27 NÚMEROS COMPLEXOS I

A UNIDADE IMAGINÁRIA

Neste capítulo, começaremos a estudar um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos. Para tal, é de suma importância que entendamos o intuito a se criar um novo conjunto numérico. Observe a equação do segundo grau abaixo:

$x^2 - 2x + 5 = 0$

Para resolvê-la, calcularemos o valor de Δ.

$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(5) = 4 - 20 = -16$

Encontramos um valor negativo para Δ, o que significa que esta equação não possui solução no conjunto dos números reais. Para que possamos identificar uma ou mais soluções em situações tais como esta, é elaborada a unidade imaginária, representada pela letra i. Seu valor será igual a $\sqrt{-1}$. Assim, temos que $i^2 = -1$. Voltando ao cálculo de Δ, teremos:

$\Delta = -16 = 16.(-1) = 16i^2$

Assim, continuaremos a resolução desta equação com a Fórmula de Báskara:

$x = \frac{2 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \rightarrow x = 1 \pm 2i$

A solução desta equação será dada por S = {1 + 2i, 1 – 2i}

FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Como pudemos perceber a partir das raízes da equação do segundo grau resolvida anteriormente, temos que um número complexo possui uma parte real e uma parte imaginária:

$z = a + b.i$

a → parte real

b → coeficiente da parte imaginária

IGUALDADE

Consideraremos dois números complexos como iguais quando ambos apresentarem a mesma parte real, o mesmo acontecendo com os coeficientes da parte imaginária. Assim, teremos:

Se $z_1 = a + b.i$ e $z_2 = c + d.i$ e $z_1 = z_2 \rightarrow a = c$ e $b = d$.

REAL PURO

Um número complexo é denominado como real puro quando não há parte imaginária, ou seja, quando o coeficiente da parte imaginária é 0, isto é, b = 0. Assim, comprovamos que todos os números reais são números complexos. Em outras palavras, o conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos.

IMAGINÁRIO PURO:

Um número complexo é denominado por imaginário puro quando só existe em sua composição uma parte imaginária. Assim, a parte real será nula, ou seja, a = 0. Além disso, para assegurar que existe uma imaginária, temos que b deve ser diferente de zero, ou seja, b ≠ 0.

CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Denominamos por conjugado de um número complexo ($\bar{z}$), aquele número que possuirá a mesma parte real que o número complexo inicial, apresentando, porém, uma parte imaginária de mesmo módulo que o inicial, porém com o sinal invertido. Assim, teremos:

Se $z = a + bi \rightarrow \bar{z} = a - b.i$

OPERAÇÕES ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

SOMA/SUBTRAÇÃO:

Para resolver estes tipos de operações, devemos resolver as operações isolando o raciocínio da parte real em relação ao raciocínio da parte imaginária. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Sendo i a unidade imaginária, se $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 2 + 7i$ e $z_3 = 4i - 3$, determine o valor de $z_1 + z_2 - z_3$.

$z_1 + z_2 - z_3 = (3 + 5i) + (2 + 7i) - (4i - 3)$

$z_1 + z_2 - z_3 = 3 + 5i + 2 + 7i + 3 - 4i$

$z_1 + z_2 - z_3 = (3 + 2 + 3) + (5 + 7 - 4)i$

$z_1 + z_2 - z_3 = 8 + 8i$

MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO REAL:

Quando multiplicamos um número complexo por um número real, devemos fazer a multiplicação deste número real pela parte real e pela parte imaginária, em um produto que será resolvido com a propriedade distributiva. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Sendo i a unidade imaginária, se $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 6 - 2i$, determine o valor de $3.z_1 - 2.z_2$.

$3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = 3 \cdot (3 + 4i) - 2 \cdot (6 - 2i)$

$3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4i - 2 \cdot (6) - 2.(-2i)$

$3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = 9 + 12i - 12 + 4i$

$3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = (9 - 12) + (12 + 4).i$

$3 \cdot z_1 - 2 \cdot z_2 = -3 + 16i$

MULTIPLICAÇÃO ENTRE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS

Quando multiplicamos um número complexo por outro, devemos fazer uso da propriedade distributiva da multiplicação, ou seja, devemos multiplicar a parte real do primeiro número pela parte real e pela parte imaginária do segundo número. Também devemos multiplicar a parte imaginária do primeiro número pela parte real e pela parte imaginária do segundo número. Lembre-se de que $i = \sqrt{-1}$ e que consequentemente, $i^2 = -1$. que Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Sendo i a unidade imaginária, se $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 - i$, determine o valor do produto $z_1.z_2$.

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i).(4 - i)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot (4) + 3 \cdot (-i) + 2i \cdot (4) + 2i \cdot (-i)$

$z_1 \cdot z_2 = 12 - 3i + 8i - 2i^2$

$z_1 \cdot z_2 = 12 - 3i + 8i - 2.(-1)$

$z_1 \cdot z_2 = 12 - 3i + 8i + 2$

$z_1 \cdot z_2 = (12 + 2) + (-3 + 8).i$

$z_1 \cdot z_2 = 14 + 5i$

DIVISÃO ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Para efetuar a divisão entre dois números complexos, devemos lembrar que o valor da unidade imaginária é $\sqrt{-1}$ e proceder com um processo análogo a uma racionalização de denominadores. Assim, multiplicaremos o numerador e o denominador da fração que representa a divisão dada pelo conjugado do denominador. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo: Sendo i a unidade imaginária, se $z_1 = 8 + 4i$ e $z_2 = 1 + i$, determine o valor de $\frac{z_1}{z_2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(8+4i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+4i-8i-4i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8+4i-8i+4}{1-(-1)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12-4i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 6 - 2i$$

POTÊNCIAS DA UNIDADE IMAGINÁRIA

Quando desenvolvemos potências tendo por base a unidade imaginária, encontramos uma sequência. Observe:

$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i^1 \cdot i^4 = (i) \cdot (1) = i$
$i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot (1) = -1$
$i^7 = i^3 \cdot i^4 = (-i) \cdot (1) = -i$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1) \cdot (1) = 1$

Assim, percebemos que os resultados acontecem em ciclos de 4 potências. (i, -1, -i, 1). Assim, para encontrar o valor de uma potência de base i cujo expoente é um número natural de maior valor, efetuamos a divisão deste valor por 4.

- Se o resto for igual a 1, tal potência é igual a i^1, ou seja, i.
- Se o resto for igual a 2, tal potência é igual a i^2, ou seja, -1.
- Se o resto for igual a 3, tal potência é igual a i^3, ou seja, -i.
- Se o resto for igual a 0, tal potência é igual a i^4, ou seja, 1.

Desta forma, ao calcular o valor de i^{2021}, temos que o resto da divisão do expoente 2021 por 4 ser 1. Assim:

$i^{2021} = i^1 = i$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (CONSCAM) Sejam $z = 5 - 3.i$ e $w = 10 + 8.i$, o número complexo resultante de $\bar{z} + w$ é:

a) 15 + 5i
b) 15 + 11i
c) 15 – 6i
d) 15
e) 15i

Resolução: B

Temos que de $\bar{z} = 5 + 3i$. Assim, o valor de $\bar{z} + w$ é igual:

$\bar{z} + w = (5 + 3i) + (10 + 8i)$
$\bar{z} + w = (5 + 10) + (3 + 8)i$
$\bar{z} + w = 15 + 11i$

02. (CONSESP) Assinale a alternativa que apresenta o valor de $(13 + 39i)^2$.

a) 1352 – 1014i
b) 1014 – 1352i
c) -1352 + 1014i
d) -1014 + 1352i

Resolução: C

Temos que:

a) $(13 + 39i)^2 = (13 + 39i).(13 + 39i)$
b) $(13 + 39i)^2 = 169 + 507i + 507i\ 1521i^2$
c) $(13 + 39i)^2 = 169 + 507i + 507i - 1512$
d) $(13 + 39i)^2 = -1352 + 1014i$ (Alternativa C)

03. (UNITAU) A expressão $i^{13} + i^{15}$ é igual a:

a) 0
b) i
c) – i
d) - 2i
e) 3i

Resolução: A

Temos que a divisão de 13 e de 15 por 4 resultam em restos iguais a 1 e a 3, respectivamente. Assim, temos que:

$i^{13} = i^1 = i$ e $i^{15} = i^3 = -i$

O valor da expressão será:

$i^{13} + i^{15} = i + (-i) = i - i =$ **0**

04. (UEL) A forma algébrica do número complexo $z = \frac{(1+3i)}{(2-i)}$ é:

a) 1/2 - 3i
b) 5/3 + (7i/3)
c) -1/5 + (7i/5)
d) -1/5 + 7i
e) 3/5 + (4i/5)

Resolução: C

Faremos a divisão a partir da multiplicação do numerador e do denominador desta fração pelo conjugado do denominador. Assim:

$$z = \frac{(1+3i)}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)}$$

$$z = \frac{2+i+6i+3i^2}{4-i^2}$$

$$z = \frac{2+i+6i-3}{4-(-1)}$$

$$z = \frac{-1+7i}{5} \rightarrow$$ **z = -1/5 + (7i/5) (Alternativa C)**