchida pelo seguinte traço:



3º padrão lógico: as figuras que preenchem as partes internas. Observem que sempre vão conter, em cada linha, internamente, as seguintes figuras:



Sendo a última linha formada pelas seguintes figuras: 

Logo, para completar a 3ª figura deverá conter as figuras que faltaram: 

RESPOSTA: "B".

09. (ANVISA - TÉCNICO ADMINISTRATIVO - CETRO/2012) O conjunto de números abaixo obedece a uma propriedade lógica. Sendo assim, assinale a RESPOSTA: que apresenta um número que pode pertencer a esse conjunto.

{539, 403, 4.118, 521, 4, 490, ?}

A) 50.871
B) 71
C) 6.244
D) 873
E) 44

Destacando-se, apenas, os algarismos que iniciam da esquerda para direita, cada número dessa sequência lógica, teremos:

539, **4**03, **4**.118, **5**21, **4**, **4**90, ...

O próximo número deverá iniciar-se pelo algarismo 5. Que, nesse caso, apresenta-se na RESPOSTA: "A" (50.871).

RESPOSTA: "A".

10. (VALEC – ASSISTENTE ADMINISTRATIVO - FEMPERJ/2012) Minha idade somada com as de meus dez irmãos é igual a 334. Se ninguém falecer, daqui a doze anos a soma de nossas idades será igual a:

A) 346
B) 398
C) 454
D) 462
E) 466

Sejam as seguintes idades:

- minha idade = a
- do meu 1º irmão = b
- do meu 2º irmão = c
- do meu 3º irmão = d
- do meu 4º irmão = e
- do meu 5º irmão = f
- do meu 6º irmão = g
- do meu 7º irmão = h
- do meu 8º irmão = i
- do meu 9º irmão = j
- do meu 10º irmão = k

De acordo com o enunciado, tem-se que:
a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k = 334

Daqui a 12 anos, juntos, teremos:
a+12+b+12+c+12+d+12+e+12+f+12+g+12+h+12+i+12+j+12+k+12
12x11 + (a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k)
132 + 334 = 466 anos

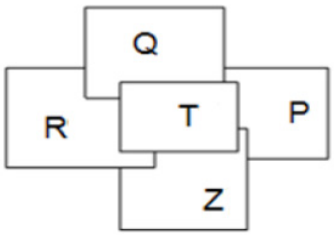
RESPOSTA: "E".

11. (BRDE – ANALISTA DE SISTEMAS - AOCP/2012) Complete o elemento faltante, considerando a sequência a seguir:
1 2 4 8 ? 32 64
A) 26
B) 12
C) 20
D) 16
E) 34

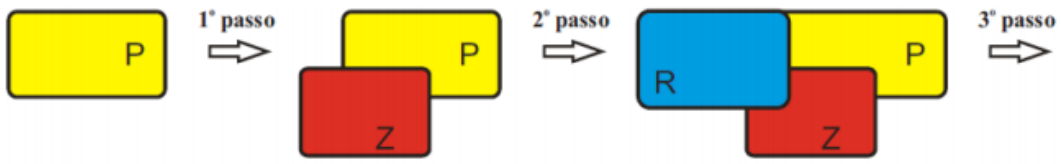
Observe que, todo número subsequente é o dobro do número anterior:
1 x2 2
2 x2 4
4 x2 8
8 x2 16
16 x2 32
32 x2 64

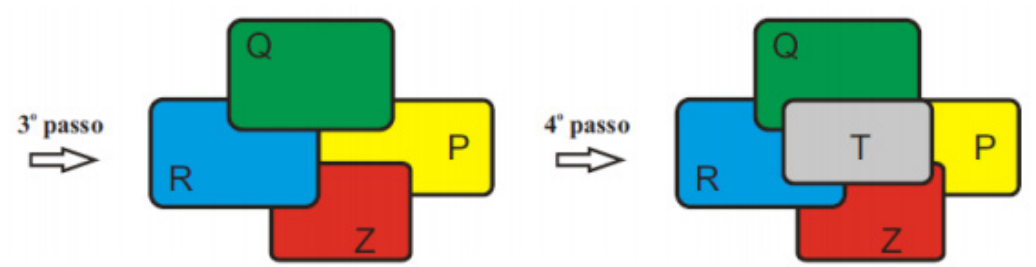
RESPOSTA: "D".

12. (BRDE – ANALISTA DE SISTEMAS - AOCP/2012) Assinale a RESPOSTA: que apresenta a ordem em que os 5 retângulos foram colocados.



A) TQRZP
B) PZRQT
C) RTZPQ
D) ZPRTQ
E) PZRTQ





Portanto, teremos a seguinte sequência de formação: PZRQT

RESPOSTA: "B".

13. (BRDE - ANALISTA DE SISTEMAS - AOCP/2012) Dois amigos disputavam um jogo, no qual é atribuído três pontos por vitória e é retirado dois pontos por derrota em cada rodada. Sabendo que ambos começaram com 10 pontos, que um deles ganhou exatamente quatro rodadas e o outro terminou o jogo com 11 pontos, então, quantas rodadas os amigos jogaram?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

De acordo com o texto podemos inferir que, se um deles ganhou exatamente 4 rodadas, logo o outro, que fez 11 pontos, perdeu 4 rodadas. Se é atribuído 3 pontos por vitória e retirado 2 pontos por derrota, então, aquele que fez 11 pontos jogou "x" partidas e perdeu 4 delas, então esse amigo ganhou "x – 4" partidas e, iniciando-se com 10 pontos, teremos o seguinte raciocínio para a montagem da equação a seguir: "a quantidade de pontos que ganhou ("3.(x – 4)") subtraído da quantidade de pontos que perdeu ("2.4") será igual a quantidade de pontos que conquistou ("1")".

3 . (x – 4) – 24 = 1 → 3x = 21 → x = 7 partidas

RESPOSTA: "C".

(PC/DF – Agente de Polícia - CESPE/UnB/2013) Considerando que 300 pessoas tenham sido selecionadas para trabalhar em locais de apoio na próxima copa do mundo e que 175 dessas pessoas sejam do sexo masculino, julgue o seguinte item. (questões 14 e 15)

14. (PC/DF – Agente de Polícia - CESPE/UnB/2013) Se, em um dia de jogo, funcionarem 24 postos de apoio e se cada posto necessitar de 6 mulheres e 6 homens, então a quantidade de pessoas selecionadas será suficiente.

( ) CERTA ( ) ERRADA

Das 300 pessoas, 175 são homens e 125 são mulheres. Se, em um dia de jogo, funcionarem 24 postos de apoio e se cada posto necessitar de 6 mulheres e 6 homens, então teremos que ter, no mínimo:

6 homens por posto → 24 postos = 144 homens disponíveis, e
6 mulheres por posto → 24 postos = 144 mulheres disponíveis.

A quantidade total de homens (175 homens disponíveis) garante o preenchimento desses 24 postos, porém a quantidade de mulheres disponíveis (125 mulheres) não é suficiente para preencher as 144 vagas para os 24 postos.

RESPOSTA: "ERRADA".

15. (PC/DF – Agente de Polícia - CESPE/UnB/2013) É impossível dividir as 300 pessoas em grupos de modo que todos os grupos tenham a mesma quantidade de mulheres e a mesma quantidade de homens.

( ) CERTA ( ) ERRADA

Nesse caso, determinaremos o MDC (Máximo Divisor Comum) entre 125 e 175, que é:

125	;	175	**5 (divisor comum)**
25		35	**5 (divisor comum)**
5		7	5
1		7	7
1		1	

MDC (125 ; 175) = 5 → 5 = 25

Portanto, podemos formar: $\frac{125}{25} = 5\ grupos\ de\ mulheres$.

$\frac{175}{25} = 7\ grupos\ de\ homens$

Sendo possível.

RESPOSTA: “ERRADA”.

ANOTAÇÕES