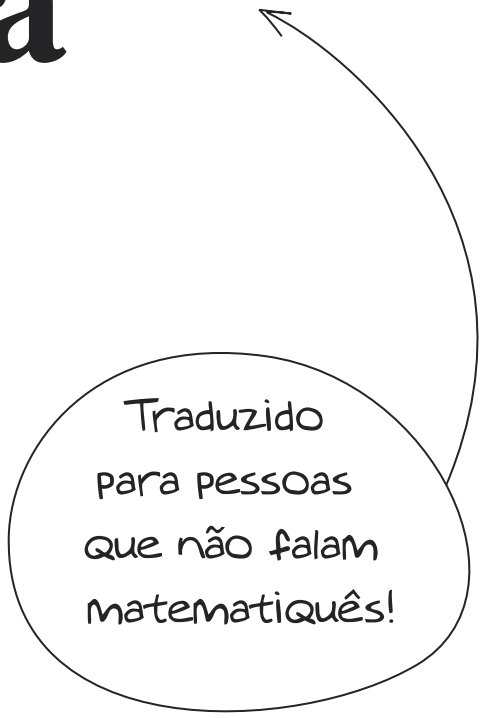
W. Michael Kelley

O Fabuloso Livro de

Exercícios de Álgebra

1.000 exercícios com soluções completas sobre os principais tópicos de Álgebra I e II



ALTA BOOKS
EDITORA
Rio de Janeiro, 2013

Sumário

Introdução

Capítulo 1: Fundamentos de Álgebra Sua única parada para uma revisão de números **1**

Classificação Dos Números ..... Os números ficam em grupos diferentes *2*

Expressões Contendo Números Com Sinais ... Somar, subtrair, multiplicar e dividir números positivos e negativos ... *5*

Símbolos De Agrupamento ..... Quando números estiverem agrupados, lide primeiro com eles *8*

Propriedades Algébricas ..... Suposições básicas sobre álgebra *11*

Capítulo 2: Números Racionais Entender as frações é melhor do que temê-las **17**

Notação de Número Racional ..... Frações próprias e impróprias, números decimais e mistos ... *18*

Simplificação de Frações ..... Redução de frações aos menores termos, como 1/2 em vez de 5/10 ..... *23*

Combinação de Frações ..... Soma, subtração, multiplicação e divisão de frações *26*

Capítulo 3: Expressões Algébricas Simples Hora do x fazer sua impressionante estreia **37**

Tradução de Expressões ..... A alquimia de transformar palavras em matemática *38*

Expressões Exponenciais ..... Regras para simplificar expressões que contêm potências *40*

Propriedade distributiva ..... Multiplicação de uma coisa por um montão de coisas entre parênteses *45*

Ordem das Operações ..... Minha doce amada Sally será sempre entendida *48*

Cálculo de Expressões ..... Substituição de variáveis por números *51*

Capítulo 4: Equações Lineares Em Uma Variável Como resolver equações simples **55**

Somar e Subtrair Para Resolver Uma Equação ..... Somar / Subtrair de ambos os lados *56*

Multiplicar e Dividir Para Resolver Uma Equação ..... Multiplicar/dividir ambos os lados *59*

Resolução de Equações Em Várias Etapas ..... Nada de novo aqui, apenas algumas etapas a mais ... *61*

Equações Modulares ..... A maioria delas tem duas soluções *70*

Equações Contendo Múltiplas Variáveis ... Equações com DUAS (x e y) ou mais variáveis *73*

Capítulo 5: Representação Gráfica De Equações Lineares em Duas Variáveis Identificar os pontos que tornam uma equação verdadeira **77**

Retas Numéricas e O Plano de Coordenadas ... O que devemos usar na representação gráfica? ... *78*

Representação Gráfica com Uma Tabela de Valores ... Insira alguns x, marque alguns pontos, encerre o expediente ... *83*

Representação Gráfica Usando Pontos de Cruzamento ... A forma mais fácil de marcar rapidamente dois pontos em uma reta ... *90*

Calculando a Inclinação de Uma Reta ... Descubra a inclinação de uma reta ... *93*

Representação Gráfica de Equações Modulares ... Não deixe que estes gráficos passem do ponto (entendeu?) ... *100*

Capítulo 6: Equações Lineares Em Duas Variáveis Geração de equações de retas **105**

Forma do Ponto-Inclinação de Uma Equação Linear ... Ponto + inclinação = equação ... *106*

Forma da Inclinação-Cruzamento de Uma Equação Linear ... Retas parecidas com y = mx + b ... *110*

Representação Gráfica de Retas Na Forma Inclinação-Cruzamento ... Representação gráfica de equações que são resolvidas para y ... *113*

Forma Padrão de Uma Equação Linear ... Escreva equações de retas de maneira uniforme ... *118*

Criação de Equações Lineares ... Pratique todas as habilidades deste capítulo ... *121*

Capítulo 7: Inequações Lineares São como equações, mas sem o sinal de igual **127**

Inequações em Uma Variável ... Desenferruje suas habilidades de resolução de equações do Capítulo 4 ... *128*

Representação Gráfica de Inequações em Uma Variável ... Desenhe setas nas retas numéricas ... *132*

Inequações Compostas ... Duas inequações pelo preço de uma ... *135*

Inequações Modulares ... Transforme-as em duas inequações ... *137*

Conjunto-Solução ... Uma maneira bonita de escrever soluções ... *140*

Representação Gráfica de Inequações em Duas Variáveis ... Retas que produzem sombra no plano de coordenadas ... *142*

Capítulo 8: Sistemas De Equações E Inequações Lineares Trabalhe com mais de uma equação de uma só vez **147**

Representação Gráfica de Sistemas Lineares ... Represente graficamente duas retas de uma só vez ... *148*

O Método de Substituição ... Resolva uma equação para uma variável e substitua o resultado na outra ... *153*

Eliminação de Variáveis ... Faça desaparecer uma variável e resolva para a outra ... *162*

Sistemas de Inequações ... A resposta está onde as sombras se sobrepõem ... *168*

Programação Linear ... Use os vértices de uma região sombreada ... *173*

Capítulo 9: Operações E Cálculos Com Matrizes números em linhas e colunas **181**

Anatomia de Uma Matriz ... Ordem de uma matriz e identificação dos elementos ... *182*

Adição E Subtração de Matrizes ... Combine os números de posições correspondentes ... *183*

Multiplicação de Matrizes ... Não tão fácil quanto a soma e a subtração ... *188*

Cálculo de Determinantes ... Valores definidos apenas para matrizes quadradas ... *192*

Regra de Cramer ... Matrizes de dois andares que resolvem sistemas ... *200*

Capítulo 10: Aplicações De Álgebra Matricial Coisas avançadas com matrizes **207**
Matriz Aumentada e Matriz Identidade Colunas extras e muitos 0 e 1 *208*
Operações com Linhas de Matrizes Troque linhas, some colunas ou multiplique por um número *211*
Matriz Escalonada e Matriz Escalonada Reduzida por Linhas Mais matrizes cheias de 0 com uma diagonal de 1 *216*
Matrizes Inversas Matrizes que eliminam outras matrizes *228*

Capítulo 11: Polinômios Grupos de números e variáveis elevados a potências **237**
Classificação de Polinômios Rotulação com base na expoente e no número de termos *238*
Soma e Subtração de Polinômios Só funciona com termos semelhantes *239*
Multiplicação de Polinômios EPIU e outros mais *244*
Divisão Longa de Polinômios Muito parecida com a divisão longa de inteiros *246*
Divisão Sintética de Polinômios Dividir usando apenas os coeficientes *251*

Capítulo 12: Fatoração De Polinômios O oposto da multiplicação de polinômios **257**
Máximos Divisores Comuns Maior fator que divide tudo sem deixar resto *258*
Fatoração por Agrupamento Binômios também podem ser fatorados *265*
Padrões de Fatores Comuns Diferença entre quadrados/cubos perfeitos, soma dos cubos perfeitos *267*
Fatoração de Trinômios Quadráticos Transforme um trinômio em dois binômios *270*

Capítulo 13: Expressões E Equações Com Radicais Raízes quadradas, raízes cúbicas e expoentes fracionários **275**
Simplificação de Expressões Com Radicais Tirando as coisas da raiz *276*
Expoentes Racionais Potências fracionárias são raízes disfarçadas *281*
Operações com Raízes Somar, subtrair, multiplicar e dividir raízes *283*
Solução de Equações com Radicais Use expoentes para cancelar as raízes *288*
Números Complexos Números que contêm i, que é igual a $\sqrt{-1}$ *290*

Capítulo 14: Equações E Inequações Do Segundo Grau Resolva equações que contenham x^2 **295**
Solução de Equações do 2º Grau por Fatoração Use as técnicas do Capítulo 12 para resolver equações *296*
Completação do Quadrado Transforme um trinômio em um quadrado perfeito *300*
Fórmula Quadrática Use os coeficientes de uma equação para calcular a solução *305*
Aplicação do Discriminante O que $b^2 - 4ac$ indica sobre uma equação *312*
Inequações do 2º Grau Em Uma Variável Inequações que contêm x^2 *316*

Capítulo 15: Funções Expressões com nomes que produzem uma saída por entrada **323**
Relações e Funções ..... O que faz de uma função uma função? *324*
Operações com Funções ..... Funções com +, −, · e ÷ *326*
Composição de Funções ..... Encaixe uma função em outra *330*
Funções Inversas ..... Funções que se cancelam *335*
Funções Definidas por Partes ..... Regras de funções que mudam com base na entrada de x *343*

Capítulo 16: Representação Gráfica De Funções Desenho de gráficos que não são retas **347**
Representação Gráfica com Uma Tabela de Valores ..... Insira um bocado de coisas no x *348*
Domínio e Imagem de uma Função ..... O que você pode inserir? Qual o resultado? *354*
Simetria ..... Partes de um gráfico que são reflexos uma da outra *360*
Gráficos de Funções Fundamentais ..... Os gráficos que você mais precisa entender *365*
Representação Gráfica de Funções com Uso de Transformações ..... Mover, esticar, espremer e virar gráficos *369*
Funções Modulares ..... Estes gráficos podem ter vértices *374*

Capítulo 17: Cálculo De Raízes De Funções Raízes = soluções = pontos de cruzamento x **379**
Identificação de Raízes Racionais ..... Fatoração de polinômios com uma vantagem inicial *380*
Teste do Coeficiente Principal ..... As extremidades de uma função definem as extremidades de seu gráfico *384*
Regra dos Sinais de Descartes ..... As mudanças de sinal ajudam a enumerar as raízes reais *388*
Teste de Raízes Racionais ..... Encontre as possíveis raízes sem nada além de uma dada função *390*
Síntese das Estratégias de Identificação de Raiz ..... Fatoração de polinômios grandes desde o início *394*

Capítulo 18: Funções Logarítmicas Você logo pega o ritmo **399**
Cálculo de Expressões Logarítmicas ..... Dado $\log_a b = c$, encontre a, b ou c *400*
Gráficos de Funções Logarítmicas ..... Todas as funções logarítmicas têm o mesmo formato básico *402*
Logaritmos Comuns e Naturais ..... O que é igual às bases quando não há base escrita *406*
Fórmula da Mudança de Base ..... Calcule valores de logaritmos com bases estranhas *409*
Propriedades dos Logaritmos ..... Expansão, contração e simplificação de expressões logarítmicas *412*

Capítulo 19: Funções Exponenciais Funções com uma variável no expoente **417**
Representação Gráfica de Funções Exponenciais ..... Gráficos que começam próximos a y = 0 e sobem rapidamente *418*
Composição de Funções Exponenciais e Logarítmicas ..... Elas se cancelam *423*
Equações Exponenciais e Logarítmicas ..... Cancele logaritmos com expoentes e vice-versa *426*
Crescimento e Queda Exponenciais ..... Use $f(t) = Ne^{kt}$ para medir coisas como população *433*

Capítulo 20: Expressões Racionais Frações com muitas variáveis **439**
Simplificação de Expressões Racionais Redução de frações por fatoração *440*
Soma e Subtração de Expressões Racionais Use denominadores comuns *444*
Multiplicação e Divisão de Expressões Racionais Não são necessários denominadores comuns *452*
Simplificação de Frações Compostas Reduza frações que contêm frações *457*
Representação Gráfica de Funções Racionais As funções racionais têm assíntotas *459*

Capítulo 21: Equações E Inequações Racionais Resolva equações usando as habilidades do Capítulo 20 **465**
Proporções e Multiplicação Cruzada Quando dois fatores forem iguais, "X" marcará a solução *466*
Solução de Equações Racionais Desfaça-se das frações ou multiplique em cruz para resolver *470*
Variações Direta e Indireta Transforme um problema de palavras em uma equação racional *475*
Solução de Inequações Racionais Números críticos, pontos de teste e sombreamento *479*

Capítulo 22: Seções Cônicas Parábolas, círculos, elipses e hipérboles **487**
Parábolas Vértice, eixo de simetria, foco e diretriz *488*
Círculos Centro, raio e diâmetro *494*
Elipses Eixos maiores e menores, centro, focos e excentricidade *499*
Hipérboles Eixos transversais e conjugados, focos, vértices e assíntotas *506*

Capítulo 23: Problemas Se dois trens saem da estação cheios de números inteiros consecutivos, qual o rendimento em juros? **515**
Determinação de Valores Desconhecidos Números inteiros e problemas sobre idade *516*
Cálculo de Juros Simples, compostos e compostos contínuos *521*
Fórmulas Geométricas Área, volume, perímetro, e daí em diante *525*
Velocidade e Distância Distância é igual à velocidade vezes o tempo *529*
Mistura e Combinação Medição de ingredientes em uma mistura *534*
Trabalho Quanto tempo é economizado quando se trabalha em equipe? *538*

Apêndice A: Propriedades Algébricas 545

Apêndice B: Gráficos importantes e transformações dos gráficos 547

Apêndice C: Importantes Fórmulas da Álgebra 551

Índice **555**

Introdução

Você está estudando álgebra? Sim? Então, você PRECISA deste livro. Pelos seguintes motivos:

Fato nº 1: A melhor maneira de aprender álgebra é resolvendo exercícios de álgebra. Não há como negar. Se fosse possível entender as aulas apenas com a leitura do livro didático ou de boas anotações feitas em sala, todos passariam com notas altas. Infelizmente, a dura verdade é que você tem que ter determinação e resolver exercícios até que seus dedos fiquem dormentes.

Fato nº 2: A maioria dos livros didáticos diz apenas QUAIS são as respostas dos problemas práticos, mas não COMO chegar até elas. Lógico, seu livro didático pode ter 175 problemas para cada assunto, mas a maioria só traz as respostas. Isso quer dizer que, se você não chegar à resposta correta, estará perdido! Saber que errou não ajuda em nada, se você não souber por que errou. Os livros didáticos de Matemática sentam-se em um trono gigante, como o Grande e Terrível Oz, e dizem "Não é isso, tente novamente", e nós tentamos. De novo e de novo. E continuamos errando. Que jeito encantador de aprender! (Não vamos nem falar por que os livros só trazem as respostas dos problemas de número ímpar. Isso significa que os autores sequer tiveram vontade de resolver os de número par?)

Fato nº 3: Mesmo quando os livros de matemática tentam mostrar as etapas de um problema, o fazem malfeito. O pessoal da matemática adora queimar etapas. Você está acompanhando bem uma explicação quando, repentinamente, BAM!, se perde. Você se pergunta "como fizeram isso?" ou "de onde veio aquele número 42? Ele não estava aqui na etapa anterior!" Por que a maioria desses livros supõe que, para resolver um problema da página 200, você deveria conhecer as 199 páginas anteriores como a palma da sua mão? Você não quer passar o resto da sua vida fazendo lição de casa! Você só quer saber por que continua tendo um número negativo como resultado ao calcular o custo mínimo da construção de uma piscina, cujo comprimento é quatro vezes a soma de sua profundidade mais a taxa em que a água vaza de um trem que saiu de Chicago às 4 da manhã em direção ao oeste, na mesma velocidade de decaimento do carbono.

Fato nº 4: Ler listas de fatos é divertido durante algum tempo, mas se torna cansativo. Vamos ao que interessa. Praticamente, qualquer tipo de problema de álgebra com que você possa se deparar está aqui – afinal de contas, esse livro é FABULOSO! Se mil exercícios não forem suficientes, então, meu amigo, você tem alguma espécie de fome matemática louca, e deveria procurar auxílio profissional. Este livro prático era bom, no início, mas, para deixá-lo ótimo, eu o revi, resolvi todos os problemas, e fiz anotações nas margens quando achei que algo estava confuso ou precisava de um pouco mais de explicação. Também desenhei caveirinhas próximas aos exercícios mais difíceis, para você saber que não deve se apavorar se forem muito complicados. Afinal, se você estiver trabalhando em um exercício e estiver completamente travado, não é melhor saber que o problema PODE ser difícil? É tranquilizante, pelo menos para mim.

Todas as minhas anotações estão assim, na lateral, e apontam para a parte do livro que estou tentando explicar.



Acho que você ficará positivamente surpreso com o detalhe das explicações das respostas, e espero que ache minhas anotações úteis ao longo do percurso. Chame-me de louco, mas acho que as pessoas que quiserem aprender álgebra e quiserem passar seu tempo trabalhando em problemas práticos deveriam, na verdade, conseguir descobrir os problemas e aprendê-los à medida que eles surgem, mas essa é apenas minha opinião.

Boa sorte, e lembre-se de visitar meu site www.calculus-help.com. Se você sentir vontade, mande um e-mail com sua opinião e dois dedos de prosa (mas não literalmente – dedos de verdade entopem os tubos da internet).

Agradecimentos

Agradecimentos especiais à revisora técnica (da versão em inglês), Paula Perry, especialista que verificou a exatidão daquilo que você aprenderá com este livro. Conheci Paula quando estudava para ser professora (e eu só tinha um ou dois anos de experiência na época). Ela é uma professora de extremo talento, e a mera revisão deste livro é quase um desperdício de suas impressionantes habilidades, mas sou grato mesmo assim.

Marcas

Todos os termos mencionados neste livro, conhecidos como ou suspeitos de serem marcas registradas ou marcas de serviço, receberam a inicial maiúscula adequadamente. A Editora Alta Books não pode atestar a exatidão desta informação. O uso de um termo neste livro não deve ser visto como afetando a validade de quaisquer marcas registradas ou marcas de serviço.

Dedicatória

Ao meu filho, Nick, o garoto tipicamente americano que ama futebol, Lego, super-heróis, Legend of Zelda e finge que sabe caratê. Você fez o resumo perfeito, garotão, quando disse: "Sabe por que te amo tanto, papai? Porque somos iguais."

Às minhas garotinhas, Erin (que gosta de segurar minha mão durante o jantar) e Sara (que adora quando eu faço cócegas até ela perder o fôlego). Curiosamente, tenho orgulho de que, aos três anos de idade, vocês duas tenham dominado a forma de dizer "papaaaaai..." que sugere que eu tanto divirto quanto causo extremo constrangimento a vocês.

Acima de tudo, à minha esposa, Lisa, que me anima, que me apoia, me busca e faz com que voltar para casa seja o único motivo de que eu precise para aguentar o tranco diariamente.

Capítulo 1
FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

Sua única parada para uma revisão de números

A álgebra é, fundamentalmente, um compêndio de conceitos matemáticos, axiomas, teoremas e algoritmos enraizados na abstração. A Matemática é mais poderosa quando não está aprisionada pelas limitações do concreto, e o primeiro passo rumo à libertação dessas restrições é a introdução da variável, uma estrutura na qual qualquer número de valores pode ser substituído. Porém, os alunos de álgebra precisam primeiro possuir um conhecimento considerável sobre números antes de poderem dar o próximo passo lógico, representando valores concretos em notação abstrata.

Este capítulo faz com que você se familiarize completamente com as classificações mais comuns usadas para descrever números, dá a oportunidade de manipular números com sinais de forma aritmética e investiga os princípios fundamentais da matemática que governam a álgebra.

Você deve estar ansioso para mergulhar nos detalhes práticos da álgebra, mas não pule o material deste capítulo. Ele está cheio de termos importantes como "número racional" e "propriedade comutativa". Você também aprenderá coisas como a diferença entre números reais e complexos e se O é par ou ímpar. Alguns dos problemas podem ser fáceis, mas você pode se surpreender ao aprender algo novo.

Classificação dos Números

Os números ficam em grupos diferentes

Os números naturais também são chamados de "números usados para contar", porque quando os lemos, soa como se estivéssemos contando: 1, 2, 3, 4, 5 e daí em diante. A maioria das pessoas não começa a contar pelo 0.

1.1 Descreva a diferença entre N e N*.

A teoria de números diz que o conjunto de números inteiros não negativos e o conjunto dos números naturais contêm quase os mesmos números: {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}. A diferença característica entre os dois conjuntos é que o de números inteiros não negativos também inclui o número 0. Portanto, o conjunto dos números naturais é equivalente ao de números inteiros positivos {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, enquanto o conjunto de números inteiros não negativos é {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}.

1.2 Que conjunto de números consiste em inteiros que não são números naturais? Que termo matemático descreve melhor este conjunto?

Assim, os números inteiros são obtidos dos números naturais, inserindo o 0.

Os inteiros são números que não contêm fração ou casas decimais explícitas. Portanto, números como 5, 0 e –6 são inteiros, mas 4,3 e $\frac{1}{2}$ não.

Assim, todos os inteiros pertencem ao conjunto {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}. Segundo o Problema 1.1, o conjunto de números naturais é {1, 2, 3, 4, 5, ...}. Removemos os números naturais do conjunto dos inteiros para criar o conjunto descrito neste problema: {..., –4, –3, –2, –1, 0}. Este conjunto, que contém todos os inteiros negativos e o número 0, é descrito como conjunto de "números inteiros não positivos".

1.3 O número 0 é par ou ímpar? Positivo ou negativo? Justifique suas respostas.

Por definição, um número é par se não deixar resto ao ser dividido por 2. Para determinar se 0 é um número par, divida-o por 2: $0 \div 2 = 0$. (Note que 0 dividido por qualquer número real – exceto por 0 – é igual a 0.) O resultado, 0, não tem resto, então 0 é um número par.

Porém, 0 não é positivo nem negativo. Os números positivos são definidos como os números reais maiores que (mas não iguais a) 0, e os números negativos como os números reais menores que (mas não iguais a) 0; então 0 pode ser classificado apenas como "não positivo" ou "não negativo".



1.4 Identifique o menor número primo positivo e justifique sua resposta.

Números como o 8, que não são primos porque são divisíveis por muitas outras coisas, são chamados de "números compostos".

Um número é descrito como "primo" quando se puder ser dividido por qualquer número além dele próprio e do número 1 sem deixar resto. De acordo com essa definição, o número 8 não é primo, porque é igualmente divisível tanto pelo número 2 quanto pelo número 4. Porém, os números 2, 3, 5, 7 e 11 são primos, pois nenhum desses números é divisível por um valor diferente dele próprio e do 1 sem deixar resto. Note que o número 1 está visivelmente ausente dessa lista e não é um número primo.

Por definição, um número primo deve ser divisível por exatamente dois únicos valores, ele mesmo e o número 1. No caso do 1, esses dois valores são iguais e, portanto, não são únicos. Embora isso possa parecer um detalhe insignificante, exclui o 1 do conjunto de números primos; então, o menor número primo positivo é 2.

1.5 Liste as duas características mais frequentemente associadas a um número racional.

A característica fundamental de um número racional é poder ser expresso em forma de fração, um quociente de dois inteiros. Portanto, $\frac{2}{3}$ e $-\frac{8}{13}$ são exemplos de números racionais. Números racionais expressos em forma decimal apresentam um decimal finito (uma quantidade finita de valores após a vírgula decimal) ou uma dízima periódica (um padrão de dígitos que se repete infinitamente). Considere as seguintes representações decimais dos números racionais para entender melhor os conceitos de decimal finito e dízima periódica.

$$2\frac{3}{4} = 2{,}75 \qquad \text{decimal finito}$$

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666666\ldots = 0{,}\overline{6} \qquad \text{dízima periódica}$$

$$-\frac{8}{13} = -0{,}615384615384\ \ldots = -0{,}\overline{615384} \qquad \text{dízima periódica}$$

Pequenas barras como essas são usadas para indicar quais são os dígitos de uma dízima periódica que se repetem. Às vezes, alguns dígitos iniciais não se repetem, mas o número continua sendo racional. Por exemplo, $8{,}32\overline{04} = 8{,}32|04|04|04\ldots$ é um número racional.

1.6 A constante matemática irracional π às vezes é aproximada pela fração $\frac{22}{7}$. Explique por que essa aproximação não pode ser o valor exato de π.

Quando expandido a milhões, bilhões e até trilhões de casas decimais, os dígitos da representação decimal de π não se repetem de forma perceptível. Por ser igual a um decimal não finito, não periódico, π é um número irracional, e números irracionais não podem ser expressos em forma de frações.

1.7 Qual é maior, o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos? Explique sua resposta.

A combinação do conjunto dos números racionais com o conjunto dos irracionais produz o conjunto dos números reais. Em outras palavras, cada número real deve ser racional ou irracional. O conjunto de números complexos é muito maior do que o conjunto dos números reais, e o motivo é simples: todos os números reais são também números complexos. O conjunto dos números complexos é maior do que o conjunto dos números reais da mesma forma que o conjunto de seres humanos da Terra é maior do que o conjunto de homens da Terra. Todos os homens são humanos, mas nem todos os humanos são necessariamente homens. De forma semelhante, todos os números reais são complexos, mas nem todos os números complexos são reais.

Os números complexos serão posteriormente discutidos com mais detalhes neste livro, nos Problemas 13.37 a 13.44.

1.8 Liste os seguintes conjuntos de números em ordem crescente: números complexos, inteiros, irracionais, racionais, reais e naturais

Segundo o Problema 1.1, o único elemento que os números inteiros não negativos contêm e os números naturais excluem é o número 0.

Embora cada um desses conjuntos seja infinitamente grande, os tamanhos não são iguais. O menor conjunto é o de números naturais, seguido pelo de números inteiros não negativos, que tem exatamente um elemento a mais do que o de números naturais. A inclusão de inteiros negativos ao conjunto dos inteiros não negativos resulta no maior conjunto, o de números inteiros. O conjunto de números racionais é significativamente maior do que o de números inteiros, e o conjunto de números irracionais é significativamente maior do que o de números racionais. O conjunto de números reais pode ser maior do que o de números irracionais, pois todos os números irracionais são números reais. O conjunto de números complexos é ainda maior do que o de números reais, como explicado no Problema 1.7. Portanto, esta é a correta ordem (crescente) tamanho: números naturais, números inteiros não negativos, números inteiros, números racionais, números irracionais, números reais e números complexos.

Qualquer decimal infinitamente longo que não tenha padrão de dígitos repetidos representa um número irracional. Por outro lado, os decimais racionais são finitos ou são dízimas periódicas. Por haver muito mais maneiras para escrever os números irracionais em forma de decimais do que maneiras de escrever números racionais em forma de decimais, existem muito mais números irracionais do que racionais.

1.9 Descreva o número 13, identificando os conjuntos de números aos quais pertence.

Como o 13 não tem decimal ou fração explícita, é um número inteiro. Todos os inteiros positivos também são números naturais. Ele não é divisível por 2, então é um número ímpar. Na verdade, 13 não é sequer divisível por nenhum outro número além do 1 e do 13, então é um número primo. Podemos expressar o 13 como uma fração $\left(\frac{13}{1}\right)$, então 13 é um número racional. Portanto, 13 é também um número real e um número complexo. Concluindo, 13 é um número ímpar, primo, natural, inteiro, racional, real e complexo.

1.10 Descreva o número $-\frac{2}{9}$ identificando os conjuntos aos quais pertence.

Como $-\frac{2}{9}$ é menor do que 0 (isto é, está à esquerda do número 0 em uma reta numérica), é um número negativo. É uma fração, então, por definição, é um número racional e, portanto, é também um número real e complexo.

Qualquer número dividido por ele próprio é igual a 1, portanto $\frac{13}{1}=13\div1=13$.

Expressões Contendo Números com Sinais

Somar, subtrair, multiplicar e dividir números positivos e negativos

1.11 Simplifique a expressão: 16 + (–9).

Essa expressão contém sinais adjacentes ou "duplos", dois sinais juntos. Para simplificar essa expressão, você deve converter os dois sinais em um único. O método é simples: se os dois sinais em questão forem diferentes, substitua-os por um único sinal negativo; se os sinais forem iguais (sejam eles positivos ou negativos), substitua-os por um único sinal positivo.

Neste problema, os sinais são diferentes, "+ –", então você deve substituí-los p um único sinal negativo: –.

$$16+(-9)=16-9$$
$$=7$$

Alguns livros de álgebra colocam os sinais de positivo e negativo mais para cima ou mais para baixo, assim: 16 + ⁻9. Lamento, mas isso é esquisito. É perfeitamente correto transformar esse minúsculo sinal voador em um sinal normal: 16 + −9.

Pense da seguinte maneira: se os dois sinais concordarem entre si (se ambos forem positivos ou negativos), isso é bom, algo POSITIVO. Por outro lado, quando os dois sinais não concordarem entre si (um for positivo e outro negativo), isso não será bom. Será NEGATIVO.

1.12 Simplifique a expressão: –5 – (+6).

Essa expressão contém os sinais "– +" juntos. Conforme explicado no Problema 1.11, o sinal duplicado deve ser reescrito como um único sinal. Como os sinais são diferentes, devem ser substituídos por um único sinal negativo.

$$-5-(+6)=-5-6$$

Para simplificar, a expressão –5 – 6, ou qualquer expressão que contenha números com sinais, pense em termos de pagamentos e dívidas. Cada número negativo significa dinheiro que você deve e cada número positivo, dinheiro que você recebe. Seguindo essa analogia, –5 – 6 seria interpretado como uma dívida de R$ 5,00 seguida por uma dívida de R$ 6,00, já que ambos os números são negativos. Portanto, –5 – 6 = –11, uma dívida total de R$ 11,00.

1.13 Simplifique a expressão: 4 – (–5) – (+10).

Essa expressão contém dois conjuntos de sinais adjacentes ou "duplos": " – – " entre os números 4 e 5 e " – + " entre os números 5 e 10. Substitua os sinais iguais por um único + e os sinais diferentes por um único –.

$$4-(-5)-(+10)=4+5-10$$

Simplifique a expressão da esquerda para a direita, começando por 4 + 5 = 9.

$$4+5-10=9-10$$

Há outra técnica que pode ser usada para somar e subtrair números com sinais. Se os dois números tiverem sinais diferentes (como 9 e −10), subtraia-os (10 − 9 = 1) e use o sinal do número maior (10 > 9, então use o sinal negativo do número 10 para ter −1 como resultado, em vez de 1). Se os sinais dos números forem os mesmos, então some-os e use o sinal que compartilham. Em outras palavras, para simplificar −12 − 4, some 12 e 4 (que resulta em 16) e, então, coloque diante do resultado o sinal negativo de ambos os números: −16.

Para simplificar 9 – 10 usando a analogia dos pagamentos e dívidas do Problema 1.12, 9 representa R$ 9,00 em dinheiro e –10 representa R$ 10,00 em dívidas. O resultado líquido seria uma dívida de R$ 1,00, portanto 9 – 10 = –1.

1.14 Simplifique a expressão: 6 × (–3).

A escolha do sinal a ser usado ao multiplicar ou dividir números funciona de forma muito semelhante ao método descrito no Problema 1.11 para eliminar sinais duplos. Quando dois números de mesmo sinal são multiplicados, o resultado é sempre positivo. Porém, se multiplicarmos dois números com sinais diferentes, o resultado será sempre negativo.

Nesse caso, pedimos que você multiplique os números 6 e –3. Como um é positivo e o outro negativo (ou seja, os sinais são diferentes), o resultado deve ser negativo.

$$6 \times (-3) = -18$$

Você também poderia escrever $-16 \div (-2) = +8$, mas NÃO É NECESSÁRIO escrever o sinal de + na frente de um número positivo. Se um número não tem sinal diante dele, isso significa que é positivo.

1.15 Simplifique a expressão: –16 ÷ (–2).

Quando dividimos números com sinais, o sinal do resultado mais uma vez dependerá dos sinais dos números envolvidos. Se os números tiverem o mesmo sinal, o resultado será positivo; se os números tiverem sinais diferentes, o resultado será negativo. Nesse caso, ambos os números da expressão, –16 e –2, têm sinal igual, portanto, o resultado será positivo: $-16 \div (-2) = 8$.

1.16 Simplifique a expressão: (3) (–3) (4) (–4)

Multiplique os números com sinais trabalhando da esquerda para a direita. Dessa forma, multiplicando apenas dois números de cada vez, você poderá aplicar a técnica descrita no Problema 1.14 para determinar o sinal de cada resultado. Os dois números mais à esquerda são 3 e –3; como têm sinais diferentes, a multiplicação resultará em um número negativo: (3) (–3) = –9.

$$(3)(-3)(4)(-4) = (-9)(4)(-4)$$

Não há sinal de multiplicação entre (3) e (–3), então como saber se devemos multiplicá-los? Essa é uma regra "não escrita" da álgebra. Quando duas quantidades estão escritas uma ao lado da outra sem nenhum sinal que as separe, fica implícito que se trata de uma multiplicação. Isso significa que coisas como 4(9), 10y e xy são problemas de multiplicação.

Multiplique novamente os números da extrema esquerda. Os sinais de –9 e de 4 são diferentes, então o resultado é negativo: (–9) (4) = –36.

$$(-9)(4)(-4) = (-36)(-4)$$

Ambos os números restantes são negativos; como os sinais são iguais, multiplicá-los resultará em um número positivo.

$$(-36)(-4) = 144$$

1.17 Simplifique a expressão: 4 – |9|.

As barras envolvendo o número 9 nessa expressão representam um valor absoluto. Calcular o valor absoluto de um número com sinal é uma questão trivial – basta tornar positivo o número entre as barras de valor absoluto e, então, removê-las da expressão. Nesse caso, o número entre a notação de valor absoluto já é positivo, então, permanece inalterado.

$$4-|9|=4-9$$

Você ficou com dois números com sinais para combinar: +4 e –9. De acordo com a técnica descrita no Problema 1.11, combinar R$ 4,00 em bens com R$ 9,00 em dívidas tem um resultado líquido de R$ 5,00 em dívidas: 4 – 9 = –5.

As barras de valor absoluto são os antidepressivos do mundo matemático. Elas tornam positivo tudo que há entre elas. Para dizer de forma mais precisa, removem o sinal negativo do número que está entre elas. Isso significa que $|-2| = 2$. Porém, as linhas que alteram o humor não têm efeito sobre números positivos: $|7| = 7$.

1.18 Simplifique a expressão: |–10|– 14.

O valor absoluto de um número negativo, nesse caso –10, é o oposto do número negativo: |–10| = 10.

$$\begin{aligned}|-10|-14&=10-14\\&=-4\end{aligned}$$

1.19 Simplifique a expressão: –|5|–|–5|.

Se este problema não tivesse barras de valor absoluto e usasse parênteses no lugar delas, a abordagem seria completamente diferente.
A expressão –(5) – (–5) tem o sinal duplo "– –", que deve ser eliminado usando a técnica descrita nos Problemas 1.11 a 1.13. Porém, as barras de valor absoluto são tratadas de forma diferente da dos parênteses; então, esta expressão tecnicamente não contém sinais duplos. Comece calculando os valores absolutos: |5| = 5 e |–5| = 5.

$$\begin{aligned}-|5|-|-5|&=-(5)-(+5)\\&=-5-5\\&=-10\end{aligned}$$

Os valores absolutos são simples quando há só um número dentro. Se o número for negativo, torne-o positivo e retire as barras de valor absoluto. Se o número já for positivo, deixe-o em paz e apenas tire as barras.

Bem, a expressão AINDA não tem sinais duplo. Logo, terá.

Viu? Aqui está o sinal duplo. Quando $|-5|$ se transformou em (+5), o sinal negativo diante dos valores absolutos não sumiu. No próximo passo, você elimina o sinal duplo "– +" para obter –5 – 5.

1.20 Simplifique a expressão: |2|–|–7|+|–5|–|9|.

Não elimine os sinais duplos desta expressão até ter cuidado dos valores absolutos.

$$\begin{aligned}|2|-|-7|+|-5|-|9| &= 2-(+7)+(+5)-(+9)\\ &= 2-7+5-9\end{aligned}$$

Combine os números com sinais de dois em dois, trabalhando da esquerda para a direita. Comece com 2 – 7 = –5.

–5 + 5 = 0

$$\begin{aligned}2-7+5-9 &= -5+5-9\\ &= 0-9\\ &= -9\end{aligned}$$



1.21 Simplifique a expressão: |3+(–16) – (–9)|.

Este problema contém o valor absoluto de toda uma *expressão*, não apenas de um único número. Nesses casos, não podemos simplesmente remover os sinais negativos de cada termo da expressão, em vez disso, devemos *primeiro* simplificar a expressão para depois termos o valor absoluto do resultado.

Para simplificar a expressão 3 + (–16) – (–9), devemos eliminar os sinais duplicados para, então, combinar os números um de cada vez, da esquerda para a direita.

$$\begin{aligned}|3+(-16)-(-9)| &= |3-16+9|\\ &= |-13+9|\\ &= |-4|\\ &= 4\end{aligned}$$

Símbolos de Agrupamento

Quando números estiverem agrupados, lide primeiro com eles

Por enquanto, os parênteses e outros símbolos de agrupamento dirão que partes do problema deverão ser solucionadas primeiro. Quando não houver parênteses para ajudar, você precisará aplicar algo conhecido como "ordem das operações", tratada nos Problemas 3.30 a 3.39.

1.22 Simplifique a expressão: (3×7) + 10.

Quando partes de uma expressão estiverem contidas dentro de um grupo de símbolos – como parênteses (), colchetes [] e chaves {} –,simplifique-as primeiro, não importando em que lugar da expressão estejam. Nesta expressão, 3×7 está entre parênteses, então multiplique esses números: 3×7 = 21.

$$\begin{aligned}(3\times 7)+10 &= 21+10\\ &= 31\end{aligned}$$

1.23 Simplifique a expressão: 3 × (7+10)

A única diferença entre essa expressão e o Problema 1.22 é a colocação dos parênteses. Dessa vez, a expressão 7 + 10 está entre os símbolos de agrupamento e deve ser simplificada primeiro.

$$\begin{aligned}3\times(7+10) &= 3\times(17)\\ &= 51\end{aligned}$$

Comparando essa solução com a do Problema 1.22, fica claro que a colocação dos parênteses na expressão teve um impacto significativo.

1.24 Simplifique a expressão: $[19+(-11)]\div 2$.

Embora essa expressão contenha parênteses e colchetes, estes são, tecnicamente, os únicos símbolos de agrupamento presentes; os parênteses ao redor do –11 só estão ali por questões de notação. Simplifique primeiro a expressão entre colchetes.

$$\begin{aligned}[19+(-11)]\div 2 &= [19-11]\div 2\\ &= 8\div 2\\ &= 4\end{aligned}$$

Sinais duplos, como os da expressão 19 + (−11), já são bastante feios; todavia, é ainda mais feio escrever os sinais um ao lado do outro, assim: 19 + − 11. Se você voltar aos Problemas 1.11 a 1.13, perceberá que o segundo número com sinal está sempre colocado entre parênteses nos casos em que deixá-lo de fora faça com que os dois sinais fiquem juntos.

1.25 Simplifique a expressão: $[30\div(3\times 5)]-4$.

Essa expressão contém dois conjuntos aninhados de símbolos de agrupamento, colchetes e parênteses. Quando uma expressão agrupada estiver contida dentro de outra, sempre simplifique primeiro a expressão mais interna e trabalhe de dentro para fora. Nesse caso, deve ser simplificada primeiro a expressão entre parênteses (3×5).

$$[30\div(3\times 5)]-4 = [30\div 15]-4$$

Ainda há uma expressão agrupada dentro desta, que será a próxima a ser simplificada.

$$\begin{aligned}[30\div 15]-4 &= 2-4\\ &= -2\end{aligned}$$

"Aninhado" significa que uma expressão está dentro de outra. Nesse caso, (3×5) está aninhada dentro da expressão entre colchetes [30×(3×5)], pois a expressão entre parênteses também está entre colchetes. Expressões aninhadas são como aquelas bonecas russas em formato de ovo. Sabe quais são? Quando você abre uma das bonecas, há outra menor dentro.

1.26 Simplifique a expressão: $\dfrac{6+10}{14-8}$.

Os símbolos de agrupamento não se limitam aos parênteses, colchetes e chaves. Embora não contenha qualquer dos elementos mencionados, essa fração consiste em duas expressões agrupadas. Trate o numerador $(6 + 10)$ e o denominador $(14 - 8)$ como expressões individuais e simplifique-as separadamente.

$$\frac{6+10}{14-8} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

Se você não tiver certeza sobre como $\frac{16}{6}$ se transformou em $\frac{8}{3}$, divida os números da parte de cima e de baixo da fração por 2: 16÷2 = 8 e 6÷2 = 3. Esse processo é chamado de "simplificação" ou "redução" da fração e será explicado nos Problemas 2.11 a 2.17.

1.27 Simplifique a expressão: $\dfrac{3-12}{|-14|-5}$.

O "numerador" é a parte de cima da fração e o "denominador", a parte de baixo.

Assim como o Problema 1.26, essa expressão fracionária tem, por definição, dois grupos implícitos: o numerador e o denominador. Porém, ainda contém um segundo símbolo de agrupamento: as barras de valor absoluto. A expressão de valor absoluto está aninhada no denominador; então, simplifique primeiro a expressão mais interna.

$$\frac{3-12}{|-14|-5}=\frac{3-12}{14-5}$$

Agora, simplifique separadamente o numerador e o denominador.

$$\frac{3-12}{14-5}=\frac{-9}{9}$$

Qualquer número dividido por ele próprio é igual a 1, então $\dfrac{9}{9}=1$, mas, observe que o numerador é negativo. De acordo com o Problema 1.15, quando números com sinais diferentes são divididos, o resultado é negativo.

$$\frac{-9}{9}=-1$$

1.28 Simplifique a expressão: $\left|\dfrac{4-3+6}{1-8}\right|-|-2|$.

De acordo com o fim do Problema 1.27, ao dividir um número por seu oposto (como 7 e −7), obtemos −1.

Essa expressão consiste em duas expressões de valor absoluto separadas que são subtraídas uma da outra. A expressão fracionária da esquerda requer maior atenção; então, comece simplificando-a.

$$\begin{aligned}\left|\frac{4-3+6}{1-8}\right|-|-2| &= \left|\frac{1+6}{1-8}\right|-|-2| \\ &= \left|\frac{7}{-7}\right|-|-2| \\ &= |-1|-|-2|\end{aligned}$$

Agora que a fração está em um formato mais manejável, determine os dois valores absolutos da expressão.

$$\begin{aligned}|-1|-|-2| &= 1-(+2) \\ &= 1-2 \\ &= -1\end{aligned}$$



1.29 Simplifique a expressão: $\{[8-(3+|-1|)]+2\}$.

Três, se não contarmos $|-1|$ como grupo (porque tem apenas um número dentro). Quatro, se o contarmos.

Esse problema contém várias expressões aninhadas – chaves que contêm colchetes, que contêm parênteses que, por sua vez, contêm um valor absoluto. Comece pela mais interna delas, a expressão de valor absoluto.

$$\{[8-(3+|-1|)]+2\}=\{[8-(3+1)]+2\}$$

A expressão mais interna rodeada pelos símbolos de agrupamento agora é $(3 + 1)$; então, simplifique-a em seguida.