COMITÉ DE REDACCIÓN

Presidente
Sr. D. Martín Aleñar Ginard
Teniente General (R) del Ejército de Tierra

Vocales
Sr. D. Eduardo Avanzini Blanco
General de Brigada Ingeniero del Ejército del Aire

Sr. D. Carlos Casajús Díaz
Vicealmirante Ingeniero de la Armada

Sr. D. Luis García Pascual
Vice-Rector de Investigación y Postgrado de la UPCO

Sr. D. Javier Marín San Andrés
Director General de Navegación Aérea

Sr. D. Ricardo Torrón Durán
General de Brigada Ingeniero del Ejército de Tierra

Sr. D. Alberto Sols Rodríguez-Candela
Ingeniero de Sistemas. Isdefe

Sra. Dña. Mª Fernanda Ruiz de Azcárate Varela
Imagen Corporativa. Isdefe

Otros títulos publicados:

1. Ingeniería de Sistemas. *Benjamin S. Blanchard.*
2. La Teoría General de Sistemas. *Ángel A. Sarabia.*
3. Dinámica de Sistemas. *Javier Aracil.*
4. Dinámica de Sistemas Aplicada. *Donald R. Drew.*
5. Ingeniería de Sistemas Aplicada. Isdefe.
6. CALS (Adquisición y apoyo continuado durante el ciclo de vida). *Rowland G. Freeman III.*
7. Ingeniería Logística. *Benjamin S. Blanchard.*

Isdefe
Ingeniería de Sistemas

c/ Edison, 4
28006 Madrid
Teléfono (34-1) 411 50 11
Fax (34-1) 411 47 03
E-mail: monografias@isdefe.es

P.V.P.: 1.000 Ptas.
(IVA incluido)

8

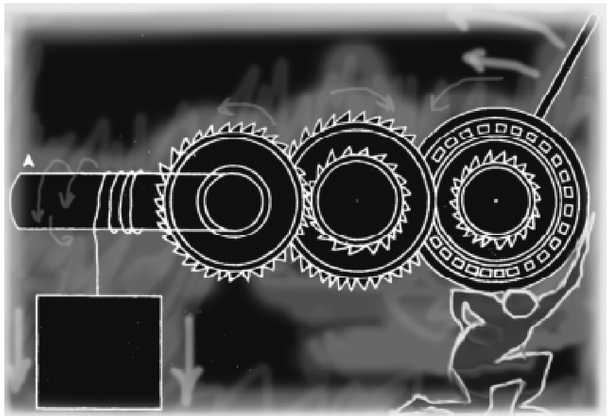
FIABILIDAD. *Joel A. Nachlas*

Publicaciones de Ingeniería de Sistemas

FIABILIDAD

por

Joel A. Nachlas



Isdefe

8



Joel A. Nachlas

Es Profesor Asociado de Ingeniería Industrial y de Sistemas en Virginia Tech, donde imparte clases desde 1974. Recibió el B.E.S. y el Ph. D. (1975) de la Universidad de Pittsburgh. Sus principales intereses de enseñanza e investigación están en la aplicación de la probabilidad y la estadística a problemas de fiabilidad y control de calidad. Su trabajo de fiabilidad de sistemas microelectrónicos se ha desarrollado en colaboración y bajo el patrocinio de IBM, INTELSAT y Bull, entre otros. Parte de su trabajo mereció el P.K. McElroy Award en 1990.

En Virginia Tech es el coordinador del área de Investigación Operativa, y es el entrenador principal del equipo masculino de Lacrosse de la universidad. Además es miembro del Comité Director del Reliability, Maintainability and Availability Symposium (RAMS) y es Editor Asociado del IEEE Transactions on Reliability Engineering. Es miembro de las asociaciones ASQC, IEEE, SRE e INFORMS.

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Engranajes de reducción para levantamiento de pesos de Hero, hacia el 60 d. C.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, por fotocopia, por registro o por otros métodos, sin el previo consentimiento por escrito de los titulares del Copyright.

Primera Edición: Noviembre - 1995
1.250 ejemplares

© Isdefe
c/ Edison, 4
28006 Madrid.

Diseño:
HB&h Dirección de arte y producción

Traducción:
Alison Canosa Uldall

Infografía de portada:
Salvador Vivas

Fotomecánica:
Microprint, S.A.

Impresión:
T. G. Forma, S.A.

ISBN: 84-89338-07-8
Depósito legal: M- -1995
Printed in Spain - Impreso en España.

PRÓLOGO

Una proporción muy grande de productos de consumo, industriales y militares que se fabrican en la actualidad tiene tal complejidad que sus usuarios no comprenden generalmente como funcionan ni como se reparan. También es verdad que las consecuencias de los fallos de muchos productos modernos pueden ser muy graves. Afortunadamente, a medida que se han desarrollado productos complejos, también se han desarrollado métodos para evaluar la fiabilidad de los mismos y para conseguir su mejora. El objetivo de este trabajo es describir los métodos principales de análisis de fiabilidad que existen en la actualidad.

Esta monografía tiene como finalidad servir de referencia para ingenieros que trabajan en el diseño y análisis de productos y sistemas. El énfasis de este estudio se centra en la descripción de los conceptos en los que se basa el análisis efectivo de fiabilidad, y en cómo estos conceptos fundamentales conducen a métodos eficaces. De esta forma, se pretende que el lector sea capaz de aplicar las ideas presentadas en cualquier aplicación concreta y nueva.

La presentación de los distintos temas que integran la ingeniería de fiabilidad refleja mi énfasis en una práctica científica rigurosa y en la restricción del uso de modelos probabilísticos a muestras homogéneas. El tratamiento se presenta también a un nivel intermedio de abstracción

analítica, de forma que sea accesible a ingenieros y a estudiantes de ingeniería.

El desarrollo de este estudio ha sido influenciado de manera significativa por mis estudiantes, cada uno de los cuales tuvo que sufrir con las versiones anteriores del manuscrito y con las discusiones del material presentado. C. Richard Cassady, Paul Murdock, Jr., Alfred Degbotse y Ariel Sepúlveda han hecho contribuciones notables.

Esta monografía forma parte de una serie que promete ser a la vez única y muy importante. Puesto que las monografías anteriores ya han sido publicadas, observo que la serie no tiene parangón tanto en su calidad como en su alcance. La serie ha sido idea de José Vicente Cebrián y ha estado eficazmente coordinada por Alberto Sols. La ayuda de Alberto en esta monografía fue sustancial, y le agradezco tanto su apoyo como el darme el privilegio de participar en la creación de la serie.

Para concluir, me gustaría manifestar que la fiabilidad es realmente un área de estudio muy interesante. Espero que el lector encuentre que la lectura de este material es tan interesante como ha sido para mí escribirlo. También espero que alguno de los lectores proceda luego a ampliar el ámbito de los conocimientos descritos aquí.



Joel A. Nachlas

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN 13

1.1. Definición básica 17
1.2. Funciones de estado 18
1.3. Coherencia 19

2. ESTRUCTURAS DE SISTEMAS 23

2.1. Estructuras básicas 24
2.2. Equivalencia estructural 29
2.3. Módulos de sistemas 36

3. FIABILIDAD BÁSICA 39

3.1. Una medida de fiabilidad 40
3.2. Acotaciones de fiabilidad 42
3.3. Importancia de fiabilidad 48
3.4. Asignación de fiabilidad 51
3.5. Forma de la función de fiabilidad 52

4. LA FIABILIDAD EN FUNCIÓN DEL TIEMPO 57

4.1. Medidas de fiabilidad 58
4.2. Distribuciones de vida 65

5. PROCESOS DE FALLO 73

5.1. Modelos de fallos mecánicos 74
5.2. Modelos de fallos electrónicos 77
5.3. Riesgos proporcionales 78
5.4. Aceleración de edad 79
5.5. Cribado 83
5.6. Crecimiento de la fiabilidad 84

6. MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE ESTIMACIÓN DE FIABILIDAD 87

6.1. Estimación no paramétrica 88
6.2. Censurado de datos 104
6.3. Estimación paramétrica 106

7. PREDICCIÓN DE FIABILIDAD 119

7.1. Formulación general 121
7.2. Método de solicitaciones de partes 122
7.3. Método de recuento de partes 130

8. MANTENIMIENTO Y FIABILIDAD 135

8.1. Procesos de renovación y sustitución de dispositivos 137
8.2. Mantenimiento preventivo 147
8.3. Disponibilidad 154
8.4. Optimización de repuestos y de la capacidad de reparación 166

9. GARANTÍAS 173

9.1. Garantías de sustitución completa 175
9.2. Garantías prorrateadas 178

APÉNDICE A: APROXIMACIONES NUMÉRICAS 183

A.1. Funciones gamma 184
A.2. Función de la distribución normal 185

APÉNDICE B: TRANSFORMADA DE LAPLACE Y CONVOLUCIONES 187

B.1. Convoluciones 188
B.2. Transformadas de Laplace 190

APÉNDICE C: FUNCIONES DE RENOVACIÓN DE WEIBULL 195

REFERENCIAS 203

BIBLIOGRAFÍA 207

GLOSARIO 211

FIABILIDAD

1

Introducción



FIABILIDAD

La ingeniería de fiabilidad es el estudio de la longevidad y el fallo de los equipos. Para la investigación de las causas por las que los dispositivos envejecen y fallan se aplican principios científicos y matemáticos. El objetivo estriba en que una mayor comprensión de los fallos de los dispositivos ayudará en la identificación de las mejoras que pueden introducirse en los diseños de los productos para aumentar su vida o por lo menos para limitar las consecuencias adversas de los fallos. Por tanto, se concede mucha importancia al diseño de los productos o a su rediseño, con anterioridad a la fabricación o a la venta.

La mayoría de la gente reconoce que los artículos manufacturados tienen vidas finitas, y que un mejor diseño de los productos implica con frecuencia unas vidas funcionales más largas. Asimismo, mucha gente es consciente de algunos de los ejemplos catastróficos de fallos de equipos. Fallos de fatiga en el fuselaje de un avión, la pérdida del motor de un avión comercial, los accidentes de los reactores nucleares de Three Mile Island y Chernobil, y los accidentes de los transbordadores espaciales Challenger, son algunos ejemplos muy conocidos de fallos catastróficos de sistemas. Casi todo el mundo ha experimentado fallos de sistemas a menor escala, como el de un electrodoméstico, el desgaste de una batería, o el fallo de una bombilla. Muchos han experimentado ejemplos potencialmente graves, como el fallo de los neumáticos de un coche.

Todos estos ejemplos tienen algunas características comunes. También presentan diferencias que utilizamos para dar énfasis a los

conceptos y los análisis presentados. Las características comunes son: (1) los fallos de los sistemas son lo suficientemente importantes como para requerir un esfuerzo de ingeniería con el fin de intentar comprenderlos y controlarlos; y (2) el diseño de los sistemas es complicado por lo que las causas y las consecuencias de los fallos no son obvias.

Pero existen algunas diferencias importantes entre los ejemplos mencionados anteriormente. Eligiendo dos casos extremos, el fallo de una bombilla y el accidente de Three Mile Island nos ofrecen un contraste aclaratorio. El accidente de Three Mile Island fue causado por un fallo de un componente físico del equipo. El accidente también estuvo influenciado por la respuesta humana al fallo del componente y por las políticas de decisión establecidas. Por el contrario, el fallo de una bombilla y sus consecuencias normalmente no están relacionados con decisiones y rendimientos humanos. Lo que es significativo es que existen muchos productos y sistemas modernos cuyo funcionamiento operativo depende de la efectividad conjunta de algunos de los factores siguientes: (1) el equipo físico; (2) los operadores humanos; (3) el software; y (4) los protocolos de gestión. Es razonable y prudente intentar incluir la evaluación de todos estos factores en el estudio del comportamiento de los sistemas. Sin embargo, el enfoque de esta monografía es analítico y las descripciones están limitadas por tanto al comportamiento del equipo físico.

Varios autores han definido métodos analíticos para construir modelos de los efectos de las personas y del software sobre la fiabilidad de los sistemas. Se hace esto porque se cree que los individuos causan más fallos de sistemas que los equipos. Este punto de vista parece bastante acertado. No obstante, la implementación de los modelos matemáticos existentes de la fiabilidad humana y del software requiere aceptar que la variabilidad de procesos elementales estables determina la dispersión observada en el rendimiento. Si este punto de vista es adecuado o no para las personas y el software es un tema de debate, por lo cual no se aplica en este trabajo. Aquí damos énfasis a la

utilización de modelos matemáticos para representar el comportamiento de equipos, e intentamos utilizar el análisis de los modelos para modificar y mejorar el diseño de productos.

Para precisar más, hay que notar que los cuatro ingredientes enumerados son importantes. En el estudio de los fallos, puede pensarse que el equipo físico es el menos importante de los cuatro. No obstante, aquí se considera que los operadores humanos de un sistema no constituyen una población homogénea, cuyo rendimiento pueda ser representado de forma adecuada utilizando una distribución de probabilidades. Análogamente, el software y los protocolos operativos no evolucionan de tal manera que puedan ser representados por funciones de probabilidad. Puesto que el énfasis de este trabajo se centra en la definición de modelos representativos de probabilidad y en su análisis, el tratamiento se limita a los dispositivos físicos.

La duración de un dispositivo está determinada por su diseño. Los métodos modernos de diseño están basados generalmente en descripciones científicas y sobre todo matemáticas de los requerimientos y del rendimiento. La fiabilidad es una de las características del rendimiento de un sistema que se trata analíticamente en el proceso de diseño. La precisión en la evaluación de la fiabilidad de un diseño propuesto depende del conocimiento relativo al proceso de los fallos del producto.

La precisión en la predicción de la fiabilidad es también crucial desde el punto de vista económico. La fiabilidad de un producto determina la productividad operativa del mismo, así como los gastos de reparación y mantenimiento. Puede asimismo determinar el intervalo en que se distribuyen los costes operativos, y en el que se obtienen ingresos o servicios. Por tanto, la fiabilidad es un factor central para determinar el coste del ciclo de vida de un producto.

Además de las consideraciones relativas al coste del ciclo de vida, la prevención de accidentes es generalmente muy importante. La fiabilidad es claramente un factor esencial en la seguridad de un

producto. Para lograr los objetivos de un rendimiento funcional adecuado, limitación de los costes del ciclo de vida, y seguridad, la fase del diseño es el momento en que puede lograrse una influencia importante sobre los mismos. Por consiguiente, la mayoría de los estudios de fiabilidad y de los métodos desarrollados en este trabajo se centran en el diseño de productos.

Este punto de vista no se aplica aquí. En cambio, aquí el énfasis recae en el uso de modelos matemáticos para representar el comportamiento de equipos, y se intenta usar el análisis de los modelos para modificar y mejorar el diseño de los sistemas.

Con esta motivación, los métodos desarrollados para el análisis de fiabilidad son bastante amplios y han probado su gran eficacia en muchos casos a la hora de asegurar una longevidad adecuada de los sistemas. Aquí acometemos un estudio de las bases de muchos de los conceptos y de las técnicas analíticas más útiles de la ingeniería de fiabilidad.

Los temas se organizan en tres bloques principales. Los Capítulos 2 a 5 incluyen una explicación cada vez más minuciosa de los modelos de fiabilidad de sistemas y componentes. Al presentar este material se definen una notación extensa y métodos analíticos de apoyo. También se incluyen ideas fundamentales relativas a los aspectos físicos de los fallos en los dispositivos. En los Capítulos 6 y 7 se describen las implicaciones de los aspectos físicos de los fallos en los dispositivos, en relación con la estrategia de las pruebas de fiabilidad y con los métodos estadísticos para la estimación de fiabilidad. Finalmente, en los Capítulos 8 y 9 se describen cuestiones de mantenimiento y garantía dentro del contexto de las prestaciones a nivel del sistema.

1.1. Definición básica

A menudo se crean los términos técnicos con palabras que ya tienen significados coloquiales y que no se corresponden exactamente

con su uso técnico. Esto sucede con la palabra fiabilidad. En el sentido coloquial, la palabra fiable se utiliza para calificar a las personas que cumplen con sus compromisos. También se utiliza para describir equipos u otros objetos inanimados que funcionen satisfactoriamente. El concepto es claro pero no particularmente preciso. Por contra, la palabra fiabilidad tiene una definición técnica precisa y no totalmente equivalente. Esta es:

– **Definición 1.1.** Fiabilidad es la probabilidad de que un dispositivo realice adecuadamente su función prevista a lo largo del tiempo, cuando opera en el entorno para el que ha sido diseñado.

Debe observarse que hay cuatro atributos específicos de esta definición. Estos son: (1) probabilidad; (2) un funcionamiento adecuado; (3) calificación con respecto al entorno; y (4) tiempo. Los cuatro son importantes. En los próximos Capítulos exploraremos unos modelos algebraicos que se utilizan para representar la fiabilidad de los sistemas. Estos modelos serán desarrollados sucesivamente incluyendo secuencialmente en los mismos cada uno de los cuatro atributos.

1.2. Funciones de estado

El punto de partida para el estudio de la fiabilidad es el funcionamiento correcto. Inicialmente, no definimos el correcto funcionamiento de forma más específica. En cambio, señalamos el hecho de que el complemento del funcionamiento correcto es el fallo. Por tanto, nuestro estudio inicial trata la dicotomía de que un dispositivo o bien funciona adecuadamente o ha fallado. Algebraicamente, afirmamos que un dispositivo tiene un estado ϕ donde:

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{si el dispositivo funciona} \\ 0 & \text{si el dispositivo ha fallado} \end{cases} \tag{1.1}$$

Ahora, supongamos que un dispositivo consta de componentes y que el estado del dispositivo está determinado por su estado. Por

consiguiente, supongamos que n es el número de componentes que componen el dispositivo y definamos:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.2}$$

como el vector de estado de los componentes donde:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el componente i funciona} \\ 0 & \text{si el componente i ha fallado} \end{cases} \tag{1.3}$$

Entonces decimos que el estado del dispositivo (o sistema), ϕ, es una función del vector de estado de los componentes:

$$\phi = \phi(\mathbf{x}) \tag{1.4}$$

Se supone que las relaciones físicas entre los componentes determinan la forma algebraica de la función ϕ de estado del sistema. Dos comentarios entre paréntesis son: (1) que los términos «dispositivo» y «sistema» se utilizan aquí en sentido genérico y pueden ser interpretados como sea necesario; y (2) que se han desarrollado modelos basados en las variables de estado no binarias de los componentes pero que éstos quedan fuera del ámbito de este estudio.

1.3. Coherencia

Antes de explorar formas estructurales específicas, consideremos la hipótesis de que el estado de un sistema está determinado por el estado de sus componentes. Para formalizar esta idea algebraicamente y también para centrar nuestro estudio, establezcamos la definición de un sistema coherente. Para empezar, adoptemos la siguiente convención de notación:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1.5}$$

$$\phi(1_i, \mathbf{x}) = \phi(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{1.6}$$

$$\phi\left(0_i, \mathbf{x}\right) = \phi\left(x_1, \ldots\ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots\ldots, x_n\right) \tag{1.7}$$

lo cual equivale a decir que ϕ (1_i, **x**) es la función de estructura del sistema evaluada bajo la hipótesis de que el componente i-ésimo está funcionando, y ϕ (0_i, **x**) es la función de estructura del sistema evaluada bajo la hipótesis de que el componente i-ésimo ha fallado. Esta notación proporcionará un medio conveniente para mostrar varios resultados. Una relación simple es:

$$\phi\left(\mathbf{x}\right) = x_i\,\phi\left(1_i, \mathbf{x}\right) + \left(1 - x_i\right)\phi\left(0_i, \mathbf{x}\right) \tag{1.8}$$

lo cual se puede verificar haciendo x_i igual a 0 y a 1. Para centrarnos, comencemos con:

– **Definición 1.2.** Se dice que el componente i-ésimo de un sistema es irrelevante a la estructura si ϕ es constante en x_i. Es decir ϕ (1_i, **x**) = ϕ (0_i, **x**) $\forall$ **x**. En caso contrario, el componente i-ésimo es relevante a la estructura.

Con esta distinción:

– **Definición 1.3.** Un sistema de componentes es coherente si (a) su función de estructura ϕ es no decreciente en **x**, y (b) si cada componente del sistema es relevante.

Para ser más específicos, una función de estructura es no decreciente si para dos realizaciones del vector de estado de los componentes, digamos **x** e **y**, **x** > **y** implica que ϕ (**x**) $\geq$ ϕ (**y**). Conceptualmente, el sistema tiene un estado que no empeora cuando un número creciente de sus componentes funcionan. Obsérvese que, para vectores, la afirmación **x** $\geq$ **y** es cierta si $x_i \geq y_i$ $\forall$ i y análogamente **x** > **y** es cierta si **x** $\geq$ **y**, y además $x_i > y_i$ para algún valor de i.

El objetivo de estas definiciones es limitar nuestra atención a sistemas para los cuales cada componente influye en el estado del

sistema. En el ámbito de productos y sistemas reales, es difícil imaginarse un dispositivo que no sea coherente. La razón es que es muy improbable que pueda justificarse la inclusión de un componente en un diseño, sin que tenga algún efecto sobre el estado o comportamiento del sistema. Se invita al lector a que intente pensar en uno. Si identifica alguno, el componente superfluo habrá sido incluido probablemente para lograr una mejora cosmética o de comercialización. En cualquier caso, dado el énfasis en el diseño para lograr un funcionamiento adecuado, este estudio se limita a sistemas coherentes.

FIABILIDAD

2

Estructuras de sistemas



2.1. Estructuras básicas

Se reconoce en general que existen cuatro tipos genéricos de relaciones estructurales entre un dispositivo y sus componentes. Estos son: (1) serie; (2) paralelo; (3) k-de-n; y (4) todas las demás.

– **Definición 2.1.** Un sistema serie es aquel en el que todos los componentes deben funcionar adecuadamente para que funcione el sistema.

Claramente, la analogía conceptual a la estructura serie es un circuito eléctrico de tipo serie. Sin embargo, a diferencia de un circuito serie, esto no implica específicamente que los componentes deban estar conectados físicamente en secuencia. Más bien, lo importante es que funcionen todos los componentes. Un ejemplo de sistema serie en el que los componentes no están físicamente conectados es el conjunto de patas de un taburete de tres patas. Otro es el conjunto de neumáticos de un coche.

El concepto de un circuito serie se utiliza generalmente para definir una representación gráfica de una estructura serie. Para tres componentes, ésta se muestra en la Figura 2.1.

En general, se llaman diagramas de bloques a las representaciones de estructuras de sistemas como las de la Figura 2.1. Muchas veces son útiles a la hora de comprender las relaciones entre componentes. En la estructura serie, la necesidad de que todos los

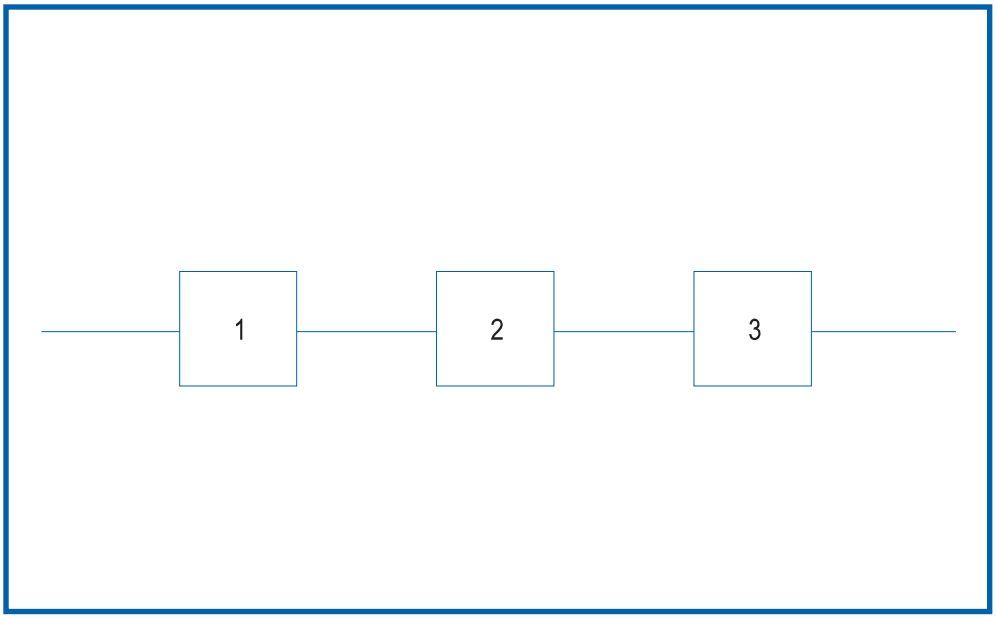


Figura 2.1 - SISTEMA SERIE DE TRES COMPONENTES -

componentes funcionen para que el sistema lo haga implica que $\phi(\mathbf{x}) = 1$ si $x_i = 1 \ \forall$ i, y 0 de otro modo. Una forma algebraica lógica para esta condición es definir la función de estructura del sistema como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{2.1}$$

Nótese que una forma igualmente correcta pero a veces menos útil es:

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_i \{x_i\} \tag{2.2}$$

Como ejemplos, considérese un sistema serie de tres componentes y los casos:

$$\begin{aligned} &x_1 = x_3 = 1 \quad y \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \\ &x_2 = x_3 = 0 \quad y \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \\ &x_1 = x_2 = x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sólo el funcionamiento de todos los componentes hace que el sistema lo haga.

El segundo tipo de estructura es la paralela. La analogía conceptual es de nuevo el circuito eléctrico correspondiente y la definición es:

– **Definición 2.2.** Un sistema paralelo es aquel en que el funcionamiento de cualquiera de los componentes implica el del sistema.

De nuevo se subraya que no se implica ninguna conexión física entre los componentes, por la definición o por el diagrama de bloques. El diagrama de bloques para un sistema paralelo de tres componentes es el mostrado en la Figura 2.2.

Un ejemplo de un sistema paralelo es el conjunto de dos motores en un avión bimotor. Mientras que funcione al menos un motor, el vuelo

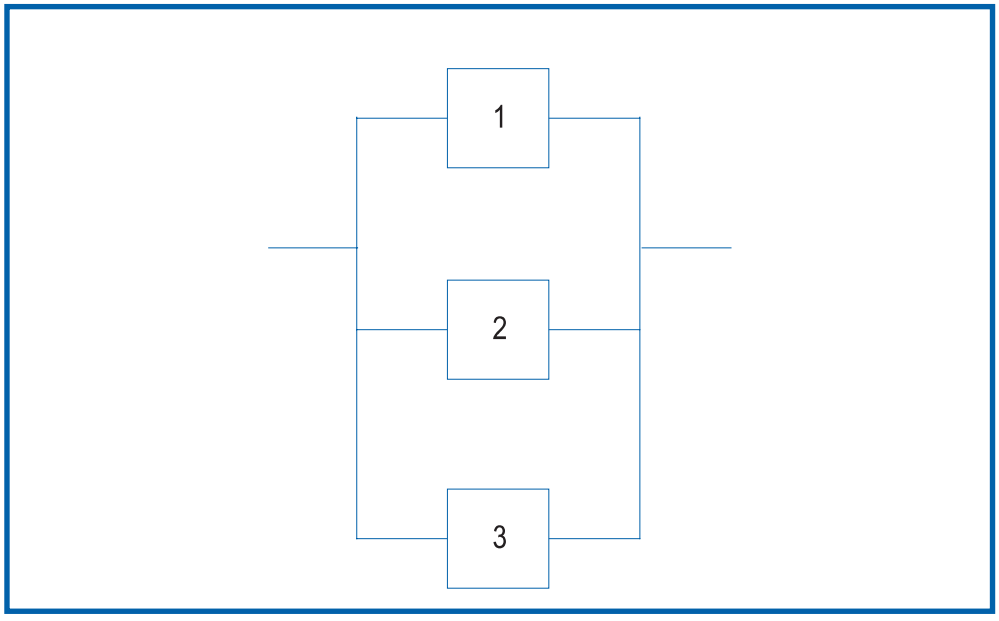


Figura 2.2 - SISTEMA PARALELO DE TRES COMPONENTES -

se mantiene. Para el sistema paralelo se puede definir la función de estructura de modo similar al sistema serie:

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_i \{x_i\} \tag{2.4}$$

Se puede definir una forma alternativa más susceptible a la manipulación analítica, por medio de una notación concisa desarrollada por Barlow y Proschan [1]. Conceptualmente, un sistema paralelo falla cuando todos sus componentes fallan, y el sistema funciona cuando se produce el complemento de «todos los componentes fallan». Por tanto, para el sistema paralelo:

$$\phi(\mathbf{x}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i \tag{2.5}$$

donde definimos esta notación como:

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i \equiv 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \tag{2.6}$$

Nos referimos al $\coprod$ (pi) invertido como a «ip». Cuando se domina, esta notación es muy útil. Algunos ejemplos son:

$$\begin{aligned} &x_2 = x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 1 \\ &x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

El tercer tipo de estructura es la estructura k-de-n. No existe ninguna analogía conceptual para esta estructura. La definición es:

– **Definición 2.3.** Un sistema k-de-n es uno en el que el funcionamiento de k cualesquiera de los n componentes del sistema implica el del sistema.

El método habitual para construir el diagrama de bloques para el sistema k-de-n es mostrar un diagrama paralelo con una indicación de que el sistema es k-de-n, como se muestra en la Figura 2.3.

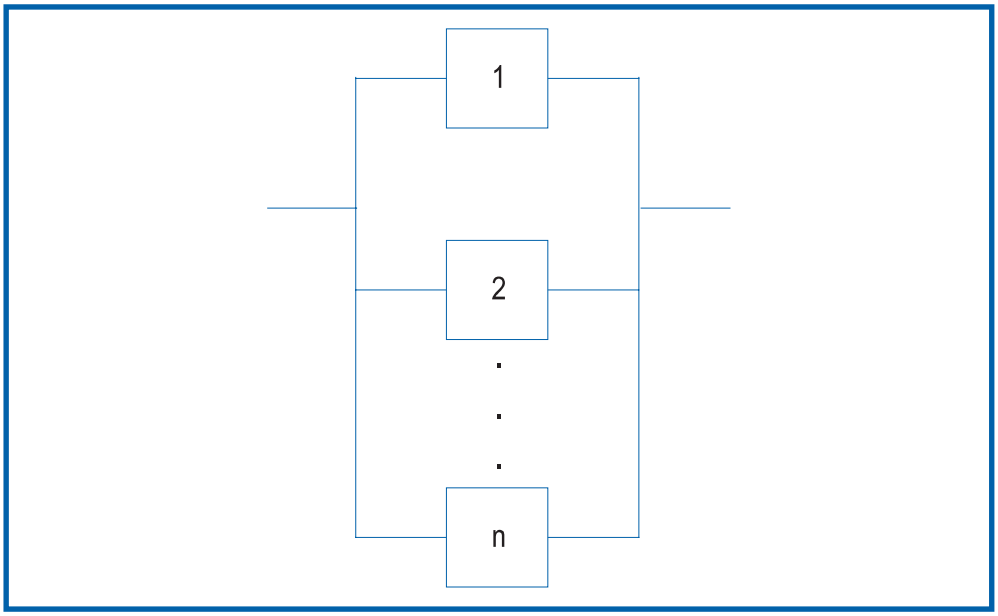


Figura 2.3 - SISTEMA k-de-n -

Un ejemplo de un sistema k-de-n es el eje trasero de un gran remolque-tractor en el que el funcionamiento de tres de las cuatro ruedas es suficiente para asegurar la movilidad. Otro ejemplo es el hecho de que algunas tablas de memoria electrónica se configuran para que la operación de cualquier conjunto de 126 direcciones de las 128 existentes sea satisfactoria.

La representación de la función de estructura para un sistema k-de-n no es tan compacta como las correspondientes a sistemas serie y paralelos. Algebraicamente, para un sistema k-de-n:

$$\phi = \phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} \tag{2.8}$$

Ejemplos para un sistema 3-de-4 son:

$$x_2 = x_3 = x_4 = 1 \quad y \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 1$$
$$x_2 = x_3 \quad y \quad x_1 = x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\mathbf{x}) = 0 \qquad (2.9)$$

Obsérvese que se puede considerar que un sistema serie es un sistema n-de-n, y que un sistema paralelo es un sistema 1-de-n.

2.2. Equivalencia estructural

Por supuesto, existen otras muchas relaciones estructurales entre los componentes que pueden ser usados por un diseñador de dispositivos para obtener una capacidad específica del producto. Para analizar cualquier forma estructural, además de los anteriores, se ha definido un método de análisis estructural general. En este contexto, este método se designa como la construcción de estructuras equivalentes de sistemas. Aquí lo desarrollamos con un ejemplo popular concreto –un puente eléctrico– (ver Figura 2.4).

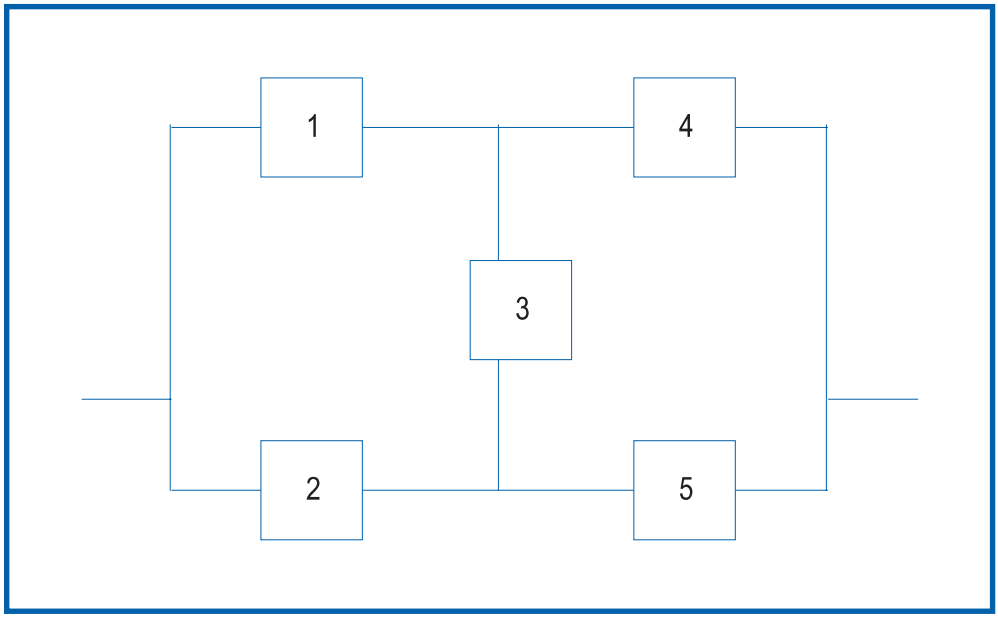


Figura 2.4 - PUENTE ELÉCTRICO -

Esta estructura claramente no responde a ninguna de las formas mencionadas anteriormente. Para obtener una función útil de estado del sistema, comencemos por:

– **Definición 2.4.** Un vector de camino es un vector de estado de los componentes **x** para el cual ϕ (**x**) = 1. El correspondiente conjunto de camino es P (**x**) en donde P (**x**) = {i $\mid$ x_i = 1}

Un ejemplo de un vector de caminos para el puente eléctrico en la Figura 2.4 es **x** = (1, 1, 1, 0, 1) para el cual ϕ (**x**) = 1 y P (**x**) = {1, 2, 3, 5}. Por tanto, los vectores de camino son aquellas realizaciones de los vectores de estado de los componentes para los que el sistema funciona. De hecho, se puede decir que si **x** es un vector de camino e **y** $\geq$ **x**, entonces **y** es también un vector de camino. Luego:

– **Definición 2.5.** Un vector de camino mínimo es un vector de camino **x** para el cual **y** < **x** implica que ϕ (**y**) = 0. El correspondiente conjunto de camino, P (**x**), se designa como un conjunto de camino mínimo.

Un vector de camino mínimo es aquél cuyo conjunto de camino no tiene ningún subconjunto que sea un conjunto de camino. Físicamente, es el conjunto más pequeño de componentes cuyo funcionamiento hace que el sistema funcione.

Un ejemplo de un vector de camino mínimo para el puente eléctrico es **x** = (1, 0, 0, 1, 0) para el que P(**x**) = {1, 4}. De hecho, es relativamente sencillo identificar los vectores de caminos mínimos para el puente. Los conjuntos mínimos de caminos son:

$$P_1 = \{1, 4\} \quad P_2 = \{2, 5\} \quad P_3 = \{1, 3, 5\} \quad P_4 = \{2, 3, 4\} \qquad (2.10)$$

Recordemos que para cada vector de camino mínimo ϕ (**x**) = 1. De este modo, si los componentes de cualquier camino mínimo funcionan, el sistema funciona. Es decir, se puede considerar que el

sistema está integrado por los caminos mínimos en paralelo, ya que sólo es necesario que uno de los caminos mínimos funcione para que el sistema lo haga. Además, como todos los componentes en un conjunto de caminos mínimos tienen que funcionar para que funcione el camino mínimo, se puede considerar que un camino mínimo es una configuración de serie de los componentes constituyentes. Por tanto, se puede considerar el sistema como una configuración paralela de estructuras serie integradas por los componentes de los conjuntos de caminos mínimos.

Para definir esta equivalencia algebraicamente, supongamos que $\rho_j(\mathbf{x})$ es la función de estado para el vector de camino mínimo j-ésimo. Puesto que cada componente de un camino mínimo tiene que funcionar para que el camino mínimo funcione:

$$\rho_j(\mathbf{x}) = \prod_{i \in P_j} x_i \tag{2.11}$$

Análogamente, como hasta que un camino mínimo funcione para que el sistema lo haga:

$$\phi(\mathbf{x}) = \coprod_j \rho_j(\mathbf{x}) = \coprod_j \prod_{i \in P_j} x_i \tag{2.12}$$

Para el puente eléctrico:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= 1-(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3)(1-\rho_4) = \\ &= 1-(1-x_1 x_4)(1-x_2 x_5)(1-x_1 x_3 x_5)(1-x_2 x_3 x_4) \end{aligned} \tag{2.13}$$

La representación gráfica correspondiente a la relación de equivalencia se muestra en la Figura 2.5.

Merece la pena subrayar que para cada vector **x** de estado de los componentes, el valor de la función $\phi(\mathbf{x})$ de estado del sistema es idéntica para el sistema original (puente) y para el sistema equivalente definido con los vectores de caminos mínimos. Este es un resultado

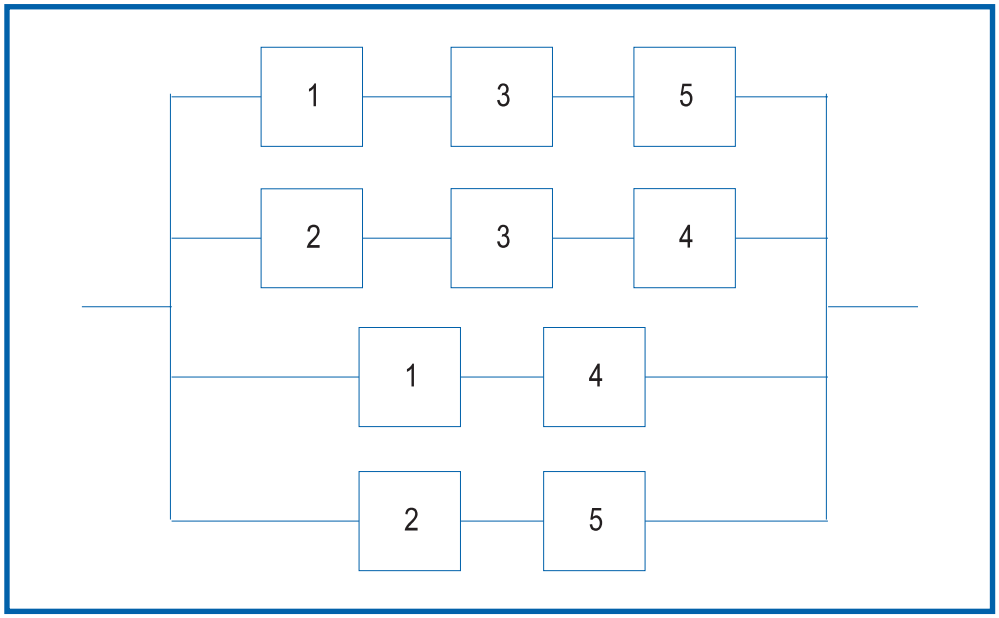


Figura 2.5 - ESTRUCTURA EQUIVALENTE DE CAMINOS MÍNIMOS PARA EL PUENTE ELÉCTRICO -

importante por dos razones. En primer lugar, demuestra que cada estructura de sistema puede ser evaluada en términos de una estructura equivalente compuesta exclusivamente de configuraciones serie y paralelas de los componentes del sistema. Por tanto, se puede hacer que la evaluación sea relativamente sencilla. Lo segundo y más importante es el hecho de que ahora está claro que siempre se puede hallar el estado de sistema con los valores de estado de los componentes. Por consiguiente, el estudio de fiabilidad se puede centrar en los componentes.

Esta reafirmación del planteamiento reduccionista del estudio científico es básica para una mayoría importante de los resultados analíticos obtenidos en la ingeniería de fiabilidad. Debe reconocerse que esto no implica que el método de sistemas para el diseño y evaluación de equipos complejos deba ser desechado. Al contrario, esto significa que la fiabilidad de los componentes puede ser estudiada independientemente, y por tanto que las medidas resultantes pueden ser agregadas

en la práctica. La aplicación subsiguiente del método de sistemas para describir las interacciones operativas es útil y apropiado.

Da la casualidad de que existe una segunda estructura equivalente que se puede obtener con un método similar.

– **Definición 2.6.** Un vector de corte es un vector **x** de estado de los componentes para el que ϕ (**x**) = 0. El correspondiente conjunto de corte es C(**x**), donde C(**x**) = $\{i \mid x_i = 0\}$.

Un ejemplo de vector de corte para el puente eléctrico en la Figura 2.4 es **x** = (0, 0, 1, 0, 1) para lo que ϕ (**x**) = 0 y C(**x**) = {1, 2, 4}. De este modo, los vectores de corte son las realizaciones de los vectores de estado de los componentes para los cuales ha fallado el sistema. De hecho, se puede decir que si **x** es un vector de corte e **y** $\leq$ **x**, entonces **y** es también un vector de corte. Es posible observar que la unión del conjunto de todos los vectores de corte con el conjunto de todos los vectores de camino agota el conjunto de vectores de estado de los componentes.

– **Definición 2.7.** Un vector de corte mínimo es un vector de corte **x** para el que **y** > **x** implica que ϕ (**y**) = 1. Nos referimos al correspondiente conjunto mínimo de corte, C(**x**), como a un conjunto de corte mínimo.

Un vector de corte mínimo es aquel cuyo conjunto de corte no tiene un subconjunto que constituya un vector de corte. Físicamente, es el conjunto más pequeño de componentes cuyo fallo asegura el fallo del sistema. Un ejemplo de un vector de corte mínimo para el puente eléctrico es **x** = (0, 0, 1, 1, 1), para el cual C(**x**) = {1, 2}. Como con los caminos mínimos, la identificación de los vectores de cortes mínimos para el puente eléctrico es relativamente sencilla. Los conjuntos de cortes mínimos son:

$$C_1 = \{1,2\} \quad C_2 = \{4,5\} \quad C_3 = \{1,3,5\} \quad C_4 = \{2,3,4\} \qquad (2.14)$$

Ahora, recuérdese que para cada vector de cortes mínimos $\phi(\mathbf{x}) = 0$. Por tanto, cada corte mínimo es suficiente para causar el fallo del sistema. Todos los cortes mínimos deben funcionar para que el sistema funcione. Un corte mínimo funciona si cualquiera de los componentes del conjunto de cortes mínimos funciona. Es decir, es posible considerar el sistema como integrado por los cortes mínimos dispuestos en serie, y todos deben funcionar para que funcione el sistema. Además, como el funcionamiento de cualquiera de los componentes en el conjunto de cortes mínimos implica una función de cortes mínimos, se puede considerar que un conjunto de corte mínimo está integrado por la configuración en paralelo de sus componentes constituyentes. De esta manera, se puede considerar el sistema como una configuración serie de estructuras paralelas integradas por los componentes de los conjuntos de cortes mínimos.

Para definir esta equivalencia algebraicamente, supongamos que $\kappa_k(\mathbf{x})$ es la función de estado para el k-ésimo vector de cortes mínimos. Como la función de cualquier componente del conjunto de cortes mínimos implica una función de cortes mínimos:

$$\kappa_k(\mathbf{x}) = \coprod_{i \in C_k} x_i \tag{2.15}$$

Análogamente, como todos los cortes mínimos deben funcionar para que funcione el sistema:

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_k \kappa_k(\mathbf{x}) = \prod_k \coprod_{i \in C_k} x_i \tag{2.16}$$

Para el puente, la equivalencia funcional es:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \kappa_1\,\kappa_2\,\kappa_3\,\kappa_4 = \\ &= \left(1-(1-x_1)(1-x_2)\right)\left(1-(1-x_4)(1-x_5)\right)\left(1-(1-x_1)(1-x_3)(1-x_5)\right)\left(1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

La representación gráfica de la estructura equivalente de cortes mínimos se muestra a continuación en la Figura 2.6.

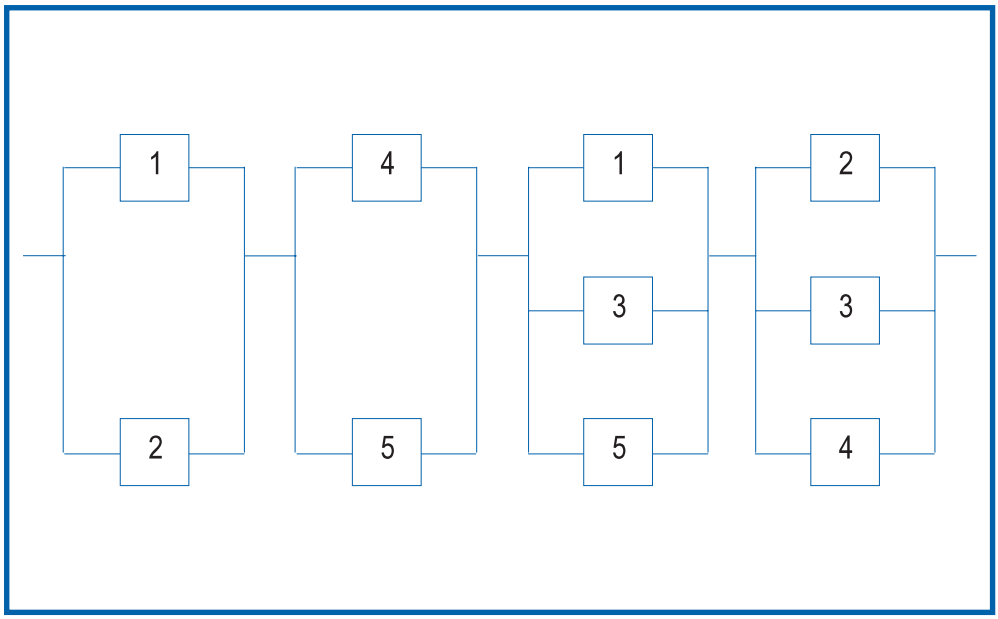


Figura 2.6 - ESTRUCTURA EQUIVALENTE DE CORTES MÍNIMOS PARA EL PUENTE ELÉCTRICO -

Como en el caso de la estructura equivalente de caminos mínimos, la estructura equivalente de cortes mínimos tiene la propiedad de que para cada vector de estado de los componentes **x**, el valor de la función de estado de sistema $\phi(\mathbf{x})$ es idéntica para el sistema original (puente) y para el sistema equivalente.

De este modo, se puede lograr una evaluación de las relaciones de estado para el diseño de un nuevo dispositivo con las estructuras serie y paralelas sencillas, a pesar de la complejidad del diseño. Se puede utilizar la estructura equivalente de cortes mínimos o la de caminos mínimos.

Una observación final relativa a las funciones de estructura de sistemas es que las estructuras serie y paralelo limitan todas las demás estructuras. Es decir, para un sistema coherente:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \le \phi(\mathbf{x}) \le \coprod_{i=1}^{n} x_i \qquad (2.18)$$

lo que significa que el estado de un sistema incluso muy complicado puede al menos estar limitado por las dos formas analíticas más sencillas.

2.3. Módulos de sistemas

Muchos productos y sistemas son bastante complicados y constan de muchos componentes frecuentemente cientos o incluso miles. Para la mayoría de estos sistemas complejos, se pueden fortalecer los resultados obtenidos con estructuras equivalentes, ya que muchas veces es posible dividir el sistema en módulos (o subsistemas) que se pueden tratar simultáneamente como componentes del sistema total y como sistemas que constan de componentes. Al definir una jerarquía de dos o más niveles de este modo, se simplifica enormemente el análisis de estado, y por tanto las relaciones de fiabilidad. Nos referimos normalmente a este proceso de definir una jerarquía anidada de componentes como una descomposición modular.

– **Definición 2.8.** Un sistema coherente (**x**, ψ) es un módulo del sistema coherente (**x**, ϕ) si $\phi(\mathbf{x}) = \theta(\psi(\mathbf{x}), \mathbf{x})$, en donde ø es una función de estructura coherente definida mediante un subconjunto de los componentes de **x**, y θ es también una función de estructura coherente para la que (**x**, ψ) actúa como componente.

La idea de módulo es bastante intuitiva. Muchos de los productos con los que estamos familiarizados proporcionan ejemplos. Se puede considerar que un ordenador está compuesto por una configuración de módulos para entrada/salida, lógica, memoria, y tareas de visualización. Un último paso en la formalización de la idea es:

– **Definición 2.9.** Una descomposición modular de un sistema coherente es la división de los componentes del sistema en subconjuntos inconexos, la definición de una función de estructura coherente asociada ψ_r para cada subconjunto y la

definición de una función de estructura organizativa, θ, de forma que $\phi(\mathbf{x}) = \theta(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), ..., \psi_R(\mathbf{x}))$.

Claramente, se puede anidar el proceso de descomposición para que la evaluación del diseño de un sistema sea lo más sencilla posible.

En resumen, la definición técnica de fiabilidad sirve como punto de arranque para un estudio cuidadoso y detallado del tema. Una formulación algebraica conveniente para obtener el efecto del estado funcional de los componentes sobre el estado del sistema proporciona un medio para representar y analizar la función del sistema; además unos cuantos resultados generales aseguran que se puede evaluar eficazmente cualquier configuración de diseño de sistemas.

FIABILIDAD

3

Fiabilidad básica



De los cuatro atributos de fiabilidad, solamente hemos considerado la cuestión de funcionamiento correcto. Ahora añadiremos la probabilidad. El resultado general que buscamos es poder especificar $P[\phi(\mathbf{x}) = 1]$. Claramente, esperamos poder expresar la probabilidad de funcionamiento del sistema en términos de los componentes que lo integran.

3.1. Una medida de fiabilidad

Teniendo en cuenta que solamente consideramos estructuras coherentes, definamos:

$$p_i = P[x_i = 1] = E[x_i] \tag{3.1}$$

como la probabilidad de que el componente i-ésimo esté funcionando. La representación en forma de una expectativa es posible porque las variables de estado de los componentes, x_i, son binarias. A pesar del hecho de que nuestras definiciones de fiabilidad son incompletas, nos referimos a p_i como la fiabilidad del componente i-ésimo y a $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ como el vector de fiabilidad de los componentes. También designaremos la fiabilidad de sistema por $r(\mathbf{p})$. Observemos que la función de estado de sistemas es también binaria de forma que:

$$r(\mathbf{p}) = P[\phi(\mathbf{x}) = 1] = E[\phi(\mathbf{x})] \tag{3.2}$$

Supongamos para nuestras consideraciones iniciales que los componentes de sistema son independientes desde el punto de vista estocástico. En este caso, podemos obtener varios resultados generales. En primer lugar, para una estructura serie tenemos:

$$r(\mathbf{p}) = P[\phi(\mathbf{x}) = 1] = P\left[\prod_{i=1}^{n} x_i = 1\right] = \prod_{i=1}^{n} P[x_i = 1] = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{3.3}$$

y análogamente, para una estructura paralela:

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= P[\phi(\mathbf{x}) = 1] = P\left[\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1\right] = P\left[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = 1\right] = P\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = 0\right] \\ &= 1 - P\left[\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) = 1\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} P[1 - x_i = 1] = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) = \coprod_{i=1}^{n} p_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

Estos resultados confirman la intuición de que la fiabilidad de un sistema serie de componentes independientes es el producto de sus fiabilidades, y que la fiabilidad de un sistema paralelo de componentes independientes se calcula como la disposición en paralelo de sus fiabilidades. También es verdad en general para componentes independientes que, con la notación de las expresiones (1.8) del Capítulo 1:

$$r(\mathbf{p}) = p_i\, r(1_i, \mathbf{p}) + (1 - p_i)\, r(0_i, \mathbf{p}) \tag{3.5}$$

Para estructuras de sistemas que no sean ni de serie ni paralelo, el cálculo de la fiabilidad del sistema a partir de las de sus componentes no es tan sencillo.

El planteamiento directo para calcular la fiabilidad de sistemas es enumerar todos los caminos, calcular la probabilidad de realización de cada uno y sumarlas. Como ejemplo, consideremos el puente eléctrico mostrado en la Figura 2.4. Para esta estructura existen 2^5=32 vectores posibles de estado de los componentes, de los cuales la mitad corresponden a caminos y la otra mitad son cortes. Los caminos y sus probabilidades de realización son:

$(1,1,1,1,1)$	$p_1p_2p_3p_4p_5$	$(1,0,1,0,1)$	$p_1(1-p_2)p_3(1-p_4)p_5$
$(1,1,1,1,0)$	$p_1p_2p_3p_4(1-p_5)$	$(1,0,0,1,1)$	$p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5$
$(1,1,1,0,1)$	$p_1p_2p_3(1-p_4)p_5$	$(1,0,0,1,0)$	$p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4(1-p_5)$
$(1,1,0,1,1)$	$p_1p_2(1-p_3)p_4p_5$	$(0,1,1,1,1)$	$(1-p_1)p_2p_3p_4p_5$
$(1,1,0,1,0)$	$p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5)$	$(0,1,1,1,0)$	$(1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5)$
$(1,1,0,0,1)$	$p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5$	$(0,1,1,0,1)$	$(1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5$
$(1,0,1,1,1)$	$p_1(1-p_2)p_3p_4p_5$	$(0,1,0,1,1)$	$(1-p_1)p_2(1-p_3)p_4p_5$
$(1,0,1,1,0)$	$p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)$	$(0,1,0,0,1)$	$(1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5$

(3.6)

Al añadir las probabilidades de realización para los vectores de camino, obtenemos la fiabilidad del sistema. Con un esfuerzo algebraico considerable, la suma se reduce a:

$$r(\mathbf{p}) = p_1p_4 + p_2p_5 + p_2p_3p_4 + p_1p_3p_5 - p_1p_2p_3p_4 - p_1p_2p_4p_5 - p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5 \tag{3.7}$$

y si se diera el caso de que $p_i = p \ \forall$ i, entonces:

$$r(\mathbf{p}) = 2p^2 + 2p^3 + 5p^4 + 2p^5 \tag{3.8}$$

Es posible imaginar que para un sistema más complejo, que comprenda un mayor número de componentes, este proceso puede ser poco práctico, incluso con la potencia de los ordenadores actuales.

3.2. Acotaciones de fiabilidad

La alternativa lógica a los métodos de enumeración es el uso de los sólidos resultados estructurales obtenidos con los caminos y cortes mínimos. Sin embargo, incluso con componentes independientes, las estructuras equivalentes constan de caminos (o cortes) mínimos que no son independientes. Por ejemplo, en el caso del puente eléctrico, tanto $\rho_1(\mathbf{x})$ como $\rho_3(\mathbf{x})$ dependen de x_3, por tanto no son independientes. Para tener en cuenta la posibilidad de correlaciones entre funciones de estructura de caminos mínimos (o cortes mínimos), Barlow y

Proschan [1] utilizan el concepto de variables aleatorias «asociadas», desarrollado originalmente por Esary, Proschan y Walkup [2].

– **Definición 3.1.** Se dice que las variables aleatorias $y_1, y_2, ..., y_n$ (que no son necesariamente binarias) están asociadas si

$$\text{cov}\,[\alpha(\mathbf{y}), \beta(\mathbf{y})] \geq 0$$

para todas las funciones binarias α y β que no son decrecientes.

El concepto de una asociación de variables aleatorias es rico en aplicación. Para estudios de fiabilidad, se aplica específicamente a estructuras equivalentes en las cuales los caminos mínimos (o cortes mínimos) tienen componentes en común, y a otras situaciones en que las fiabilidades de los componentes están correlacionadas. Para ser claros con respecto a la notación, recordemos que:

$$\text{cov}\,[x, y] = E\left[\left(x - E[x]\right)\left(y - E[y]\right)\right] \qquad (3.9)$$

Las implicaciones de la definición de asociación son algo sutiles. Solamente examinamos algunas. Para empezar, obsérvese que la asociación de variables aleatorias tiene las siguientes propiedades multivariables:

Propiedad 1. Cualquier subconjunto de un conjunto de variables aleatorias asociadas es un conjunto de variables aleatorias asociadas.

Propiedad 2. El conjunto de variables aleatorias que comprende una sola variable aleatoria es un conjunto de variables aleatorias asociadas.

Propiedad 3. Cualquier conjunto de funciones no decrecientes de un conjunto de variables aleatorias asociadas es un conjunto de variables aleatorias asociadas.

Propiedad 4. Si dos conjuntos de variables aleatorias asociadas son mutuamente independientes, su unión es un conjunto de variables aleatorias asociadas.

Es posible construir una prueba de cada una de estas propiedades utilizando únicamente la definición de asociación. También es posible probar varios resultados interesantes adicionales con estas cuatro propiedades. Dos resultados de este tipo que son útiles son los hechos de que: (1) un conjunto de variables aleatorias independientes está asociado y (2) para un conjunto de variables aleatorias binarias asociadas, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, el conjunto $1\text{-}x_1, 1\text{-}x_2, \ldots\ldots, 1\text{-}x_n$ es un conjunto de variables aleatorias binarias asociadas. La definición del concepto de asociación se presenta aquí para apoyar la definición de acotaciones de fiabilidad de sistemas.

Para apoyar la definición de varias acotaciones de fiabilidad, observemos primero que para un conjunto de variables aleatorias binarias asociadas:

$$P\left[\prod_{i=1}^{n} x_i = 1\right] \geq \prod_{i=1}^{n} P\left[x_i = 1\right] \tag{3.10}$$

$$P\left[\coprod_{i-1}^{n} x_i = 1\right] \leq \coprod_{i-1}^{n} P\left[x_i = 1\right] \tag{3.11}$$

Estas relaciones implican que para una estructura coherente que consta de un conjunto de componentes binarios asociados con fiabilidades p_i:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq r(\mathbf{p}) \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i \tag{3.12}$$

lo cual expresa que, como en el caso de las funciones de estado, la fiabilidad de sistemas está limitada por las configuraciones serie y paralelo de los componentes. Estas son la acotación inferior serie y la acotación superior paralelo. En general, estas acotaciones son con frecuencia bastante amplias, especialmente la acotación inferior serie.

Las ideas de asociación y equivalencia estructural permiten la definición de acotaciones más estrechas.

Supongamos que ϕ es una estructura coherente que consta de un conjunto asociado de componentes, para los cuales $\rho_1(\mathbf{x})$, $\rho_2(\mathbf{x})$, ..., $\rho_J(\mathbf{x})$ son las funciones de estructura de caminos mínimos y $\kappa_1(\mathbf{x})$, $\kappa_2(\mathbf{x})$, ..., $\kappa_L(\mathbf{x})$ son las funciones de estructura de cortes mínimos. Entonces:

$$\prod_{l=1}^{L} P\left[\kappa_l(\mathbf{x})=1\right] \le P\left[\phi(\mathbf{x})=1\right] \le \coprod_{j=1}^{J} P\left[\rho_j(\mathbf{x})=1\right] \tag{3.13}$$

Es obvio que esto es así puesto que $\kappa_l(\mathbf{x})$ son funciones no decrecientes de $\mathbf{x}$, cuyos componentes están asociados. Por tanto, las funciones $\kappa_l(\mathbf{x})$ están asociadas y la equivalencia estructural implica que:

$$P\left[\phi(\mathbf{x})=1\right] = P\left[\prod_{l=1}^{L}\kappa_l(\mathbf{x})=1\right] \le \prod_{l=1}^{L} P\left[\kappa_l(\mathbf{x})=1\right] \tag{3.14}$$

como se ha indicado antes. La misma construcción se aplica a los caminos mínimos de forma que:

$$P\left[\phi(\mathbf{x})=1\right] = P\left[\coprod_{j=1}^{J}\rho_j(\mathbf{x})=1\right] \le \coprod_{j=1}^{J} P\left[\rho_j(\mathbf{x})=1\right] \tag{3.15}$$

En el caso de que los componentes de la estructura coherente sean independientes, se puede extender este resultado a:

$$\prod_{l=1}^{L}\coprod_{i\in C_l} p_i \le P\left[\phi(\mathbf{x})=1\right] \le \coprod_{j=1}^{J}\prod_{i\in P_j} p_i \tag{3.16}$$

Las acotaciones definidas en (3.13) y (3.16) se designan como la acotación inferior de cortes mínimos y la acotación superior de caminos mínimos. Estas acotaciones son frecuentemente (pero no siempre) superiores a las acotaciones serie y paralelo.

Se puede definir todavía otro conjunto de acotaciones con los cortes mínimos para las acotaciones superiores y los caminos mínimos para las

acotaciones inferiores. Si para la estructura coherente ϕ, P_1, P_2, ..., P_J son los conjuntos de caminos mínimos y C_1, C_2, ..., C_L son los conjuntos de cortes mínimos, entonces, siempre es verdad que:

$$\max_j \left\{ P\left[\min_{i \in P_j} x_i = 1 \right] \right\} \leq P\left[\phi(\mathbf{x}) = 1 \right] \leq \min_l \left\{ P\left[\max_{i \in C_l} x_i = 1 \right] \right\} \qquad (3.17)$$

y además, si los componentes son asociados:

$$\max_j \left\{ \prod_{i \in P_j} p_i \right\} \leq P\left[\phi(\mathbf{x}) = 1 \right] \leq \min_l \left\{ \coprod_{i \in C_l} p_i \right\} \qquad (3.18)$$

Estas acotaciones se designan como las acotaciones mínimas-máximas.

Ahora, se puede pensar que entre las acotaciones definidas anteriormente es posible determinar que un conjunto sea siempre superior. En general, éste no es el caso. No obstante, para los componentes asociados, siempre es verdad que:

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq \max_j \left\{ \prod_{i \in P_j} p_i \right\} \leq r(\mathbf{p}) \leq \min_l \left\{ \coprod_{i \in C_l} p_i \right\} \leq \coprod_{i=1}^{n} p_i \qquad (3.19)$$

Por tanto en este caso, las acotaciones mínimas-máximas son siempre superiores a las acotaciones serie o paralelo. Debemos por tanto comparar las acotaciones mínimas-máximas con las acotaciones de cortes mínimos-caminos mínimos.

Llegados a este punto es conveniente mostrar un ejemplo. Consideremos el sistema que se muestra en la Figura 3.1. Los conjuntos de caminos mínimos para el sistema son $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{2, 3\}$ y $P_3 = \{2, 4\}$ mientras que los de cortes mínimos son $C_1 = \{1, 2\}$ y $C_2 = \{1, 3, 4\}$. Supongamos que $p_1 = 0{,}96$, $p_2 = 0{,}90$ y $p_3 = p_4 = 0{,}85$. Entonces, las acotaciones serie-paralelo son:

$$(0{,}96)(0{,}90)(0{,}85)^2 = 0{,}624 \leq r(p) \leq 0{,}9999 = 1 - (1 - 0{,}96)(1 - 0{,}90)(1 - 0{,}85)^2 \qquad (3.20)$$

las acotaciones de cortes mínimos y caminos mínimos son:

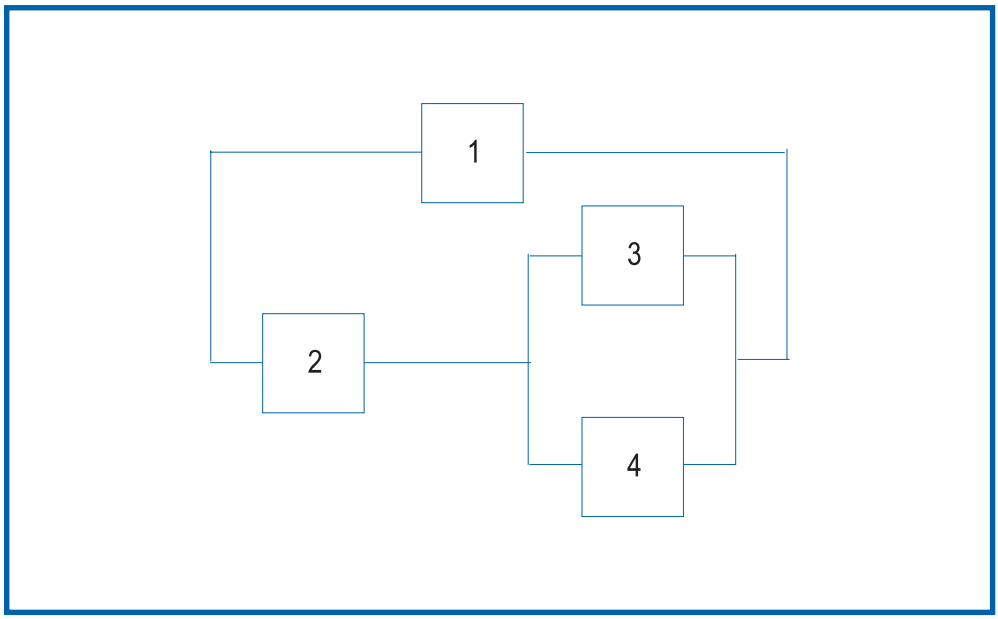


Figura 3.1 - EJEMPLO DE ESTRUCTURA -

$$\begin{aligned}
&\left(1-\left(1-0{,}96\right)\left(1-0{,}90\right)\right)\left(1-\left(0{,}96\right)\left(1-0{,}85\right)\left(1-0{,}85\right)\right)=0{,}9951\\
&1-\left(1-\left(0{,}96\right)\right)\left(1-\left(0{,}90\right)\left(0{,}85\right)\right)^{2}=0{,}9978\\
&0{,}9951\leq r\left(\mathbf{p}\right)\leq 0{,}9978
\end{aligned} \tag{3.21}$$

y las acotaciones mínimas-máximas son:

$$\begin{aligned}
&\max\left\{0{,}96,\left(0{,}90\right)\left(0{,}85\right),\left(0{,}90\right)\left(0{,}85\right)\right\}=0{,}960\\
&\min\left\{\left(1-\left(1-0{,}96\right)\left(1-0{,}90\right)\right),\left(1-\left(1-0{,}96\right)\left(1-0{,}85\right)^{2}\right)\right\}=0{,}996\\
&0{,}960\leq r\left(\mathbf{p}\right)\leq 0{,}996
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por supuesto, en este sistema podemos calcular que la fiabilidad es

$$r\left(\mathbf{p}\right)=p_1+p_2p_3+p_2p_4-p_1p_2p_3-p_2p_3p_4-p_1p_2p_4+p_1p_2p_3p_4=0{,}99519 \tag{3.23}$$

Se puede obtener un conjunto similar de resultados con el ejemplo del puente eléctrico. Supongamos que todos los componentes del puente son idénticos de manera que $p_i = p \ \forall$ i. Entonces, denotemos

la acotación inferior serie como b_s, la acotación superior paralelo como b_p, la acotación inferior de cortes mínimos como b_{mc}, y la acotación superior de caminos mínimos como b_{mp}, la acotación inferior mínima-máxima como b_{mml}, y la acotación superior mínima-máxima como b_{mmu}. Para componentes idénticos:

$$
\begin{aligned}
b_s &= p^5 \\
b_p &= 1-(1-p)^5 \\
b_{mc} &= \prod_{l=1}^{L}\coprod_{i\in C_l} p_i = p^4\left(36-108p+141p^2-102p^3+43p^4-10p^5+p^6\right) \\
b_{mp} &= \coprod_{j=1}^{J}\prod_{i\in P_j} p_i = p^2\left(2+2p-p^2-4p^3-p^4+2p^5+2p^6-p^8\right) \\
b_{mml} &= \max_j\left\{\prod_{i\in P_j} p_i\right\} = p^2 \\
b_{mmu} &= \min_l\left\{\coprod_{i\in C_l} p_i\right\} = 1-(1-p)^3
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

y el cálculo de estas cantidades como función de p se muestra en la Tabla 3.1.

El examen de la Tabla 3.1 demuestra que ninguna de las acotaciones de cortes mínimos, de caminos mínimos ni mínimo-máximo domina a las otras. Una última observación es que la aplicación jerárquica de la equivalencia estructural, utilizada en el Capítulo 2 para definir una descomposición modular, puede también ser usada en el cálculo de la fiabilidad de sistemas y de sus acotaciones. De este modo, los resultados que se muestran anteriormente son también bastante potentes.

3.3. Importancia de fiabilidad

A menudo, tiene sentido preguntarse cuál es el componente que debe mejorarse primero para aumentar la fiabilidad del sistema. Normalmente, la respuesta a esta pregunta es mejorar el componente

p	b_s	b_{mc}	b_{mml}	$r(p)$	b_{mmu}	b_{mp}	b_p
0,99	0,951	0,999	0,980	0,999	1,000	1,000	1,000
0,95	0,774	0,995	0,903	0,995	0,998	1,000	1,000
0,90	0,591	0,978	0,810	0,979	0,990	0,997	1,000
0,75	0,273	0,852	0,563	0,861	0,938	0,936	0,999
0,60	0,078	0,618	0,360	0,660	0,840	0,748	0,990
0,50	0,031	0,431	0,250	0,500	0,750	0,569	0,969
0,25	0,001	0,064	0,063	0,139	0,438	0,148	0,763
0,10	0,000	0,003	0,010	0,022	0,190	0,022	0,410

Tabla 3.1 - CÁLCULOS REPRESENTATIVOS DE FIABILIDAD -

que tiene el mayor efecto sobre la fiabilidad del sistema. La idea de que cada componente tiene un efecto distinto sobre la fiabilidad del sistema se ha cuantificado en el parámetro «importancia de fiabilidad» del componente. Se han sugerido unas medidas de importancia de fiabilidad. La más prevalente es:

– **Definición 3.2.** La importancia de fiabilidad del componente i-ésimo de un sistema coherente es:

$$I_R(i) = \frac{\delta}{\delta p_i} r(\mathbf{p}) = r(1_i, \mathbf{p}) - r(0_i, \mathbf{p}) \qquad (3.25)$$

lo cual expresa que el componente para el que la fiabilidad impone el gradiente máximo sobre la función de fiabilidad de sistema es el más importante. Consideremos algunos casos específicos. En una estructura serie:

$$I_R(i) = \frac{\delta}{\delta p_i} r(\mathbf{p}) = \frac{\delta}{\delta p_i} \prod_{j=1}^{n} p_j = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_j \qquad (3.26)$$

en la que el máximo ocurre en el componente con la mínima fiabilidad, p_i. Es decir, el producto de todos excepto uno los valores de fiabilidad es máximo cuando el que se deja fuera es el mínimo. De este modo, si las fiabilidades de los componentes están ordenadas como:

$$p_{[1]} \leq p_{[2]} \leq \ldots\ldots\ldots \leq p_{[n]} \tag{3.27}$$

en donde los subíndices están entre corchetes para reflejar el orden, entonces en un sistema de serie:

$$I_R([1]) \geq I_R([2]) \geq \ldots\ldots\ldots \geq I_R([n]) \tag{3.28}$$

esto significa que el componente más débil es el más importante para determinar la fiabilidad del sistema, y es aquel en el que las mejoras producen el máximo beneficio en el nivel del sistema.

La utilización de los subíndices entre corchetes para denotar orden se interpreta de la siguiente manera. La expresión $p_{[1]} = p_4$ significa que p_4 es el valor mínimo de fiabilidad de los componentes más pequeños y $p_{[3]} = p_2$ significa que el componente 2 tiene el valor de fiabilidad que es el tercero más bajo. La medida de importancia en un sistema paralelo es:

$$I_R(i) = \frac{\delta}{\delta p_i} r(\mathbf{p}) = \frac{\delta}{\delta p_i}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}(1-p_j)\right) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(1-p_j) \tag{3.29}$$

de forma que el componente más fuerte es el más importante. Es decir,

$$I_R([1]) \leq I_R([2]) \leq \ldots\ldots\ldots \leq I_R([n]) \tag{3.30}$$

y el componente más fiable es el que se debe mejorar en primer lugar.

La resolución de las cuestiones de cómo aumentar la fiabilidad de sistemas ha sido uno de los campos en que los analistas de fiabilidad han contribuido al diseño de sistemas. Las medidas de importancia de fiabilidad dan una base para evaluar la rentabilidad de las inversiones en el rediseño de componentes, u otras estrategias para lograr mejoras.

3.4. Asignación de fiabilidad

Otro planteamiento para aumentar la fiabilidad del sistema es mediante la introducción de redundancias en ubicaciones de componentes escogidos. Es decir, la configuración del sistema se altera sustituyendo un solo componente con dos o más copias del mismo en paralelo. El problema de seleccionar los componentes para los que se hace esto se conoce como el problema de asignación de fiabilidad. Se supone que cada copia de un componente incluido en el sistema tiene un coste. El coste puede en efecto representar el precio del componente, o puede representar un aumento de peso o cualquier otra consecuencia de asignar el componente al diseño. Entonces, el problema de designar las ubicaciones y magnitudes de la redundancia de componentes se puede formular como un programa de enteros. De hecho, existen dos formas algebraicas plausibles para el modelo.

Supongamos que n_i representa el número de copias del componente i-ésimo utilizado en paralelo en la ubicación del sistema para ese componente. Supongamos que c_i representa el coste del componente i-ésimo. Entonces, se puede minimizar el coste del diseño del sistema sujeto a la condición de que se consiga un objetivo específico de fiabilidad de sistema:

$$\text{Mín} \sum_{i=1}^{n} c_i n_i \qquad \text{sujeto a que } r(\mathbf{p}) \geq R, \quad y \quad n_i \geq 1 \quad \forall \quad i \qquad (3.31)$$

Alternativamente, se puede maximizar la fiabilidad del sistema sujeto a límites sobre el coste incurrido:

$$\text{Máx } r(\mathbf{p}) \qquad \text{sujeto a que } \sum_{i=1}^{n} c_i n_i \leq C, \quad y \quad n_i \geq 1 \quad \forall \quad i \qquad (3.32)$$

En esta formulación, la fiabilidad para la posición de cada componente se formula como:

$$\coprod_{j=1}^{n_i} p_i = 1 - (1 - p_i)^{n_i} \qquad (3.33)$$

y los resultados de equivalencia estructural del Capítulo 1 garantizan que la fiabilidad del sistema pueda ser expresada en términos de configuraciones serie y paralelo. Consecuentemente, la solución del problema de asignación de fiabilidad normalmente es bastante manejable.

Debe distinguirse entre la asignación y la distribución de fiabilidad. La distribución de fiabilidad es el proceso de asignar objetivos de fiabilidad a los subsistemas durante el diseño del sistema. Existen algoritmos para llevar esto a cabo, y el más popular es el llamado método ARINC descrito por Lloyd y Lipow [3]. La dificultad principal de este método es que la tarea de distribución está basada en criterios subjetivos. Por esta razón, este algoritmo no está descrito en este trabajo. En contraste, el modelo de asignación definido anteriormente se ocupa del problema de asignación de redundancias, con el fin de lograr un objetivo definido de fiabilidad. Este modelo es por tanto objetivo.

3.5. Forma de la función de fiabilidad

Otro resultado de valor considerable en la evaluación de diseño es el hecho de que para cualquier configuración de componentes idénticos, la función de fiabilidad tiene «forma de S». Es decir, la mejora de la fiabilidad de un componente tiene una influencia sobre la fiabilidad del sistema del tipo que se representa en la Figura 3.2. Las características algebraicas de esta forma son que para un sistema coherente que consta de $n \geq 2$ y componentes idénticos independientes para los que la función de fiabilidad del sistema es $r(\mathbf{p})$:

(a) $p(1-p)\dfrac{dr(p)}{dp} > r(p)\left[1-r(p)\right]$

(b) Si $r(p_0) = p_0$ para algún valor $0 < p_0 < 1$, entonces $r(p) < p$ cuando $0 < p < p_0$ y $r(p) > p$ cuando $p_0 < p < 1$.

(c) Si la estructura no tiene conjuntos de caminos mínimos o conjuntos de cortes mínimos integrados por un solo

componente, entonces p_0 existe en (0,1) de modo que $p_0 = r(p_0)$.

Obsérvese el hecho de que a la izquierda de p_0, el gradiente de la función de fiabilidad del sistema supera a 1. La implicación de este comportamiento es que la inversión en mejoras de la fiabilidad de los componentes puede ser muy rentable inicialmente, pero luego da un rendimiento decreciente.

Es importante observar las condiciones bajo las que se desarrolla el gráfico. En particular, r(p) es cóncava para un sistema serie de componentes idénticos, por tanto las mejoras en la fiabilidad del sistema siempre superan la magnitud de la ganancia inicial en la fiabilidad de los componentes. Es decir, una mejora del 10% en p en el intervalo de 0,80 a 0,88 en sistemas de serie con tres componentes produce un aumento del 33% en la fiabilidad del sistema (de 0,521 a 0,682). En el caso más general en que los componentes no son idénticos, el aumento

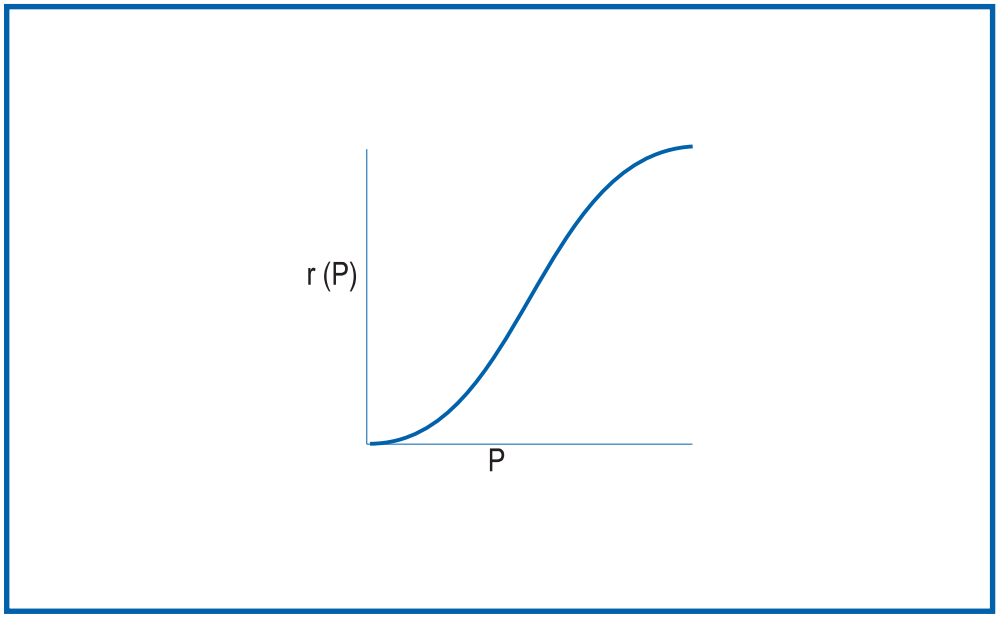


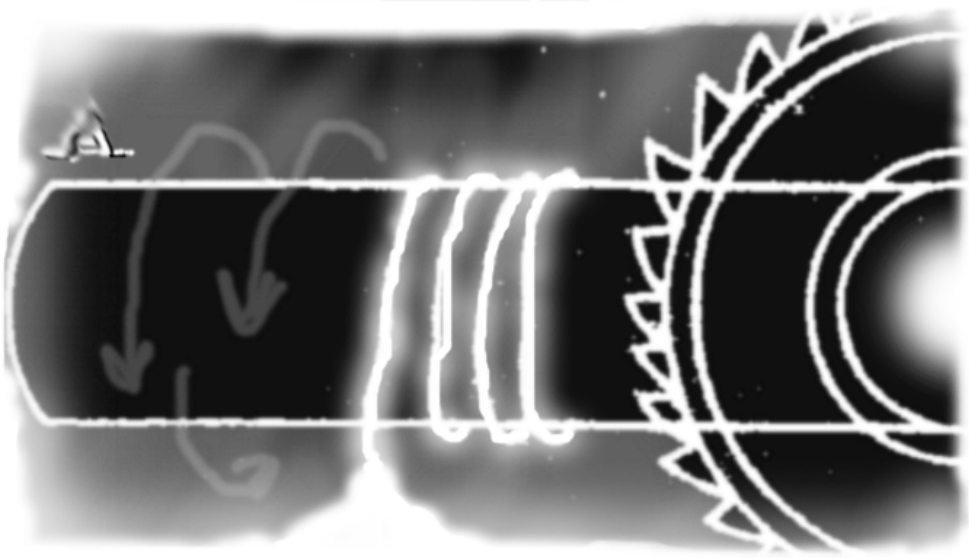
Figura 3.2 - FIABILIDAD DEL SISTEMA
EN FUNCIÓN DE LA DE LOS COMPONENTES -

de la fiabilidad de un componente en un porcentaje dado proporciona el mismo aumento porcentual en la fiabilidad del sistema. Según la lógica correspondiente, r(p) para un sistema paralelo de componentes idénticos es convexa, por tanto los beneficios resultantes del aumento de la fiabilidad de los componentes son menores. En general, la forma «S» de la función de mejora proporciona una guía efectiva para evaluar el interés relativo de invertir en el aumento de fiabilidad de los componentes.

FIABILIDAD

4

La fiabilidad en función del tiempo



La definición de fiabilidad que se dio en el Capítulo 1 indica que la fiabilidad es la probabilidad de funcionamiento satisfactorio a lo largo del tiempo. El supuesto subyaciente implícito es que en una muestra de dispositivos idénticos, la supervivencia (o duración de vida) se dispersa de una manera que se modela bien con la probabilidad y, por tanto, con una función de distribución. Por tanto, la extensión de las medidas de fiabilidad para incluir el tiempo implica la especificación de las distribuciones de probabilidad, las cuales deben ser modelos razonables de la dispersión de duración de vida. Este es el tema de este Capítulo.

4.1. Medidas de fiabilidad

La variable aleatoria que implica la definición de fiabilidad es la duración del funcionamiento o duración de vida. Al denotar la duración de vida por T, la función de distribución sobre T es F(t), en donde:

$$F(t) = \Pr[T \leq t] = \text{probabilidad de que la duracion de vida sea menor o igual a t} \quad (4.1)$$

La función de fiabilidad es entonces:

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \text{probabilidad de que la duracion de vida exceda t} \quad (4.2)$$

La interpretación correspondiente de la notación anterior es:

$$
\begin{aligned}
&x_i \rightarrow x_i(t)\\
&p_i = P[x_i = 1] = E[x_i] \rightarrow \bar{F}_i(t) = P[x_i(t) = 1] = E[x_i(t)]\\
&\phi = \phi(\mathbf{x}) \rightarrow \phi(t) = \phi(\mathbf{x}(t))\\
&r(\mathbf{p}) = P[\phi(\mathbf{x}) = 1] = E[\phi(\mathbf{x})] \rightarrow \bar{F}_s(t) = P\left[\phi(\mathbf{x}(t)) = 1\right] = E\left[\phi(\mathbf{x}(t))\right]
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

donde el subíndice «S» se utiliza para designar la fiabilidad a nivel del sistema. Obsérvese también que gran parte de la discusión que sigue es general, ya que se aplica a cualquier componente. Como no se identifica ningún componente en especial, se excluye el subíndice si no es necesario para alguna clarificación.

La función de distribución sobre la duración de vida es la base de cuatro descriptores algebraicos equivalentes de la longevidad. Estos son F (t), (t), la función de densidad y la función de riesgo. Cuando existe, la función de densidad, f (t), se define como:

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) \tag{4.4}$$

de forma que proporciona una cuantificación de la dispersión de la masa probabilística de la distribución de vida. Para construir la función de riesgo, consideremos una muestra de dispositivos que empiezan a funcionar al mismo tiempo, al que denominaremos t = 0. Si transcurrido algún tiempo observamos esta muestra, puede que algunos hayan fallado mientras que otros todavía funcionen. Quizá queramos evaluar la probabilidad de supervivencia (o fallo) para aquellos dispositivos que han sobrevivido hasta el momento de nuestra observación. Es decir, quizá queramos determinar la probabilidad condicional de la supervivencia continuada. Supongamos que la edad de los dispositivos que funcionan en el momento de observarlos (digamos ahora) se designa por τ, de forma que la probabilidad condicional de fallo durante las próximas unidades de tiempo t es F (t/τ), en donde:

$$F(t+\tau|\tau) = \frac{F(t+\tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)} = \frac{F(t+\tau) - F(\tau)}{\bar{F}(\tau)} \tag{4.5}$$

Al dividir por t y tomando el límite para t tendiendo a 0, obtenemos la tasa instantánea en que los supervivientes fallan:

$$z(\tau)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{F(t+\tau)-F(\tau)}{\bar{F}(\tau)}=\frac{1}{\bar{F}(\tau)}\lim_{t\to 0}\frac{F(t+\tau)-F(\tau)}{t}$$
$$z(r)=\frac{1}{\bar{F}(\tau)}\frac{d}{d\tau}F(\tau)=\frac{f(\tau)}{\bar{F}(\tau)} \qquad (4.6)$$

siempre que f (t) exista. La función z(·) se denomina la función de riesgo, algunos la llaman la función de tasa de fallos y otros la denominan la función de intensidad. Es la probabilidad condicional instantánea de fallo en cualquier instante. Como tal, es útil para caracterizar el comportamiento de fallos de una muestra de dispositivos.

Las cuatro cantidades F (t), , f (t) y z (t) se definen para describir la duración de vida de dispositivos. Obsérvese que el conocimiento de cualquiera de las cuatro implica el conocimiento de todas ellas. En general, todas las expresiones:

$$\bar{F}(t)=1-F(t)$$
$$f(t)=\frac{d}{dt}F(t) \qquad (4.7)$$
$$z(t)=f(t)/\bar{F}(t)$$

pueden invertirse de modo que cualquiera de las cuatro cantidades conduce a las otras. Un ejemplo útil de la inversión es:

$$\bar{F}(t)=e^{-\int_0^t z(u)\,du} \qquad (4.8)$$

Esta expresión se obtiene considerando que la expresión (4.6) es una ecuación diferencial.

La función de riesgo es una cantidad fundamental en el análisis de fiabilidad. Es bastante común que el comportamiento de fallos de dispositivos sea descrito en términos de sus funciones de riesgo. De

hecho, la idea de la curva de la bañera forma la base conceptual para gran parte del estudio de fiabilidad. La idea de la curva de la bañera es que la función de riesgo para una muestra de dispositivos evoluciona como se muestra a continuación en la Figura 4.1. En concreto, al principio de la vida de los dispositivos, los más débiles fallan a una tasa relativamente alta como consecuencia de un fenómeno de «mortalidad infantil», quizá debido a una fabricación defectuosa. Como los primeros fallos retiran de la muestra las copias débiles de los dispositivos, la tasa de riesgo decrece. De un modo parecido, al final de la vida de los dispositivos, los supervivientes fallan como consecuencia del «desgaste», de modo que aumenta la tasa de riesgo. En el intervalo trascurrido entre estos dos comportamientos, la muestra de dispositivos exhibe un riesgo relativamente bajo y aproximadamente constante. Este intervalo se denomina frecuentemente como la vida funcional del dispositivo. En este contexto pueden hacerse dos comentarios significativos: (1) que los humanos y otros seres biológicos muestran un comportamiento de mortalidad análogo y (2) que durante mucho

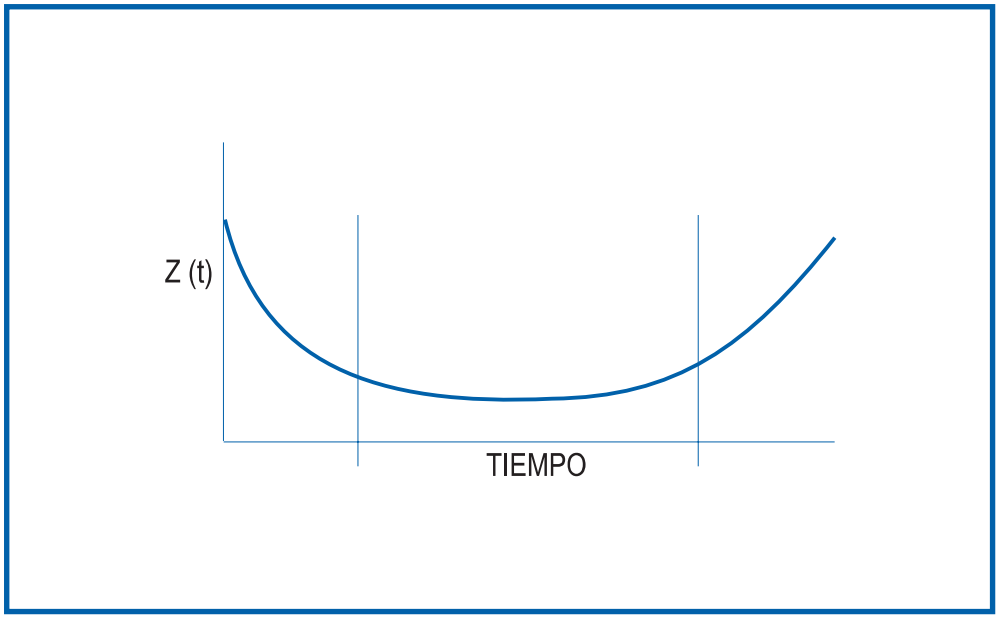


Figura 4.1 - EJEMPLO DE CURVA DE LA BAÑERA -

tiempo las políticas normales de adquisición de equipos militares y para el gobierno han incluido requisitos de prueba («run-in») para intentar evitar la compra de dispositivos que fallen al principio de su vida.

En los últimos años ha habido una polémica considerable acerca de la exactitud de la descripción proporcionada por la curva de la bañera. En vista de las pautas de obsolescencia y de los nuevos resultados de las investigaciones, existen razones para poner en duda el concepto. No obstante, como subraya la relación existente entre la fiabilidad de los dispositivos y la forma de la función de riesgo, la idea de la curva de la bañera proporciona un punto de partida excelente para la definición de los modelos de distribución de probabilidades.

Existen varios resultados y definiciones generales con los que comenzamos la definición de los modelos de probabilidad de duración de vida.

– **Definición 4.1.** Se dice que una distribución de vida F(t) es una distribución de tasa de fallos creciente (Increasing Failure Rate, IFR) si:

$$\frac{d}{dt} z(t) \geq 0 \qquad 0 \leq t < \infty \tag{4.9}$$

Una representación alternativa de la condición (4.9) es que:

$$\bar{F}(t+\tau|\tau) = \frac{\bar{F}(t+\tau)}{\bar{F}(\tau)} \tag{4.10}$$

no es creciente en τ para valores $t \geq 0$.

O de forma equivalente, si la probabilidad de supervivencia condicional es una función no creciente de la edad. O lo que es equivalente, la tasa de fallos aumenta con la edad. De modo similar:

– **Definición 4.2.** Se dice que una distribución de vida F (t) es una distribución de tasa de fallos decreciente (Decreasing Failure Rate, DFR) si:

$$\frac{d}{dt} z(t) \leq 0 \qquad 0 \leq t < \infty \tag{4.11}$$

Una formulación alternativa de la condición (4.11) es que:

$$\bar{F}(t+\tau|\tau) = \frac{\bar{F}(t+\tau)}{\bar{F}(\tau)} \tag{4.12}$$

no es decreciente en τ para valores $t \geq 0$.

La tercera posibilidad es:

– **Definición 4.3.** Se dice que una distribución de vida F(t) es una distribución de tasa de fallos constante (Constant Failure Rate, CFR) si:

$$\frac{d}{dt} z(t) = 0 \qquad 0 \leq t < \infty \tag{4.13}$$

o de modo equivalente:

$$\bar{F}(t+\tau|\tau) = \bar{F}(t) \tag{4.14}$$

para valores $t \geq 0$.

En breve examinaremos con más detalle el caso de tasa de fallos constante. En primer lugar, obsérvese que existen situaciones en que las condiciones para la designación de la distribución como IFR o DFR sólo se cumplen parcialmente. Para manejar casos de esta índole, definimos:

– **Definición 4.4.** Se dice que una distribución de vida F(t) es una distribución de tasa de fallos creciente en promedio (Increasing Failure Rate on Average, IFRA) si:

$$z(t) > \frac{1}{t} \int_0^t z(u)\, du \qquad 0 \leq t < \infty \tag{4.15}$$

y se dice que es una distribución de tasa de fallos decreciente en promedio (Decreasing Failure Rate on Average, DFRA) si:

$$z(t) < \frac{1}{t}\int_0^t z(u)\,du \qquad 0 \le t < \infty \qquad (4.16)$$

Una pregunta que surge de manera natural es cómo las funciones de riesgo se agregan en la formación de sistemas coherentes. Además, es importante saber cuándo los comportamientos de la función de riesgo se conservan al formarse estructuras coherentes, y cuándo se aumentan las duraciones de vida como es el caso de un dispositivo que falla y se sustituye por otro nuevo. Resultados relacionados con esta cuestión son que un sistema coherente ϕ (**x** (t)) que consta de componentes IFRA independientes, o de componentes IFR independientes, tiene una distribución de vida que es IFRA. Además, si los componentes son componentes CFR independientes, la distribución de vida del sistema también es IFRA.

A pesar de que es bastante prematuro mencionarlo aquí, obsérvese que cuando se repone un componente de un sistema al fallar, la suma de los tiempos de funcionamiento de las copias del componente utilizado son con frecuencia una cantidad significativa que debe analizarse. En tales casos, también es útil saber que la convolución de las distribuciones IFR es IFR y que la convolución (ver Apéndice B) de distribuciones IFRA es IFRA. No se pueden aplicar las mismas afirmaciones a las DFR y DFRA.

Antes de dejar la discusión general de la métrica de fiabilidad por cuestiones más específicas, debemos observar que hay dos formas algebraicas adicionales extensamente utilizadas en el estudio de fiabilidad de dispositivos. Estas son la distribución de vida residual y la función cumulativa de riesgo. La distribución de vida residual es la distribución sobre la duración de vida que sigue a la supervivencia hasta un momento específico en el tiempo. En realidad es la distribución de vida condicional en cualquier momento, por ejemplo τ. Por tanto, se puede representar por F ($t+\tau/\tau$).

La función cumulativa de riesgo, Z (t), es la integral de la función de riesgo en el intervalo (0,t). Es decir:

$$Z(t) = \int_0^t z(u)\,du \qquad (4.17)$$

Esta función tiene varias aplicaciones para el análisis de problemas de fiabilidad, y se utilizará frecuentemente en discusiones posteriores. Se utiliza mucho en el contexto de secuencias o reposiciones de dispositivos y en el análisis de datos. Sin ofrecer aquí ninguna explicación, se observa sin embargo que Z (t) es una aproximación al número de reposiciones que se harían (fallos) si un conjunto de copias de un dispositivo funcionase simultáneamente con la reposición instantánea de cualquiera que fallase.

4.2. Distribuciones de vida

En principio, se puede utilizar cualquier función de distribución para crear un modelo de duración de equipos. En la práctica, las funciones de distribución que tienen funciones de riesgo monotónicas parecen más realistas y, dentro de esta clase, existen unas pocas que son consideradas como aquellas que proporcionan los modelos más razonables de fiabilidad de dispositivos. La función de distribución que se utiliza más a menudo para modelar la fiabilidad es la distribución exponencial. Esta es un modelo de fiabilidad de dispositivos tan popular porque (1) es sencillo algebraicamente y por tanto tratable y (2) se considera representativo del intervalo de vida funcional del ciclo de vida del dispositivo. Algunas personas creen que las empresas gestionan sus componentes o dispositivos envejeciéndolos a lo largo del ciclo de vida inicial antes de ponerlos en servicio. Se espera que los dispositivos estén obsoletos antes de llegar al período de desgaste, de forma que un modelo apropiado de fiabilidad de dispositivos es uno que tiene un riesgo constante. Este punto de vista es controvertido. No obstante, se utiliza mucho el modelo exponencial.

La distribución exponencial es la única distribución de probabilidad que tiene una función de riesgo constante. La expresión general de la exponencial es:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad 0 \le t < \infty \qquad (4.18)$$

en donde el parámetro λ no es negativo. Obsérvese que para esta función de distribución:

$$z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \qquad (4.19)$$

la cual es constante con respecto al tiempo. Esta es tanto una característica deseable como indeseable del modelo. El atractivo del resultado estriba en su simplicidad. Problemas con el modelo de riesgo constante giran en torno a la propiedad asociada de «ausencia de memoria» que exhibe, y el hecho asociado de que la probabilidad de supervivencia condicional es independiente de la edad. Es decir:

$$P\left[T > t_1 + t_2 \mid T > t_1\right] = P\left[T > t_2\right] = e^{-\lambda t_2} \qquad (4.20)$$

Un resultado incondicional correspondiente es que:

$$P\left[T > t_1 + t_2\right] = e^{-\lambda(t_1 + t_2)} = e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} = P\left[T > t_1\right] P\left[T > t_2\right] \qquad (4.21)$$

Una interpretación de estos resultados es que un dispositivo usado tiene la misma fiabilidad que uno nuevo, y la misma fiabilidad que otro que haya sido utilizado durante un período más largo. Esto es contrario a la intuición. Una última observación relativa al modelo exponencial es el hecho de que la distribución de vida de un sistema serie que consta de componentes independientes, cada uno de los cuales tiene una distribución de vida exponencial, es exponencial. Obsérvese que esto implica que la función de riesgo para el sistema serie se calcula como la suma de las de los componentes.

Un modelo de distribución de vida alternativo que también se utiliza mucho es la distribución Weibull. Se puede presentar de varias maneras. La más general es:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\delta}{\theta-\delta}\right)^{\beta}} \qquad (4.22)$$

donde δ es un parámetro de vida mínima o ubicación que con frecuencia se supone cero. En este caso, la función de distribución es:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \tag{4.23}$$

donde θ es el parámetro de escala y β es el parámetro de forma. El parámetro de escala determina el intervalo de dispersión y también se le llama vida característica:

$$F(t = \theta) = 1 - e^{-1} = 0{,}632 \tag{4.24}$$

el cual es independiente del valor de β. Una expresión alternativa y conveniente de la función de distribución es:

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^{\beta}} \tag{4.25}$$

que se obtiene reemplazando $\theta^{-\beta}$ con α. Las dos formas son claramente equivalentes, así que aquí se utiliza (4.25).

Para la distribución Weibull, el parámetro de forma determina la forma de la función de riesgo. La expresión general de la función de riesgo es:

$$z(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1} \tag{4.26}$$

y crece cuando β>1, decrece cuando β<1, y es constante cuando β=1. Esto se muestra en la Figura 4.2. Obsérvese que el caso en que β=1, no sólo da un riesgo constante, sino que implica también que la función de distribución se reduce a la distribución exponencial. Esta es otra confirmación de que sólo la distribución exponencial tiene riesgo constante.

La distribución Weibull se utiliza extensivamente en el desarrollo de modelos de fiabilidad. Tiene la ventaja de la flexibilidad a la hora de crear modelos de varios tipos de comportamiento de riesgo, y también

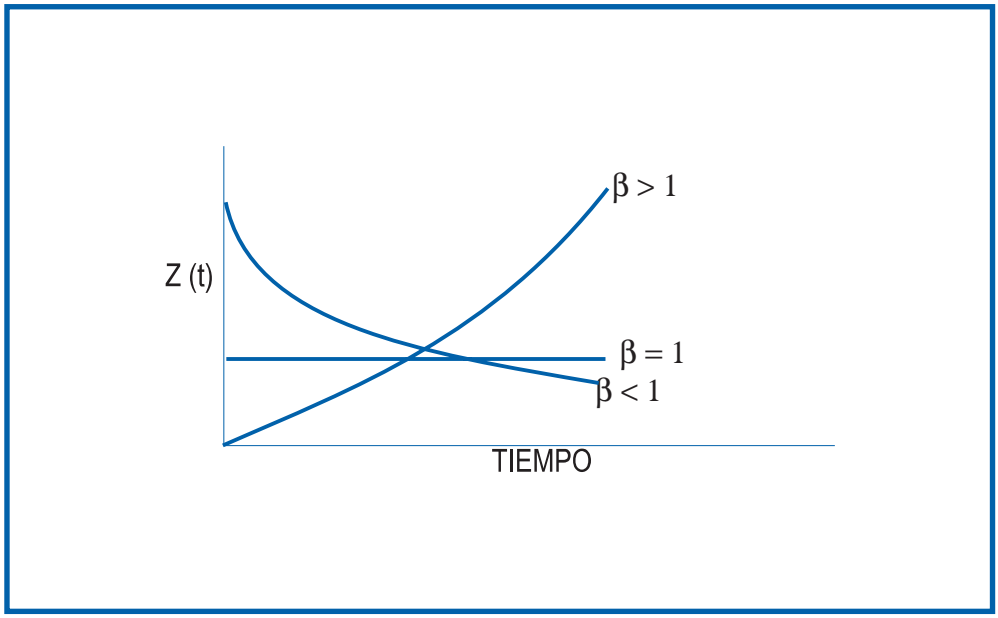


Figura 4.2 - FUNCIONES DE RIESGO WEIBULL -

es manejable algebraicamente. Además, como con cualquier distribución con dos parámetros, puede describir bastante bien muchas situaciones reales. Existen otras dos razones por las que se utiliza tan extensamente la distribución Weibull. Una es que cuando Weibull [4] desarrolló la forma de distribución por primera vez, lo hizo para representar el comportamiento de fallos de muestras extensibles, y la otra es que la distribución Weibull es una distribución de valores extremos. Si se considera que un dispositivo puede fallar debido a alguna de varias causas posibles, el primer mecanismo de fallo que ocurra (tiempo mínimo hasta su aparición) determina el fallo del dispositivo. Por tanto, el tiempo de fallo es el valor mínimo de un conjunto, y debe ser representado utilizando una distribución de la clase de distribuciones de valores extremos.

Supongamos que existen algunas, digamos k, causas posibles de fallo (eslabones de una cadena, unidades de material, especies reactivas, etc.) y que cada causa se activa con el tiempo de acuerdo

con una distribución idéntica e independiente, el tiempo de fallo de los dispositivos es el mínimo de los tiempos de activación de las causas:

$$F(t) = k\,P\left[T_j \le t\right] \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{k} P\left[T_i > t\right]\right) \tag{4.27}$$

Gumbel [5] mostró que en el límite cuando k tiende a infinito, la distribución F sólo puede tener una de tres formas posibles, y que éstas corresponden a casos de variables aleatorias negativas, no sujetas a condiciones, y positivas. La forma para variables aleatorias no negativas tiene la distribución Weibull como caso representativo. Así, la distribución Weibull tiene una interpretación física bastante verosímil.

Otro modelo popular es el de la distribución normal. Debido a que no es tratable algebraicamente, la distribución normal se expresa generalmente en términos de su función de densidad:

$$f(t) = \frac{e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{4.28}$$

La función correspondiente de distribución se tabula generalmente de forma estandarizada y se puede evaluar también numéricamente con facilidad. También es bien conocido que los parámetros corresponden a los momentos de la distribución. Es decir, $\mu=E[t]$ es la media de la distribución y σ^2 es la varianza, la cual es igual a $E[t^2] - E^2[t]$. La distribución normal muestra un riesgo creciente y la demostración de este hecho es un ejercicio interesante. Como se dice más adelante, se suele considerar que la distribución normal es un modelo muy apropiado para la fiabilidad de componentes estructurales.

Por otra parte, se considera frecuentemente que la distribución logarítmica normal es un modelo representativo de la duración de vida de ciertos componentes electrónicos. En la distribución logarítmica

normal, la cantidad x=ln(t) tiene una distribución normal. Por tanto, la función de densidad es:

$$f(t) = \frac{e^{-(\ln t - \mu)^2 / 2\sigma^2}}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{4.29}$$

lo cual implica un nivel de intractabilidad algebraica comparable al de la distribución normal. El modelo es bastante útil y muestra la característica única de que para valores de los parámetros seleccionados adecuadamente, la función de riesgo aumenta y luego disminuye.

Hay otra distribución que se utiliza extensamente para el desarrollo de modelos de fiabilidad. Esta es la distribución gamma. La representación de la función de densidad para la distribución gamma es:

$$f(t) = \frac{\lambda^{\beta}}{\Gamma(\beta)} t^{\beta - 1} e^{-\lambda t} \tag{4.30}$$

y la función de distribución puede expresarse analíticamente sólo cuando el parámetro β es entero. En este caso, la función de distribución es:

$$F(t) = \sum_{k=\beta}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{4.31}$$

Como en el caso de la distribución Weibull, este modelo muestra un riesgo creciente cuando $\beta>1$, un riesgo decreciente cuando $\beta<1$, y un riesgo constante cuando $\beta=1$. Su desventaja es que es bastante difícil tratarla algebraicamente, pero su ventaja es que surge naturalmente como la convolución de distribuciones exponenciales. Por tanto, tiene un interés práctico considerable como veremos más adelante en este estudio con relación a los procesos de fallos físicos.

Un último modelo que merece la pena mencionar es el sugerido por Hjorth [6]. Ninguna de las funciones de distribución mencionadas previamente proporciona realmente funciones de riesgo en forma de curva de la bañera. Reconociendo esto, Hjorth sugiere el uso de lo que

él llama una distribución IDB (Increasing, Decreasing, Bathtub) para la que la expresión general de la función de distribución es:

$$F(t) = 1 - \frac{e^{-\delta t^2/2}}{(1+\beta t)^{\theta/\beta}} \tag{4.32}$$

y para la que la función de riesgo es:

$$z(t) = \delta t + \frac{\theta}{1+\beta t} \tag{4.33}$$

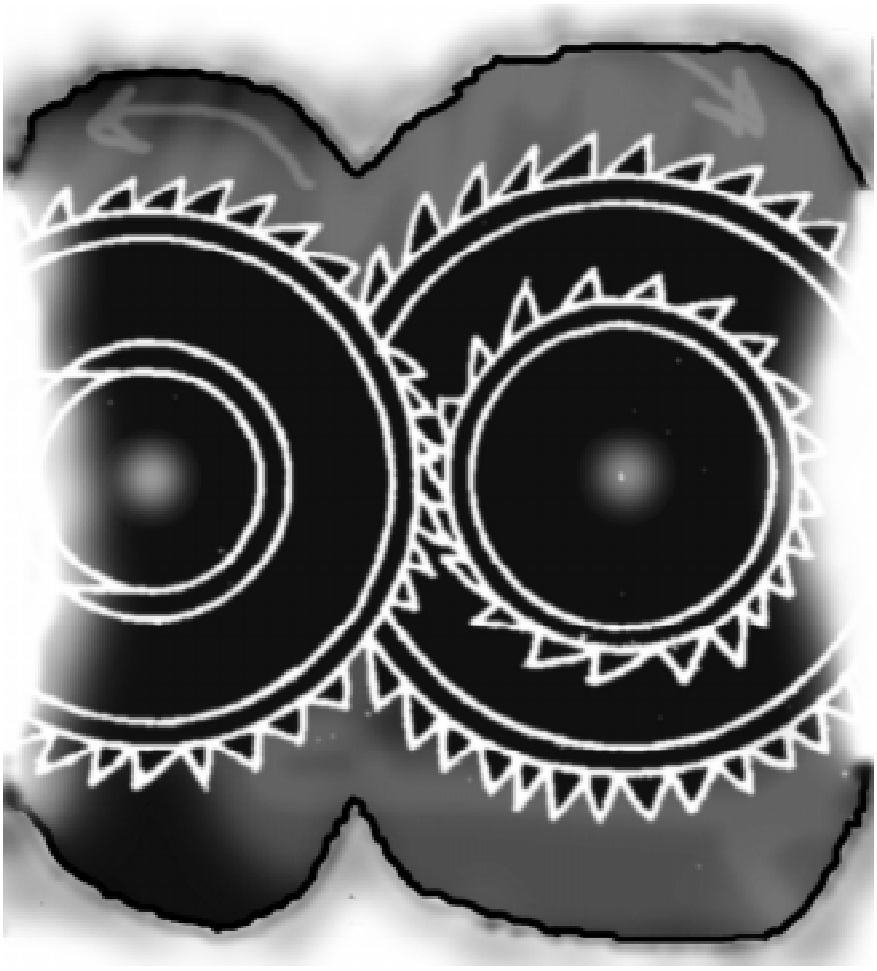
A pesar de su aparente complicación, Hjorth señala que es posible lograr que esta distribución muestre un comportamiento creciente, decreciente o de curva de la bañera (de aquí el nombre IDB) si se seleccionan los parámetros de forma adecuada. En particular, θ=0 da un tipo especial de IFR Weibull, δ=β=0 da un tipo exponencial, δ=0 da una tasa de fallos decreciente, $\delta \geq \theta\beta$ implica una tasa de fallos creciente, y 0<δ<$\theta\beta$ da una función de riesgo en forma de curva de la bañera. Aunque solamente sea por su flexibilidad, el modelo es digno de consideración.

En conclusión, se observa que existen muchos tipos de dispositivos. Algunas personas distinguen entre sistemas mecánicos o estructurales y eléctricos o electrónicos, mientras que otras definen las clases de equipos aun más minuciosamente. Probablemente existen ejemplos en que cada una de las distribuciones mencionadas proporciona un modelo efectivo.

FIABILIDAD

5

Procesos de fallo



El cuarto integrante de la definición de fiabilidad es el entorno. Para examinar las relaciones entre el entorno de funcionamiento y la fiabilidad, comenzamos con la pregunta de por qué fallan los equipos. Una respuesta razonable es que normalmente el fallo de un sistema se debe al fallo o fallos de uno o varios componentes. Esta es una razón por la que los modelos de estructura componentes-sistema son importantes. ¿Entonces por qué fallan los componentes? Una respuesta verosímil es que la operación de un sistema implica la imposición de fuerzas (energía) sobre el sistema y sus componentes. Estas fuerzas inducen y sostienen el progreso de varios tipos de procesos de deterioro, los cuales finalmente tienen como resultado el fallo de componentes.

Una parte sustancial del esfuerzo científico y de ingeniería que ha constituido la evolución de la disciplina de la fiabilidad se ha centrado en el estudio y en la realización de modelos de los procesos de degradación de componentes. Existe un gran número de modelos, algunos de los cuales se describen aquí.

5.1. Modelos de fallos mecánicos

Tradicionalmente se han desarrollado modelos de fallos desde una perspectiva mecánica o eléctrica. A menudo se considera que la fiabilidad de los equipos mecánicos depende de la integridad estructural, la cual es influenciada por las cargas aplicadas y la fuerza inherente. Por contraste, la fiabilidad de dispositivos eléctricos se ha considerado

usualmente como dependiente de la estabilidad material, a pesar de exposiciones a reacciones químicas hostiles como la oxidación. Sólo recientemente algunos analistas han sugerido que ambos tipos de fiabilidad son el resultado de clases comunes de fenómenos. De este modo, los modelos elementales desarrollados para procesos de fallos han sido diferentes para dispositivos mecánicos y eléctricos.

Una representación inicial y todavía popular de la fiabilidad de un dispositivo mecánico es el modelo de «interferencia de tensión-fuerza». Bajo este modelo, existe una dispersión aleatoria de la tensión, y, la cual es resultado de las cargas aplicadas. La tensión puede ser modelada por la función de distribución H(y). Análogamente, hay también una dispersión aleatoria en la fuerza inherente de los dispositivos, x, la cual puede ser modelada por G(x). Entonces, la fiabilidad de los dispositivos corresponde al fenómeno de que la fuerza es mayor que la tensión. Es decir:

$$R = P[X > Y] = \int_0^\infty \int_y^\infty h(y)\, g(x)\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_x^\infty h(y)\, g(x)\, dy\, dx \qquad (5.1)$$

para la que existen las expresiones equivalentes:

$$R = P[X > Y] = \int_0^\infty h(y)\,(1 - G(y))\, dy = \int_0^\infty H(x)\, g(x)\, dx \qquad (5.2)$$

La probabilidad de fallos es el complemento de la fiabilidad. Puesto que la expresión anterior es independiente del tiempo, la definición del modelo de fiabilidad se centra en la selección de las distribuciones G y H, y en la representación de la evolución en el tiempo de estas distribuciones. Un modelo popular de este tipo está basado en la suposición de que la tensión tiene una distribución normal con una media y varianza constantes, mientras que la fuerza también es normal pero con una media decreciente y una varianza creciente. En este caso:

$$R(t) = \int_0^t P[X(u) > Y(u)]\, du = \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \Phi\left(\frac{x - \mu_y}{\sigma_y}\right) \phi\left(\frac{x - \mu_x(u)}{\sigma_x(u)}\right) dx\, du \qquad (5.3)$$

donde se puede usar:

$$\mu_x(t) = \mu_x(0) - \alpha t \qquad y \qquad \sigma_x(t) = \sigma_x(0) + \beta t \tag{5.4}$$

o cualquier otra función para representar la evolución de la distribución de fuerza. La expresión (5.3) puede requerir una solución numérica, pero esto no se considera como un inconveniente importante para su uso. De hecho, modelos como el de la expresión (5.2) se han estudiado extensamente. Kapur y Lamberson [7] han obtenido soluciones que no dependen del tiempo para varias opciones de G y H.

Un modelo alternativo que se utiliza de manera más extendida es el modelo de daños cumulativos. El modelo de daños cumulativos elemental empieza con la hipótesis de que un dispositivo está sujeto a «choques» que ocurren de modo aleatorio en el tiempo. Cada choque transmite una cuantía aleatoria de daños en el dispositivo, el cual falla cuando se excede un umbral de capacidad o de tolerancia. La realización más común de este modelo incluye la suposición de que los choques ocurren de acuerdo con un proceso de Poisson con intensidad λ, y las cantidades de daños por choque se distribuyen independiente e idénticamente.

Supongamos que x representa el umbral del daño y obsérvese que si el choque i-ésimo produce un daño X_i, entonces después de que hayan ocurrido k choques, el daño total es la suma de k cantidades de daño. El daño total, por lo tanto se distribuye de acuerdo con la convolución «k-ésima» de la distribución sobre X_i. Denotando la distribución sobre los X_i como G, la fiabilidad del dispositivo es:

$$\bar{F}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} G^{(k)}(x) \tag{5.5}$$

que es la probabilidad de que sobre cualquier cantidad determinada de choques el daño cumulativo no exceda el umbral de fallos. Hay que tener en cuenta que se supone que $G^{(0)}(x) = 1$. Debe observarse también

que independientemente de la elección de la distribución de daño, G, la ecuación (5.5) da una distribución IFRA.

Hay varias extensiones del modelo de daño cumulativo que proporciona un mayor realismo si ello es necesario. Una extensión consiste en que las funciones de daño evolucionen en el tiempo para reflejar el hecho de que los choques posteriores dañan más al dispositivo. Otras extensiones hacen que el umbral de los fallos sea una función decreciente de tiempo para representar una menor tolerancia al daño. Otras características del modelo son la correlación en el proceso de choque o la posibilidad de tipos de múltiples choques. En cada uno de estos casos, la distribución de vida resultante es IFRA.

5.2. Modelos de fallos electrónicos

En gran medida, los modelos de fiabilidad de dispositivos eléctricos y electrónicos se deben a observaciones empíricas y fueron desarrollados con posterioridad a los modelos de fiabilidad mecánicos. La rápida evolución de los dispositivos electrónicos, especialmente los microelectrónicos, supuso un empuje considerable en el desarrollo de los modelos de fiabilidad para dispositivos electrónicos. Además, debido a que un sistema complejo, como el de un avión, incluye muchos más componentes electrónicos que mecánicos, y también porque la duración de los primeros dispositivos electrónicos era considerablemente más corta que la de los dispositivos mecánicos, la fiabilidad de los dispositivos electrónicos ha recibido una gran atención.

La mayoría de los modelos desarrollados se basan en la idea de que lo procesos de degradación de los dispositivos electrónicos son esencialmente reacciones de conversión química, que tienen lugar en los materiales que integran los dispositivos. Consecuentemente, muchos modelos están basados en la ecuación de tasa de reacción de Arrhenius [8], que tomó su nombre del químico del siglo XIX que desarrolló la ecuación durante el estudio de reacciones irreversibles

como la oxidación. La forma básica de la ecuación es que la tasa de reacción, ρ, es:

$$\rho = \eta\, e^{-E_a/KT} \tag{5.6}$$

donde η es un factor de frecuencia de electrones, K es la constante de Boltzmann (8,623x10^{-5} ev/°K), T es la temperatura en grados Kelvin, y E_a es la energía libre de activación de Gibb. Para la realización de modelos de fiabilidad, el producto de la tasa de reacción, ρ, y del tiempo da la extensión del progreso de la reacción de deterioro, y por tanto se considera que corresponde al riesgo cumulativo en el tiempo t. Un ejemplo de la distribución Weibull es:

$$Z(t) = \alpha(\rho t)^{\beta} \tag{5.7}$$

y además se puede observar que las funciones de tasa alternativas pueden ser (y a veces los son) utilizadas, pero se aplican del mismo modo. Hasta hace poco, las relaciones científicas y algebraicas entre funciones de tasa como la de la ecuación (5.6) y las distribuciones de vida y funciones de riesgo no se han estudiado en profundidad. No obstante, los modelos implicados como el de la ecuación (5.7) se utilizan mucho y se ha comprobado su precisión.

5.3. Riesgos proporcionales

El modelo de riesgos proporcionales, que originalmente fue propuesto por Cox [9], ofrece una representación más unificada de la relación entre el entorno y el proceso de fallos. Hay muchas formas de describir este modelo. Una forma general, conceptualmente interesante, es:

$$z = z(t, \mathbf{x}) \tag{5.8}$$

en donde t de nuevo representa el tiempo y **x** es un vector de variables del entorno. La forma propuesta inicialmente por Cox es:

$$z = z(t, \mathbf{x}) = z_0(t)\, e^{\gamma' x} \tag{5.9}$$

donde el producto vectorial $\gamma'\mathbf{x}$ es un producto ordinario que da un escalar. La idea es que la función de riesgo correspondiente a la distribución sobre la duración de vida varía según (de hecho, como una función de) las características del entorno en el que opera un dispositivo. La forma (5.9) hace que el riesgo bajo un conjunto específico de condiciones, descritas por el vector **x**, sea proporcional a un riesgo base. El coeficiente de tasa de cambio es independiente del tiempo. Una consecuencia importante de esta formulación es que la forma (y la identidad) de la distribución de vida se conserva bajo todas las condiciones de funcionamiento.

Una generalización lógica del modelo de riesgos proporcionales es permitir que el coeficiente de tasa de cambio sea dependiente del tiempo. Parece ser que esta forma del modelo global debería proporcionar un formato para la unificación de los modelos de distribución de vida de los dispositivos mecánicos y electrónicos.

5.4. Aceleración de edad

Después de lo expuesto anteriormente sobre los efectos del entorno sobre el deterioro, parece natural hablar de la aceleración de la edad. Conceptos como los que ya hemos mencionado llevan a una aceptación bastante extendida de la premisa de que la manipulación del entorno de funcionamiento se puede utilizar para incrementar la tasa de envejecimiento de una muestra de dispositivos. Esto tiene dos aplicaciones útiles. Se hace referencia a la primera como «pruebas de vidas aceleradas», y a la segunda como «cribado».

Como implica el término, las pruebas de vidas aceleradas consisten en el uso de la aceleración de edad para estudiar la longevidad de dispositivos. Se pueden obtener estimaciones de los valores de los parámetros de distribución de vida, o por lo menos acotaciones de

tolerancia sobre la fiabilidad. Se puede reconocer un rendimiento de fiabilidad insatisfactorio o se puede investigar una sensibilidad a factores específicos del entorno. El enfoque recae en las pruebas y en el apoyo al diseño y desarrollo de productos. Para muchos tipos de dispositivos, la fiabilidad es suficiente para excluir la posibilidad de pruebas bajo condiciones normales, durante un intervalo de tiempo lo suficientemente largo como para evaluar la fiabilidad de dispositivos. Por ejemplo, los dispositivos microelectrónicos modernos suelen tener una duración de vida media entre 25 y 50 años. La aceleración de edad ofrece un método para el estudio de la fiabilidad de nuevos diseños en un intervalo de tiempo aceptable.

En contraposición a las pruebas de vida acelerada, la investigación de condiciones extremas es el uso de la aceleración de la edad para envejecer una muestra de dispositivos más allá de la primera fase de vida, y justo antes de su uso por parte del cliente. Es un medio de aislar a los clientes de las tasas de riesgo, inicialmente altas, de dispositivos DFR con respecto a un diseño de producto determinado.

Para ambas aplicaciones se modifica el entorno de funcionamiento de un dispositivo dentro de los límites que éste debería ser capaz de tolerar. Es decir, es importante mantener la naturaleza de los procesos de fallos para que el comportamiento del envejecimiento observado sea consistente. Si se hace esto, se cree normalmente que el tipo de riesgos proporcionales del aumento de la tasa de riesgo se obtiene de tal manera que la forma de la distribución se mantiene. Así, la aceleración de la edad sólo comprime la escala de tiempo y:

$$F_a(t) = F(a \cdot t) \tag{5.10}$$

donde «a» es un factor de aceleración de edad. Es decir, la distribución de vida bajo aceleración es igual a la distribución original cuando se implementa para una escala de tiempo que se comprime por el factor «a». Las representaciones Weibull y exponencial de esto son las siguientes:

$$F_a(t) = 1 - e^{-\alpha' t^{\beta'}} = F(at) = 1 - e^{-\alpha(at)^{\beta}} \quad (5.11)$$

$$F_a(t) = 1 - e^{-\lambda' t} = F(at) = 1 - e^{-\lambda at} \quad (5.12)$$

La interpretación del factor «a» es que el dispositivo envejece «a» horas por cada hora de funcionamiento bajo las condiciones modificadas de operación.

Hay que tener en cuenta que se puede manipular la ecuación (5.11) para dar el resultado siguiente:

$$a = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} t^{\frac{\beta'}{\beta} - 1} \quad (5.13)$$

el cual sirve para resaltar el hecho de que cuando la aceleración de edad siempre conserva la forma de distribución de vida, sólo se produce una compresión de escala de tiempo que $\beta'=\beta$, y la ecuación (5.13) se reduce a:

$$a = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (5.14)$$

En el caso de los dispositivos electrónicos, también se puede calcular el factor de aceleración, como el ratio entre la tasa de la reacción de degradación en el entorno del diseño y la tasa prevalente en el entorno de condiciones extremas. La ecuación de Arrhenius proporciona un ejemplo oportuno y muy utilizado:

$$a = \frac{\rho_a}{\rho_0} = \frac{e^{-E_a/KT_a}}{e^{-E_a/KT_0}} = e^{\frac{E_a}{K}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_a}\right)} \quad (5.15)$$

Pongamos un ejemplo. Un dispositivo que tiene E_a=0,8 y funciona normalmente a 55° C experimenta una aceleración de edad de 21,6 a 95° C. Esto significa que envejece 21,6 horas por cada hora que funciona a esta elevada temperatura. Dos últimos puntos en relación con esto son: (1) generalmente se considera que la tensión térmica es la modificación del entorno más efectiva para la aceleración de la edad de dispositivos electrónicos, y (2) la aceptación de la influencia de la

temperatura sobre dispositivos electrónicos ha llevado a esfuerzos considerables para asegurar el adecuado enfriamiento de estos dispositivos.

Se han desarrollado modelos para el uso de otras variables de tensión para dispositivos electrónicos. Una ley de este tipo es el modelo de ley de potencia para la tensión de voltaje. Bajo este modelo, se supone que la duración de vida media es inversamente proporcional a una función polinómica del voltaje aplicado:

$$\mu = E[t] = C/V^p \tag{5.16}$$

en donde C es un factor de proporcionalidad determinado empíricamente, y p es la potencia también determinada empíricamente. Para este modelo, el factor de aceleración es el ratio de la vida media bajo condiciones extremas y bajo condiciones normales:

$$a = \mu_a/\mu_0 = (V_0/V_a)^p \tag{5.17}$$

Por ejemplo, un dispositivo con un parámetro de la ley de potencia p = 2,2, y que funciona normalmente a 5 milivoltios, experimentará una aceleración de edad de a = 2,81 cuando funciona a 8 milivoltios.

Otro modelo de aplicación de condiciones extremas es el modelo Eyring para los efectos combinados de tensiones de temperatura y voltaje. Esto realmente es una extensión de la ecuación Arrhenius. La forma general es que la tasa de reacción está dada:

$$\rho = \eta\, e^{-E_a/KT}\, e^{\gamma_1 V - \gamma_2 V/KT} \tag{5.18}$$

donde γ_1 y γ_2 corresponden a energías de activación. Entonces el factor de aceleración es:

$$a = \rho_a/\rho_0 = e^{\frac{E_a}{K}\left[\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T_a}\right]}\, e^{\gamma_1(V_a - V_0) + \frac{\gamma_2}{K}\left[\frac{V_0}{T_0}-\frac{V_a}{T_a}\right]} \tag{5.19}$$

Si suponemos de nuevo que V_0=5 milivoltios, T_0=55°C, V_a=8 milivoltios, y T_a=95°C, un dispositivo con E_a=0,8, γ_1=0,2 y γ_2=-0,04 experimenta un factor de aceleración de a = 80,2.

El modelo de Eyring también ilustra el hecho de que se pueden utilizar tensiones múltiples para lograr una aceleración de edad aun mayor. De hecho, se ha debatido mucho sobre si la aplicación de tensiones múltiples producía un efecto sinergístico o no. Si ello fuera así, la aceleración neta debería exceder el producto simple de las aceleraciones debidas a cada tensión. El modelo de Eyring incluye este tipo de efecto interactivo. Otros modelos no.

La situación de los modelos de fallos mecánicos es bastante diferente a la de los de dispositivos electrónicos. En electrónica, se considera que los modelos como la ecuación de Arrhenius y el modelo de Eyring se aplican a diversas clases de dispositivos y, de hecho, se pueden aplicar de forma generalizada. En contraste, se han desarrollado muy pocos modelos de aceleración de edad para los dispositivos mecánicos, y aquellos que existen están asociados con productos específicos. No hay modelos de aceleración de edad de aplicación general para dispositivos mecánicos. Por tanto, las pruebas de vida de componentes mecánicos se basan normalmente, en una frecuencia creciente de actuación para los componentes. Un ejemplo clásico de esto es la manipulación de la bisagra de la puerta de un coche, utilizando una máquina que abra y cierre la puerta continuamente. La edad no se acelera. En cambio, la tasa de uso (o actuación) se incrementa, con el fin de obtener los datos de la prueba en un tiempo razonable.

5.5. Cribado

Como se ha indicado anteriormente la aceleración de la edad se utiliza en segundo lugar en «cribado». Ésta se utiliza especialmente en los equipos electrónicos para reducir la frecuencia de fallos de campo. El concepto es que todas las copias de un dispositivo funcionan en un

entorno modificado durante el tiempo suficiente para envejecer todos los dispositivos que sobrevivan más allá de su primera etapa de vida, cuando la tasa de riesgo es alta, hasta el tiempo de vida funcional, cuando el riesgo es relativamente más bajo y constante. El coste de esto se justifica por la reducción en fallos de campo y la disminución asociada de los problemas que encuentra el usuario de los equipos (el cliente).

Se han definido modelos de optimización para seleccionar el régimen de tensión más rentable. En estos modelos, los costes de la aplicación de tensión del entorno a los dispositivos y los costes de producto perdido se equilibran, ya que se evitan los costes de los fallos que se hubiesen experimentado como resultado de fallos durante el uso del producto por parte del cliente. Las soluciones obtenidas indican que, para muchos tipos de dispositivos electrónicos, el cribado es una estrategia valiosa para gestionar la fiabilidad de los dispositivos.

5.6. Crecimiento de la fiabilidad

Otro aspecto del estudio de procesos de fallos es la creencia de que el diseño y el desarrollo de un nuevo dispositivo, y la evolución de los métodos de fabricación del nuevo diseño, tienen como resultado una mejora en la fiabilidad de una muestra de dispositivos. Esta mejora se puede describir como una reducción en la función de riesgo «basada en la experiencia». Para examinar esta idea, recuerde que la función de riesgo cumulativa es una aproximación al número esperado de fallos que se observarían en la operación de un conjunto de copias de un dispositivo.

Durante el desarrollo de un producto, J.T. Duane [10] observó que el número cumulativo de fallos producidos durante las pruebas dividido por el tiempo de prueba cumulativo decrecía, y era una función casi lineal del logaritmo doble del tiempo de prueba cumulativo. Duane examinó sus datos y llegó a la conclusión que la función de la ley de

potencia proporcionaría una buena aproximación al comportamiento observado:

$$N(T) = \delta T^{\eta} \tag{5.20}$$

en donde N (T) es el número cumulativo de fallos observados y T es el tiempo de prueba cumulativo. Duane entonces sugirió que la derivada de N (T) debería corresponder a una estimación de la «tasa instantánea de fallos», lo cual es equivalente a una función de riesgo:

$$z(T) = \frac{d}{dT} N(T) = \delta \eta T^{\eta - 1} \tag{5.21}$$

Es importante observar aquí que la función de riesgo mostrada no es la función de riesgo sobre la vida de la muestra de dispositivos. En cambio, Duane supone que el fallo se rige por un proceso de riesgo constante y la expresión (5.21) representa la mejora realizada en la tasa de riesgo como consecuencia de modificaciones en el diseño y del aprendizaje en la fabricación de un dispositivo.

Crow [11] propuso una mejora al modelo de Duane basada en el reconocimiento de que los datos de muestra observados presenta una variabilidad estadística de modo que N (T) es una realización de un proceso aleatorio. Crow afirmó que la manera de incluir esta faceta probabilística consiste en tratar el proceso de fallos como un proceso no homogéneo de Poisson. El resultado es que el modelo de ley de potencia se aplica al valor esperado de N (T):

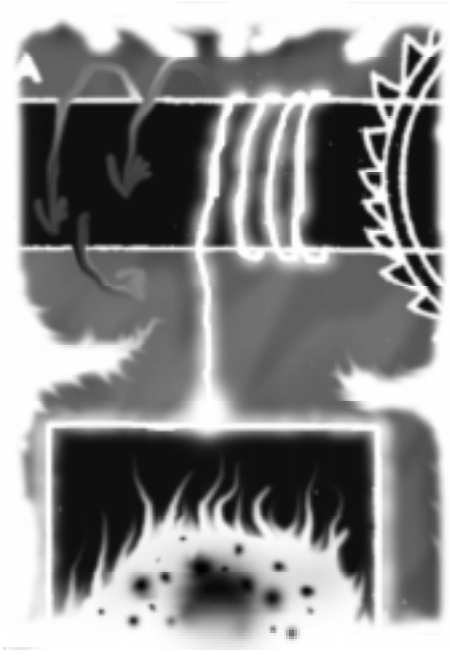
$$E\left[N(T)\right] = \delta T^{\eta} \tag{5.22}$$

pero todos los demás aspectos de la definición son los mismos. Consecuentemente, ambos modelos dan los mismos patrones de crecimiento. La diferencia es que el modelo basado en la probabilidad de Crow está sujeto al análisis estadístico. Como consecuencia, el modelo de Crow y su análisis estadístico se incluyen en un estándar militar de los Estados Unidos [12] y son muy utilizados.

FIABILIDAD

6

Métodos estadísticos de estimación de fiabilidad



Dada la dependencia de la fiabilidad de los sistemas de la de sus componentes, los métodos estadísticos se centran en la estimación utilizando los datos obtenidos durante las pruebas de vida de éstos. Como se ha mencionado previamente, las pruebas a menudo utilizan la aceleración de la edad. Sin tener en cuenta si éste es o no el caso, los datos de los fallos se obtienen operando una muestra de copias idénticas de un dispositivo y observando los tiempos en que ocurren los fallos.

Las pruebas pueden continuar hasta que todos los elementos de la muestra hayan fallado, o bien se pueden interrumpir, en cuyo caso se diría que el conjunto de datos obtenidos ha sido censurado. Aquí se describen ambos casos, pero en principio se da por hecho que la prueba no se ha censurado. Los tiempos de fallos observados se convierten en el conjunto de datos al que se aplican los métodos estadísticos para obtener estimaciones de fiabilidad.

Hay muchos métodos estadísticos que se pueden utilizar para calcular estimaciones. De hecho, se continúan desarrollando nuevos métodos. Los métodos útiles existentes se pueden clasificar en no paramétricos y paramétricos. Los métodos más extendidos son los paramétricos y las estimaciones que se obtienen apoyan unos análisis posteriores más detallados. Los métodos no paramétricos tienden a ser más sencillos. Ambos son útiles en varias aplicaciones, por lo que aquí describiremos los dos.

6.1. Estimación no paramétrica

La ventaja principal que proporcionan los métodos no paramétricos en el estudio de la fiabilidad de dispositivos es que no requieren

ninguna suposición relativa a la identidad o la forma de la distribución de vida. No es necesario suponer restricciones potenciales sobre el comportamiento.

Otra ventaja también significativa es que las cantidades estimadas con métodos no paramétricos suelen ser más fáciles de calcular y manipular que las que se derivan de métodos paramétricos. La desventaja más importante del uso de métodos no paramétricos es que las estimaciones obtenidas normalmente no permiten deducir inferencias relativas a la forma.

Para examinar algunos de los métodos no paramétricos, supongamos que se pone a prueba una muestra de n copias de un dispositivo y que los tiempos de fallo de los elementos se registran como t_1, t_2, ..., t_n. El conjunto de tiempos, t_j, constituye un conjunto de datos de muestra de la distribución de vida. Por tanto, se puede analizar el conjunto de datos con cualquiera de los métodos estadísticos convencionales que son específicos de los estudios de fiabilidad. Por ejemplo, es razonable calcular una media de muestra y tratar los números resultantes como una estimación de la media de la distribución de vida. Además, se pueden utilizar las técnicas usuales en la computación de intervalos de confianza sobre la estimación.

Puesto que los métodos estadísticos generales, por ejemplo aquellos con los que se calculan los intervalos de confianza sobre un conjunto de datos de muestra, se tratan en la mayoría de los libros de estadística, aquí sólo hablaremos de los métodos que se centran específicamente en aplicaciones de fiabilidad.

Para comenzar el examen de los métodos no paramétricos, supongamos que los tiempos de fallo observados se asignan al vector x en orden creciente. Es decir, supongamos que:

$$x_i = t_{[i]} \tag{6.1}$$

de forma que x_i es el y-ésimo tiempo mínimo de fallo observado. A continuación, supongamos que p_i denota la probabilidad de que x_i está en un intervalo (t, t + Δ t). Para que esto ocurra, i-1 de los tiempos de fallo no debe ocurrir antes de que t, y n-i de los tiempos debe ocurrir después de t + Δ t. Si se usa la distribución multinomial y tomando el límite para Δ t tendiendo a 0, la probabilidad de que esto ocurra es:

$$p_i = \frac{n!}{(1-i)!\,1!\,(n-i)!}\left[F(t)\right]^{i-1}\left[f(t)\,dt\right]\left[1-F(t)\right]^{n-i} \qquad (6.2)$$

lo cual en la literatura estadística se denomina la distribución sobre el estadístico de orden i-ésimo. Una interpretación conceptual de la cantidad p_i es que, dado un fallo en el tiempo t, ésta es la probabilidad condicional de que el fallo sea el i-ésimo de la muestra n. Las propiedades de distribuciones sobre estadísticas de orden han sido estudiadas extensamente. Entre los resultados conocidos y que se consideran útiles están el que: la media de la distribución sobre el estadístico de orden i-ésimo es i/n, y la media de la distribución es:

$$\frac{i-}{n+} \qquad (6.3)$$

Tanto la distribución en sí como estos resultados tienen aplicaciones útiles.

En particular, obsérvese que para la proporción u=F(x_i), la distribución sobre u es beta con parámetros i y n-i+1:

(6.4)

donde la diferencial corresponde a f(t) dt. Con esto se puede obtener una estimación de una acotación de tolerancia sobre τ_γ en donde τ_γ es el tiempo para el que:

$$F\left(\tau_\gamma\right) = \gamma \qquad (6.5)$$

Cuando se supone que γ es relativamente pequeño, 1-F(τ_γ) es 1-γ y τ_γ se llama la vida fiable. Un caso especial de este problema

surge cuando se calcula la acotación con el estadístico de primer orden y se especifican α y γ. En este caso, i = 1, de modo que la ecuación (6.4) se reduce a:

$$f(u) = n(1-u)^{n-1}\,du \tag{6.6}$$

y por tanto

$$F(u) = (1-u)^{n} \tag{6.7}$$

La cuestión es determinar el tamaño de muestra necesario para que el estadístico de primer orden, x_i, dé una acotación de confianza 100(1-α)% sobre τ_γ. La solución es que n sea el entero más pequeño para el que:

$$\alpha = (1-\gamma)^{n} \tag{6.8}$$

Puesto que la solución debe ser entera, se obtiene una confianza que es mayor o igual a 100(1-α)%. Consideremos un ejemplo. Supongamos que γ=0,10 α=0,05; entonces, $P[\tau_{0,10} \geq x_1] \geq 0,95$ para una muestra de tamaño n=29. Asimismo, si x_i = 100 horas, entonces con un margen de confianza del 95%, el 90% de la muestra de los dispositivos tienen vidas superiores a 100 horas.

Pueden definirse acotaciones de tolerancia más generales. En concreto, la relación entre las distribuciones beta y binomial permite la definición de acotaciones generales de confianza. Para cualquiera de los n tiempos al fallo observados:

$$P\left[R(x_i) \geq 1-\gamma\right] \;\geq\; 1-\alpha \tag{6.9}$$

en donde γ es el mínimo valor para el que:

$$B(i,n,\gamma) \;\leq\; \alpha \tag{6.10}$$

y B(i, n, γ) es la probabilidad binomial cumulativa de i acontecimientos en una población de n elementos con probabilidad γ de acontecimiento.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que el conjunto de tiempos al fallo (escalados) mostrados en la Tabla 6.1 fueron obtenidos durante una prueba de vida.

El conjunto de datos ordenados correspondiente se muestra en la Tabla 6.2. Utilizando (6.5) y (6.6), se obtienen acotaciones de confianza del 95% sobre la fiabilidad para x_3=0,026 y para x_6=0,068, como se muestra a continuación. Para x_3, el valor mínimo de γ para que B(3, 50, γ) no exceda a 0,05 es 0,148. Por consiguiente, tenemos al menos un 95% de confianza que R(0,026) $\geq$ 0,852. Análogamente, puesto que el valor mínimo para que B(6, 50, γ) no exceda a 0,05 es 0,223, tenemos al menos un 95% de confianza para que R(0,068) $\geq$ 0,777.

Si para una aplicación determinada lo único que se necesita son estimaciones sencillas de la probabilidad de fallo (o de fiabilidad), se puede usar la media o la mediana de la distribución de grados. Por lógica, se usaría:

0,883	0,875	5,292	0,038	4,631
1,690	0,615	2,877	1,943	3,106
1,555	3,503	1,541	1,218	1,285
2,190	0,720	0,056	0,006	0,279
0,129	0,455	2,008	0,783	1,803
2,505	0,465	1,494	0,795	0,299
0,829	0,548	1,016	0,223	3,354
1,559	3,785	0,599	0,090	0,026
0,894	0,336	0,129	1,373	0,613
1,272	0,019	0,068	0,658	3,085

Tabla 6.1 - EJEMPLO DE DATOS DE PRUEBA DE VIDA -

0,006	0,019	0,026	0,038	0,056
0,068	0,090	0,129	0,129	0,023
0,279	0,299	0,336	0,455	0,465
0,548	0,599	0,613	0,615	0,658
0,720	0,783	0,795	0,829	0,875
0,883	0,894	1,016	1,218	1,272
1,285	1,373	1,494	1,541	1,555
1,559	1,690	1,803	1,943	2,008
2,190	2,505	2,887	3,085	3,106
3,354	3,503	3,785	4,631	5,292

Tabla 6.2 - EJEMPLO DE DATOS ORDENADOS DE PRUEBA DE VIDA -

$$\hat{F}(x_i) = \frac{i}{n} \tag{6.11}$$

pero se ha encontrado a menudo que el grado intermedio proporciona una estimación más útil, en parte debido a que no alcanza el valor 1 para x_n. En este caso:

$$\hat{F}(x_i) = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \tag{6.12}$$

y algunas de las estimaciones no paramétricas resultantes de la distribución y la fiabilidad son:

$$\begin{aligned} \hat{F}(0,599) &= (17 - 0,3)/(50 + 0,4) = 0,331 & \hat{R}(0,599) &= 0,669 \\ \hat{F}(1,285) &= (31 - 0,3)/(50 + 0,4) = 0,609 & \hat{R}(1,285) &= 0,391 \\ \hat{F}(2,008) &= (40 - 0,3)/(50 + 0,4) = 0,788 & \hat{R}(2,008) &= 0,212 \\ \hat{F}(5,292) &= (50 - 0,3)/(50 + 0,4) = 0,986 & \hat{R}(5,292) &= 0,014 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Barlow y Campo [13] han desarrollado recientemente un método no paramétrico para caracterizar el comportamiento de riesgo de una

muestra de dispositivos; este método ha sido explicado con eficacia por Klefsjo [14]. El método se conoce como la transformada del Tiempo Total de Prueba (Total Time on Test, TTT). La idea básica es que para cualquier distribución de vida (con una media finita), la relación entre la media y la función de riesgo puede ser utilizada para caracterizar el comportamiento de la distribución. Además, esto puede hacerse para una representación empírica de la distribución de vida basada en datos de prueba.

Con el fin de ver el comportamiento que se debe utilizar, suponga-mos que una muestra de dispositivos tiene la distribución de vida F(t). Entonces, para cualquier probabilidad cumulativa, por ejemplo u, $F^{-1}(u)$ es el tiempo para el que la probabilidad cumulativa de fallo es u. Formalmente:

$$F^{-1}(u) = \min\{t \mid F(t) \geq u\} \tag{6.14}$$

Por ejemplo, si F(t) es la exponencial con λ=0,84, entonces F(0,75)=0,467 y $F^{-1}(0,467)$=0,75. Entonces:

– **Definición 6.1.** La transformada del Tiempo Total de Prueba de la distribución de vida F(t), con una media finita μ, se designa por $H_F^{-1}(u)$ y está dada por:

$$H_F^{-1}(u) = \int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(y)\, dy \tag{6.15}$$

en donde designa la función de fiabilidad.

Continuando con el ejemplo exponencial, se puede ver que:

$$H_F^{-1}(u = 0,467) = \int_0^{F^{-1}(0,467)} e^{-\lambda y}\, dy = \int_0^{0,75} e^{-\lambda y}\, dy = 0,467/\lambda = 0,556 \tag{6.16}$$

Nótese que la transformada tiene dos propiedades útiles e importantes. La primera es que:

$$H_F^{-1}(1) = \int_0^{F^{-1}(1)} \bar{F}(y)\, dy = \int_0^{\infty} \bar{F}(y)\, dy = \mu \tag{6.17}$$

y la segunda es que:

$$\frac{d}{du} H_F^{-1}(u) = \frac{d}{du} \int_0^{F^{-1}(u)} \bar{F}(y)\, dy = \left(\frac{d}{du} F^{-1}(u) \right) \bar{F}\left(F^{-1}(u)\right) = \frac{1-u}{f\left(F^{-1}(u)\right)} \qquad (6.18)$$

de forma que

$$\left. \frac{d}{du} H_F^{-1}(u) \right| = \frac{1}{z(t)} \qquad \left| u = F(t) \right. \qquad (6.19)$$

Estos resultados expresan el hecho de que la transformada TTT evaluada a u=1 da la media de la distribución de vida, y cuando en general se evalúa su derivada para u=F(t), el resultado obtenido es la recíproca de la función de riesgo. En términos del ejemplo de la distribución exponencial $H_F^{-1}(1)=1/\lambda$, lo mismo que la derivada de $H_F^{-1}(u)$.

Al combinar los resultados de (6.17) y (6.19), la relación de las transformadas permite la definición de una escala útil:

– **Definición 6.2.** La transformada escalada del Tiempo Total de Prueba (TTT) de la distribución de vida F(t) con una media finita de μ, se designa por $\Theta_F(u)$ y está dada por:

$$\Theta_F(u) = H_F^{-1}(u) \,/\, H_F^{-1}(1) = H_F^{-1}(u)/\mu \qquad (6.20)$$

en donde μ representa la media de la distribución de vida.

Obsérvese que:

$$\frac{d}{du} \Theta_F(u) = \left(\frac{d}{du} H_F^{-1}(u) \right) \Big/ \mu \qquad (6.21)$$

y recordemos que la evaluación de la derivada de $H_F^{-1}(u)$ en u=F(t) da el recíproco de la función de riesgo. Luego, supongamos que la distribución de vida es exponencial. En este caso, la transformada

TTT a escala tiene una derivada igual a 1 para todos los valores de n. Por tanto,

$$\Theta_F(u) = u \tag{6.22}$$

y la pendiente de la transformada TTT a escala para una distribución de riesgo constante es 1, de modo que origina una línea de pendiente de 45°.

Se puede mostrar que para una distribución de IFR:

$$\Theta_F(u) \geq u \tag{6.23}$$

de forma que la curva de la transformada de TTT a escala es cóncava y está por encima de la línea de 45°, mientras que para una distribución DFR:

$$\Theta_F(u) \leq u \tag{6.24}$$

y su curva es convexa y está por debajo de la línea de 45°.

La aplicación de la transformada TTT a escala al análisis de los datos de prueba proporciona un método sencillo para la caracterización del comportamiento de riesgo. Supongamos que una muestra de n copias de un dispositivo se somete a prueba, y que se registran los r primeros tiempos al fallo, después de los cuales la prueba se termina. Más adelante describiremos la terminación anticipada de un ensayo de vida. De momento, designamos los tiempos de fallo como t_1, t_2, ..., t_r, y luego usamos la misma regla de clasificación de datos que la utilizada anteriormente, de forma que $x_i=t_{[i]}$. Teniendo en cuenta que los x_i están ordenados, nótese que para cualquier i:

$$T(x_i) = \sum_{j=1}^{i} x_j + (n-i)\,x_i \tag{6.25}$$

y en particular:

$$T(x_r) = \sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\,x_r \tag{6.26}$$

es el tiempo total observado de funcionamiento de los dispositivos bajo prueba, es decir, es el tiempo total de prueba. Estas cantidades también pueden ser descritas de la siguiente forma:

$$T(x_i) = nx_1 + (n-1)(x_2 - x_1) + (n-2)(x_3 - x_2) + \ldots\ldots\ldots + (n-i+1)(x_i - x_{i-1})$$

$$T(x_i) = \sum_{j=1}^{i} (n-j+1)(x_j - x_{j-1}) \tag{6.27}$$

y:

$$T(x_r) = \sum_{i=1}^{r} (n-i+1)(x_i - x_{i-1}) \tag{6.28}$$

en donde por definición x_0=0. Correspondiendo a estos resultados de prueba, definamos la función de distribución cumulativa empírica del tiempo de fallo, $F_n(t)$. Utilizando la estadística de orden, x_i, y los resultados descritos previamente para la media de la distribución sobre los estadísticos de orden:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < x_1 \\ i/n & \text{para } x_i \le t < x_{i+1} \\ 1 & \text{para } t \ge x_n \end{cases} \tag{6.29}$$

Recordemos ahora la definición de $F^{-1}(u)$ y apliquémosla a $F_n(t)$, de forma que:

$$F_n^{-1}(u) = \min\{x \mid F_n(x) \ge u\} \tag{6.30}$$

el cual es el tiempo mínimo de fallo con una probabilidad cumulativa igual o mayor que u. Consideremos como ejemplo el conjunto de datos mostrado en las Tablas 6.1 y 6.2 haciendo r=n:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0{,}0 \le t < 0{,}006 \\ 0{,}02 & \text{para } 0{,}006 \le t < 0{,}019 \\ 0{,}04 & \text{para } 0{,}019 \le t < 0{,}026 \\ 0{,}06 & \text{para } 0{,}026 \le t < 0{,}038 \\ 0{,}08 & \text{para } 0{,}038 \le t < 0{,}056 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 0{,}98 & \text{para } 4{,}631 \le t < 5{,}292 \\ 1{,}00 & \text{para } 5{,}292 \le t < \infty \end{cases} \quad (6.31)$$

Si examinamos este ejemplo con más detalle, nótese que para u=0,05 se tiene $F_n^{-1}(u)=0{,}026$ y para u=0,975 se tiene $F_n^{-1}(u)=4{,}631$. Nótese además que $T(x_1)=50(0{,}006)=0{,}300$; $T(x_2)=50(0{,}006)+49(0{,}013)=0{,}937$; y $T(x_3)=50(0{,}006)+49(0{,}013)+48(0{,}007)=1{,}273$.

Ahora, la transformada TTT se define de la misma forma para $F_n(t)$ que lo fue para F(t) en general. En particular:

$$H_{F_n}^{-1}(u) = \int_0^{F_n^{-1}(u)} \bar{F}_n(y)\,dy \quad (6.32)$$

En la aplicación a los datos de prueba de vida, la transformada es más interesante para el valor x_i, en donde:

$$F_n^{-1}(i/n) = x_i \quad (6.33)$$

y

$$H_{F_n}^{-1}(i/n) = \int_0^{F_n^{-1}(i/n)} \bar{F}_n(y)\,dy = \frac{1}{n} T(x_i) \quad (6.34)$$

La expresión (6.34) no es completamente obvia. Nótese que $F_n(y)$ es una función escalera que toma valores i/n de forma que $\bar{F}_n = (y)$ toma los valores (n-i)/n. Por consiguiente, cada integral puede ser calculada como la suma de integrales sobre los peldaños adyacentes, cada uno de los cuales tiene por ancho x_j-x_{j-1}. El resultado es (6.34). Ahora consideremos el comportamiento límite de la transformada TTT sobre la distribución empírica a medida que el tamaño n de la muestra tiende a infinito:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ i/n\to s}} H_{F_n}^{-1}(i/n) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ i/n\to s}} \int_0^{F_n^{-1}(i/n)} \bar{F}_n(y)\,dy = \int_0^{F^{-1}(s)} \bar{F}(y)\,dy = H_F^{-1}(s) \tag{6.35}$$

que es la transformada TTT de la distribución subyaciente de fallos. Es decir, la distribución empírica basada en los datos es representativa de la distribución actual de vida, por lo que la transformada TTT es por tanto representativa. En consecuencia, podemos usar la transformada TTT obtenida a partir de los datos para caracterizar la distribución subyaciente de vida. Por supuesto, en realidad usamos la transformada TTT a escala, Θ. Para esta transformada la conclusión es la misma porque el límite anterior se aplica al caso s = 1.

La aplicación a los datos de muestra implicada por las consideraciones y los resultados anteriores es que las cantidades $T(x_i)$ y $T(x_n)$ se calculan y su relación se traza como función de i/n. Si el resultado es aproximadamente una línea de 45°, se concluye que la distribución de vida es un riesgo constante. Por una parte, si la curva es cóncava y se sitúa por encima de la línea de 45°, se concluye que la distribución de vida es IFR; por otra parte, si la curva es convexa y se encuentra por debajo de la línea de 45°, la conclusión es que la distribución de vida es DFR.

Antes de considerar algunos ejemplos, debe notarse que a menudo es razonable concluir una prueba de vida antes de que todos los dispositivos de la muestra hayan fallado. En este caso, la prueba de vida y el conjunto de datos de la muestra se consideran censurados. Si se supone por el momento que el tiempo de censura corresponde al tiempo de fallo r-ésimo, el ajuste al análisis de la transformada TTT a escala es someter a $T(x_i)$ a la escala de $T(x_r)$, y trazar el resultado en función de i/r, teniendo en cuenta que $\hat{F}(x_r) = r/n = p_r$, de modo que el valor límite de $T(x_r)$ es $H_F^{-1}(p)$ en vez de μ.

Como primer ejemplo, consideremos los datos mostrados en las Tablas 6.1 y 6.2. Cuando se utiliza el conjunto completo de datos, los valores calculados para la transformada a escala son los de la Tabla 6.3.

x_i	i/n	$\Theta(x_i)$	x_i	i/n	$\Theta(x_i)$	x_i	i/n	$\Theta(x_i)$
0,006	0,02	0,0046	0,613	0,36	0,3665	1,555	0,70	0,6951
0,019	0,04	0,0143	0,615	0,38	0,3674	1,559	0,72	0,6960
0,026	0,06	0,0194	0,658	0,40	0,3878	1,690	0,74	0,7240
0,038	0,08	0,0281	0,720	0,42	0,4162	1,803	0,76	0,7464
0,056	0,10	0,0407	0,783	0,44	0,4441	1,943	0,78	0,7721
0,068	0,12	0,0489	0,795	0,46	0,4492	2,008	0,80	0,7830
0,090	0,14	0,0637	0,829	0,48	0,4633	2,190	0,82	0,8108
0,129	0,16	0,0893	0,875	0,50	0,4815	2,505	0,84	0,8541
0,129	0,18	0,0893	0,883	0,52	0,4846	2,887	0,86	0,8947
0,223	0,20	0,1482	0,894	0,54	0,4886	3,085	0,88	0,9212
0,279	0,22	0,1824	1,016	0,56	0,5315	3,106	0,90	0,9231
0,299	0,24	0,1943	1,218	0,58	0,5993	3,354	0,92	0,9420
0,336	0,26	0,2158	1,272	0,60	0,6167	3,503	0,94	0,9511
0,455	0,28	0,2831	1,285	0,62	0,6206	3,785	0,96	0,9641
0,465	0,30	0,2886	1,373	0,64	0,6462	4,631	0,98	0,9899
0,548	0,32	0,3329	1,494	0,66	0,6794	5,292	1,00	1,0
0,599	0,34	0,3594	1,542	0,68	0,6916			

Tabla 6.3 - CONJUNTO COMPLETO DE DATOS -

Un examen de estos valores indica que los datos proceden de una distribución de vida de riesgo constante. A continuación, en la Figura 6.1/a se muestra una representación gráfica de los valores.

Las curvas correspondientes a los mismos datos en las que se utiliza r = 12 y r = 20 se muestran en las Figuras 6.1/b y 6.1/c, respectivamente. Los valores numéricos asociados de la transformada a escala son los de la Tabla 6.4.

Estos datos ilustran el hecho de que la calidad de la curva mejora a medida que la fracción incluida de la muestra aumenta.

Consideremos otro ejemplo en que el conjunto completo de datos es el mostrado en la Tabla 6.5. Nótese que en este caso los datos ya están ordenados. Los valores de los datos para n=50 proporcionan la curva TTT a escala mostrada en el Figura 6.2, la cual está basada en los valores numéricos dados a continuación. Obsérvese que la curva

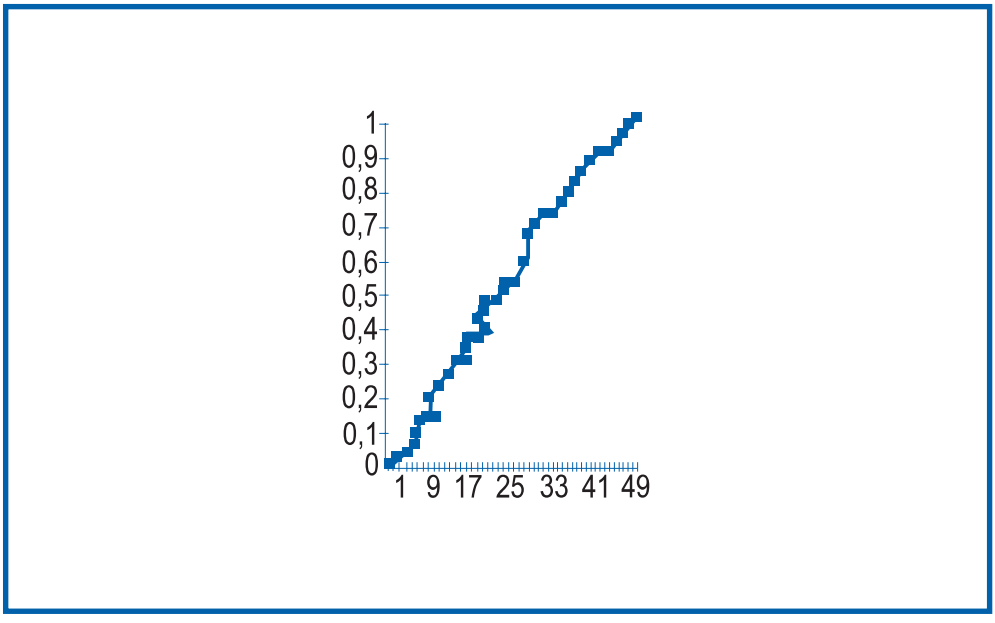


Figura 6.1/a - r = n -

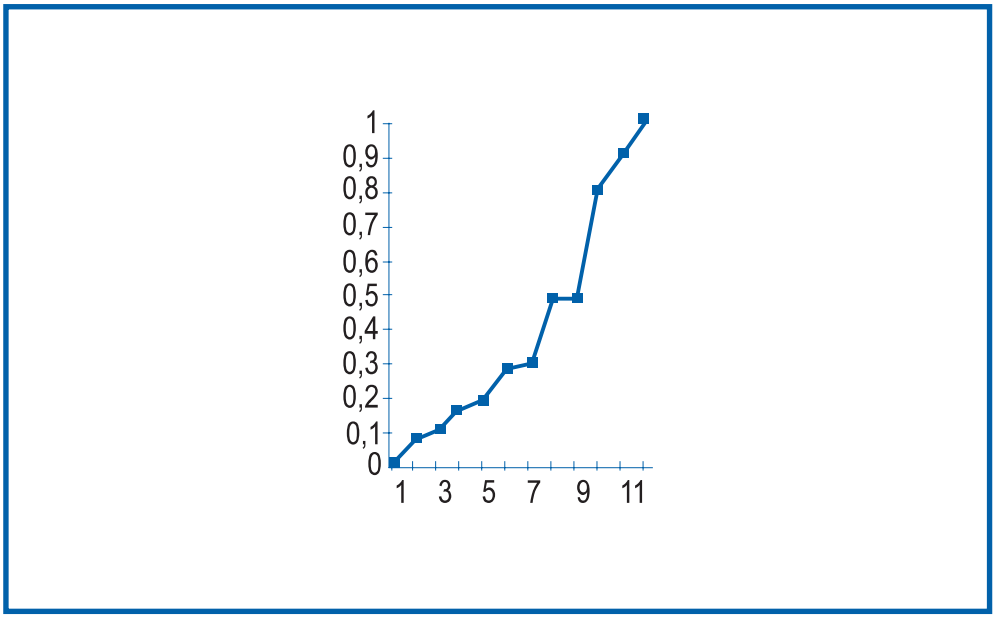


Figura 6.1/b - r = 12 -

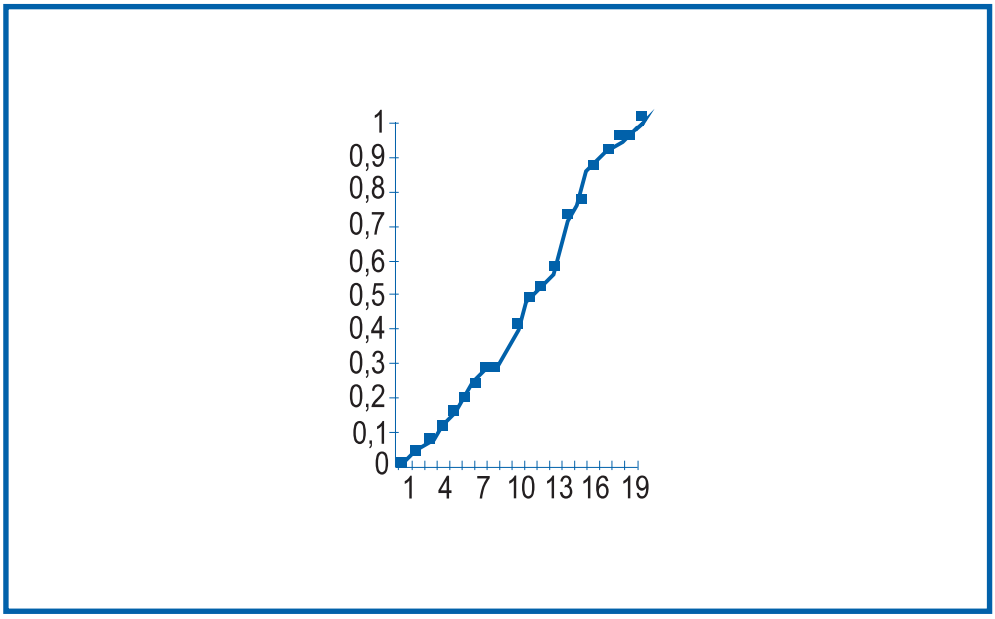


Figura 6.1/c - r = 20 -

	r = 12		r = 20	
x_i	i / r	$\Theta(x_i)$	i / r	$\Theta(x_i)$
0,006	0,083	0,0236	0,05	0,0118
0,019	0,167	0,0736	0,10	0,0369
0,026	0,250	0,1000	0,15	0,0501
0,038	0,333	0,1444	0,20	0,0723
0,056	0,417	0,2094	0,25	0.1050
0,068	0,500	0,2519	0,30	0,1262
0,090	0,583	0,3280	0,35	0,1643
0,129	0,667	0,4598	0,40	0,2304
0,129	0,750	0,4598	0,45	0,2304
0,223	0,833	0,7627	0,50	0,3822
0,279	0,917	0,9387	0,55	0,4704
0,299	1,0	1,0	0,60	0,5011
0,336			0,65	0,5565
0,455			0,70	0,7299
0,465			0,75	0,7441
0,548			0,80	0,8585
0,599			0,85	0,9268
0,613			0,90	0,9450
0,615			0,95	0,9475
0,658			1,0	1,0

Tabla 6.4 - CONJUNTO CENSURADO DE DATOS -

0,023	0,025	0,081	0,110	0,185
0,226	0,230	0,278	0,278	0,287
0,303	0,370	0,371	0,373	0,394
0,400	0,412	0,435	0,449	0,494
0,511	0,522	0,532	0,571	0,579
0,596	0,605	0,627	0,673	0,756
0,754	0,767	0,795	0,802	0,873
0,884	0,936	0,993	1,001	1,087
1,224	1,252	1,344	1,378	1,562
1,580	1,653	1,659	1,764	2,520

Tabla 6.5 - EJEMPLO DE DATOS DE PRUEBA DE VIDA ORDENADOS -

es claramente cóncava y que está situada enteramente por encima de la línea 45°. La conclusión apropiada es que la distribución de vida que produjo estos datos es de tipo IFR, como es el caso.

Los datos fueron generados para β=1,25. Pueden realizarse los análisis correspondientes utilizándose una muestra censurada y se obtienen los mismos resultados. Por tanto, la transformada TTT proporciona un método no paramétrico eficaz para caracterizar el comportamiento de riesgo de la distribución de vida.

6.2. Censurado de datos

Antes de describir los métodos de descripción paramétrica debe examinarse más cuidadosamente la idea del censurado de datos. En general, hay dos tipos de truncamiento de las pruebas, cada uno de los cuales produce un tipo diferente de censurado de datos. Una prueba

x_i	i/n	$\Theta(x_i)$	x_i	i/n	$\Theta(x_i)$	x_i	i/n	$\Theta(x_i)$
0,023	0,02	0,0315	0,435	0,36	0,5121	0,873	0,70	0,7880
0,025	0,04	0,0342	0,449	0,38	0,5243	0,884	0,72	0,7925
0,081	0,06	0,1078	0,494	0,40	0,5625	0,936	0,74	0,8125
0,110	0,08	0,1451	0,511	0,42	0,5765	0,993	0,76	0,8328
0,185	0,10	0,2396	0,522	0,44	0,5852	1,001	0,78	0,8354
0,226	0,12	0,2901	0,532	0,46	0,5929	1,087	0,80	0,8613
0,230	0,14	0,2949	0,571	0,48	0,6217	1,224	0,82	0,8988
0,278	0,16	0,3514	0,579	0,50	0,6274	1,252	0,84	0,9057
0,278	0,18	0,3514	0,596	0,52	0,6391	1,344	0,86	0,9259
0,287	0,20	0,3615	0,605	0,54	0,6450	1,378	0,88	0,9324
0,303	0,22	0,3790	0,627	0,56	0,6588	1,562	0,90	0,9626
0,370	0,24	0,4506	0,673	0,58	0,6865	1,580	0,92	0,9651
0,371	0,26	0,4516	0,753	0,60	0,7325	1,653	0,94	0,9731
0,373	0,28	0,4537	0,754	0,62	0,7331	1,659	0,96	0,9735
0,394	0,30	0,4744	0,767	0,64	0,7398	1,764	0,98	0,9793
0,400	0,32	0,4801	0,795	0,66	0,7536	2,520	1,00	1,0
0,412	0,34	0,4973	0,802	0,68	0,7569			

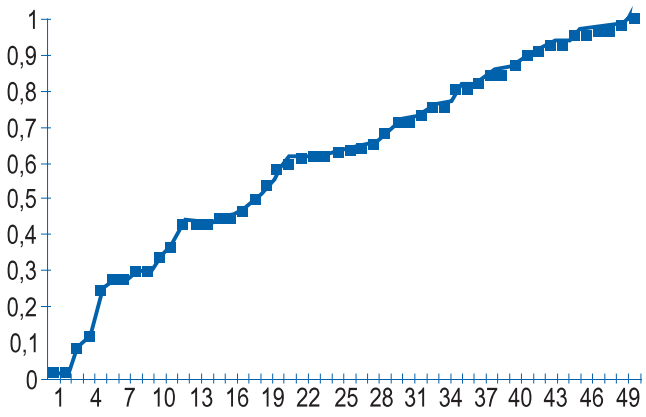


Figura 6.2 - TRANSFORMADA TTT A ESCALA PARA LOS DATOS DEL EJEMPLO -

puede ser truncada en un instante de tiempo preseleccionado, o después de que hayan ocurrido un número predeterminado de fallos. Si se termina la prueba después de un intervalo fijo de tiempo, la duración de la misma se conoce por anticipado. Pero el número de fallos de dispositivos observado será una variable aleatoria. El conjunto de datos restante se denomina conjunto de datos censurado de Tipo I. Por otra parte, el truncamiento después de un número fijo de fallos proporciona un conjunto de datos de Tipo II, en el que el número de fallos se conoce de antemano pero la duración de la prueba es aleatoria. En muchos casos la distinción no es crucial pero, para algunos métodos de estimación estadística, la diferencia entre los dos tipos de censurado es importante.

6.3. Estimación paramétrica

Hay un número bastante grande de métodos paramétricos de estimación de fiabilidad. Aquí solo describimos algunos. Además, cada uno de los métodos descritos será ilustrado mediante la aplicación de las distribuciones de vida Weibull y exponencial. En la mayoría de los casos, los métodos se aplican también a otras distribuciones de vida mencionadas en el Capítulo 3. El primer método y el más sencillo se designa frecuentemente como el método gráfico. Puesto que:

$$\bar{F}(t) = e^{-Z(t)} \tag{6.36}$$

también es verdad que:

$$-\ln \bar{F}(t) = Z(t) \tag{6.37}$$

y esto conduce a las expresiones siguientes:

$$-\ln \bar{F}(t) = \lambda t \tag{6.38}$$

para la distribución exponencial, y:

$$\ln\left(-\ln \bar{F}(t)\right) = \ln \alpha + \beta \ln t \qquad (6.39)$$

para la distribución Weibull.

Tomando primero la distribución exponencial, los tiempos de fallos observados durante una prueba de vida forman un conjunto de datos para los que la media o la mediana de la distribución de grados proporciona una estimación de la probabilidad cumulativa de fallos y por tanto de la fiabilidad. Por tanto, los valores:

$$y_i = -\ln\left(1 - \hat{F}(x_i)\right) \qquad (6.40)$$

deberían ser una línea recta en función de x_i ($=t_{[i]}$ como antes). La pendiente de la recta es una estimación del parámetro λ de la distribución. Si se implementa cuidadosamente, este método puede ser usado para conjuntos censurados de datos de Tipo I o II, y también para conjuntos completos de datos. Como se ha indicado anteriormente, el método puede ser implementado con el valor medio o la mediana de la estadística de grados, pero la experiencia sugiere que la mediana da resultados ligeramente mejores.

Como ejemplo de la aplicación de este método, supongamos que los datos correspondientes a los 20 primeros tiempos de fallo de la Tabla 6.2 fueron un conjunto de datos censurados de Tipo II, a partir de los cuales debe determinarse el parámetro de la exponencial. Las coordenadas correspondientes (x,y) para la curva son los de la Tabla 6.6 y la curva correspondiente de estos valores se muestra a continuación en la Figura 6.3. Obsérvese que con esta curva, la elección de un valor específico para la estimación no es sencilla. No obstante, como se muestra en la figura, el cálculo de la línea de regresión es bastante sencillo y proporciona un valor único y específico para la estimación. En este caso, obtenemos $\hat{\lambda} = 0{,}624$.

Como nota aparte, señalamos que la solución sencilla de la regresión lineal para los coeficientes de la ecuación de una recta y = ax+b

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,006	0,0140	0,068	0,1200	0,279	0,2386	0,548	0,3733
0,019	0,0343	0,090	0,1426	0,299	0,2642	0,599	0,4025
0,029	0,0551	0,129	0,1658	0,336	0,2903	0,613	0,4326
0,038	0,0762	0,129	0,1895	0,455	0,3172	0,615	0,4637
0,056	0,0979	0,223	0,2138	0,465	0,3448	0,658	0,4957

Tabla 6.6 - CONJUNTO DE DATOS CENSURADOS TIPO II -

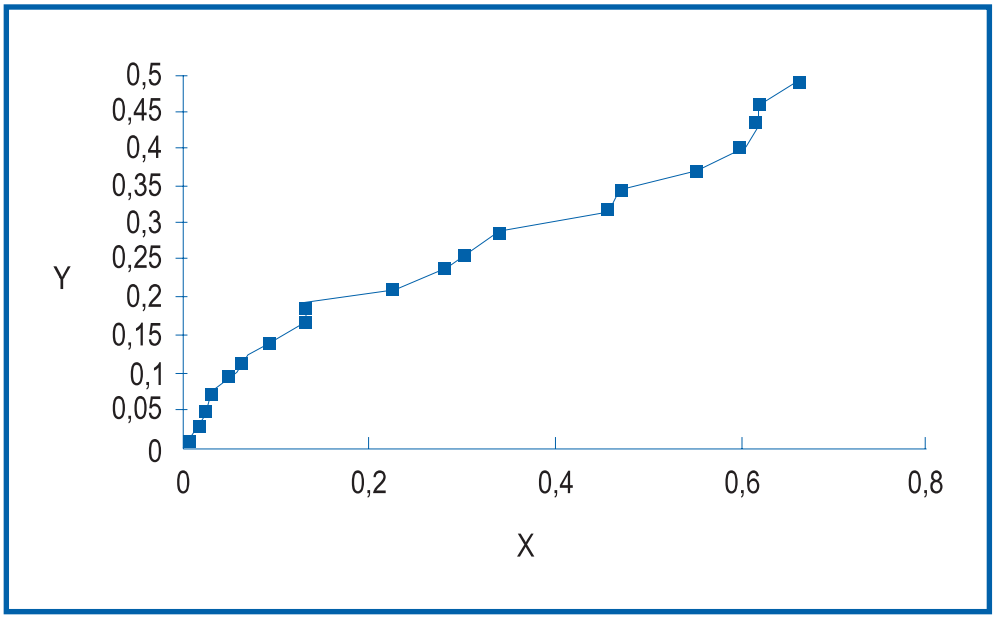


Figura 6.3 - EJEMPLO DE GRÁFICO DE DATOS DE FIABILIDAD -

se obtiene de la forma siguiente. Los datos observados se almacenan en un vector **Y** y las variables independientes se incluyen en la matriz **X** a continuación. Según estas definiciones se puede reformular el modelo de regresión de la forma siguiente:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

Y = **XM** + ε en donde ε es el vector de error y **M** es el vector de los coeficientes. La solución conocida en la que se utiliza esta notación es:

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \tag{6.42}$$

En el caso de la distribución exponencial, esta solución debe proporcionar una estimación del punto de intersección cercano a cero y una estimación de la pendiente $\hat{\lambda}$. Otra razón para describir aquí la solución de regresión es que se aplica directamente a la solución de (6.39), para obtener estimaciones de los parámetros de la distribución Weibull.

En la aplicación de la solución de regresión a la distribución Weibull, la variable independiente es el logaritmo del tiempo de fallo, $\ln x_i$, y la variable dependiente es el logaritmo doble del valor recíproco de la estimación de fiabilidad. Es decir, supongamos que:

$$v_i = \ln\ln\frac{1}{1-\hat{F}(x_i)} \quad \text{y} \quad u_i = \ln x_i \tag{6.43}$$

de forma que el modelo de regresión es **V** = **UM** + ε y las estimaciones de los parámetros resultantes son $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Consideremos como ejemplo los 20 primeros tiempos de fallo listados en la Tabla 6.5. Para ese conjunto de datos, la Tabla 6.7. muestra los datos del modelo de regresión, que da $\hat{\alpha}$ = 0,8067 y $\hat{\beta}$=1,0253. Las estimaciones correspondientes basadas en el conjunto completo de datos son $\hat{\alpha}$=1,269 y $\hat{\beta}$=1,253.

x_i	v_i	u_i	x_i	v_i	u_i	x_i	v_i	u_i
0,023	–4,2697	–3,7723	0,278	–1,7970	–1,2801	0,394	–1,0647	–0,9314
0,025	–3,3723	–3,6889	0,278	–1,6634	–1,2801	0,400	–0,9855	–0,9163
0,081	–2,8993	–2,5133	0,287	–1,5429	–1,2483	0,412	–0,9101	–0,8867
0,110	–2,5738	–2,2073	0,303	–1,4328	–1,1940	0,435	–0,8379	–0,8324
0,185	–2,3239	–1,6874	0,370	–1,3312	–0,9943	0,449	–0,7686	–0,8007
0,226	–2,1201	–1,4872	0,371	–1,2367	–0,9916	0,494	–0,7017	–0,7052
0,230	–1,9474	–1,4697	0,373	–1,1482	–0,9862			

Tabla 6.7 - DATOS DEL MODELO DE GESTIÓN -

Antes de concluir con el método de estimación gráfica, debe señalarse que se ha diseñado un papel gráfico especial para representar las curvas reales, en vez de usar los modelos de regresión. En el caso de la distribución Weibull, el papel se muestra en la Figura 6.4. Un método de estimación más utilizado y con base analítica es el método de la verosimilitud o el método de la máxima verosimilitud. Para cualquier conjunto general de datos, el método comienza con la hipótesis de que todos los tiempos observados de fallo son estadísticamente independientes. Para un conjunto completo de datos, la función de probabilidad es la probabilidad conjunta sobre los parámetros de la distribución y sobre el conjunto particular de datos observados, y por tanto es:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \theta\right) = \prod_{j=1}^{n} f\left(x_j\right) \qquad (6.44)$$

y el logaritmo correspondiente de la función de verosimilitud es:

$$\ln L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \theta\right) = \sum_{j=1}^{n} \ln f\left(x_j\right) \qquad (6.45)$$

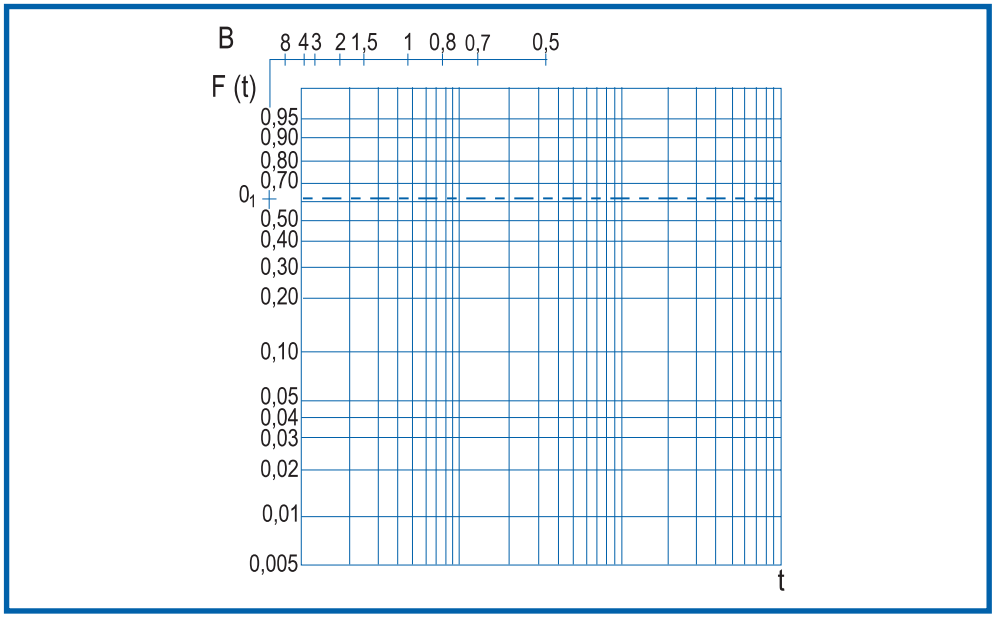


Figura 6.4 - PAPEL WEIBULL -

La estimación del parámetro que maximiza el logaritmo de la función de distribución es el mismo valor que el que maximiza la función de verosimilitud, de modo que las estimaciones de los parámetros se obtienen por diferenciación. En el caso de la distribución exponencial:

$$f(x_j) = \lambda\, e^{-\lambda x_j} \tag{6.46}$$

de modo que:

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = \ln\left(\lambda^n \exp -\left(\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\right)\right) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{6.47}$$

y por tanto:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L = \frac{n}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0 \tag{6.48}$$

lo cual implica que:

$$\hat{\lambda} = 1 \Big/ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{6.49}$$

que es el valor recíproco del valor medio de los tiempos observados de fallo.

Nótese que cuando se trunca la prueba en un tiempo de fallo, la función revisada de verosimilitud para el conjunto censurado de datos se puede escribir de la forma siguiente:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_r, n, \theta\right) = \left(\prod_{j=1}^{r} f\left(x_j\right)\right)\left(R\left(x_r\right)\right)^{n-r} \tag{6.50}$$

de modo que en el caso de distribución exponencial:

$$\ln L\left(x_1, x_2, ..., x_r, n, \theta\right) = \ln\left(\lambda^r \exp - \left(\lambda \sum_{j=1}^{n} x_j\right) - (n-r)\lambda x_r\right) \tag{6.51}$$

Esto da:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L = \frac{r}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} x_j + (n-r)\, x_r = 0 \tag{6.52}$$

de forma que:

$$\hat{\lambda} = 1 \Big/ \frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - (n-r)\, x_r\right) \tag{6.53}$$

Consideremos un ejemplo. Para los datos listados en la Tabla 6.2, la aplicación de la ecuación (6.49) al conjunto completo de datos da:

$$\hat{\lambda} = 1 \Big/ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = 1/1{,}3105 = 0{,}763 \tag{6.54}$$

Mientras que el uso de la ecuación (6.53) con los primeros 20 tiempos de fallo da:

$$\hat{\lambda} = 1 \Big/ \frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j + (n-r)\, x_r\right) = 1 \Big/ \frac{1}{20}\left(5{,}561 + 30\left(0{,}658\right)\right) = 0{,}788 \tag{6.55}$$

La construcción de las estimaciones de probabilidad para la distribución Weibull se realiza de forma similar. La implementación de la ecuación (6.44) resulta en:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \alpha, \beta) = \prod_{j=1}^{n}\left(\alpha\beta\, x_j^{\beta-1}\, e^{-\alpha x_j^{\beta}}\right) = \\ = \alpha^n\, \beta^n \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{\beta-1} \exp\left(-\alpha \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta}\right) \tag{6.56}$$

para la cual el logaritmo es:

$$\ln L = n \ln \alpha + n \ln \beta + (\beta - 1) \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} \tag{6.57}$$

y las dos ecuaciones asociadas en derivadas parciales son:

$$\frac{\delta \ln L}{\delta \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} = 0 \tag{6.58}$$

$$\frac{\delta \ln L}{\delta \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{j=1}^{n} \ln x_j - \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} \ln x_j = 0 \tag{6.59}$$

Para resolver estas ecuaciones se toma para $\hat{\alpha}$ el valor:

$$\hat{\alpha} = 1 \Big/ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\hat{\beta}} \tag{6.60}$$

en donde el valor de $\hat{\beta}$ se calcula a partir de la solución numérica de la ecuación:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^{\hat{\beta}} \ln x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \tag{6.61}$$

La construcción correspondiente para el caso de un conjunto censurado de datos Tipo II comienza con la utilización de (6.50), que es:

$$L(x_1, x_2, ..., x_r, n, \alpha, \beta) = \prod_{j=1}^{r} \left(\alpha\beta x_j^{\beta-1} e^{-\alpha x_j^{\beta}} \right) \left(e^{-\alpha x_r^{\beta}} \right)^{n-r}$$

$$= \alpha^r \beta^r \left(\prod_{j=1}^{r} x_j \right)^{\beta-1} \exp\left(-\alpha \sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta} - \alpha(n-r) x_r^{\beta} \right) \qquad (6.62)$$

y para las que las ecuaciones en derivadas parciales son:

$$\frac{\delta \ln L}{\delta \alpha} = \frac{r}{\alpha} - \sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta} - (n-r) x_r^{\beta} = 0 \qquad (6.63)$$

$$\frac{\delta \ln L}{\delta \beta} = \frac{r}{\beta} + \sum_{j=1}^{r} \ln x_j - \alpha \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} \ln x_j - \alpha(n-r) x_r^{\beta} \ln x_r = 0 \qquad (6.64)$$

Se utiliza la misma estrategia de solución. Las estimaciones se calculan como:

$$\hat{\alpha} = 1 \Big/ \frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^{r} x_j^{\hat{\beta}} + (n-r) x_r^{\hat{\beta}} \right) \qquad (6.65)$$

en donde $\hat{\beta}$ es la solución numérica de la ecuación:

$$\frac{\sum_{j=1}^{r} x_j^{\hat{\beta}} \ln x_j + (n-r) x_r^{\hat{\beta}} \ln x_r}{\sum_{j=1}^{r} x_j^{\hat{\beta}} + (n-r) x_r^{\hat{\beta}}} - \frac{1}{\hat{\beta}} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} \ln x_j \qquad (6.66)$$

Consideremos el ejemplo del conjunto de datos de la Tabla 6.3. para el conjunto completo de datos, las ecuaciones (6.60) y (6.61) proporcionan los valores aproximados $\hat{\beta}$ = 1,257 y $\hat{\alpha}$ = 0,0676. Si estos se basan en el conjunto censurado de datos en el que se incluyen los 20 primeros tiempos de fallos, los valores aproximados serían $\hat{\beta}$ = 1,413 y $\hat{\alpha}$ = 0,0704.

Otro método de estimación analítico es el de los momentos. Como su nombre indica, la estrategia consiste en identificar los momentos de la muestra con los momentos de la función de distribución, y resolver las ecuaciones resultantes para las estimaciones de los parámetros. En el caso de una distribución exponencial, el único

parámetro λ es recíproco de la media de la distribución. Por tanto, como la media de la muestra es una estimación de la media de la población, su recíproco es también una estimación de λ. Es decir:

$$\hat{\lambda} = 1 \Big/ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{6.67}$$

lo cual es lo mismo que el estimador de máxima verosimilitud mostrado en (6.49).

La construcción correspondiente para la distribución Weibull requiere de nuevo un cálculo numérico. Los momentos de la distribución Weibull son:

$$\mu_k = \alpha^{-k/\beta}\, \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) \tag{6.68}$$

lo cual significa que la media y la varianza de la distribución son:

$$\mu = \alpha^{-1/\beta}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \tag{6.69}$$

$$\sigma^2 = \alpha^{-2/\beta} \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right) \tag{6.70}$$

Las estimaciones de los parámetros se obtienen igualando la media y la varianza a estas cantidades. La implementación real se simplifica igualando el coeficiente de variación de la muestra a la expresión correspondiente:

$$\frac{\sigma^2}{\mu^2} = \frac{\Gamma\left(1 + 2/\beta\right)}{\Gamma^2\left(1 + 1/\beta\right)} - 1 \tag{6.71}$$

la cual tiene la ventaja de que depende solamente del parámetro de forma. Una solución numérica de la ecuación (6.71) da el valor de $\hat{\beta}$, el cual se sustituye en (6.69) para obtener $\hat{\alpha}$.

Como ejemplo, consideremos de nuevo el conjunto de datos de la Tabla 6.3. La media y varianza de la muestra para dicho conjunto de

datos son respectivamente 0,7304 y 0,2782. El coeficiente de variación de la muestra es por tanto 0,5215. Utilizando este valor en (6.71), se obtiene $\hat{\beta}$ = 1,402, y sustituyéndolo en (6.69) se obtiene $\hat{\alpha}$ = 1,364, en donde la forma utilizada de (6.69) es:

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\Gamma\left(1 + 1/\hat{\beta}\right)}{\bar{x}} \right) \hat{\beta} \tag{6.72}$$

Como ayuda a este proceso de estimación, en el Apéndice A se proporciona una aproximación numérica de la función gamma. Intuitivamente, no se esperaría que se pudiera utilizar una estrategia de estimación basada en momentos con datos censurados. Nachlas y Kumar [15] han sugerido un método heurístico para la construcción de expresiones de estimación basadas en momentos. Se basa en la sustitución del tiempo esperado de recurrencia hacia delante para el resto de vida de las unidades de prueba que todavía no han fallado. El conjunto de datos está integrado por los r tiempos observados de fallo x_i. Añádase a estos valores los n-r valores x_r+E[t_+], para los que Cox[8] muestra que:

$$E[t_+] = \left(\mu^2 + \sigma^2\right)/2\mu \tag{6.73}$$

independientemente de la distribución de vida. Utilizando esta definición da:

$$E[t_+] = 1/\lambda \tag{6.74}$$

para la distribución exponencial y:

$$E[t_+] = \Gamma\left(1 + 2/\beta\right)/2\alpha^{1/\beta}\ \Gamma\left(1 + 1/\beta\right) \tag{6.75}$$

para la distribución Weibull. Aplicando (6.74) a los datos exponenciales de vida da:

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} = \sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\left(x_r + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\,x_r\right) + \frac{n-r}{\hat{\lambda}} \tag{6.76}$$

para la que la solución es la misma que la dada en la ecuación (6.53). La definición correspondiente para la distribución Weibull es un poco más complicada. En este caso, las dos ecuaciones:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}} = \left(\frac{\Gamma(1+2/\beta)}{\Gamma^2(1+1/\beta)} - 1 \right)^{1/2} \tag{6.77}$$

y:

$$\hat{\mu} = \alpha^{-1/\beta}\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{6.78}$$

se resuelven simultáneamente para $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Para hacer esto, los momentos de la muestra basados en los datos se utilizan en el lado izquierdo de las ecuaciones, y el valor $x_r+E[t_+]$ se utiliza para los puntos de datos censurados. La sustitución:

$$E[t_+] = \Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right) \Big/ 2\alpha^{1/\beta}\, \Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{6.79}$$

se utiliza para que las ecuaciones se expresen en función de las dos estimaciones desconocidas y de los valores de los datos conocidos. El proceso de esta estimación es simple. El lado izquierdo de (6.77) es:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}} = \frac{\left\{ \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2 + (n-r)\left(x_r + E[t_+]\right) \right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\left(x_r + E[t_+]\right) \right)^2 \right\}^{1/2}}{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)\left(x_r + E[t_+]\right) \right)} \tag{6.80}$$

No obstante, el proceso es abordable y permite el cálculo de expresiones de estimación de momentos, que no podrían obtenerse de otro modo.

FIABILIDAD

7

Predicción de fiabilidad



La necesidad de evaluar la fiabilidad de sistemas durante el proceso de diseño, y por tanto antes de que se fije la estructura específica del sistema, motivó la evolución de las estrategias de la predicción de fiabilidad. Ésta es el proceso de calcular medidas aproximadas aunque verosímiles de fiabilidad de los equipos antes de que el diseño de los mismos se haya definido completamente, y por supuesto antes de que se fabriquen. Tres de los objetivos primarios del proceso son: (1) permitir la comparación de diseños alternativos, (2) servir de guía para la definición de la configuración de componentes, y (3) verificar la viabilidad de lograr los niveles requeridos de fiabilidad.

Gran parte del ímpetu para el desarrollo de métodos de predicción de la fiabilidad se originó en las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos y, en un grado menor, con las organizaciones del programa espacial. En ambos casos, la intención fue el prestar la atención adecuada a la fiabilidad por parte de los suministradores de equipos, durante el diseño de equipos eléctricos y electrónicos. La dependencia creciente de las Fuerzas Armadas de componentes electrónicos complejos fue reconocida en los años 50, y condujo a la formación del grupo consultor sobre fiabilidad de equipos electrónicos (Advisory Group of Reliability of Electronic Equipment, AGREE) por el Departamento de Defensa en 1957. Este grupo inició el desarrollo de métodos formales de predicción de fiabilidad que en la actualidad están codificados en el Manual 217 de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos (MIL-HDBK-217) [16], y en un número creciente de

guías análogas que están siendo desarrolladas en otros países. El interés resultante en el uso de métodos de predicción ha motivado el desarrollo actual de un estándar militar para la predicción de la fiabilidad de sistemas mecánicos [16].

El proceso de predicción de la fiabilidad y su herramienta primordial, MIL-HDBK-217, han sido sujetos a una controversia considerable. Hay muchos que objetan a la idea de que medidas de fiabilidad aparentemente precisas pero no verificables se definan para equipos que todavía no existen. Otros objetan las cifras específicas de fiabilidad que aparecen en el MIL-HDBK-217, y a los modelos de fiabilidad descritos. Sin tomar posición en este debate, que a veces es acalorado, parece indicado que describamos aquí el proceso de predicción y el MIL-HDBK-217.

7.1. Formulación general

La predicción de fiabilidad comienza con la hipótesis de que la fiabilidad de los componentes determina la fiabilidad del sistema. También se supone que la fiabilidad de los componentes depende del entorno de operación. Por último, se supone que como consecuencia de la manipulación correcta de los componentes, estos muestran un comportamiento constante de riesgo. Para componentes electrónicos, MIL-HDBK-217 define dos métodos diferenciados de predicción. Estos se designan método de «análisis de solicitaciones de partes», y método de «recuento de partes». Ambos métodos empiezan con un modelo elemental y una función de riesgo básica (tasa de fallos). Ambos aplican luego manipulaciones estándar a los modelos básicos. La diferencia entre los dos métodos se basa en el nivel disponible de información. El método de solicitaciones de partes es bastante detallado y tiene como objetivo su utilización en diseños relativamente maduros, en los que se dispone de una información específica considerable relativa a la elección de los componentes. El método de recuento de partes es más primitivo, y tiene como objetivo su utilización en conceptos iniciales de

diseño para los que sólo se han identificado clases generales de componentes.

Antes de describir los dos métodos de predicción, notemos que el manual contiene tanto modelos de funciones de riesgo como una extensa base de datos. Los nuevos diseños de equipos contienen tipos existentes de componentes. Aunque se utilicen componentes completamente nuevos, pueden ser análogos a componentes ya existentes. Además, el volumen de productos de equipos y de componentes constituyentes es un estímulo para satisfacer la necesidad real de clasificación y documentación de componentes. Por esta razón, MIL-HDBK-217 incluye o da referencia a un conjunto extenso de componentes.

También es verdad que desde su aparición, MIL-HDBK-217 ha sido actualizado y aumentado periódicamente. La versión actual se conoce como 217 F. Los organismos militares (Rome Air Development Center, en Roma, Nueva York) responsables del mantenimiento del manual han mantenido una actividad continua de acumulación de datos, en la que se incorporan periódicamente a la base de datos del manual la nueva literatura sobre el diseño de componentes y los datos sobre pruebas de componentes actuales.

7.2. Método de solicitaciones de partes

Este método se utiliza en diseños relativamente maduros para los que puede especificarse selecciones específicas de componentes y configuraciones probables de los mismos. El punto de partida del análisis es la selección de la tasa básica de fallos, λ_b, a partir de los valores tabulados en la base de datos. En la Tabla 7.1 se muestra un ejemplo de tabulación de la tasa de fallos copiada del manual. Los datos de la tabla son los valores de λ_b expresados como número de fallos por cada 10^6 horas de operación. Nótese que los datos están indexados por la temperatura de operación, y también por la relación

RELACIÓN DE POTENCIA DE OPERACIÓN A POTENCIA NOMINAL

T(°C)	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0	0,00061	0,00074	0,00091	0,0011	0,0014
10	0,00067	0,00082	0,0010	0,0012	0,0015
20	0,00073	0,00091	0,0011	0,0014	0,0017
30	0,00080	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019
40	0,00088	0,0011	0,0014	0,0017	0,0022
50	0,00096	0,0012	0,0015	0,0020	0,0025
60	0,0011	0,0013	0,0017	0,0022	0,0028
70	0,0012	0,0015	0,0019	0,0025	0,0032
80	0,0013	0,0016	0,0021	0,0028	0,0036
90	0,0014	0,0018	0,0024	0,0031	0,0040
100	0,0015	0,0020	0,0026	0,0035	0,0045
110	0,0017	0,0022	0,0029	0,0039	0,0051
120	0,0018	0,0024	0,0033	0,0043	0,0058
130	0,0020	0,0027	0,0036	0,0049	0,0065
140	0,0022	0,0030	0,0040	0,0054	
150	0,0024	0,0033	0,0045		
160	0,0026	0,0036			
170	0,0029				

Tabla 7.1 - TASAS BÁSICAS DE FALLO, λ_b (FALLOS/10^6 h)
PARA RESISTENCIAS FIJAS DE PELÍCULA MIL-10509 Y MIL-R-55182 -

entre la potencia de operación y la potencia nominal. Esto sirve para ilustrar el hecho de que para el método de partes en condiciones extremas la tasa de fallos se ajusta para tener en cuenta la aplicación. Nótese que la entrada de la tabla se acompaña del modelo empleado para construirla. En este caso, el modelo es:

$$\lambda_b = 0{,}00005 \exp\left(3{,}5\left(\frac{T+273}{398}\right) + S\left(\frac{T+273}{273}\right)\right) \qquad (7.1)$$

donde S es la relación de potencia de operación a potencia nominal. Las tasas son también ajustadas para la calidad de las partes y para la severidad del entorno en el que el equipo se vaya a utilizar.

Los ajustes de la aplicación reflejan el hecho de que se supone que la fiabilidad depende directamente de la temperatura de operación y de las características eléctricas del uso de los componentes. Lo mismo que con la temperatura se ha observado que, cuando un componente se utiliza a un voltaje (o potencia) mayores, la fiabilidad disminuye. Por consiguiente, la tasa de fallos puede ser reducida «disminuyendo el valor nominal», el cual es la operación de un componente a un valor nominal inferior al del diseño. Las tasas básicas de fallo reflejan estas hipótesis.

El método de predicción de solicitaciones de partes en condiciones extremas se basa en el cálculo de una tasa de fallos de uso, λ_u, obtenida a partir de la tasa básica de fallo y varios factores de ajuste, π, utilizando un modelo como el siguiente:

$$\lambda_u = \lambda_b \left(\prod_i \pi_i\right) \qquad (7.2)$$

El modelo específico cambia de acuerdo con el tipo particular de componente.

Por ejemplo, el modelo para las resistencias es:

$$\lambda_u = \lambda_b \left(\pi_E \cdot \pi_Q \cdot \pi_R\right) \qquad (7.3)$$

en donde π_R es un factor de resistencia, π_E es un factor de entorno, y π_Q es un factor de calidad. Nótese que π_E y π_Q se incluyen en casi todos los modelos de componentes, mientras que π_R son específicos para el tipo de componentes, de forma que su uso también está definido en el manual. Un ejemplo de enumeración de los factores de ajuste específico para tipos de componentes se muestra en la Tabla 7.2, la cual ha sido también obtenida del manual.

Los factores π_E y π_Q se incluyen en casi todos los modelos de componentes. El uso de los factores π_Q se basa en la codificación de niveles de calidad estándar para varios tipos de componentes. En particular, varios tipos de componentes han sido evaluados con relación a una «especificación militar», y por consiguiente se designan de acuerdo con «una especificación de calidad de multinivel», y se considera que tienen designaciones de «fiabilidad establecida» (Established Reliability, ER). Un ejemplo de la codificación de las designaciones ER y de los factores asociados de calidad se dan en las Tablas 7.3 y 7.4. Dentro de las especificaciones de calidad, se enumeran criterios detallados de clasificación de componentes. Las partes no incluidas en la especificación de calidad multinivel se designan como partes que no son ER, y se clasifican en uno de tres niveles –superior, especificación militar, e inferior– cada uno de los cuales tiene un factor correspondiente π_Q.

El factor de entorno tiene como objetivo reflejar las influencias de las características del entorno de operación (distintas de las eléctricas y térmicas) sobre la fiabilidad de los componentes. Los factores de ajuste se definen en términos generales como se muestra a continuación en la Tabla 7.5. Nótese que los factores de ajuste de entorno, π_E, están específicamente tabulados para cada tipo de componente según la categoría del entorno.

Como ejemplo, la Tabla 7.6 muestra los factores para resistencias. Obsérvese la dispersión de los valores de los factores en función de la hostilidad anticipada del entorno de los equipos.

FACTOR π	DESCRIPCIÓN
	resistencias
π_R	resistencia – basada en intervalo de resistencia
π_T	temperatura – ajuste por temperatura de la caja
π_V	voltaje – ajuste por pérdida de potencia
π_{NR}	número de resistencias – refleja el número de resistencias en uso
π_{TAPS}	factor de conexión – tiene en cuenta el efecto de las conexiones del potenciómetro
	transistores de baja frecuencia
π_S	factor de demanda de voltaje – ajuste por el voltaje aplicado del colector
π_A	factor de ampliación – basado en la potencia de salida
	microcircuitos – memorias magnéticas
π_W	factor de escritura del ciclo de operación – basado en la relación entre la carga de lectura y escritura
π_T	temperatura – ajuste por los efectos de la temperatura de la conexión
	microcircuitos – VHSIC y VLSI CMOS
π_{CD}	factor de correción por la complejidad del molde – refleja la dificultad de fabricación
π_T	factor de temperatura – ajuste por los efectos de la temperatura de la conexión
π_{PT}	factor del tipo de empaquetamiento – corrección por los efectos del empaquetamiento

Tabla 7.2 - FACTORES π PARA EL ANÁLISIS DE DEMANDAS SOBRE LAS PARTES -

PARTE	DESIGNADORES DE CALIDAD
Microcircuitos	S, B, B-1, Otros
Semiconductores discretos	JANTXV, JANTX, JAN
Condensadores (ER)	D, C, S, R, B, P, M, L
Resistencias (ER)	S, R, P, M
Bobinas, moldeadas (ER)	S, R, P, M
Relés (ER)	R, P, M, L

Tabla 7.3 - DESIGNACIONES DE NIVEL DE CALIDAD MULTINIVEL -

DESIGNADOR DE CALIDAD	π_Q
B	1,0
B–1	2,0
JANTXV	0,7
JANTX	1,0
JAN	2,4
S	0,03
R	0,1
P	0,3
M	1,0
L	1,5

Tabla 7.4 - FACTORES DE CALIDAD π_Q -

ENTORNO	SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN
Terreno, benigno	G_B	Inmóvil, entornos con temperatura y humedad controlados, fácilmente accesibles al mantenimiento
Terreno, fijo	G_F	Entornos moderadamente controlados como la instalación en estantes permanentes, con aire de refrigeración adecuado y posible instalación en edificios sin calefacción
Terreno, móvil	G_M	Equipos instalados en vehículos con ruedas o cadenas y equipos transportados manualmente
Naval, protegido	N_S	Incluye condiciones protegidas o bajo cubierta en buques y equipos instalados en submarinos
Naval, no protegido	N_U	Equipos no protegidos en buques, expuestos a las condiciones climáticas y equipos inmersos en agua salada
Aviones, áreas no habitadas, compartimiento de carga	A_{IC}	Condiciones típicas en compartimientos de carga que pueden ser ocupados por la tripulación. Las condiciones extremas de presión, temperatura, shock y vibración son mínimas
Aviones, habitáculos, Cazas	A_{IF}	Igual a A... pero instalados en aviones de altas prestaciones como cazas
Aviones, áreas no habitadas	A_{UC}	Áreas con ambientes no controlados que no pueden ser habitadas por la tripulación durante el vuelo. Las condiciones extremas de presión, temperatura y shock pueden ser severas
Aviones, áreas no habitadas, Cazas	A_{UF}	Igual a A... pero instalados en aviones de altas prestaciones como cazas
Helicópteros	A_{RW}	Equipos instalados en helicópteros, incluye equipos montados en el exterior e interior
Vuelo espacial	S_F	Órbita terrestre, próxima a condiciones de terreno benignas, vehículo ni en vuelo propulsado ni en la fase libre no propulsado
Vuelo de misiles	M_F	Condiciones relacionadas con el vuelo propulsado de misiles en la atmósfera, y con el vuelo libre no propulsado
Lanzamiento de misiles	M_L	Condiciones extremas relativas al lanzamiento de misiles, puesta en órbita del vehículo espacial y retorno del vehículo a la atmósfera
Lanzamiento desde cañones	C_L	Condiciones extremas relacionadas con el lanzamiento de proyectiles dirigidos desde cañones

Tabla 7.5 - SÍMBOLOS DE FACTORES AMBIENTALES, π_E -

ENTORNO	π_E
G_B	1,0
G_F	2,0
G_M	8,0
N_S	4,0
N_U	14,0
A_{IC}	4,0
A_{IF}	8,0
A_{UC}	10,0
A_{UF}	18,0
A_{RW}	19,0
S_F	0,2
M_F	10,0
M_L	28,0
C_L	510,0

Tabla 7.6 - FACTORES DE ENTORNO π_E -

Para ver la aplicación de la norma, consideremos un ejemplo. Calcúlese la tasa de fallos de uso para una resistencia de película fija de tipo estándar RNR, que es ER al nivel P de tasa de fallos, que opera a 10.000 Ω bajo la especificación militar R-55182, y que tiene una potencia nominal de 0,25 W, cuando la resistencia se utiliza en una aplicación móvil sobre el terreno a 55°C y con una disipación de potencia de 0,125 W. Para comenzar, notamos que el modelo apropiado es la ecuación (7.2) y que la tasa básica de fallos λ_b es 0,0032 (por 10^6 hr.), debido a que la relación de la potencia de operación a la nominal es 0,5 y debido a la temperatura de operación de 55°. Los factores de ajuste son π_Q=0,3, π_E=10,0, y π_R,=1,0 el último de los cuales se obtiene de la Tabla 7.7. La tasa de fallos de uso resultante es λ_u=0,0096/10^6hr.

Una vez que se han obtenido las tasas de fallo previstas para los componentes, la tasa de fallo para el sistema se prevé igual a la suma de las tasas de los componentes.

INTERVALO DE RESISTENCIA	π_R
$<10^5\Omega$	1,0
10^5–$10^6\Omega$	1,1
10^6–$10^7\Omega$	1,6
$>10^7\Omega$	2,5

Tabla 7.7 - FACTORES DE RESISTENCIA π_R -

7.3. Método de recuento de partes

A veces se considera que vale la pena calcular una medida inicial de la fiabilidad del sistema, incluso antes de que se hayan elegido específicamente sus componentes. El método es esencialmente igual para este caso, excepto que se asume y que se utiliza una menor información. El modelo elemental de tasa de fallos es:

$$\lambda_u = n\,\lambda_G\,\pi_Q \qquad (7.4)$$

en donde n es el número de copias del componente que se espera usar en el equipo, λ_G es una tasa de fallos genérica (básica), y π_Q es un factor de ajuste para el nivel de la calidad de los componentes. Nótese que las tasas genéricas de fallos se tabulan de acuerdo con el tipo de aplicación. Esto se ilustra con el listado de ejemplo mostrado en las Tablas 7.8/a para condensadores y 7.8/b para resistencias. Los factores de ajuste de calidad son los mismos que los utilizados en el método de

TIPO DE PARTE	ESTILO	G_B	G_F	G_M	N_S	N_U	A_{IC}	A_{IF}	A_{UC}	A_{UF}	A_{RW}	S_F	M_F	M_L	C_L
		T=30	40	45	40	45	55	55	70	70	55	30	45	50	40
Papel, by-pass	CP	0,0036	0,0072	0,033	0,018	0,055	0,023	0,03	0,07	0,13	0,083	0,0018	0,044	0,12	2,1
	CA	0,0038	0,0087	0,042	0,022	0,070	0,035	0,047	0,19	0,35	0,13	0,002	0,056	0,19	2,5
Papel/plástico	CZR	0,0047	0,0096	0,044	0,034	0,073	0,030	0,040	0,094	0,15	0,11	0,0024	0,058	0,16	2,7
	CPV	0,0021	0,0042	0,017	0,010	0,030	0,0088	0,013	0,026	0,048	0,044	0,0010	0,023	0,063	1,1
	COR	0,0021	0,0042	0,017	0,010	0,030	0,0088	0,013	0,026	0,048	0,044	0,0010	0,023	0,063	1,1
Mica (bañada)	CM	0,0005	0,0015	0,0091	0,0044	0,014	0,0068	0,0095	0,054	0,069	0,031	0,00025	0,012	0,046	0,45
Mica (botón)	CB	0,018	0,037	0,19	0,094	0,31	0,10	0,14	0,47	0,60	0,48	0,0091	0,25	0,68	11,0
Materiales cerámicos (uso general)	CK	0,0036	0,0074	0,034	0,019	0,056	0,015	0,015	0,032	0,048	0,077	0,0014	0,049	0,13	2,3
Materiales cerámicos (chip)	CDR	0,00078	0,0022	0,013	0,0056	0,023	0,0077	0,015	0,053	0,12	0,046	0,00039	0,017	0,065	0,68
Tántalo (sólido)	CSR	0,0018	0,0039	0,016	0,0097	0,028	0,0091	0,011	0,034	0,057	0,055	0,00072	0,022	0,66	1,0
Tántalo (no sólido)	CLR	0,0061	0,013	0,069	0,039	0,11	0,031	0,061	0,13	0,28	0,16	0,0030	0,089	0,26	4,0
Óxido de Aluminio	CUR	0,024	0,061	0,42	0,18	0,59	0,46	0,55	2,1	2,6	1,2	0,012	0,49	1,7	21,0
Aluminio (seco)	CR	0,029	0,081	0,58	0,24	0,83	0,73	0,88	4,3	5,4	2,0	0,015	0,68	2,8	28,0

Tabla 7.8/a - EJEMPLO DE TASAS GENÉRICAS DE FALLO PARA CONDENSADORES PARA EL MÉTODO DE RECUENTO DE PARTES -

TIPO DE PARTE	ESTILO	G_B	G_F	G_M	N_S	N_U	A_{IC}	A_{IF}	A_{UC}	A_{UF}	A_{RW}	S_F	M_F	M_L	C_L
		T=30	40	45	40	45	55	55	70	70	55	30	45	50	40
Composición	RCR	0,00050	0,0022	0,0071	0,0037	0,012	0,0052	0,0065	0,016	0,025	0,025	0,00025	0,0098	0,035	0,36
Película, aislada	RLR	0,0012	0,0027	0,011	0,0054	0,020	0,0063	0,013	0,018	0,033	0,030	0,00025	0,014	0,044	0,69
Película, potencia	RD	0,012	0,025	0,13	0,062	0,21	0,078	0,10	0,19	0,24	0,32	0,0060	0,18	0,47	8,2
Embobinado	RBR	0,0085	0,0182	0,10	0,045	0,16	0,15	0,17	0,30	0,38	0,26	0,0068	0,13	0,37	5,4
Embobinado, potencia	RWR	0,014	0,031	0,16	0,077	0,26	0,073	0,15	0,19	0,39	0,42	0,0042	0,21	0,62	9,4
Termistor	RTH	0,065	0,32	1,4	0,71	1,6	0,71	1,9	1,0	2,7	2,4	0,032	1,3	3,4	62,0

Tabla 7.8/b - TASAS GENÉRICAS DE FALLO PARA RESISTENCIAS PARA EL MÉTODO DE RECUENTO DE PARTES -

solicitaciones de partes, excepto que las partes que no son ER se supone que tienen un π_Q=1,0.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que en el MIL-STD-R-39017 se especifican 50 resistencias de película de tipo RLR, nivel ER=P, y que éstas deben usarse como resistencias en el intervalo de 10^3 a 10^5 Ω en una aplicación de lanzamiento móvil. En este caso la contribución de las resistencias a la tasa de fallo del uso del equipo es:

$$\lambda_u = n\,\lambda_G\,\pi_Q = 50(0{,}044)(0{,}3) = 0{,}66 \text{ fallos}/10^6 \text{ hrs.} \qquad (7.5)$$

Una vez más, está claro que el cálculo correspondiente para las otras clases de componentes, junto con el que hemos realizado aquí, permitirá la predicción de la fiabilidad del sistema.

FIABILIDAD

8

Mantenimiento y fiabilidad



La mayor parte de los equipos modernos se diseñan bajo la hipótesis de que serán mantenidos de algún modo. Generalmente se espera que los equipos complejos operen durante períodos largos de tiempo, de forma que las operaciones de servicio se supone que forman parte de la experiencia de funcionamiento del dispositivo. Un ejemplo conocido de esto es el automóvil, el cual está integrado por muchos componentes, es caro y se espera que funcione de forma adecuada durante varios años, si se mantiene de forma adecuada.

Esencialmente hay dos tipos de mantenimiento: preventivo y correctivo, y para cada uno de éstos hay numerosos procedimientos específicos. En el mantenimiento preventivo, el objetivo es incurrir en gastos modestos de servicio del equipo, con el fin de evitar fallos potencialmente caros durante su funcionamiento. Normalmente, el equipo deja de funcionar durante el mantenimiento preventivo, y el efecto físico de las actividades de mantenimiento es paliar los efectos del funcionamiento previo. En contraste, el mantenimiento correctivo (o reparación) es la respuesta al fallo del equipo con el fin de devolverlo a un estado de funcionamiento. Para ambas clases de mantenimiento, puede asumirse que existen varios tipos de estructuras de coste y varios tipos de patrones de comportamiento de los equipos. Por consiguiente, hay bastantes casos de modelos distintos. Algunos de estos se examinarán en este Capítulo.

Es importante notar que el modelado y análisis de los procedimientos de mantenimiento de equipos requieren a menudo

considerar el sistema completo en vez de sus componentes individuales. Existen casos en los que los resultados a nivel de componentes pueden ser agregados para obtener medidas sobre el nivel del sistema, y éstos se incluyen aquí. No obstante, normalmente es la medida del nivel del sistema la que es más informativa.

Otro punto importante es que interrumpir el funcionamiento de una muestra de equipos para un mantenimiento ocasional implica ajustes a las leyes de probabilidad que gobiernan su comportamiento. Por consiguiente, los modelos usados para representar el comportamiento de los equipos deben estar basados en procesos regenerativos en vez de distribuciones de vida sencillas. Excepto para unos pocos casos en que se utilizan procedimientos complicados de mantenimiento, el subconjunto de procesos regenerativos denominado procesos de renovación pueden ser utilizados pero incluso estos modelos pueden ser bastante complicados. Un repaso breve de los procesos de renovación y su aplicación al modelado del comportamiento de equipos es el punto de partida para la descripción de los procedimientos de mantenimiento.

8.1. Procesos de renovación y sustitución de dispositivos

Consideremos el caso en que un dispositivo se utiliza hasta que falla, en cuyo momento es inmediatamente sustituido por un dispositivo idéntico nuevo que también se utiliza hasta su fallo. Si este proceso se repite sin fin, la secuencia de los tiempos de funcionamiento de los dispositivos constituye un proceso de renovación. Formalmente:

– **Definición 8.1.** Un proceso de renovación es una secuencia de variables aleatorias no negativas independientes e idénticamente distribuidas, por ejemplo T_1, T_2, ...

Supongamos que la función de distribución sobre cada uno de los T_i es F(t). Como se describe en el Apéndice B, $F^{(k)}(t)$ es la convolución

de orden k de F consigo misma, de forma que es también la función de distribución de la cantidad S_k, en donde:

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i \tag{8.1}$$

de forma que S_k es la duración del intervalo a lo largo del cual k copias del dispositivo son utilizadas hasta que fallan. (Por convención, $F^{(0)}(t)$ se define igual a 1). La aplicación de este modelo a componentes individuales de sistemas no tiene dificultad. Puede considerarse que representa la secuencia de copias de un componente que se utilizan en una posición particular en la estructura de un sistema. En cualquier caso el estudio de la teoría de renovación suele centrarse sobre el número de renovaciones realizadas a lo largo de un intervalo de tiempo definido, o la longitud de tiempo requerido para obtener un número dado de renovaciones. Las probabilidades para estas dos cantidades están relacionadas por la importante expresión fundamental:

$$P\left[N(t) \geq n\right] = P\left[S_n \leq t\right] \tag{8.2}$$

en donde N(t) es el número de renovaciones en [0,t]. Estas dos mismas cantidades son importantes en un contexto de fiabilidad.

Otras cuestiones también son pertinentes tanto por lo que respecta al estudio general de los procesos de renovación como a la fiabilidad. Cinco cuestiones de interés son: el número esperado de renovaciones, la identidad de la densidad de renovaciones, los momentos superiores de la distribución de renovaciones, la distribución de los tiempos de recurrencia hacia atrás, y la distribución de los tiempos de recurrencia hacia delante. Algunas, aunque no todas, de estas cuestiones serán examinadas aquí.

Se han obtenido varios resultados generales que son útiles para describir y evaluar el rendimiento de los equipos. Además, se han establecido también algunos resultados específicos sobre los análisis de fiabilidad. Los resultados generales serán descritos primero. Para

comenzar, nótese que puesto que $F_{(n)}(t)$ es la función de distribución de S_n, la ecuación (8.2) implica que:

$$P\left[N(t)=n\right]=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t) \tag{8.3}$$

y por consiguiente:

$$P\left[N(t)=0\right]=F^{(0)}(t)-F^{(1)}(t)=1-F(t)=\bar{F}(t) \tag{8.4}$$

Además, los momentos de la distribución de N(t) son finitos. En particular:

$$M_F(t)=E\left[N(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} n\left(F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}\,t \tag{8.5}$$

$M_F(t)$ se designa como la función de renovación. El subíndice «F» se utiliza para reflejar el hecho de que la función está basada en la función de distribución subyaciente F(t). Su derivada, $m_F(t)$, se denomina la densidad de renovación y representa la probabilidad de una renovación en cualquier momento de tiempo. El análisis de la función de renovación implica normalmente su transformación en forma recursiva:

$$\begin{aligned} M_F(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)=F^{(1)}(t)+\sum_{n=2}^{\infty}F^{(n)}(t)=F(t)+\sum_{j=1}^{\infty}F^{(j+1)}(t)\\ &=F(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^t F^{(j)}(t-x)\,f(x)\,dx=F(t)+\int_0^t\sum_{j=1}^{\infty}F^{(j)}(t-x)\,f(x)\,dx\\ M_F(t)&=F(t)+\int_0^t M_F(t-x)\,f(x)\,dx \end{aligned} \tag{8.6}$$

la cual se conoce como la ecuación fundamental de renovación porque a menudo constituye la base del análisis del proceso de renovación. La forma correspondiente para la densidad de renovación es :

$$m_F(t)=f(t)+\int_0^t m_F(t-x)\,f(x)\,dx \tag{8.7}$$

y la solución a cualquiera de los dos se obtiene utilizando las transformadas de Laplace o de Laplace-Stieltjes, las cuales se describen brevemente en el Apéndice B.

Suponiendo que la función de distribución de la duración de vida de los dispositivos tiene una densidad bien definida, la transformada es:

$$M_F^*(s) = \pounds\{M_F(t)\} = \pounds\{F(t)\} + \pounds\left\{\int_0^t M_F(t-x)\, f(x)\, dx\right\} = \\ = F^*(s) + \pounds\left\{\int_0^t M_F(t-x)\, f(x)\, dx\right\} \tag{8.8}$$

Como se muestra en el Apéndice B, la transformada de la integral tiene como resultado la expresión siguiente:

$$M_F^*(s) = F^*(s) + sM_F^*(s)F^*(s) \tag{8.9}$$

la cual puede resolverse, con lo que se obtiene:

$$M_F^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - sF^*(s)} = \frac{F^*(s)}{1 - f^*(s)} \tag{8.10}$$

y:

$$F^*(s) = \frac{M_F^*(s)}{1 + sM_F^*(s)} = \frac{M_F^*(s)}{1 + m_F^*(s)} \tag{8.11}$$

Los resultados correspondientes para $m^*_F(s)$ y $f^*(s)$ son:

$$m_F^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} \tag{8.12}$$

y:

$$f^*(s) = \frac{m_F^*(s)}{1 + m_F^*(s)} \tag{8.13}$$

Por supuesto la solución real depende de si se pueden invertir las transformadas. Este no es un punto trivial. Generalmente la parte más difícil del análisis es la inversión de la transformada. Con relación

a las aplicaciones, a continuación tratamos la inversión con más detalle. Los resultados claves representados por (8.10) y (8.11) son que $M_F(t)$ y F(t) se determinan mutuamente, y esta relación puede utilizarse para resolver la ecuación (8.6).

Los procesos de renovación han sido estudiados en varios contextos diferentes incluida la fiabilidad. Los resultados generales que se utilizan en todas las áreas de aplicación incluyen los hechos siguientes, válidos mientras F(t) tenga una media finita, por ejemplo μ:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \\ &\text{b)} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{M_F(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \\ &\text{c)} \quad \lim_{t\to\infty} \left(M_F(t+x) - M_F(t)\right) = \frac{x}{\mu} \\ &\text{d)} \quad M_F(t) \geq \frac{t}{\mu} - 1 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Para ilustrar algunos de los resultados descritos hasta ahora, consideremos el caso particular en que F(t) es un distribución exponencial. Por tanto:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{8.15}$$

y la cuestión de cuál es la distribución de S_r se resuelve tomando la convolución de F(t) de orden r. Supongamos que $H(t)=F^{(r)}(t)$, de forma que:

$$\pounds\{H(t)\} = \pounds\left\{F^{(r)}(t)\right\} = \left(\pounds\{F(t)\}\right)^r = \left(\frac{\lambda}{s(s+\lambda)}\right)^r \tag{8.16}$$

la cual tiene la inversa conocida:

$$H(t) = \pounds^{-1}\left\{\left(\frac{\lambda}{s(s+\lambda)}\right)^r\right\} = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{8.17}$$

la cual es la distribución gamma. Para el mismo ejemplo:

$$P\left[N(t)=n\right]=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)=\frac{(\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}}{n!} \tag{8.18}$$

de modo que las renovaciones obedecen a la distribución de Poisson. También, utilizando la ecuación (8.10), se obtiene:

$$M_F^*(s)=\frac{\left(\lambda/s(s+\lambda)\right)}{1-\left(\lambda/(s+\lambda)\right)}=\frac{\lambda}{s^2} \tag{8.19}$$

de forma que:

$$M_F(t)=\lambda t \tag{8.20}$$

Entonces, puesto que la media de la distribución exponencial es $1/\lambda$, los límites mencionados anteriormente se obtienen de la forma siguiente:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_F(t)}{t}=\lambda \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty}\left(M_F(t+x)-M_F(t)\right)=\lambda x \tag{8.21}$$

como era de esperar.

Establecidos estos resultados generales, consideremos algunas aplicaciones específicas a la fiabilidad de equipos. Comencemos con las definiciones:

– **Definición 8.2.** Una distribución de vida F(t) se dice que es Nueva Mejor que Usada (New Better than Used, NBU) si:

$$\bar{F}(x+y) \;\leq\; \bar{F}(x)\bar{F}(y) \tag{8.22}$$

y Nueva Peor que Usada (New Worse than Used, NWU) si:

$$\bar{F}(x+y) \;\geq\; \bar{F}(x)\bar{F}(y) \tag{8.23}$$

Obsérvese que estas condiciones implican que la probabilidad condicional de supervivencia de un dispositivo de edad x

es o menor que (para NBU) o mayor que (para NWU) la probabilidad correspondiente de supervivencia para un dispositivo nuevo. Es decir:

$$\bar{F}(y|x) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \quad \leq \quad \bar{F}(y) \tag{8.24}$$

para NBU, de forma que una copia nueva del dispositivo tiene una mayor fiabilidad que otra usada. Una clasificación adicional más débil pero a menudo útil es:

– **Definición 8.3.** Una distribución de vida F(t) se llama Nueva Mejor que Usada en Esperanza (New Better than Used in Expectation, NBUE) si:

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x)\,dx \quad \leq \quad \mu\bar{F}(t) \tag{8.25}$$

y se llama Nueva Peor que Usada en Esperanza (New Worse than Used in Expectation, NWUE) si

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x)\,dx \quad \geq \quad \mu\bar{F}(t) \tag{8.26}$$

Esta definición también es consistente con la intuición puesto que las condiciones se reducen a:

$$\frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \bar{F}(x)\,dx \quad \leq \quad \mu \tag{8.27}$$

para NBUE, lo cual significa que la media de la distribución de vida residual condicionada a sobrevivir hasta el tiempo t es menor que la vida media para una copia nueva de un dispositivo. Otra observación relativa a las definiciones anteriores es que resultan en una clasificación anidada de distribuciones de vida. Específicamente, IFR $\subseteq$ IFRA $\subseteq$ NBU $\subseteq$ NBUE y DFR $\subseteq$ DFRA $\subseteq$ NWU $\subseteq$ NWUE.

Luego, los resultados para procesos de renovación aplicables a la fiabilidad de los equipos se definen normalmente en función del

comportamiento de riesgo de las distribuciones de vida. Reconociendo que las distribuciones de vida tienen a menudo una forma distinta a la exponencial, las clasificaciones anteriores permiten construir acotaciones útiles relativas al número de renovaciones de componentes, o al tiempo a lo largo del cual dichas renovaciones ocurren. En la mayoría de los casos, las acotaciones se basan en comparaciones con la distribución de vida exponencial. Por ejemplo:

a) Si F(t) es IFR y tiene una media finita μ, entonces para $0 \le t < \mu$,

$$\bar{F}(t) \ge e^{-t/\mu} \tag{8.28}$$

b) Si F(t) es IFR y tiene una media finita μ, entonces para $0 \le t < \mu$,

$$F^{(n)}(t) \le 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t/\mu)^j}{j!} e^{-t/\mu} \tag{8.29}$$

c) Si F(t) es IFR y tiene una media finita μ, entonces para $0 \le t < \mu$,

$$P[N(t) \ge n] \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(t/\mu)^j}{j!} e^{-t/\mu} \tag{8.30}$$

Estos resultados afirman que para una distribución de vida IFR, la distribución de Poisson proporciona un límite superior para la probabilidad de que un número dado de sustituciones de equipos durante un intervalo definido [0,t] sea menor que la vida media del dispositivo. El atractivo de estos límites es que sólo requieren el conocimiento de la media. La desventaja es que no se aplican a clases más generales de la distribución como aquellas que son NBU, ni se aplican cuando $t>\mu$. Para los casos más generales, se aplican las condiciones más débiles:

d) Si F(t) es NBU y tiene una función de riesgo cumulativa Z(t), entonces para $t \ge 0$,

$$P[N(t) < n] \ge \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(Z(t))^j}{j!} e^{-Z(t)} \tag{8.31}$$

e) Y si F(t) es IFR, entonces para $t \geq 0$,

$$P\left[N(t) < n\right] \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(nZ(t/n)\right)^j}{j!} e^{-nZ(t/n)} \tag{8.32}$$

f) Mientras que si F(t) es NWU y tiene una función de riesgo cumulativa Z(t), entonces para $t \geq 0$,

$$P\left[N(t) < n\right] \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(Z(t)\right)^j}{j!} e^{-Z(t)} \tag{8.33}$$

g) Y si F(t) es DFR, entonces $t \geq 0$,

$$P\left[N(t) < n\right] \geq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(nZ(t/n)\right)^j}{j!} e^{-nZ(t/n)} \tag{8.34}$$

Un ejemplo importante del uso del teorema anterior es la distribución Weibull, para la que no existe la transformada de Laplace. Las probabilidades de convolución y las frecuencias de renovación para la distribución Weibull normalmente se calculan numéricamente. Los límites proporcionados por el teorema anterior se aplican tanto a las realizaciones IFR como DFR de la distribución Weibull y, por tanto, son bastante útiles.

Los resultados adicionales que se aplican a los análisis de fiabilidad de equipos vienen después de los obtenidos para la función de renovación. En particular, los límites para $M_F(t)$ pueden decirse de la forma siguiente:

h) Si F(t) es NBUE y tiene una media finita μ, entonces para $t \geq 0$,

$$M_F(t) \leq \frac{t}{\mu} \tag{8.35}$$

i) Mientras que si F(t) es NWUE y tiene una media finita μ, entonces para $t \geq 0$,

$$M_F(t) \geq \frac{t}{\mu} \tag{8.36}$$

Nótese que para el caso encontrado más comúnmente, el NBUE, los resultados anteriores implican que:

$$\frac{t}{\mu} - 1 \leq M_F(t) \leq \frac{t}{\mu} \tag{8.37}$$

y se puede obtener una estimación razonable de $M_F(t)$ de la forma $\frac{t}{\mu}$ -0,5.

También es posible definir límites de la probabilidad de un funcionamiento continuado de un dispositivo que funciona en el presente. Para hacer esto comencemos con:

– **Definición 8.4.** En un proceso de renovación, la edad de un dispositivo en cualquier instante *y* es una variable aleatoria $\alpha(y)$, y la distribución de la vida remanente de dispositivos de edad α de una muestra común se llama distribución de vida residual. La vida residual se denota por $\gamma(\alpha)$ y la distribución de vida residual está dada por:

$$\Im_\alpha(\gamma) = F(\gamma + \alpha \mid \alpha) = 1 - \frac{\bar{F}(\gamma + \alpha)}{\bar{F}(\alpha)} \tag{8.38}$$

En el caso de un uso único de copias de un dispositivo, la distribución de vida residual de la **Definición 8.4** es bastante sencilla de determinar y de analizar. Por otra parte, para un proceso de renovación, la edad de un dispositivo en cualquier instante de tiempo es una variable aleatoria. Es verdad que:

$$\alpha(t) = t - S_{N(t)} \tag{8.39}$$

y que la vida residual en el tiempo t es:

$$\gamma(t) = S_{N(t)+1} - t \tag{8.40}$$

Utilizando estas definiciones, observamos que:

$$\bar{\Im}_t(u) = P[\gamma(t) > u] = \bar{F}(t+u) + \int_0^t \bar{F}(t+u-x)\, m_F(x)\, dx \tag{8.41}$$

la cual es análoga a la ecuación fundamental de renovación. En cualquier caso, la ecuación (8.41) da un límite de la fiabilidad residual. En particular:

$$\text{a)}\quad \text{Si } F(t) \text{ es NBU, entonces } \bar{\Im}_t(u) = P[\gamma(t) > u] \leq \bar{F}(u) \qquad (8.42)$$

$$\text{b)}\quad \text{y si } F(t) \text{ es NWU, entonces } \bar{\Im}_t(u) = P[\gamma(t) > u] \geq \bar{F}(u) \qquad (8.43)$$

Al concluir la descripción de los modelos de comportamiento de dispositivos en procesos sencillos de renovación, es oportuno observar que los sistemas cuyos componentes son todos NBU serán también NBU; pero esta afirmación no se aplica a NBUE, NWU o NWUE. Además, la convolución de distribuciones NBU es también NBU, lo mismo que la convolución de NBUE; pero esto no es verdad para distribuciones NWU o NWUE.

8.2. Mantenimiento preventivo

Los análisis anteriores representan la secuencia de los períodos de funcionamiento de los dispositivos cuando estos se utilizan hasta el fallo. En algunos casos, vale la pena sustituir un dispositivo que funciona antes de que falle. En general, el motivo por el que se sustituye un dispositivo que funciona es que el coste de hacerlo es pequeño en comparación con el coste de responder a un fallo que ocurra durante el funcionamiento del dispositivo, un fallo en el campo. Históricamente, se han definido dos tipos de políticas de mantenimiento preventivo. Se designan como «sustitución por edad» y «sustitución en bloque». Ambas pueden ser analizadas utilizando los conceptos de procesos de renovación desarrollados anteriormente. Más recientemente, se ha hecho la distinción entre una «reparación mínima», en la que un dispositivo que ha fallado se pone de nuevo en funcionamiento sin que ello modifique el riesgo, y una reparación completa que resulta en una función de riesgo correspondiente a un nuevo dispositivo. Los nuevos resultados relativos a la reparación mínima y a varios otros

temas se incluyen en este estudio después de la descripción de los modelos clásicos.

Una política de sustitución por edad implica el cambio de un dispositivo por otro nuevo, siempre que el dispositivo falla o alcanza la edad preestablecida, por ejemplo τ_a. Con la sustitución en bloque, el dispositivo en funcionamiento se sustituye en tiempos espaciados uniformemente τ_b, $2\tau_b$, $3\tau_b$, ... independientemente de su edad en dichos instantes de tiempo. En este caso, τ_b se denomina el tiempo de la política. Los valores óptimos de los tiempos de la política pueden ser determinados analizando los modelos apropiados de costes. Esto se muestra más adelante. Primero examinamos las relaciones entre dos procedimientos y los patrones generales de comportamiento.

Comencemos por definir una notación conveniente y una relación de ordenación entre las funciones de distribución. Específicamente, supongamos que:

$N_a(t, \tau_a)$= número de fallos en [0,t] en un procedimiento de sustitución por edad con edad de sustitución τ_a.

$N_b(t, \tau_b)$= número de fallos en [0,t] en un procedimiento de sustitución en bloque con tiempo de sustitución τ_b.

N(t)= número de renovaciones (fallos) en el proceso de renovación cuando no se realizan sustituciones preventivas.

Entonces, para comparar estas cantidades, definamos una relación estocástica de ordenación de la forma siguiente:

– **Definición 8.5.** Una variable aleatoria X es estocásticamente mayor o igual a la variable aleatoria Y, escrito como $X \overset{st}{\geq} Y$, si:

$$P[X > z] \geq P[Y > z] \quad \forall \quad z \tag{8.44}$$

Esta definición se utiliza ampliamente pero es de alguna forma anti-intuitiva, ya que implica que $X \overset{st}{\geq} Y$ cuando $F_x(z) \leq G_y(z)$ para todos los valores de z. La interpretación adecuada es que la distribución de X tiene su masa concentrada en los valores más grandes de la variable aleatoria, que lo que es el caso con la distribución Y. Usando las definiciones anteriores, se puede mostrar que para todos los valores $t \geq 0$ y $\tau_a \geq 0$, $N(t) \overset{st}{\geq} N_a(t, \tau_a)$ implica y es implicado por la condición que F(t) es NBU.

Una implicación importante de este resultado y de los enumerados a continuación es que, para dispositivos NBU, el mantenimiento preventivo reduce estocásticamente el número de fallos que ocurren en cualquier intervalo. Por esta razón, el mantenimiento preventivo se usa más comúnmente con dispositivos que tienen distribuciones de vida que son elementos de la clase de distribuciones NBU. Los resultados que confirman éstos son los siguientes:

a) Para todos los valores $t \geq 0$ y $\tau_b \geq 0$, $N(t) \overset{st}{\geq} N_b(t, \tau_b)$ si y solo si $F(t)$ es NBU

b) Para todos los valores $t \geq 0$, $\tau_b \geq 0$, y $k = 1, 2, \ldots\ldots$, $N_b(t, k\tau_b) \overset{st}{\geq} N_b(t, \tau_b)$ si y solo si $F(t)$ es NBU

c) $N_a(t, \tau_a)$ aumenta estocasticamente en τ_a si y solo si $F(t)$ es IFR

d) Para todos los valores $t \geq 0$, $\tau_a \geq 0$, y $k = 1, 2, \ldots\ldots$, $N_a(t, k\tau_a) \overset{st}{\geq} N_a(t, \tau_a)$ si y solo si $F(t)$ es NBU

(8.45)

Después, supongamos que $r_a(t, \tau_a)$ representa el número de sustituciones de dispositivos en [0,t] de acuerdo con una política de sustitución por edad con edad de sustitución τ_a, y que $r_b(t, \tau_b)$ es el número de sustituciones de dispositivos en [0,t] de acuerdo con una política de sustitución en bloque con intervalo τ_b. La distinción entre fallos y sustituciones es que las sustituciones incluyen tanto a los dispositivos cambiados debido a fallos como a los reemplazados preventivamente antes del fallo. Entonces, para todos los valores t>0 y para cualquier tiempo común de procedimiento τ>0,

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \tau_a(t,\tau) \overset{st}{\leq} \tau_b(t,\tau) \quad \text{y} \\ &\text{b)} \quad \text{si } F(t) \text{ es IFR, entonces } N_a(t,\tau) \overset{st}{\geq} N_b(t,\tau) \end{aligned} \tag{8.46}$$

Por tanto, por cada distribución de duración de vida, la sustitución por edad resulta estocásticamente en menos sustituciones que la sustitución en bloque. No obstante, para distribuciones de vida IFR, la sustitución por edad resulta estocásticamente en un número mayor de fallos. Ahora la motivación para utilizar un programa de mantenimiento preventivo es que al hacer sustituciones planificadas (reparaciones), la frecuencia de fallos de campo no planificados será reducida y presumiblemente esto significará un ahorro de costes. Supongamos que es posible identificar los costes de una sustitución planificada y de los fallos de campo, y que estas cantidades se representan respectivamente por c_1 y c_2. Entonces, un modelo de costes para el uso de una estrategia de sustitución en bloque sería:

$$E\left[C(\tau_b)\right] = \frac{c_1 + c_2 M_F(\tau_b)}{\tau_b} \tag{8.47}$$

en donde F(t) es la distribución de vida del dispositivo y $M_F(t_b)$ es la función de renovación basada en F(t). El modelo calcula el coste por unidad de tiempo asociado por el uso de una estrategia de sustitución en bloque con un tiempo de política τ_b. Esto es porque $M_F(\tau_b)$ es el número esperado de fallos durante el intervalo de longitud fija $[0, \tau_b]$, y cada fallo de este tipo resulta en coste igual a c_2. Al final del intervalo de sustitución en bloque, el dispositivo se sustituye a un coste igual a c_1 y la longitud del intervalo es τ_b. Nótese que el modelo no implica una hipótesis relativa a la forma de la distribución de vida, sino que está basado en una hipótesis de la sustitución instantánea del dispositivo por una copia idéntica.

Los métodos convencionales de optimización permiten el cálculo de un valor óptimo para τ_b. La derivada de la función esperada de coste es:

$$\frac{d}{d\tau_b} E\left[C(\tau_b)\right] = \frac{c_2 \tau_b \frac{d}{d\tau_b} M_F(\tau_b) - c_1 - c_2 M_F(\tau_b)}{\tau_b^2} = 0 \qquad (8.48)$$

de forma que el valor óptimo de τ_b es aquel para el cual:

$$\tau_b \frac{d}{d\tau_b} M_F(\tau_b) - M_F(\tau_b) = \frac{c_1}{c_2} \qquad (8.49)$$

Intuitivamente es atractivo que el tiempo de la política dependa de la relación entre los costes de prevención y de reparación, como es el caso. Antes de analizar con más detalle la ecuación de la derivada, observamos que la condición de la segunda derivada se transforma en:

$$\frac{d^2}{d\tau_b^2} E\left[C(\tau_b)\right] = \frac{c_2 \tau_b^3 \frac{d^2}{d\tau_b^2} M_F(\tau_b) - 2c_2 \tau_b^2 \frac{d}{d\tau_b} M_F(\tau_b) - 2\tau_b c_1 - 2c_2 \tau_b M_F(\tau_b)}{\tau_b^4} \qquad (8.50)$$

$$\frac{d^2}{d\tau_b^2} E\left[C(\tau_b)\right] = \frac{c_2 \frac{d^2}{d\tau_b^2} M_F(\tau_b)}{\tau_b} - \frac{2\tau_b \left(\frac{c_2 \tau_b \frac{d}{d\tau_b} M_F(\tau_b) - c_1 - c_2 M_F(\tau_b)}{\tau_b^2} \right)}{\tau_b^2} \qquad (8.51)$$

$$\frac{d^2}{d\tau_b^2} E\left[C(\tau_b)\right] = \frac{c_2}{\tau_b} \frac{d^2}{d\tau_b^2} M_F(\tau_b) \qquad (8.52)$$

el signo de las cuales está determinado por la distribución de vida. Para el caso específico en que F(t) es exponencial, la ecuación (8.49) no tiene solución para $M_F(t)=\lambda t$, de forma que la condición sobre la derivada se transforma en:

$$\lambda \tau_b - \lambda \tau_b = 0 = \frac{c_1}{c_2} \qquad (8.53)$$

Este resultado indica apropiadamente que, puesto que no se produce una mejora en el comportamiento de riesgo o de fallos como

resultado de realizar sustituciones preventivas en dispositivos con distribuciones de vida exponenciales, no se debe realizar en estos dispositivos un mantenimiento preventivo. Se llega directamente a la misma conclusión sustituyendo λt por $M_F(t)$ en la función esperada de coste o en la expresión de la primera derivada. En la ecuación esperada de coste:

$$E\left[C\left(\tau_b\right)\right]=\frac{c_1}{\tau_b}+c_2\,\lambda \tag{8.54}$$

es un mínimo para $\tau_b=\infty$ y, por consiguiente, la derivada de esta función de coste es:

$$\frac{d}{d\tau_b}E\left[C\left(\tau_b\right)\right]=-\frac{c_1}{\tau_b} \tag{8.55}$$

la cual no tiene ninguna raíz finita.

Nótese además que cuando para una distribución de vida NWU se cumple $M_F(x+y) \le M_F(x) + M_F(y)$, se deduce que $M_F(x+y) - M_F(x) \le M_F(y)$, de forma que la pendiente de la densidad de renovación es negativa y por consiguiente, de acuerdo con la condición de la segunda derivada, la ecuación (8.49) no tiene otra solución que en el límite de su dominio posible. Por tanto, para dispositivos NWU, la sustitución en bloque no es apropiada y esto se verifica analíticamente.

Para una política de sustitución por edad τ_a, una sustitución planificada tiene lugar cuando un dispositivo sobrevive hasta una edad τ_a, y una sustitución no planificada ocurre cuando el dispositivo falla antes de τ_a. Considerando cada sustitución de un dispositivo como el fin de un ciclo de funcionamiento, el coste de ciclo es:

$$C_T\left(\tau_a\right)=c_1\bar{F}\left(\tau_a\right)+c_2\,F\left(\tau_a\right) \tag{8.56}$$

y la duración esperada de cada ciclo es:

$$E[T]=\tau_a\bar{F}\left(\tau_a\right)+\int_0^{\tau_a}t\,f(t)dt=\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt \tag{8.57}$$

de forma que el coste esperado por unidad de tiempo es:

$$E\left[C\left(\tau_a\right)\right]=\left(c_1\bar{F}\left(\tau_a\right)+c_2F\left(\tau_a\right)\right)\Big/\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt \tag{8.58}$$

La ecuación de la solución basada en una derivada es:

$$\frac{dE\left[C\left(\tau_a\right)\right]}{d\tau_a}=\frac{\left(-c_1f\left(\tau_a\right)+c_2f\left(\tau_a\right)\right)\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt-\left(c_1\bar{F}\left(\tau_a\right)+c_2F\left(\tau_a\right)\right)\bar{F}\left(\tau_a\right)}{\left(\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt\right)^2}=0 \tag{8.59}$$

para la que la condición resultante óptima:

$$\bar{F}\left(\tau_a\right)+z\left(\tau_a\right)\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt=\frac{c_2}{c_2-c_1} \tag{8.60}$$

Una vez más, la solución tiene el atractivo intuitivo de que la longitud del intervalo de sustitución depende directamente de la relación de costes de reparación. Nótese además que la condición de la segunda derivada es:

$$\left(c_2-c_1\right)\frac{d}{d\tau_a}f\left(\tau_a\right)\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt+\left(\left(c_2-c_1\right)F\left(\tau_a\right)+c_1\right)f\left(\tau_a\right)\Big/\left(\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)dt\right)^2 \tag{8.61}$$

y puesto que:

$$\frac{d}{d\tau_a}f\left(\tau_a\right)=\bar{F}\left(\tau_a\right)\left(\frac{d}{d\tau_a}z\left(\tau_a\right)-1\right) \tag{8.62}$$

puede escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{\left(c_2-c_1\right)\bar{F}\left(\tau_a\right)\left(\frac{d}{d\tau_a}z\left(\tau_a\right)-1\right)}{\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)\,dt}+E\left[C\left(\tau_a\right)\right]\frac{f\left(\tau_a\right)}{\int_0^{\tau_a}\bar{F}(t)\,dt} \tag{8.63}$$

lo cual implica que la política óptima de sustitución por edad ocurre en el límite del dominio posible, de forma que no debe realizarse un mantenimiento preventivo. Una vez más, la solución analítica confirma la intuición de que el mantenimiento preventivo sólo es útil cuando los

nuevos dispositivos proporcionan una ventaja clara sobre el uso continuado de los existentes.

8.3. Disponibilidad

Los modelos descritos anteriormente no contemplan de forma explícita la influencia del proceso de mantenimiento sobre una población de dispositivos. Si se extienden los análisis anteriores de forma que incorporen el proceso de mantenimiento, esto conduce a la definición de una nueva medida de rendimiento, es decir, la disponibilidad. En concreto hay cuatro medidas de disponibilidad usadas comúnmente, todas las cuales están relacionadas entre sí. Estas se definen del modo siguiente:

– **Definición 8.6.** La disponibilidad (puntual) A(t) de un dispositivo es la probabilidad de que esté funcionando en cualquier tiempo, t. Es decir:

$$A(t) = P\left[x(t) = 1\right] = E\left[x(t)\right] \tag{8.64}$$

La distinción de que ésta es la disponibilidad puntual es importante. No obstante, A(t) se denomina aquí como la disponibilidad, al menos que esto resulte ambiguo. Las otras medidas de disponibilidad son:

– **Definición 8.7.** La disponibilidad límite A de un dispositivo es el límite de A(t). Es decir:

$$A = \lim_{t \to \infty} A(t) \tag{8.65}$$

– **Definición 8.8.** La disponibilidad media A_{av} en un intervalo $[0, \tau]$ de un dispositivo es:

$$A_{av}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A(t)\, dt \tag{8.66}$$

– **Definición 8.9.** La disponibilidad media límite A_∞ de un dispositivo es el límite de la disponibilidad media:

$$A_\infty = \lim_{\tau \to \infty} A_{av}(\tau) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau A(t)\, dt \qquad (8.67)$$

Obsérvese que de acuerdo con estas definiciones la disponibilidad se transforma en fiabilidad cuando no es posible la reparación. También, $A_{av}(\tau)$ es la proporción de tiempo de funcionamiento de un dispositivo durante el intervalo $[0, \tau]$ y cuando el límite existe, A_∞ es igual a A. Un punto ulterior algo sutil estriba en el hecho de que para una muestra de dispositivos, cada una de las cantidades anteriores es un valor esperado relativo a la frecuencia (o proporción de los miembros de la muestra) que están funcionando. La distribución de la frecuencia para la que las medidas de disponibilidad son valores esperados es binomial.

Cuando entramos en un nivel superior al de las definiciones elementales y de los comentarios anteriores, el análisis de la disponibilidad puede hacerse bastante complejo. Este análisis se realiza normalmente con relación a una afirmación definida muy cuidadosamente sobre las condiciones de funcionamiento supuestas. Esto se debe a que pequeñas diferencias en el plan de operación pueden tener un efecto muy pronunciado sobre la identidad del modelo apropiado y su solución. A continuación se examinan varios casos específicos.

Para comenzar, consideremos el caso más sencillo. Supongamos que un dispositivo con una distribución exponencial de vida con un parámetro λ funciona hasta que falla, y que luego es sustituido por otra unidad idéntica. Supongamos además que el tiempo de reparación es una variable aleatoria exponencial con parámetro μ. Cada intervalo integrado por un período de funcionamiento y un período de reparación puede ser considerado como un ciclo de uso de dispositivos. Puesto que estos intervalos están distribuidos independiente e idénticamente, constituyen un proceso de renovación. Son cuestiones

significativas la longitud (media) del ciclo y los valores de las medidas de disponibilidad definidas anteriormente.

Con el fin de tratar estas cuestiones, supongamos que T_{oi} es la duración aleatoria del funcionamiento del dispositivo durante el ciclo i-ésimo, y que T_{ri} sea la duración asociada de reparación. Entonces, la longitud del ciclo i-ésimo es T_{ci}. Claramente:

$$T_{ci} = T_{oi} + T_{ri} \tag{8.68}$$

de forma que si F(t) es la distribución de vida y G(t) es la distribución del tiempo de reparación, entonces H(t), la distribución de la longitud del ciclo es la convolución de F y G.

$$h^*(s) = \pounds\{h(t)\} = \pounds\{f(t)\}\pounds\{g(t)\} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\frac{\mu}{s+\mu} = \frac{\lambda\mu}{s^2+(\lambda+\mu)s+\lambda\mu} \tag{8.69}$$

y para esta transformada, la inversa da:

$$h(t) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left(e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}\right) \tag{8.70}$$

y de ésta:

$$H(t) = 1 - \frac{\mu e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda} \tag{8.71}$$

Obsérvese que ésta no es una distribución exponencial ni una distribución gamma. Vale la pena emplear algo de tiempo para mostrar la inversión de h*(s). El método más sencillo para esto es utilizar quebrados parciales. Esto es, tomemos:

$$\frac{1}{s^2+(\lambda+\mu)s+\lambda\mu} = \frac{1}{(s+\lambda)(s+\mu)} = \frac{A}{s+\lambda} + \frac{B}{s+\mu} \tag{8.72}$$

Si los dos términos del lado derecho se combinaran con un denominador común, el numerador sería:

$$(s+\mu)A+(s+\lambda)B=(A+B)s+(\mu A+\lambda B) \tag{8.73}$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de s en el numerador da:

$$\begin{array}{lll} A+B=0 & \lambda A+\lambda B=0 & \\ \mu A+\lambda B=1 & \mu A+\mu B=1 & \Rightarrow(\mu-\lambda)A=1\Rightarrow \quad A=1/(\mu-\lambda) \\ A+B=0\Rightarrow & 1/(\mu-\lambda)+B=0 & \Rightarrow B=-1/(\mu-\lambda) \end{array} \tag{8.74}$$

$$h^*(s)=\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{s+\lambda}-\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{s+\mu} \tag{8.75}$$

y como la transformada no es afectada por multiplicación por una constante, la transformada inversa es la dada en la ecuación (8.70). Obsérvese que esta es la respuesta a la pregunta relativa sobre la longitud de un ciclo. Es una variable aleatoria con la distribución H dada en la ecuación (8.71).

Después, consideremos que el dispositivo que está siendo utilizado en el tiempo t=0 es nuevo y está funcionando. El dispositivo estará disponible en cualquier tiempo futuro t si: (a) sobrevive hasta t; o (b) falla y es sustituido unas cuantas veces durante el tiempo anterior a t, y la copia del dispositivo instalada en dicho tiempo sobrevive hasta t. Esto se puede expresar como:

$$A(t)=\bar{F}(t)+\int_0^t \bar{F}(t-x)\,m_H(x)\,dx \tag{8.76}$$

donde el subíndice H en m_H indica que la cantidad representada es la densidad de la renovación basada en la distribución del tiempo del ciclo, H. En general, la solución de la ecuación (8.76) puede ser muy difícil. Se logra normalmente con transformadas de Laplace y en el ejemplo de la distribución de vida exponencial y la distribución del tiempo de reparación, este análisis no es difícil. La derivación es:

$$A^*(s) = \pounds\{A(t)\} = \pounds\{\bar{F}(t)\} + \pounds\left\{\int_0^t \bar{F}(t-x)\, m_H(x)\, dx\right\}$$

$$\pounds\{\bar{F}(t)\} = \pounds\{1 - F(t)\} = \pounds\{1\} - \pounds\{F(t)\} = \frac{1}{s} - F^*(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

$$\pounds\left\{\int_0^t \bar{F}(t-x)\, m_H(x)\, dx\right\} = \pounds\left\{\int_0^t m_H(x)\, dx\right\} - \pounds\left\{\int_0^t F(t-x)\, m_H(x)\, dx\right\} = \pounds\{M_H(t)\} - m_H^*(s)\, F^*(s)$$

$$A^*(s) = \frac{1}{s} - F^*(s) + M_H^*(s) - m_H^*(s)\, F^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} f^*(s) + \frac{1}{s} m_H^*(s) - \frac{1}{s} m_H^*(s)\, f^*(s)$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - f^*(s)\right)\left(1 + m_H^*(s)\right) = \frac{1}{s}\,\frac{s}{s+\lambda}\,\frac{(s+\lambda)(s+\mu)}{s(s+\lambda+\mu)} = \frac{s+\mu}{s(s+\lambda+\mu)} \qquad (8.77)$$

Y hagamos que $A^*(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+\lambda+\mu} = \dfrac{A(s+\lambda+\mu) + Bs}{s(s+\lambda+\mu)}$; por lo tanto

(8.78)

$$A(\lambda+\mu) = \mu \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$A + B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = 1 - A = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \qquad (8.79)$$

por tanto:

$$A^*(s) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\frac{1}{s} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\frac{1}{s+\lambda+\mu} \qquad (8.80)$$

y:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (8.81)$$

Nótese que para esta expresión, tomando el límite se obtiene:

$$A = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1/E[\text{tiempo reparacion}]}{1/E[\text{tiempo reparacion}] + 1/E[\text{vida util}]} = \frac{E[\text{vida util}]}{E[\text{vida util}] + E[\text{tiempo reparacion}]}$$

(8.82)

lo cual es muy atractivo intuitivamente. De hecho este resultado se utiliza y se describe muy frecuentemente. Se utiliza mucho porque

depende solamente de los valores esperados y por tanto se aplica a muchas distribuciones de vida y de reparación. La expresión da esencialmente la relación entre el tiempo de funcionamiento y el tiempo total, a condición de que todos los términos se definan de forma apropiada. Nótese también que muchas personas se refieren a E[vida útil] como el MTBF (tiempo medio entre fallos) y a E[tiempo de reparación] como el MTTR (tiempo medio de reparación) y luego expresan la ecuación (8.82) utilizando estos términos. Por último, para el caso exponencial también es verdad que $A_{\infty} = A$.

Antes de terminar con la derivación anterior del modelo general de disponibilidad, nótese que la transformada de la expresión de disponibilidad puede ser reformulada de forma que evite el uso explícito de la función de renovación y puede ser a veces bastante conveniente. Específicamente:

$$A^*(s) = \pounds\left\{\bar{F}(t)\right\} + \pounds\left\{\int_0^t \bar{F}(t-x)\, m_H(x)\, dx\right\} = \frac{1}{s}\left(1-f^*(s)\right)\left(1+m_H^*(s)\right)$$
$$= \frac{1}{s}\left(1-f^*(s)\right)\left(1+\frac{h^*(s)}{1-h^*(s)}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1-f^*(s)}{1-h^*(s)}\right) \qquad (8.83)$$

Por supuesto, la expresión resultante para el caso exponencial tratado anteriormente es la misma.

El valor real de la expresión (8.83) se manifiesta en el análisis de casos más complicados.

Las discusiones anteriores de modelos elementales de mantenimiento y reparación son generales, y sirven para ilustrar los métodos utilizados para evaluar los planes de mantenimiento. No obstante, los resultados obtenidos se refieren solamente a dispositivos aislados y no a sistemas. Mientras que existen algunos casos en que un sistema puede ser tratado como una entidad única, normalmente es más apropiado estudiar los efectos sobre el rendimiento del sistema del mantenimiento a nivel de componentes. Puesto que los sistemas se

gestionan de muchas formas diferentes, el análisis de la disponibilidad del sistema debe ser realizado en el contexto de un supuesto modo de operación específico. Hay varios entornos de operación razonablemente representativos que pueden ser considerados. Aquí se presentan cuatro de ellos.

El primer modelo, y a menudo bastante apropiado, es suponer un sistema serie para el que no se realiza mantenimiento preventivo. Por el contrario, el sistema se opera hasta que se produce el fallo de un componente. En dicho momento, el componente que ha fallado es sustituido mientras que el resto del sistema espera sin que avance su edad. El sistema luego se pone en funcionamiento. Suponiendo que cada componente tiene una distribución de vida propia, y que el fallo simultáneo de dos o más componentes no puede ocurrir, es posible pero no sencillo definir un modelo de las operaciones del sistema. Definamos las cantidades T_{oi_k} y T_{ri_k} como los intervalos k-ésimos de operación y reparación para el componente i-ésimo y supongamos que $\tilde{N}_i(t)$ representa el número de fallos del componente i-ésimo durante el tiempo t real (de reloj).

La distinción entre tiempo real y tiempo de operación es necesaria debido a que durante los intervalos de reparación los componentes permanecen en un estado de «animación suspendida». En la Figura 8.1. se ilustra una muestra representativa de camino.

Supongamos que U(t) es la duración del funcionamiento del sistema durante un intervalo de longitud t y que D(t) denota el tiempo asociado de reparación. Claramente, U(t)+D(t)=t. Entonces:

$$\tilde{N}_i(t,\omega) = N_i\left(U(t,\omega),\omega\right) \qquad (8.84)$$

en donde $N_i(t)$ es el proceso ordinario de renovación para el componente i, basado en su distribución de vida $F_i(t)$. La ecuación (8.84) se formula en relación con el resultado del camino particular de muestra, ω, porque es verdad que para cualquier camino de muestra dado, el número de

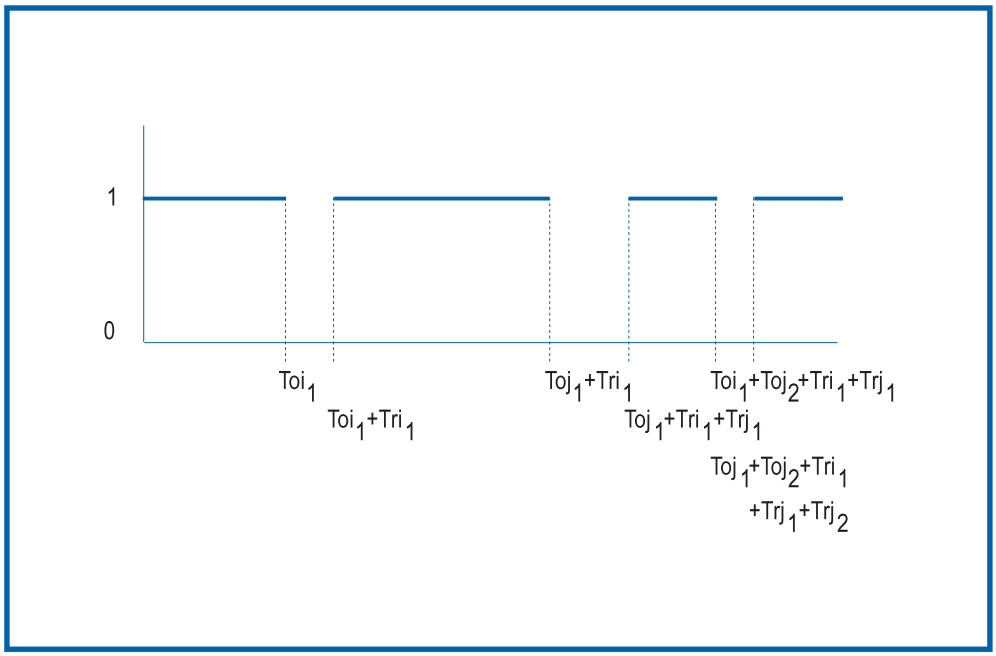


Figura 8.1 - EJEMPLO DE CAMINO SIMPLE -

fallos es el mismo para los dos procesos de renovación. No obstante, en general no es verdad que $\tilde{N}_i(t) \overset{st}{=} N_i(U(t))$ cuando $N_i(t)$ y $U(t)$ se determinan independientemente. En cualquier caso, para el modo supuesto de funcionamiento, se pueden obtener varios resultados límites. Los resultados transitorios correspondientes no se pueden derivar fácilmente, y a veces son imposibles de obtener. Una razón de esto es que los tiempos en que los componentes individuales terminan de repararse no son en general puntos de renovación, de forma que el vector de estado del sistema puede que no tenga ningunos puntos de renovación.

A pesar de la complejidad potencial del funcionamiento transitorio del sistema, se pueden definir varios resultados límite. El primero de éstos es que si μ_i denota la longitud esperada de vida para el componente i del sistema entonces:

a) $$P\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_i\left(U\left(t,\omega\right),\omega\right)}{U\left(t,\omega\right)} = \frac{1}{\mu_i}\right) = 1 \qquad (8.85)$$

También, si ν_i representa el tiempo esperado de reparación para el componente i, entonces:

b) $$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_i}{\mu_i}\right)^{-1}\right)=1 \qquad (8.86)$$

Hay que observar que estos resultados no dependen de las identidades de la distribución de vida y de la distribución del tiempo de reparación, sino sólo de sus valores medios. Consecuentemente,

c) $$A_\infty=\lim_{t\to\infty}\frac{E[U(t)]}{t}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_i}{\mu_i}\right)^{-1} \qquad (8.87)$$

Este resultado para la disponibilidad media límite se aplica también a la disponibilidad límite cuando existe (lo cual ocurre la mayoría de las veces).

También pueden derivarse resultados comparables para el tiempo en que el sistema está parado. En particular, si $D_i(t)$ es el tiempo de parada del sistema resultado de los fallos de los componentes en la posición i del sistema, si $D_{i\infty}$ denota el valor límite de $D_i(t)/t$, y si D_∞ representa el valor límite de $D(t)/t$, entonces:

$$D_{i\infty}=\frac{\nu_i}{\mu_i}A\infty \qquad (8.88)$$

y:

$$D_\infty=A_\infty\sum_{i=1}^{n}\frac{\nu_i}{\mu_i} \qquad (8.89)$$

Estas dos relaciones tienen un atractivo intuitivo análogo a la expresión (8.82).

Resultados límites para el número de fallos en la posición i de los componentes se obtienen de los límites anteriores, y son:

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{N}_i(t)}{t}=\frac{A_\infty}{\mu_i}\right)=1 \qquad (8.90)$$

y:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\tilde{N}_i(t)\right]}{t} = \frac{A_\infty}{\mu_i} \tag{8.91}$$

De los resultados expresados hasta ahora se deriva que si μ denota el tiempo medio de funcionamiento de sistema y ν denota el tiempo medio de parada de sistema, entonces:

$$P\left(\mu = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i}\right)^{-1}\right) = 1 \tag{8.92}$$

y:

$$P\left(\nu = \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\nu_i}{\mu_i}\right) = 1 \tag{8.93}$$

Debe notarse que en el caso especial en que las distribuciones de vida sean exponenciales, la propiedad de ausencia de memoria implica que μ es la longitud esperada de cada período de funcionamiento del sistema. Las ecuaciones (8.92) y (8.93) implican que, independientemente de las identidades de las distribuciones de vida, el tiempo medio de funcionamiento del sistema converge al mismo valor. Un punto final es que la disponibilidad media límite del sistema es:

$$A_\infty = \frac{\mu}{\mu + \nu} \tag{8.94}$$

lo cual es un resultado directamente análogo al obtenido para un dispositivo único expresado en la ecuación (8.82).

Ahora, consideremos un modo de operación del sistema alternativo y de alguna forma más general. Supongamos que para un sistema coherente arbitrario, todos los caminos de la muestra de componentes son independientes. Es decir, supongamos que cada componente funciona, falla, y es reparado sin interrumpir los caminos de los otros componentes. En este caso, la secuencia de ciclos de funcionamiento y reparación en cada posición del componente consti-

tuye un proceso independiente de renovación. En cualquier tiempo el vector de estado del sistema es:

$$\mathbf{X}(t) = \left(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\right) \tag{8.95}$$

y el estado del sistema $\phi(\mathbf{X}(t))$ se determina como se ha descrito anteriormente y la fiabilidad del sistema es:

$$\bar{F}(t) = E\left[\phi\left(\mathbf{X}(t)\right)\right] = r\left(X_1(t), X_2(t), ..., X_n(t)\right) \tag{8.96}$$

en donde $r(\cdot)$ es la función de fiabilidad y se aplica a la estructura ϕ. La expresión correspondiente para la disponibilidad del sistema es entonces:

$$A(t) = r\left(E\left[X_1(t)\right], E\left[X_2(t)\right], ..., E\left[X_n(t)\right]\right) \tag{8.97}$$

lo cual es equivalente a:

$$A(t) = r\left(A_1(t), A_2(t), ..., A_n(t)\right) \tag{8.98}$$

y además, la disponibilidad límite es:

$$A = r\left(A_1, A_2, ..., A_n\right) \tag{8.99}$$

Nótese que todas las relaciones estructurales de equivalencia y las acotaciones de probabilidad que se aplican a $r(\cdot)$, son aplicables a las medidas de disponibilidad.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que para un sistema en serie con tres componentes, las distribuciones de vida son de Weibull con medias respectivas de 750, 1.200, y 500 horas, y que las distribuciones del tiempo de reparación son exponenciales con medias de 24, 18, y 40 horas. Las medidas exactas de disponibilidad dependientes del tiempo son muy difíciles de obtener. No obstante, las relaciones contenidas en las expresiones listadas anteriormente pueden

utilizarse para obtener las medidas de disponibilidad del nivel del sistema:

$$
\begin{aligned}
A_{\infty} &= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{\mu_i}\right)^{-1} = 1 \quad / \quad \left(1+\frac{24}{750}+\frac{18}{1200}+\frac{40}{500}\right) = 0{,}8873 \\
\mu &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}\right)^{-1} = 1 \quad / \quad \left(\frac{1}{750}+\frac{1}{1200}+\frac{1}{500}\right) = 240 \text{ hrs} \\
v &= \mu\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{\mu_i} = (240)\left(\frac{24}{750}+\frac{18}{1200}+\frac{40}{500}\right) = 30{,}48 \\
D_{\infty} &= A_{\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i}{\mu_i} = (0{,}8873)\left(\frac{24}{750}+\frac{18}{1200}+\frac{40}{500}\right) = 0{,}1127
\end{aligned}
\qquad (8.100)
$$

Como otro ejemplo, consideremos la configuración de un sistema mostrada en la Figura 8.2, y supongamos que los componentes 1 y 2 tienen distribuciones de vida Weibull con medias respectivas de 1.200 y 1.800 horas, y distribuciones exponenciales de tiempo de reparación con medias de 36 y 40 horas. Supongamos que los componentes 3 y 4

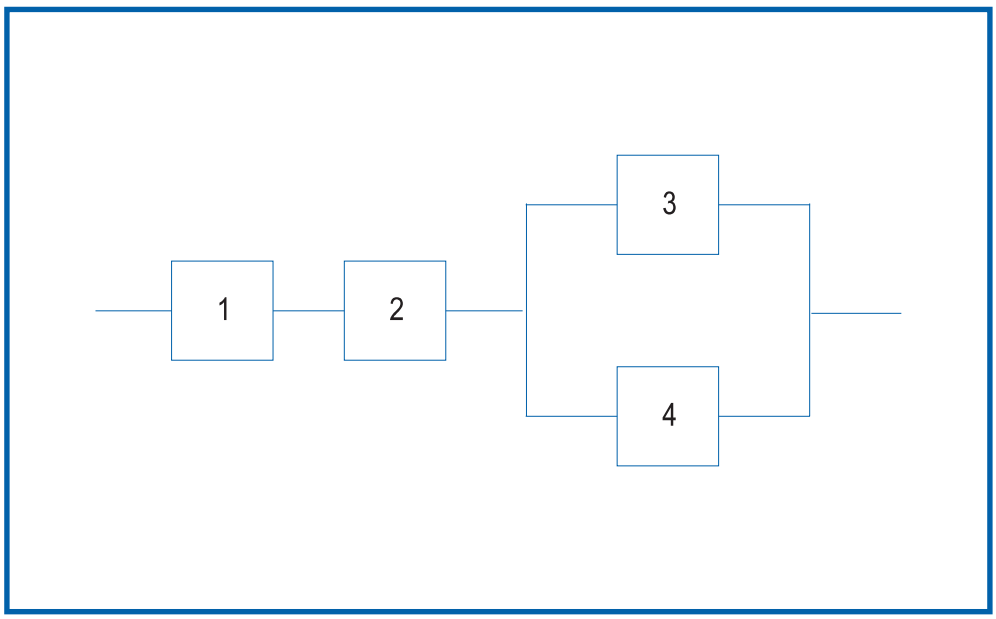


Figura 8.2 - EJEMPLO DE SISTEMA -

son idénticos y que tienen distribuciones de vida Weibull con una media de 750 horas, y una distribución exponencial de tiempo de reparación con una media de 50 horas.

La función de estado del sistema para esta configuración es:

$$\phi\left(X\left(t\right)\right)=x_1\left(t\right)x_2\left(t\right)\left(1-\left(1-x_3\left(t\right)\right)\left(1-x_4\left(t\right)\right)\right) \qquad (8.101)$$

y la función de fiabilidad del sistema es:

$$\bar{F}\left(t\right)=\bar{F_1}\left(t\right)\bar{F_2}\left(t\right)\left(1-\left(1-\bar{F}_3(t)\right)\left(1-\bar{F}_4(t)\right)\right) \qquad (8.102)$$

Las medidas de disponibilidad del sistema dependientes del tiempo no son obvias, del mismo modo que las medidas correspondientes del nivel de componentes son difíciles de obtener. No obstante, usando la ecuación (8.82), las disponibilidades límites para los componentes son:

$$A_i=\frac{\mu_i}{\mu_i+v_i} \qquad (8.103)$$

de modo que A_1=0,9709, A_2=0,9783, A_3=A_4=0,9375. Por consiguiente, la ecuación (8.98) da:

$$A=r\left(A_1,A_2,.....,A_n\right)=A_1\,A_2\left(1-\left(1-A_3\right)\left(1-A_4\right)\right)=0{,}9461 \qquad (8.104)$$

que es también el valor de A_∞ para el sistema. Un comentario final sobre las aplicaciones de ejemplo de los resultados anteriores es que las acotaciones basadas en los caminos mínimos y en los cortes mínimos pueden evaluarse utilizando las disponibilidades para obtener las acotaciones correspondientes de la disponibilidad del sistema.

8.4. Optimización de repuestos y de la capacidad de reparación

La investigación de estrategias de reparación y de las medidas de disponibilidad conduce a algunos análisis interesantes. Uno de estos

es el impacto de los repuestos sobre la disponibilidad. Consideremos el caso más sencillo en el que se dispone únicamente de un solo repuesto para sustituir a uno que ha fallado. Supongamos además que cuando la unidad en funcionamiento falla, el repuesto se pone en servicio inmediatamente y la pieza averiada se repara. El fallo del sistema se produce cuando una unidad en funcionamiento falla, antes de que la pieza en reparación esté lista para su utilización. Supongamos que las unidades son idénticas y que tienen una distribución de vida F(t) con media μ, y una distribución de tiempo de reparación G(t) con media ν.

Para analizar el problema formulado, nótese que suponer que los tiempos de funcionamiento y de reparación son independientes, implica que el comienzo de cada intervalo de operación de una unidad con el de reparación de la otra es un punto de renovación. Por consiguiente, cada intervalo de operación, distinto del primero, es representativo de todos ellos. La razón por la que este primer intervalo es distinto es que no hay ninguna reparación durante el mismo. Para todos los intervalos excepto el primero, supongamos que ρ representa la probabilidad de que la actividad de reparación se termine antes del final del intervalo que resulta del fallo de la unidad en funcionamiento, entonces:

$$\rho = \int_0^t G(x) f(x) dx \qquad (8.105)$$

y claramente el tiempo hasta el fallo del sistema, por ejemplo T, es la suma del primer intervalo de operación, por ejemplo T_1, de algunos intervalos, por ejemplo T_0, en cada uno de los cuales la reparación se termina antes del fallo, y otro intervalo de T_0 en el que el fallo precede a terminación de la reparación. Otra manera de representar esto es que después del primer intervalo, el número de intervalos hasta el fallo del sistema, N, es geométrico y cada intervalo tiene una longitud correspondiente al tiempo de fallo. Por tanto:

$$P[N = n] = \rho^{n-1}(1-\rho) \qquad (8.106)$$

de forma que E[N]=1/(1-ρ) y por consiguiente E[T]=μ+μ/(1-ρ). Obsérvese además que si el proceso se continúa después del primer fallo del sistema, los tiempos de fallo del sistema siguientes no incluyen un intervalo inicial sin reparaciones, de forma que el tiempo entre fallos del sistema es μ/(1-ρ).

Incluso para este caso sencillo, puede ser difícil obtener medidas de disponibilidad. La disponibilidad límite es:

$$A = \frac{\mu / (1-\rho)}{\mu / (1_ \rho) + E[D]} \tag{8.107}$$

en donde E[D] es el tiempo esperado de parada. Es igual al tiempo requerido para completar una reparación en medio del proceso medido a partir del tiempo de fallo del componente en funcionamiento. Una expresión para el tiempo de parada esperado es:

$$E[D] = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\bar{G}(t+x)}{\bar{G}(x)} f(x)\, dt\, dx \tag{8.108}$$

la cual no puede simplificarse sin especificar las funciones de distribución. Como comentario final sobre el caso sencillo de una única unidad en funcionamiento y de un solo repuesto, nótese que la experiencia de operación puede ser modelada en función del número de unidades averiadas, como una cadena de Markov continua en el tiempo con tres estados. La solución de esta forma es común.

De hecho la generalización del caso sencillo anterior es considerar m unidades en funcionamiento con n piezas de recambio y con s personas de mantenimiento, las cuales solo pueden reparar una unidad cada vez. Si se supone de nuevo que todos los tiempos de fallo y reparación son mutuamente independientes, la cantidad Y(t) que representa el número de unidades paradas en el tiempo t constituye un proceso de nacimiento y muerte. Para procesos de este tipo, se ha obtenido el vector de las probabilidades de ocupación en estado estacionario para el caso en que las distribuciones de fallo y reparación son exponenciales. Para la mayoría de los otros casos verosímiles no

se han obtenido resultados algebraicos. Para el caso exponencial en que la longitud de vida esperada es μ, y el tiempo esperado de reparación es ν, la distribución estacionaria está dada por:

$$\pi_k = \binom{m+n}{k}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \pi_0 \qquad 1 \le k \le s$$

$$\pi_k = \binom{m+n}{k}\frac{k!}{s!\,s^{k-s}}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k \pi_0 \qquad s \le k \le m+n \tag{8.109}$$

$$\pi_0 = 1/\left(\sum_{k=1}^{s-1}\binom{m+n}{k}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k + \sum_{k=s}^{m+n}\binom{m+n}{k}\frac{k!}{s!\,s^{k-s}}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k\right)$$

Entonces, la disponibilidad del sistema puede ser calculada como la suma de los π_k correspondientes a los estados en que el sistema funciona. Presumiblemente, ésta debería ser:

$$A = \sum_{k=0}^{n} \pi_k \tag{8.110}$$

y debe notarse que esta expresión depende solamente de la relación entre el tiempo medio de reparación y la longitud media de vida.

Hay muchas maneras en que se puede realizar el análisis del efecto de los suministros de las piezas de recambio y de la capacidad de reparación sobre la disponibilidad del sistema. El modelo anterior proporciona un punto de partida para el desarrollo de muchos de estos análisis. El problema de optimización de repuestos mejor conocido es aquel en que:

a) Los fallos de las copias del componente i son exponenciales con una media μ_i (de modo que la demanda de repuestos obedece a una distribución de Poisson).

b) La capacidad de reparación es ilimitada de forma que cualquier componente averiado se repara sin tener que esperar.

c) El tiempo de reparación es exponencial con una media ν_i para componentes de tipo i.

d) El coste unitario de compra de los componentes de tipo i es c_i.

e) Todos los acontecimientos de fallos y reparación son mutuamente independientes.

Para esta situación, es apropiado tratar de seleccionar un conjunto óptimo de repuestos, que satisfaga un objetivo de disponibilidad sujeto a una condición de coste, o que satisfaga un objetivo de coste sujeto a una condición de disponibilidad. Nótese que en cualquier formulación de un modelo de costes los resultados de (8.97) u (8.110) pueden proporcionar la base para el análisis.

FIABILIDAD

9

Garantías



Una garantía es el compromiso de un fabricante de que un producto mostrará un nivel definido de fiabilidad. Cada vez es más frecuente que los fabricantes den garantía a sus productos. La razón principal por la que los fabricantes dan garantías es que los clientes suelen considerarlas necesarias, y por tanto constituyen un ingrediente importante en una comercialización con éxito. Independientemente de este punto, se reconoce generalmente que los productos complejos y particularmente caros deben estar garantizados para que funcionen adecuadamente. En 1964, el Congreso de los Estados Unidos promulgó la Ley Magnuson Moss, en la que se definía formalmente la estructura de las garantías y especificaba las responsabilidades de los fabricantes para satisfacer los compromisos de las garantías.

Esencialmente hay dos tipos de garantías. Estas son garantías de sustitución completa y garantías prorrateadas. Las garantías prorrateadas se ofrecen normalmente en los productos como los neumáticos de coches. Las características comunes de los productos con garantías prorrateadas son: (a) el uso del producto implica desgaste o al menos un deterioro cumulativo, (b) la reparación es o físicamente impráctica o económicamente ineficaz, y (c) la evaluación de la edad del producto es relativamente sencilla. Con una garantía prorrateada, el fabricante devuelve al cliente una proporción del precio original del producto, en caso de que este último falle. La proporción del precio devuelto se calcula sobre la base de una estimación de la fracción de la vida del producto que el cliente ha perdido debido a su fallo. En el caso de un neumático de coche, un reventón hace que el neumático quede inutilizable. Cuando

esto ocurre, lo normal es medir la profundidad del dibujo que queda, y de la relación entre ésta y la profundidad original se determina la vida del neumático perdida debida al fallo. La fórmula para convertir la vida perdida en un arreglo en metálico es específica de cada fabricante.

La garantía de sustitución completa garantiza la reparación o sustitución de un producto que ha fallado (o un componente del producto) de forma que el producto quede como nuevo. Una característica esencial de una garantía de sustitución completa es la definición del límite de tiempo para su aplicabilidad. Para algunos productos, esta garantía está en vigor durante un período fijo de tiempo a partir de la fecha de compra. Ejemplos de esto son una garantía de tres años para un coche, o una garantía de un año para un equipo de música. En el caso del coche, la frecuencia de reparación no cambia la fecha de la garantía.

Para algunos productos, la garantía de sustitución completa se renueva cuando el producto es sustituido de acuerdo con la póliza de garantía. Por ejemplo, un equipo de música portátil que falla antes de su período de garantía de un año puede ser sustituido por otra unidad del producto que también está garantizado por un año. La mayoría de los productos de consumo duraderos están cubiertos por uno de los dos tipos de garantías de sustitución completa.

La elección de qué tipo de garantía debe ofrecer la hace el fabricante, y está altamente influenciada según la naturaleza del producto y según su fiabilidad. Las cuestiones relativas a los procedimientos de garantía para los que el análisis tiene sentido incluyen la longitud del período de garantía, el coste que resultará de cumplir con los compromisos de la garantía, y la fórmula que ha de aplicarse en las garantías prorrateadas.

9.1. Garantías de sustitución completa

La mayoría de los analistas distinguen entre productos reparables y no reparables. Esta distinción es innecesaria si el modelo de servicio

de garantía es suficientemente general y si el producto queda como nuevo después de un servicio de garantía. Supongamos que la garantía de un producto se renueva cuando tiene lugar una reparación, y supongamos que T_w representa la duración de la garantía de sustitución completa. Supongamos que para este caso, el coste de proveer la garantía es el coste de la sustitución del producto más un coste de operación y de proceso. Supongamos que el coste resultante se representa como una proporción, δ, del precio de venta del producto, P. Además supongamos que la probabilidad de las ventas del producto aumenta con la garantía y que esto puede modelarse utilizando:

$$u(T_w) = E\,(\text{demanda cuando el período de garantía es } T_w) = u_1\text{-}u_2/T_w$$

El beneficio esperado realizado con las ventas de los productos y los costes asociados de la garantía son:

$$E\left[\text{beneficio}\right] = u\left(T_w\right)\left(P - \delta P\, E\left[N\left(T_w\right)\right]\right) \tag{9.1}$$

en donde $E[N(T_w)]$ es el número esperado de sustituciones de productos, el cual está dado por:

$$E\left[N\left(T_w\right)\right] = \frac{1}{\bar{F}\left(T_w\right)} - 1 \tag{9.2}$$

ya que el número de copias de unidades del producto utilizadas para lograr una duración de vida en exceso del intervalo de garantía es geométrico con el parámetro $\bar{F}\,(T_w)$, la función de supervivencia para la distribución de vida del producto, F(t). El valor esperado del número de sustituciones, $N(T_w)$, es uno menos que el número de unidades utilizadas. Sustituyendo (9.2) en (9.1) y tomando la derivada da:

$$\frac{u_2\, P\,(1+\delta)}{T_w^2} - \frac{u_1\, \delta\, P\, f\left(T_w\right)}{\bar{F}^2\left(T_w\right)} - \frac{u_2\, \delta\, P\left(\bar{F}\left(T_w\right) - T_w\, f\left(T_w\right)\right)}{T_w^2\, \bar{F}^2\left(T_w\right)} = 0 \tag{9.3}$$

la cual (utilizando $f = z\,\bar{F}$) puede convertirse en la condición:

$$\bar{F}(T_W) - \frac{u_1 \delta}{u_2 (1+\delta)} T_W^2 z(T_W) + \frac{\delta}{(1+\delta)} T_W z(T_W) = \frac{\delta}{(1+\delta)} \qquad (9.4)$$

que a su vez se puede resolver numéricamente para determinar el valor óptimo de T_W. Nótese que esta formulación da una solución que es independiente del precio del producto, y depende en cambio de la proporción de los ingresos devueltos al cliente y del comportamiento de fallos del producto. Debe notarse también que, con un esfuerzo algebraico considerable, la condición de la segunda derivada puede ser transformada en la forma:

$$-\frac{2 u_1 z(T_W)}{T_W \bar{F}(T_W)} - \left(u_1 - \frac{u_2}{T_W}\right)\left(\frac{z'(T_W) + z^2(T_W)}{\bar{F}(T_W)}\right) < 0 \qquad (9.5)$$

la cual es satisfecha por muchas distribuciones de vida, y muy claramente cuando la distribución de vida es IFR.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que un producto tiene una distribución Weibull de vida con parámetros $\alpha = 10^{-3}$ y $\beta = 1{,}5$. Entonces, suponiendo $\delta = 0{,}1$, $u_1 = 40{,}0$, y $u_2 = 4{,}0$, la duración óptima de la garantía es 13,233 unidades de tiempo. Nótese que, para los parámetros definidos, la vida media es del orden de 90 unidades de tiempo, de forma que la garantía tiene una duración aproximada de 1/6 de la vida media. También es verdad que si $\beta = 1{,}25$, la duración óptima de la garantía es de 19,175 unidades de tiempo, en comparación con una vida media de aproximadamente 234 unidades de tiempo. Claramente, estos resultados son la consecuencia del equilibrio entre los costes y la duración esperada de vida.

Consideremos ahora la situación en que la garantía tiene una duración fija, durante la cual se proporciona el servicio (reparación) de sustitución, pero no se extiende la duración de la garantía. En este caso, el coste de cumplir con el compromiso de garantía para cada unidad del producto se define por la función de renovación basada en la función de distribución de la vida del producto. Si se supone de nuevo que la demanda depende de la duración de la garantía tal como

lo expresa u(T_W), la función esperada de beneficio es muy análoga a la (9.1) y está dada por:

$$E[\text{Beneficio}] = u(T_W)\left(P - \delta P M_F(T_W)\right) \tag{9.6}$$

en donde $M_F(t)$ es la función de renovación basada en la distribución de vida F. Para esta función la condición de la primera derivada es:

$$\frac{u_1}{u_2} m_F(T_W) T_W^2 - m_F(T_W) T_W + M_F(T_W) = \frac{1}{\delta} \tag{9.7}$$

y la condición correspondiente de la segunda derivada es:

$$-2u_1 \frac{m_F(T_W)}{T_W} - \left(u_1 \frac{u_2}{T_W}\right) m_F'(T_W) < 0 \tag{9.8}$$

la cual será satisfecha por la mayoría de las distribuciones de vida de productos. No obstante, el análisis puede ser muy complicado ya que requiere la evaluación de la densidad de renovación y sus derivadas. Usando los valores de los parámetros del ejemplo anterior, y aproximando $M_F(t)$ y $m_F(t)$ por $t/E[T] - 1/2$ y $1/E[T]$ respectivamente, la solución de la ecuación (9.7) es T_W = 9,50 unidades de tiempo cuando β = 1,5, y T_W = 15,30 cuando β = 1,25. En este ejemplo, la solución depende de la distribución de vida del producto y de la aproximación a la medida de renovación.

9.2. Garantías prorrateadas

La diferencia principal entre una garantía de sustitución completa y una garantía prorrateada es que los recursos comprometidos para satisfacer la garantía varían para el caso prorrateado. Bajo una garantía de sustitución completa el fabricante tiene que satisfacer el coste completo del producto cuando un artículo en garantía falla. Aunque esto puede ser una fracción del precio de venta del producto, sin embargo es un valor constante durante el período de duración de la garantía. En el caso de una garantía prorrateada, el

fabricante normalmente «paga» al cliente un porcentaje del precio del producto en garantía, y este porcentaje depende de la edad del producto cuando falla.

La dependencia del coste de la garantía con respecto a la edad del producto puede ser modelada haciendo que el porcentaje δ sea una función del tiempo. Una forma general razonable para esta función es:

$$\delta(t) = \delta_0 \left(1 - (t / T_W)^{1/r}\right) \tag{9.9}$$

Esta forma permite una reducción del valor de la garantía lineal o no lineal, y también permite que el valor máximo de la garantía sea una fracción cualquiera del precio de compra. Usando esta función en su forma lineal, se obtiene el modelo siguiente de selección de garantía:

$$\text{Beneficio} = u(T_W)\left(P - \int_0^{T_W} \delta(t)\, P\, f(t)\, dt\right) \tag{9.10}$$

Para construir las condiciones óptimas para este modelo basadas en las derivadas, observamos que la derivada de la expresión integral es:

$$\frac{d}{d\,T_W}\left(\int_0^{T_W} \delta(t)\, P\, f(t)\, dt\right) = \frac{\delta_0\, P}{T_W^2} \int_0^{T_W} t\, f(t)\, dt \tag{9.11}$$

y por consiguiente la ecuación de la primera derivada para (9.10) es:

$$\frac{u_2\, P}{T_W^2} - \frac{u_2\, P}{T_W^2}\left(\int_0^{T_W} \delta(t)\, f(t)\, dt\right) - \left(u_1 \frac{u_2}{T_W}\right)\left(\frac{\delta_0\, P}{T_W^2} \int_0^{T_W} t\, f(t)\, dt\right) = 0 \tag{9.12}$$

la cual se reduce a:

$$\frac{u_2\, P\left(1 - \delta_0\, F(T_W)\right)}{T_W^2} - \frac{u_1\, \delta_0\, P}{T_W^2} \int_0^{T_W} t\, f(t)\, dt + \frac{2\, u_2\, \delta_0\, P}{T_W^3} \int_0^{T_W} t\, f(t)\, dt = 0 \tag{9.13}$$

o equivalentemente:

$$\left(u_1 - \frac{u_2}{T_W}\right) \int_0^{T_W} t\, f(t)\, dt + u_2\, F(T_W) = \frac{u_2}{\delta_0} \tag{9.14}$$

El análisis general de esta derivada puede ser muy complicado ya que normalmente requerirá una integración numérica. Utilizando los valores de los parámetros identificados previamente, y el valor δ_0 = 0,75, la solución es T_W = 5,06225 unidades de tiempo cuando β = 1,5, y 6,2484 cuando β = 1,25.

Una extensión lógica de este análisis la constituye una garantía mixta, en la que el cliente recibe el 100% del valor hasta el momento en el tiempo a partir del cual se aplica una fórmula de prorrateo. Además, es a veces apropiado aplicar un descuento a «flujos de caja» futuros. Se pueden definir muchas variaciones de los modelos básicos. En todos estos casos, el método fundamental de modelado y análisis utilizado anteriormente debería ser aplicable. El resultado de todo esto es un método para determinar un procedimiento para la duración de las garantías que tenga sentido económico.

FIABILIDAD

Apéndice A: Aproximaciones numéricas



A.1. Funciones gamma

Hay varias circunstancias en que el análisis de un problema de fiabilidad implica el cálculo del valor de una función gamma. Como es conocido:

$$\Gamma(K+1) = K! \qquad \text{(A.1.1)}$$

cuando k es entero. Para argumentos no enteros, se conoce menos el hecho de que la función es todavía tratable. Para cálculo numérico, una aproximación numérica conveniente de la función gamma está dada por Abramowitz y Stegun [18]:

$$\Gamma(x+1) = x! = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \varepsilon(x) \qquad \text{(A.1.2)}$$

en donde $0 \leq x \leq 1$ y:

$a_1 = -0{,}5748646$ $\quad a_2 = 0{,}9512363$
$a_3 = -0{,}6998588$ $\quad a_4 = 0{,}4245549$
$a_5 = -0{,}1010678$ $\quad |\varepsilon(x)| \leq 5 \times 10^{-5}$

Por ejemplo, Γ (5,64) se calcula del modo siguiente:

Γ (5,64) = (4,64) (3,64) (2,64) (1,64) r(1,64) = (73,1252) (0,8986) = 65,7122

A.2. Función de la distribución normal

Para la distribución Normal $N(\mu, \sigma^2)$, supongamos que $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ y que $\Phi(z) = F\left(z = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ de forma que $z_\gamma = F^{-1}(\gamma)$ y $F(z_\gamma) = \gamma$. Entonces para calcular F(x) para x>0, se utiliza:

$$F(x) \approx 1 - \frac{1}{2}\left(1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + d_4 x^4 + d_5 x^5 + d_6 x^6\right)^{-16} + \varepsilon(x) \qquad \text{(A.2.1)}$$

en donde:

d_1 = 0,04986(73) d_2 = 0,02114(10) d_3 = 0,00327(76)
d_4 = 0,00003(80) d_5 = 0,00004(89) d_6 = 0,00000(54)

y $|\varepsilon(x)| < 1{,}5 \times 10^{-7}$. También, para calcular valores fraccionados, α, con $0 < \alpha \le 0{,}5$, utilicemos:

$$z_{1-\alpha} = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3} + \in(\alpha) \qquad \text{(A.2.2)}$$

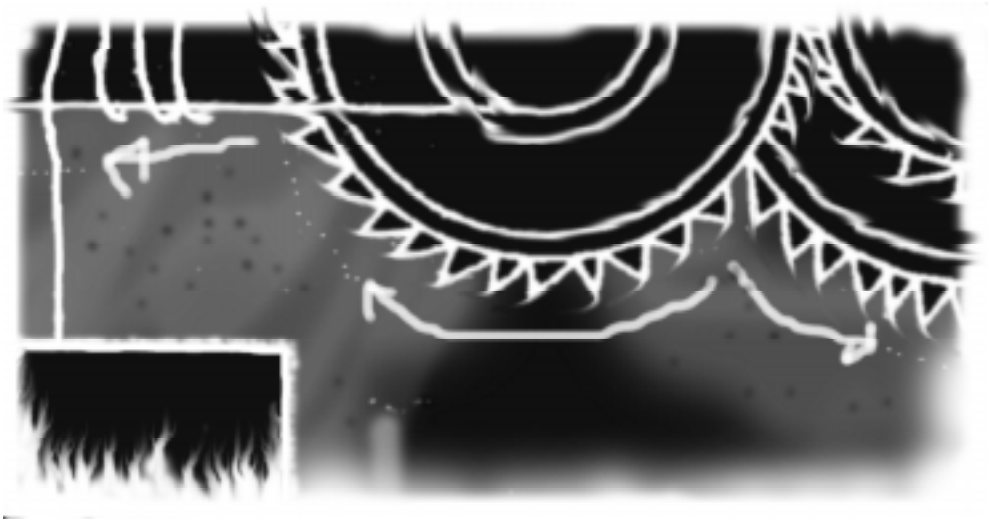
en donde:

c_0 = 2,515517 c_1 = 0,802853 c_2 = 0,010328
e_1 = 1,432788 e_2 = 0,189269 e_3 = 0,001308

y $|\varepsilon(\alpha)| < 4{,}5 \times 10^{-4}$.

FIABILIDAD

Apéndice B: Transformada de Laplace y convoluciones



B.1. Convoluciones

Hay muchas situaciones en el estudio de modelos de probabilidad y sobre todo en el uso de estos modelos para estudiar fiabilidad, en que se calcula la suma de variables aleatorias. La terminología estándar para la distribución de la suma de dos variables aleatorias es que ésta es la «convolución» de las distribuciones de las variables incluidas en la suma. Para verlo, consideremos un caso discreto en que:

$$Z = X + Y$$

y X e Y tienen distribuciones F(x) y G(y), para las que las distribuciones de probabilidad son:

x	f(x)	y	g(y)
0	f_0	0	g_0
1	f_1	1	g_1
2	f_2	2	g_2
3	f_3		

en donde $f_0+f_1+f_2+f_3 = g_0+g_1+g_2 = 1$. Además, Z puede tomar cualquier valor entero en [0,5] y el problema consiste en determinar la distribución H(z). Como ejemplo del cálculo observemos que la probabilidad de que Z tome el valor 3 es:

$$h(3) = h_3 = f_2\, g_1 + f_1\, g_2 + f_3\, g_0 \qquad \text{(B.1.1)}$$

y en general:

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k} f(i)\, g(k-i) \tag{B.1.2}$$

y por supuesto:

$$H(j) = \sum_{k=0}^{j} \sum_{i=0}^{k} f(i)\, g(k-i) \tag{B.1.3}$$

La extensión de este método a variables continuas es directa. Si X e Y son continuas con funciones de distribución F(x) y G(y), la distribución de su suma, H(z), puede determinarse utilizando cualquiera de las formas:

$$H(z) = \int_0^z F(z-u)\, g(u)\, du \tag{B.1.4}$$

$$H(z) = \int_0^z G(z-u)\, f(u)\, du \tag{B.1.5}$$

Debe observarse que para dos variables aleatorias razonablemente bien comportadas este cálculo no es difícil. En los casos en que el análisis anterior es difícil, su derivación se simplifica a menudo aplicando las transformadas de Laplace, como se describe más adelante.

No obstante, notemos primero que cuando las dos variables que integran la suma, tales como dos intervalos consecutivos de operación de un dispositivo, están distribuidas independiente e idénticamente, la distribución de la suma es la convolución de una distribución (de vida) consigo misma. En este caso, se dice que la convolución es una convolución doble y se utiliza la notación siguiente:

$$H(z) = F^{(2)}(x) \tag{B.1.6}$$

De forma análoga se puede sumar un número arbitrario de variables aleatorias, y la distribución de la suma resultante se denomina

la convolución de orden r de F(x). Esto se representa de la forma siguiente:

$$H(z) = F^{(r)}(x) \qquad \text{(B.1.7)}$$

Como se muestra a continuación, las transformadas proporcionan el método más adecuado para resolver esta ecuación para H(z).

B.2. Transformadas de Laplace

El análisis directo y la evaluación de los modelos de probabilidad pueden ser difíciles. En algunos casos, el análisis en un espacio de transformadas es más factible. La transformada de Laplace es uno de los métodos más útiles para obtener formas más manejables de las funciones de probabilidad. Para una función arbitraria, por ejemplo $\phi(t)$, la transformada de Laplace se define de la forma siguiente:

$$\phi^*(s) = \pounds\{\phi(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\phi(t)\,dt \qquad \text{(B.2.1)}$$

y como comentario, notamos que para una función de distribución, por ejemplo G(t), la transformada de Laplace-Stieltjes se define como:

$$G_*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dG(t) = \int_0^\infty e^{-st}\,g(t)\,dt = g^*(s) \qquad \text{(B.2.2)}$$

En general, es importante asegurarnos de que las funciones de interés son continuas y diferenciables en el grado adecuado, para que podamos proceder con sus definiciones y con su análisis. Puesto que se supone que las funciones utilizadas en los modelos de fiabilidad representan el comportamiento real de equipos, suponemos sin más elaboración que las funciones tratadas tienen las condiciones necesarias de continuidad y diferenciabilidad.

La transformada de Laplace tiene varias aplicaciones importantes en el análisis de fiabilidad. En este estudio se utilizan dos resultados

específicos para las transformadas: el teorema de convolución, y la relación existente entre la transformada de una función de distribución y la transformada de su densidad. El segundo de estos resultados se obtiene de la forma siguiente:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

$$F^*(s) = £\{F(t)\} = £\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(x)\,dx\,dt = \int_0^\infty\int_x^\infty e^{-st} f(x)\,dt\,dx$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}dt - \int_0^x e^{-st}dt\right) f(x)\,dx = \int_0^\infty\left(\frac{1}{s} - \frac{1-e^{-sx}}{s}\right) f(x)\,dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$F^*(s) = \frac{1}{s} f^*(s) \qquad \text{(B.2.3)}$$

Este resultado es a menudo muy útil.

Consideremos ahora la relación de convolución mostrada anteriormente en ecuación (B.1.4) A veces su análisis directo es asequible. A menudo el uso de la transformada de Laplace hace más fácil el análisis. Este es el siguiente:

$$H^*(s) = £\{H(z)\} = £\left\{\int_0^z F(z-u)\,g(u)\,du\right\} = \int_0^\infty e^{-sz}\int_0^z F(z-u)\,g(u)\,du\,dz$$

$$= \int_0^\infty\int_0^z e^{-sz} F(z-u)\,g(u)\,du\,dz = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-sz} F(z-u)\,g(u)\,dz\,du$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_u^\infty e^{-s(z-u)} F(z-u)\,dz\right) e^{-su}\,g(u)\,du \qquad \text{(B.2.4)}$$

supongamos que: $\omega = z - u$ de forma que $dw = dz$ y que el intervalo de ω va de 0 a ∞ y

$$H^*(s) = \int_0^\infty\left(\int_u^\infty e^{-s\omega} F(\omega)\,d\omega\right) e^{-su}\,g(u)\,du = \int_0^\infty F^*(s)\,e^{-su}\,g(u)\,du$$

$$H^*(s) = F^*(s)\,g^*(s) \qquad \text{(B.2.5)}$$

La aplicación directa de (B.2.5) implica además que:

$$H^*(s) = s F^*(s) G^*(s) \tag{B.2.6}$$

y en el caso de la suma de varias variables aleatorias distribuidas independiente e idénticamente, la densidad de la covolución de orden r tiene una transformada igual a la potencia r de la transformada de la función de densidad subyacente. Es decir:

$$\pounds\left\{f^{(r)}(t)\right\} = \left(f^*(s)\right)^r \tag{B.2.7}$$

En el Capítulo 8, se da un ejemplo de este resultado utilizando la función exponencial. Otra forma de expresar este resultado es la siguiente:

$$F^{(r)}(t) = \pounds^{-1}\left\{F^*(s)\left(f^*(s)\right)^{r-1}\right\} \tag{B.2.8}$$

La relación existente entre la distribución exponencial y la distribución Gamma proporciona un ejemplo ilustrativo y útil de estos resultados. Específicamente, es bien conocido que la suma de variables aleatorias distribuida exponencialmente independiente e idénticamente obedece a una distribución Gamma. La derivación de la transformada de Laplace de este resultado conduce a las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
&F(t) = 1 - e^{-\lambda t} && F^*(s) = \frac{\lambda}{s(s+\lambda)} \\
&f(t) = \lambda e^{-\lambda t} && f^*(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \\
&H(t) = F^{(r)}(t) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} && H^*(s) = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r} \\
&h(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} && h^*(s) = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r}
\end{aligned} \tag{B.2.9}$$

La derivación de la transformada de H(t) es:

$$H^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\, dt = \sum_{k=r}^{\infty} \int_0^\infty e^{-st} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\, dt = \sum_{k=r}^{\infty} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-(\lambda+s)t}}{k!}\, dt$$

$$= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\lambda+s)t}\, dt = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{k^\kappa}{k!(\lambda+s)^{k+1}}\, r(k+1) = \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(\lambda+s)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\lambda+s} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(\lambda+s)^k} = \frac{1}{\lambda+s} \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r} \sum_{k-r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-r}}{(\lambda+s)^{k-r}} = \frac{1}{\lambda+s} \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r} \frac{1}{1-\lambda/(\lambda+s)}$$

$$= \frac{1}{\lambda+s} \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r} \frac{\lambda+s}{s} = \frac{\lambda^r}{s(\lambda+s)^r} \qquad \text{(B.2.10)}$$

Otra aplicación de la transformada de Laplace, que se utiliza también en el Capítulo 8, es el análisis de la función de renovación, la cual se define en la ecuación (8.5) como la suma de todas la convoluciones de una función de distribución. Como se indica en aquel punto de este estudio, la aplicación de la transformada produce el resultado básico expresado por la ecuación (8.8).

FIABILIDAD

Apéndice C: Funciones de renovación de Weibull



Como se ha descrito en el texto principal, el análisis de renovación de los problemas de fiabilidad y de disponibilidad en los que aparecen distribuciones Weibull es muy difícil, por que la transformada de Laplace no existe para la distribución Weibull. No obstante, es posible obtener resultados basados en renovación utilizando una relación de equivalencia definida por Lomnicki [17]. Los resultados obtenidos por Lomnicki son exactos y están basados en expansiones de series infinitas. La aplicación numérica de estos resultados requiere el truncamiento de la serie, con la consecuencia de que los resultados obtenidos son aproximados. El grado de aproximación puede ser variado seleccionando la regla de truncamiento. El método es un poco complicado y se da a continuación:

Supongamos que β es el parámetro de forma de una distribución Weibull. Para el índice s, definamos:

$$\gamma(s) = \Gamma(\beta s + 1)/\Gamma(s+1) \quad \text{en donde} \quad s \geq 0 \qquad \text{(C.1)}$$

Luego se aplica la definición recursiva:

$$b_0(s) = \gamma(s)$$
$$b_{k+1}(s) = \sum_{i=k}^{s-1} b_k(i)\,\gamma(s-i) \qquad \text{(C.2)}$$
$$\text{para} \quad k \geq 0, \quad s \geq k+1$$

Utilizando estas cantidades, se calcula lo siguiente:

$$a_k(s) = \sum_{i=k}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{i} \frac{b_k(i)}{\gamma(i)} \tag{C.3}$$

y utilizando todo esto, se calculan las cantidades:

$$\begin{aligned} \phi_k(k) &= a_k(k) \\ \phi_k(s) &= \sum_{i=k}^{s} a_i(s) - \sum_{i=k}^{s-1} a_i(s-1) \end{aligned} \tag{C.4}$$

en donde de nuevo $s \geq k+1$

Entonces los coeficientes:

$$c(s) = \sum_{k=1}^{s} \phi_k(s), \qquad s \geq 1 \tag{C.5}$$

permiten la representación de la convolución de grado n de una distribución de Weibull de la forma siguiente:

$$F^{(r)}(t) = \sum_{s=r}^{\infty} \phi_r(s) D_s(\alpha t^{\beta}) \tag{C.6}$$

y la función de renovación $M_F(t)$ es:

$$M_F(t) = \sum_{s=1}^{\infty} c(s) D_s(\alpha t^{\beta}) \tag{C.7}$$

en donde

$$D_j(t) = \sum_{k=j}^{\infty} P_k(t) \tag{C.8}$$

y

$$P_j(t) = \frac{t^j}{j!} e^{-t} \tag{C.9}$$

Nótese que el grado de truncamiento de la serie infinita determinará la exactitud de la aproximación, y recuérdese que la aproximación numérica de la función gamma escrita en el Apéndice A tiene utilidad

en este contexto. Como ejemplo, tomemos β=1,50 y calculemos los coeficientes c(s), para s en el intervalo de 1 a 16. Para permitir la verificación, también se muestran las matrices para los valores de $a_k(s)$ y $\phi_k(s)$.

s	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
0	1,0000								
1	0,0000	1,0000							
2	0,0000	0,4110	0,5890						
3	0,0000	0,1471	0,5836	0,2693					
4	0,0000	0,0497	0,4033	0,4429	0,1041				
5	0,0000	0,0163	0,2393	0,4650	0,2439	0,0355			
6	0,0000	0,0052	0,1306	0,3790	0,3472	0,1091	0,0109		
7	0,0000	0,0016	0,0677	0,3005	0,3881	0,1971	0,0419	0,0031	
8	0,0000	0,0005	0,0339	0,2102	0,3752	0,2731	0,0921	0,0143	0,0008
9	0,0000	0,0001	0,0165	0,1392	0,3288	0,3211	0,1525	0,0371	0,0044
10	0,0000	0,0001	0,0079	0,0855	0,2686	0,3375	0,2114	0,0715	0,0132
11	0,0000	0,0000	0,0037	0,0545	0,2081	0,3267	0,2588	0,1142	0,0292
12	0,0000	0,0000	0,0017	0,0328	0,1547	0,2971	0,2892	0,1597	0,0528
13	0,0000	0,0000	0,0006	0,0193	0,1112	0,2571	0,3011	0,2021	0,0830
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0110	0,0778	0,2137	0,2963	0,2367	0,1173
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0065	0,0530	0,1720	0,2785	0,2605	0,1525
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0034	0,0353	0,1347	0,2521	0,2725	0,1855

s	k = 9	k = 10	k = 11	k = 12	k = 13	k = 14	k = 15	k = 16
0	0,0002							
10	0,0013	0,0000						
11	0,0043	0,0003	0,0000					
12	0,0106	0,0013	0,0001	0,0000				
13	0,0215	0,0035	0,0004	0,0000	0,0000			
14	0,0375	0,0079	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000		
15	0,0586	0,0151	0,0026	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	
16	0,0837	0,0258	0,0055	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

Matriz de coeficientes $a_k(s)$ para $\beta = 1{,}5$

s	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8
0									
1		1,0000							
2		0,0000	0,5890						
3		0,0000	0,2638	0,2693					
4		0,0000	0,0974	0,2777	0,1041				
5		0,0000	0,0334	0,1974	0,1753	0,0355			
6		0,0000	0,0111	0,1197	0,1878	0,0845	0,0109		
7		0,0000	0,0036	0,0665	0,1630	0,1220	0,0340	0,0031	
8		0,0000	0,0011	0,0350	0,1252	0,1382	0,0622	0,0120	0,0008
9		0,0000	0,0004	0,0177	0,0887	0,1351	0,0870	0,0266	0,0038
10		0,0000	0,0001	0,0087	0,0594	0,1196	0,1033	0,0444	0,0099
11		0,0000	0,0000	0,0042	0,0382	0,0987	0,1095	0,0620	0,0193
12		0,0000	0,0000	0,0020	0,0237	0,0771	0,1068	0,0764	0,0310
13		0,0000	0,0000	0,0009	0,0144	0,0578	0,0978	0,0860	0,0436
14		0,0000	0,0000	0,0002	0,0085	0,0419	0,0853	0,0901	0,0555
15		0,0000	0,0000	0,0000	0,0048	0,0296	0,0714	0,0892	0,0653
16		0,0000	0,0000	0,0000	0,0028	0,0205	0,0578	0,0843	0,0723

s	k = 9	k = 10	k = 11	k = 12	k = 13	k = 14	k = 15	k = 16
0	0,0002							
10	0,0011	0,0000						
11	0,0033	0,0003	0,0000					
12	0,0074	0,0010	0,0001	0,0000				
13	0,0134	0,0025	0,0003	0,0000	0,0000			
14	0,0212	0,0051	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000		
15	0,0300	0,0090	0,0018	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	
16	0,0393	0,0141	0,0034	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

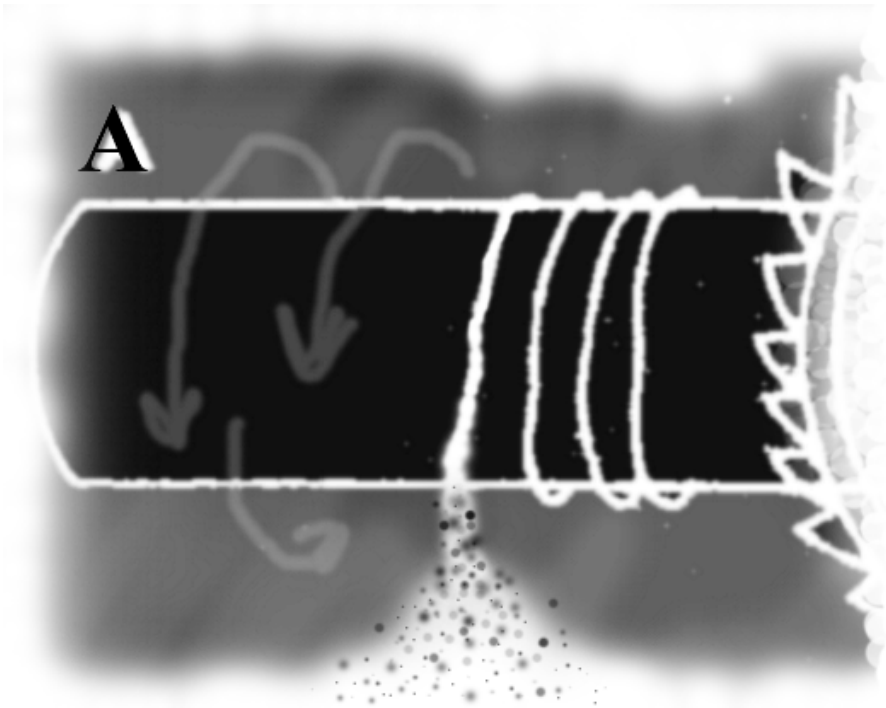
Matriz de coeficientes $\phi_k(s)$ para $\beta = 1{,}5$

1	1,00000	5	0,44172	9	0,35943	13	0,31643
2	0,58905	6	0,41403	10	0,34660	14	0,30811
3	0,53309	7	0,39225	11	0,33530	15	0,30317
4	0,47920	8	0,37443	12	0,32576	16	0,29374

Coeficientes c (s) para $\beta = 1{,}5$

FIABILIDAD

Referencias



[1] Barlow, R.E. and F. Proschan, Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Reinhart, & Winston, Inc., Nueva York (USA), 1975.

[2] Esary, J. D., F. Proschan, and D. W. Walkup, Association of Random Variables with Applications, Annals Mathemathics Statistics, Vol. 38, 1967, pp. 1466 - 1474.

[3] Lloyd, D. K. and M. Lipow, Reliability: Management, Methods, and Mathematics, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (USA), 1962.

[4] Weibull, W., A Statistical Theory of the Strength of Materials, Proc. Royal Swedish Inst. of Eng. Research, No. 151, Estocolmo (Suecia), 1939.

[5] Gumbel, E. J., Statistics of Extremes, Columbia University Press, Nueva York (USA), 1958.

[6] Hjorth, U., A Reliability Distribution with Increasing, Decreasing, Constant and Bathtub-Shaped Failure Rates, Technometrics, Vol. 22, 1980, pp. 99 - 107.

[7] Kapur, K. C. and L. R. Lamberson, Reliability in Engineering Design, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (USA), 1977.

[8] Damask, A. C. and G. J. Dienes, Point Defects in Metals, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., Nueva York (USA), 1963.

[9] Cox, D. R., Regression Models and Life Tables, J. Royal Statistics Society, Series B, Vol. 34, 1972, pp. 187 - 220.

[10] Duane, J. J., Learning Curve Approach to Reliability Modeling, IEEE Trans. on Aerospace, Vol. 2, 1964, pp. 563 - 566.

[11] Crow, L. H, Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth, Technomentrics, Vol. 24, 1982, pp. 67 - 72.

[12] US Military Handbook 189, Reliability Growth Management, National Technical Information Service, Springfield, Virginia (USA), 1981.

[13] Barlow, R. E. and R. Campo, Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis, in Reliability and Fault Tree Analysis, (R. E. Barlow, J. Fussell, and N. D. Singpurwalla, eds.), SIAM, Philadelphia (USA), 1975, pp. 451 - 481.

[14] Klefsjo, B., On Aging Properties and Total Time on Test Transforms, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 9, 1982, pp. 37 - 41.

[15] Nachlas, J. A. and A. Kumar, Reliability Estimation Using Doubly Censored Field Data, IEEE Trans. on Rel., Vol. 42, 1993, pp. 268 - 279.

[16] US Military Handbook 217F, Reliability Prediction of Electronic Equipment, National Technical Information Service, Springfield, Virginia (USA), 1991.

[17] Lomnicki, Z. A., A Note on the Weibull Renewal Process, Biometrika, Vol. 53, 1966, pp. 375 - 381.

Bibliografía



Barlow, R.E. & F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing,* Holt, Reinhart, & Winston, Inc., Nueva York (USA), 1975.

Cox, D. R.: *Renewal Theory,* Methuen & Co., Ltd., Londres (Inglaterra), 1962.

Kalbfleisch, J. D. & R. L. Prentice: *Statistical Analysis of Failure Time Data,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (USA), 1980.

Kapur, K. C. & L. R. Lamberson: *Reliability in Engineering Design,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (USA), 1977.

Lawless, J. F.: *Statistical Models and Methods for Life Time Data,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (USA), 1980.

Leemis, L. M.: *Reliability, Probabilistic Models and Statistical Methods,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (USA), 1995.

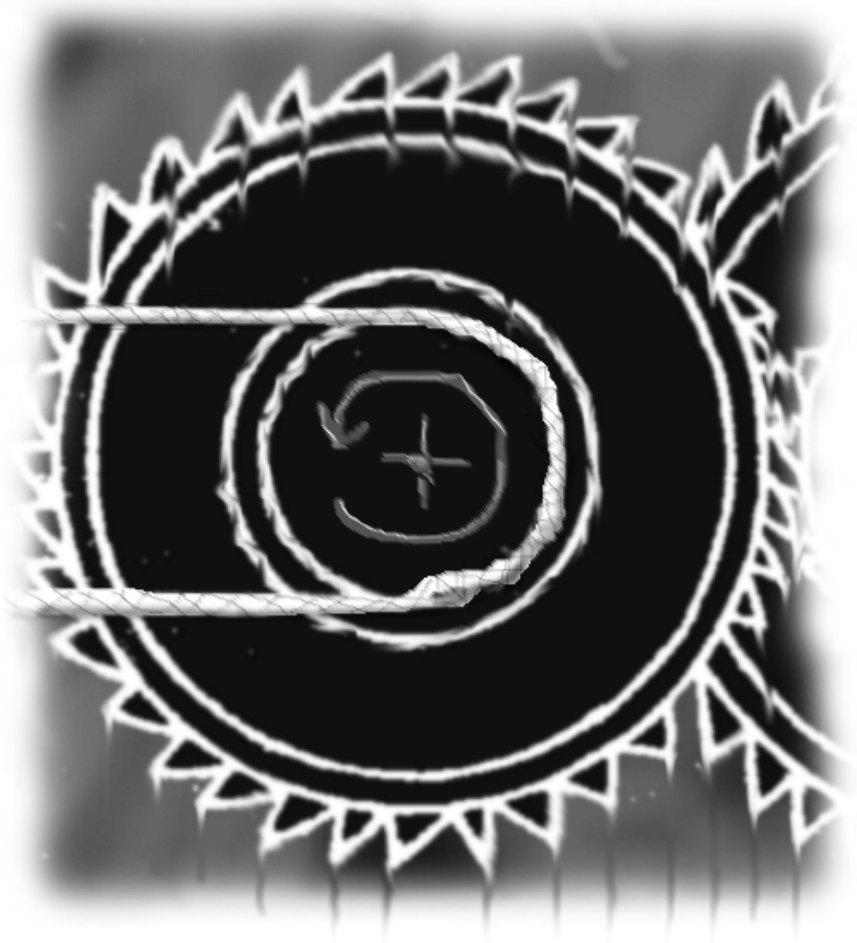
Lloyd, D. K. & M. Lipow: *Reliability: Management, Methods, and Mathematics,* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ (USA), 1962.

Mann, N. R., R. E. Schafer & N. D. Singpurwalla: *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data,* John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (USA), 1974.

O´Connor, P. D. T.: *Practical Reliability Engineering,* John Wiley & Sons, Ltd., Londres (Inglaterra), 1985.

Parzen, E.: *Stochastic Processes,* Holden Day, Inc., San Francisco (USA), 1962.

Glosario



1. **COHERENCIA.** Un sistema de componentes es coherente si: (a) su función de estructura no es decreciente con respecto al vector de estado de los componentes, y (b) cada componente del sistema es relevante.

2. **DISPONIBILIDAD.** La disponibilidad (puntual) de un dispositivo es la probabilidad de que funcione en cualquier instante de tiempo.

3. **DISPONIBILIDAD LÍMITE.** La disponibilidad límite de un dispositivo es el límite matemático de la función de disponibilidad puntual.

4. **DISPONIBILIDAD MEDIA.** La disponibilidad media de un dispositivo a lo largo de un intervalo de tiempo es la integral de la función de disponibilidad en dicho intervalo, normalizada por la longitud del mismo.

5. **DISPONIBILIDAD MEDIA LÍMITE.** La disponibilidad media límite de un dispositivo es el límite matemático de la función de disponibilidad media.

6. **DISTRIBUCIÓN RESIDUAL DE VIDA.** Esta es la distribución de las vidas residuales de dispositivos de una edad determinada pertenecientes a una muestra dada.

7. **FIABILIDAD.** Probabilidad de que un dispositivo funcione de forma adecuada a lo largo del tiempo, cuando se utiliza en el entorno para el que fue diseñado.

8. GARANTÍA PRORRATEADA. Un compromiso de que en caso de fallo antes de la expiración del período de garantía, el fabricante «pagará» al cliente una parte del precio del producto garantizado, y la proporción a pagar dependerá de la edad del producto en el momento del fallo.

9. GARANTÍA TOTAL DE SUSTITUCIÓN. La garantía de reparar o sustituir un producto que ha dejado de funcionar (o un componente del producto), para lograr que el producto resultante sea tan bueno como nuevo.

10. ÍNDICE CONSTANTE DE FALLOS. Una distribución de vida se considera una distribución de índice constante de fallos (CFR) cuando la derivada de su función de riesgo es siempre cero.

11. ÍNDICE CRECIENTE DE FALLOS. Una distribución de vida se considera una distribución de índice creciente de fallos (IFR) cuando la derivada de su función de riesgo es siempre no negativa.

12. ÍNDICE DECRECIENTE DE FALLOS. Una distribución de vida se considera una distribución de índice decreciente de fallos (DFR) cuando la derivada de su función de riesgo es siempre no positiva.

13. NUEVA MEJOR QUE USADA. Una distribución de vida se considera nueva mejor que usada (NBU) cuando la probabilidad condicional de supervivencia de la distribución es menor que la probabilidad inicial de supervivencia, cuando ambas se evalúan a lo largo de un intervalo de duración arbitraria.

14. NUEVA PEOR QUE USADA. Una distribución de vida se considera nueva peor que usada (NWU) cuando la probabilidad condicional de supervivencia de la distribución es mayor que la probabilidad inicial de supervivencia, cuando ambas se evalúan a lo largo de un intervalo de duración arbitraria.

15. PROCESO DE RENOVACIÓN. Un proceso de renovación es una secuencia de variables aleatorias no negativas, independientes e idénticamente distribuidas.

16. RELEVANCIA. Un componente de un sistema se considera irrelevante a la estructura si la función de estructura es constante con respecto al valor de estado del componente. De otro modo, el componente es relevante a la estructura.

17. SISTEMA k-de-n. Un sistema k-de-n es aquél en que el funcionamiento de k cualesquiera de sus n componentes asegura el funcionamiento adecuado del sistema.

18. SISTEMA PARALELO. Un sistema en que el funcionamiento adecuado de cualquier componente asegura el funcionamiento del sistema.

19. SISTEMA SERIE. Un sistema en el que todos los componentes deben funcionar adecuadamente para que el sistema lo haga.

Esta primera edición de
FIABILIDAD
de la serie de
Monografías de Ingeniería de Sistemas
se terminó de imprimir el día
30 de noviembre de 1995.