25 NÚMEROS BINOMIAIS E TRIÂNGULO DE PASCAL

NÚMEROS BINOMIAIS:

São os números oriundos das combinações, que foram apresentadas na teoria de Análise Combinatória. Vamos relembrar da fórmula, em que teremos n como o universo e p como a parte desejada deste universo. Além disso, teremos uma nova notação para este cálculo. Observe:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Devemos estar atentos para que no uso desta fórmula trabalhemos sempre com valores naturais para n e para p, de modo que n ≥ p. Observe alguns exemplos:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6\cdot5\cdot4!}{2\cdot4!} = \frac{6\cdot5}{2} = 3\cdot5 = 15$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{6\cdot4!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 7\cdot5 = 35$$

Lembrando do fato de que 0! = 1 e 1! = 1, podemos destacar números binomiais importantes:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Dois binomiais complementares são aqueles que possuem o mesmo universo e cuja soma entre as partes resulta neste universo em comum. No exemplo abaixo, faremos o cálculo de dois números binomiais complementares. Observe:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{3!6!} = \frac{9\cdot8\cdot7}{6} = 3\cdot4\cdot7 = 84$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{6!3!} = \frac{9\cdot8\cdot7}{6} = 3\cdot4\cdot7 = 84$$

Pelo exemplo anterior, percebemos que trabalhamos com dois números binomiais complementares, visto que ambos têm universo igual a 9 e possuem partes iguais a 3 e a 6, que somam 9 (universo). Além disso, pudemos perceber que seus cálculos gerarão o mesmo resultado. Desta forma, para p + q = n, teremos:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

Exemplo: Determine os possíveis valores naturais na equação binomial abaixo:

$$\binom{12}{p+1} = \binom{12}{5}$$

Estes números binomiais podem ser iguais, ou seja, podem ter o mesmo valor para suas partes:

p + 1 = 5 → p = 4

Estes números binomiais podem ser complementares, visto que possuem o mesmo universo:

p + 1 + 5 = 12 → p + 6 = 12 → p = 6

Logo, os possíveis valores p são 5 e 6.

TRIÂNGULO DE PASCAL:

É uma importante ferramenta matemática que reúne os números binomiais. Nela, teremos em cada linha os números binomiais de determinado universo. Começaremos com o universo 0, posteriormente utilizaremos o universo 1, o universo 2 e assim sucessivamente. Observe a construção das primeiras linhas desta ferramenta:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Resolvendo os cálculos das primeiras linhas do Triângulo de Pascal, teremos:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

SOMAS DOS ELEMENTOS DE UMA LINHA DO TRIÂNGULO DE PASCAL:

Percebemos que a partir de uma determinada linha do triângulo de Pascal podemos utilizar uma propriedade para se alcançar a soma de seus resultados. Observe alguns exemplos:

$$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 2 + 1 = 2^2$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Assim, podemos concluir que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

RELAÇÃO DE STIFEL:

Para facilitar os cálculos dos elementos das próximas linhas do Triângulo de Pascal, temos esta importante propriedade que nos permite não fazer os cálculos da combinação. Na criação do Triângulo de Pascal, temos que a soma de dois elementos consecutivos de uma linha terá como resultado o binomial que aparecerá exatamente abaixo do segundo binomial somado. Observe alguns exemplos:

$$\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6 = \binom{4}{2}$$

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}$$

Assim, podemos formular tal relação abaixo:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Assim, é possível descrever as próximas linhas do Triângulo de Pascal. Observe:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

BINÔMIO DE NEWTON:

Com importante contribuição matemática, foram desenvolvidas potências binomiais, que desenvolveram, por exemplo, alguns produtos notáveis. Imagine um binômio a + b, em que a ≠ - b. Trabalharemos com as potências deste binômio, criando um padrão para que possamos desenvolver futuros cálculos:

$(a + b)^0 = 1 \cdot a^0 \cdot b^0$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 \cdot b^0 + 2 \cdot a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^0 \cdot b^2$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 \cdot b^0 + 3 \cdot a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot a^0 \cdot b^3$

$(a + b)^4 = 1 \cdot a^4 \cdot b^0 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a^3 \cdot b^1 + 1 \cdot a^0 \cdot b^4$

A partir destes desenvolvimentos apresentados, percebemos que:

- Os coeficientes dos termos desenvolvidos são oriundos de uma mesma linha do Triângulo de Pascal, mais precisamente da linha cujo universo é igual ao expoente do binômio.
- No desenvolvimento de cada potência, o expoente do primeiro monômio começará no primeiro termo com expoente igual ao expoente do binômio e decairá ao longo dos termos até o expoente zero, no último termo da expansão.
- No desenvolvimento de cada potência, o expoente do segundo monômio começará no primeiro termo igual a zero e aumentará ao longo dos termos até alcançar o expoente igual ao expoente do binômio, no último termo da expansão.

Assim, é possível criar para a expansão do binômio $(a + b)^n$ o seguinte desenvolvimento:

$(a + b)^n =$

$$\binom{n}{0} \cdot a^{n-0} \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n} .a^{n-n}.b^n$$

TERMO GERAL DO BINÔMIO DE NEWTON:

Note que no desenvolvimento de um binômio com expoente n, teremos n + 1 termos. Assim, podemos determinar o valor de cada um destes termos desta expansão. Isto será possível devido à expressão anteriormente apresentada. Teremos, a partir de $(a + b)^n$:

$$t_{p+1} = \binom{n}{p} .a^{n-p}.b^p$$

SOMA DOS COEFICIENTES DO DESENVOLVIMENTO DE UM BINÔMIO:

Para determinar a soma dos coeficientes de todos os termos que são encontrados a partir do desenvolvimento de um binômio, podemos criar um cálculo a partir do qual substituímos cada valor literal pelo número 1, estruturando nosso raciocínio em um único cálculo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Determine a soma dos coeficientes de todos os termos encontrados na expansão do binômio $(3x^2 - 4y)^{12}$.

Resolução:

Para encontrar esta soma de coeficientes, devemos utilizar x = y = 1. Assim:

$S_{COEF} = [3 \cdot (1)^2 - 4 \cdot (1)]^{12}$

$S_{COEF} = (3 \cdot 1 - 4)^{12}$

$S_{COEF} = (3 - 4)^{12}$

$S_{COEF} = (-1)^{12} =$ **1**

02. A partir da expansão do binômio $(2x + 3)^6$ a partir de potências decrescentes de x, determine o coeficiente numérico do 4º termo.

Resolução:

Como queremos encontrar o coeficiente do 4º termo, temos que o índice p + 1 deve ser igual a 4. Assim, teremos: p + 1 = 4 → p = 3

Teremos, a partir da fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton:

$$t_{3+1} = \binom{6}{3} \cdot (2x)^{6-3} \cdot (3)^3$$

$t_4 = 20 \cdot (2x)^3 \cdot (27)$

$t_4 = 20 \cdot 8x^3 \cdot 27$

$t_4 = 4 \cdot 320x^3$

Como foi pedido o coeficiente, teremos: **4.320**

03. (CESGRANRIO) O coeficiente de x^4 no polinômio $P(x) = (x + 2)^6$ é:

a) 64 b) 60 c) 12 d) 4 e) 24

Resolução: B

Como não sabemos qual será o termo que tem como parte literal x^4, começaremos a substituição na fórmula do termo geral fazendo todas os ajustes, sem identificar o valor de p. Observe:

$$t_{p+1} = \binom{6}{p} \cdot (x)^{6-p} \cdot (2)^p$$

A parte literal deste desenvolvimento será x^{6-p}, de forma que devemos ter x^4. Assim:

$6 - p = 4 \rightarrow p = 2$

Teremos, a partir disto:

$$t_{2+1} = \binom{6}{2} \cdot (x)^{6-2} \cdot (2)^2$$

$t_{2+1} = 15 \cdot x^4 \cdot 4$

$t_{2+1} = 60x^4$

Como a questão pediu, o coeficiente deste termo, teremos: **60**

04. (UEBA) No desenvolvimento do binômio $\left(2x - \frac{y}{2}\right)^8$, o coeficiente do termo médio é:

a) −224 b) −70 c) −28 d) 28 e) 70

Resolução: E

Teremos no desenvolvimento deste binômio, que possui expoente 8, um total de 9 termos. Como a questão nos pede o coeficiente do termo médio, devemos pensar no 5° termo. Assim, teremos:

$$p + 1 = 5 \rightarrow p = 4$$

O desenvolvimento deste termo será:

$$t_{4+1} = \binom{8}{4} \cdot (2x)^{8-4} \cdot \left(\frac{-y}{2}\right)^4$$

$$t_5 = 70 \cdot (2x)^4 \cdot \frac{y^4}{16}$$

$$t_5 = 70 \cdot 16x^4 \cdot \frac{y^4}{16}$$

$$t5 = 70 \cdot x^4 \cdot y^4$$

Como a questão nos pede o coeficiente deste termo, teremos: 70

ANOTAÇÕES