PA E PG

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Consideremos a sequência (2, 5, 8, 11, 14, 17, 20). Observemos que, a partir do seu segundo termo a diferença entre qualquer termo e seu antecessor é constante, onde a_n representa o elemento da posição n.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = a_6 - a_5 = a_7 - a_6 = 3$$

Sequências como esta são chamadas progressões aritméticas (PA). A diferença constante é chamada de razão da progressão e costuma ser representada por r. Na PA dada temos r = 3. Podemos, então, dizer que:

> Progressão aritmética (PA) de razão r é a sequência numérica na qual a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor é sempre igual a r, $r \in \mathbb{R}$.
>
> $$a_n - a_{n-1} = r, n \geq 2$$

São exemplos de PA

- (3, 7, 11, 15, 19...)

  r = 4 → PA crescente.
- (12, 9, 6, 3, 0...)

  r = -3 → PA decrescente
- (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5...)

  r = 0 → PA constante

Termo geral

Numa PA podemos afirmar que:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_5 = a_4 + r$$
$$...$$
$$a_n = a_{n-1} + r$$

Por definição, todas as equações são verdadeiras. Somando sentenças verdadeiras obtemos outra sentença verdadeira.

Daí vem: somando as linhas do a_2 até a_n (observe que são n - 1 linhas)

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

Propriedades

- Numa PA, qualquer termo, a partir do segundo, será a média aritmética do seu antecessor com o seu sucessor.

$$\therefore a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

O termo médio é a média aritmética de outros dois termos.

Por exemplo, se $m = \frac{p+k}{2}$ então $a_m = \frac{a_p + a_k}{2}$.

Para existir termo médio entre p e k, a soma p + k deve ser par.

Formas simétricas de escrita para PA

- Com uma quantidade ímpar de termos:

  (..., x − r, x, x + r, ...) → razão r.

- Com uma quantidade par de termos:

  (..., x − 3r, x − r, x + r, x + 3r, ...) → razão 2r.

Soma de termos de uma PA

A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Interpolação Aritmética

Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre os números a e b significa construir uma PA, com (k + 2) termos, onde a é o primeiro e b é o último.

$$\begin{pmatrix} a, x_1, x_2, ..., b \\ k \text{ meios} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a \\ a_n = b \\ n = k + 2 \end{array}\right\} \rightarrow = ???$$

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com n = k + 2 elementos

Sendo $a_n = a_1 + (n - 1)\, r$, e colocando a equação em função de r temos:

Geralmente resolve-se esse problema calculando-se a razão através da fórmula do termo geral.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ é uma progressão geométrica (PG) se, e somente se, cada termo, a partir do segundo, for igual ao produto do termo anterior por uma constante q denominada razão da PG.

Exemplo: (2, 8, 32, 128, ...) → razão q = 4

Cálculo da razão

As progressões geométricas que estudaremos são aquelas de termos não nulos e de razão diferente de zero. Assim, a partir da definição decorre de imediato que:

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

Ou, simplesmente: $q = \frac{\text{termo qualquer}}{\text{termo anterior}}$.

Classificação

Podemos classificar as progressões geométricas de quatro maneiras:

- **CRESCENTES:** cada termo é maior que o anterior.
  $a_1 > 0$ e $q > 1$, por exemplo: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...), com q = 2.
  $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, por exemplo: (-1, -1/2, -1/4, ...), com q = ½.
- **DECRESCENTES:** cada termo é menor que o anterior.
  $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, por exemplo: (64, 32, 16, 8, ...), com q = ½.
  $a_1 < 0$ e $q > 1$, por exemplo: (-2, -4, -8, ...), com q = 2.
- **CONSTANTES:** cada termo é igual ao anterior.
  A razão q = 1, por exemplo: (5, 5, 5, 5, ..., 5).
- **OSCILANTES:** cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior.
  $a_1 \neq 0$ e $q < 0$, por exemplo: (5, -15, 45, -135, 405, ...), com q = -3.

O Termo geral

Em uma geométrica $(a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...)$ de razão q, partindo do 1° termo, para avançar um termo basta multiplicar o 1° termo pela razão **q** ($a_2 = a_1 q$); para avançar dois termos basta multiplicar o 1° termo pelo quadrado da razão **q** ($a_3 = a_1 q^2$); para avançar três termos basta multiplicar o 1° termo pelo cubo da razão **q** ($a_4 = a_1 q^3$) e assim por diante. Desse modo encontramos o termo de ordem **n**, denominado temo geral da PG, que é dado por:

$\mathbf{a_n = a_1 q^{n-1}}$ (ao passar de $\mathbf{a_1}$ para $\mathbf{a_n}$, avançamos **n – 1** termos)

Propriedades das Progressões Geométricas

- Numa PG, considerados três termos consecutivos, o termo central ao quadrado é igual ao produto dos dois termos adjacentes a ele.

$$(a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) \cdot (a_n)^2 = a_{n-1}\, a_{n+1}$$

- Numa PG finita de n termos, a_p e a_k sejam dois de seus termos, e sejam equidistantes dos extremos, isto é, p + k = n + 1.

O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos: $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$

$$a_1 \; a_n = a_2 \; a_{n-1} = a_3 \; a_{n-2} = a_4 \; a_{n-3}$$

- Numa PG com número ímpar de termos, o termo médio é a média geométrica dos extremos e, portanto, também é a média geométrica de qualquer par de termos equidistantes dos extremos.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

$$M_g = \sqrt{a_1 \cdot a_3 = a_2} \text{ ou ainda, } M_g = \sqrt{a_1 \cdot a_5 = a_3}$$

Formas especiais

PG com três termos

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right) \rightarrow \text{razão q}$$

PG com quatro termos

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, xq, xq^2\right) \rightarrow \text{razão q}$$

PG com cinco termos

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right) \rightarrow \text{razão q}$$

Interpolação Geométrica

Interpolar ou inserir k meios geométricos entre os números a e b dados, significa construir uma PG com k + 2 termos, onde a é o primeiro termo e b é o último.

$$\left(\begin{matrix} a, x_1, x_2, ..., b \\ k \text{ meios} \end{matrix}\right) \rightarrow \text{PG}$$

$$\left.\begin{matrix} a_1 = a \\ a_n = b \\ n = k + 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow q = ???$$

Sendo a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, com n = k + 2 elementos, temos o termo geral:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Geralmente resolve-se esse problema calculando a razão através do termo geral acima.

Produto dos termos

Sendo a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ o produto P_n de seus n primeiros termos, é dado por:

$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$, se o número de termos negativos for par

$P_n = -\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$, se o número de termos negativos for ímpar.

Se preferir, podemos calcular de uma forma que já nos dê a resposta com o sinal adequado:

$$P_n = (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Soma dos termos de uma PG Finita

Consideremos uma PG de razão $q \neq 1$.

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$$

Sendo S_n a soma dos seus n termos, temos que:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros por q, obteremos:

$$q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n) \cdot q$$

Subtraindo as duas equações, membro a membro, tiramos que:

$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$

$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$$

Substituindo na por $a_1 q^{n-1}$, temos também que:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Quando $q = 1$, temos que $S_n = n \cdot a_1$.

Soma dos termos de uma PG Infinita

Consideremos uma PG infinita, isto é, uma PG que não possui último termo, cuja razão q seja um número real não nulo, tal que $-1 < q < 1$.

Sabemos que uma PG com esse tipo de razão é decrescente, logo quanto maior o índice n do termo mais próximo de zero está o termo.

Então podemos afirmar que:

Se $n \to \infty$, então $a_n \to 0$

Sabemos que $S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}$. Assim quando $n \to \infty$ podemos escrever $S_n \to S_\infty = \frac{0 \cdot q - a_1}{q - 1}$

$S_\infty = \frac{-a_1}{q - 1} \therefore S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$.