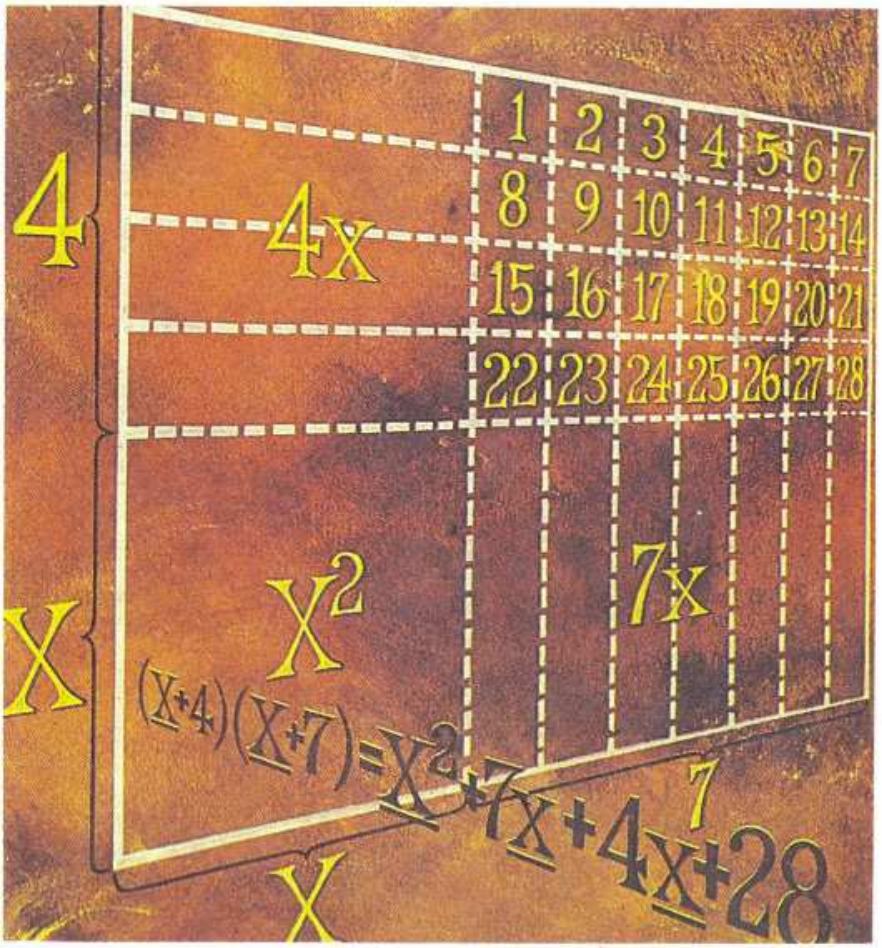
Isaac Asimov

NO MUNDO DA ÁLGEBRA

2.ª EDIÇÃO



Um guia para a teoria
que marca um senso para as operações

Francisco
Alves

No Mundo da Álgebra

Como no seu livro anterior, NO MUNDO DOS NÚMEROS, Isaac Asimov reduziu a complexidade de alguns lados da matemática para termos o que qualquer um pode entender. Num estilo fácil e informal, ele prossegue, sem dor, do mai ásico conceito de álgebra às mais refinadas considerações sobre quadrantes, equações cúbicas, equações simultâneas e mesmo as que envolvem números imaginários ou transcendentais.

No capítulo final, o prof. Asimov nos dá uma demonstração espetacular do uso e do poder da álgebra, demonstrando que com esta arma remarcável o homem torna-se apto a medir o peso da Terra.

Este livro é mais teórico do que, propriamente dito, uma ferramenta nas operações mecânicas, mas, qualquer pessoa que tenha um conhecimento básico está capaci-

tada a solucionar as equações com confiança e certeza.

Como foi dito pela American Library Association Book List a respeito de NO MUNDO DOS NÚMEROS, "a teoria aqui apresentada é tão simples e clara que o leitor com apenas conhecimentos elementares pode facilmente assimilar os conceitos básicos." E a mesma clareza é apresentada em NO MUNDO DA ÁLGEBRA.

Isaac Asimov é professor de bioquímica na Universidade de Boston e também autor de muitos livros fascinantes a respeito desta ciência. Como foi dito pelo jornal *Sentinela* de Winston Salm, "Os adolescentes devem ter sempre na cabeça o nome desse autor, pois, com certeza ele é o maior no momento no campo da interpretação da ciência e dos cientistas para jovens e adultos". E a revista *Galaxy* ajuntou "Asimov é de um talento raro. Ele pode fazer sua boca mental aguar com fatos secos".

NO MUNDO DA ÁLGEBRA

Isaac Asimov

NO MUNDO DA ÁLGEBRA

Tradução
João Guilherme Linke

2.ª EDIÇÃO

Francisco Alves

© 1961, By Isaac Asimov

Título original: *Realm of Algebra*

Revisão tipográfica: Henrique Tarnapobsky
Edilson Chaves Cantalice
Argemiro Figueiredo

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

1989

ISBN 85-265-0072-4

Todos os direitos reservados à:
LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S.A.
Rua Sete de Setembro, 177 — Centro
Telefone: 221-3198
20050 — Rio de Janeiro — RJ

Sumário

1 O Grande Ponto de Interrogação 9
2 Igualando Coisas 17
3 Outras Velhas Conhecidas 33
3 Misturando as Operações 49
5 De Trás para Diante! 60
6 A Questão da Divisão 68
7 Dentro e Fora dos Parênteses 79
8 As Últimas Operações 95
9 As Equações por Graus 111
10 Fatorando a Equação Quadrática 125
11 Resolvendo em Geral 139
12 Duas de Uma Vez 153
13 Pondo a Álgebra para Funcionar 169

A
Robert P. Mills,
Meu Gentil Editor

1

O Grande Ponto de Interrogação

SÍMBOLOS

Álgebra é simplesmente uma forma de aritmética.

Você está espantado? Não está acreditando? Não é de admirar. Do jeito que as coisas geralmente se apresentam no colégio, aritmética é uma matéria "fácil", ensinada nas primeiras séries, e álgebra uma matéria "difícil", ensinada nas séries adiantadas. Além do mais, a aritmética tem a ver com números, que todo o mundo conhece, ao passo que a álgebra é uma bruta confusão, cheia de x e y.

Pois eu volto a dizer que praticamente não há diferença entre uma e outra, e me proponho prová-lo.

Vamos dizer, para começar, que se você tiver seis maçãs e eu lhe der mais cinco maçãs, você ficará com onze maçãs. Se você tiver seis livros e eu lhe der mais cinco livros, você ficará com onze livros. Se você tiver seis rosas e eu lhe der mais cinco rosas, você ficará com onze rosas.

Posso parar por aí, não é? Você já entendeu que se tiver seis coisas de qualquer espécie e eu lhe der mais cinco coisas dessa mesma espécie, no final você terá onze delas ao todo. Portanto, podemos esquecer os objetos reais com que lidamos, sejam eles maçãs, livros, rosas ou o que mais seja, e concentrar-nos apenas nos números. Podemos dizer simplesmente que cinco e seis são onze, ou que cinco mais seis é igual a onze.

Ora, todas as pessoas vivem lidando com números: seja no trabalho que executam, nos passatempos que cultivam,

nos jogos que jogam. Todo o mundo tem de lembrar-se sempre, ou, se não se lembra, ser capaz de calcular que seis mais cinco é igual a onze, ou que vinte e seis mais cinqüenta e oito é igual a oitenta e quatro, e assim por diante. E mais, freqüentemente tem de escrever essas declarações aritméticas. Mas o ato de escrever pode tornar-se cansativo, principalmente se os números são grandes e complicados.

Por isso, desde os primórdios da civilização os homens procuraram idear maneiras convenientemente abreviadas de escrever números. O melhor sistema já inventado foi criado na Índia por volta do nono século. Nesse sistema, cada número de um a nove recebeu um sinal especial. Os sinais que hoje usamos em nosso país são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Além disso, o sistema inclui um sinal para zero, que escrevemos 0.

Todo sinal usado como meio de representar alguma coisa em forma abreviada chama-se "símbolo". (As palavras que você está lendo são símbolos dos vários sons que nós produzimos quando falamos, e o som que produzimos quando dizemos "cavalo" é um símbolo do animal real.)

Os sinais que eu escrevi no penúltimo parágrafo são símbolos dos primeiros nove números e de zero, e podem ser chamados "símbolos numéricos". Os árabes os aprenderam dos matemáticos hindus e os passaram adiante aos europeus por volta do 10º século. Por isso, ainda hoje nós chamamos esses símbolos numéricos de "algarismos arábicos".

Todos os números podem ser escritos por meio de "numerais", isto é, algarismos ou combinações de algarismos, segundo um sistema que não vou explicar aqui, porque já é bem conhecido.* Assim, o número vinte e três escreve-se 23, e setecentos e cinqüenta e dois é 752.

* Aliás, o sistema dos números já foi por mim explicado num livro intitulado *O reino dos números*. Você não precisa lê-lo para entender este livro, mas ele poderá ser útil para melhor compreensão de alguns pontos de aritmética que aqui eu terei de abordar um tanto por alto.

Você está vendo como os símbolos numéricos podem ser práticos. De fato, eles são tão práticos que você nunca vê ninguém escrever: "A soma é seis mil e setecentos e cinqüenta e dois". Todo o mundo escreve: "A soma é 6752". Escrevendo símbolos numéricos em lugar de palavras poupa-se muito espaço e esforço, no entanto você está tão habituado aos símbolos que lê uma sentença que os contém exatamente como se as palavras estivessem escritas por extenso.

E não são os numerais os únicos símbolos usados no dia-a-dia. Nos negócios, é tão comum ter de lidar com dólares que se faz uso de um símbolo para poupar espaço e tempo. É o símbolo $, que tem o nome de "cifrão". As pessoas automaticamente o lêem como se fosse o próprio termo, de modo que $7 é sempre lido como "sete dólares". Temos ainda ¢ para "centavos", % para "por cento", L para "libras", e assim por diante.

Então, símbolos não têm para você nada de extraordinário.

Nada impede que usemos símbolos para expressar praticamente tudo que quisermos. Por exemplo, na declaração "seis mais cinco é igual a onze", podemos substituir seis por 6, cinco por 5 e onze por 11, mas não precisamos ficar nisso. Podemos ter também um símbolo para "mais" e outro para "é igual a". O símbolo de "mais" é +, e o símbolo de "é igual a" é =.

Então escrevemos a declaração assim: 6 + 5 = 11.

ENFRENTANDO O DESCONHECIDO

Tão familiares são para nós esses símbolos, e outros como - de subtração, × de multiplicação e ÷ de divisão, que nós não lhes damos nenhuma atenção especial. Nós os aprendemos nos primeiros anos de escola e eles nos acompanham por todo o resto da vida.

No entanto, quando avançamos em nossa vida escolar e

esbarramos com símbolos novos, às vezes sentimo-nos inquietos porque eles nos parecem estranhos e antinaturais, diferentes daqueles que aprendemos em criança. Mas por que não aprender novos símbolos que expressam novas idéias? E por que não encarar esses novos símbolos tão tranqüila e destemidamente como encaramos os antigos?

Vou explicar o que estou querendo dizer. Quando começamos a aprender aritmética, o que precisamos mais que tudo é exercício, para nos acostumarmos a lidar com números. Por isso, a todo instante somos submetidos a uma porção de perguntas como: Quanto é dois mais dois? Se de oito tirarmos cinco, quanto sobra?

Para escrever essas perguntas, é natural usar símbolos. Portanto, na sua prova ou no quadro-negro estará escrito

$$2 + 2 =$$

$$8 - 5 =$$

e você terá de preencher as respostas, que, é claro, são respectivamente 4 e 3.

Mas está faltando um símbolo. O que realmente está sendo dito é: "Dois mais dois é igual a *o quê?*"; "oito menos cinco é igual a *o quê?*".

Bem, já temos símbolos apropriados para "dois", "oito", "cinco", "mais", "menos" e "é igual a", mas não temos um símbolo para "o quê?". Que tal arranjarmos um? Já que se trata de uma pergunta, que tal usarmos um ponto de interrogação? Podemos escrever

$$2 + 2 = ?$$

$$8 - 5 = ?$$

O ? é um símbolo novo, a que você não está acostumado, e que só por isso talvez o deixe preocupado. No entanto,

é simplesmente um símbolo, a representação de alguma coisa. Representa uma coisa desconhecida, uma "incógnita". "2" você sempre sabe o que quer dizer. Sempre representa "dois". Do mesmo modo, + sempre representa "mais". O símbolo ?, da maneira como usado aqui, pode representar qualquer número. No primeiro caso, representa 4; no segundo caso, 3. Num caso qualquer dado, você não pode saber o que ele representa, a menos que resolva o problema aritmético.

É claro que nos casos acima a resposta salta aos olhos. Mas em casos mais complicados, não. No problema

$$3312 \div 46 = ?$$

? é igual a um certo número, mas você não saberá dizer qual sem efetuar a divisão. (Como este não é um livro de problemas, não vou fazer *suspense*. No caso, ? representa 72.)

Você poderá achar que eu estou complicando as coisas. Para que, afinal, o ponto de interrogação? Por que não deixar o espaço em branco e simplesmente preenchê-lo com a resposta, como aliás se faz comumente? Bem, a finalidade dos símbolos é facilitar a vida. O olho tende a não tomar conhecimento de um espaço em branco, e não há maneira de *ler* um espaço em branco. É preciso preenchê-lo com algum sinal, apenas para mostrar que ali cabe alguma coisa, mesmo se de momento não se sabe exatamente o quê.

Imagine, por exemplo, que você tinha um certo número de maçãs, mas não tinha bem certeza de quantas eram. Entretanto, um amigo lhe deu cinco maçãs e, depois do presente, você contou suas maçãs e viu que tinha ao todo oito. Quantas você tinha antes?

A questão se resume em que um certo número mais cinco é igual a oito. Você não sabe qual é esse "certo número" enquanto não pensar um pouco. O "certo número" é uma incógnita. Então você pode escrever e ler assim:

$$? + 5 = 8$$

"Que número mais cinco é igual a oito?" Se você tivesse resolvido prescindir de símbolos como o ponto de interrogação e simplesmente deixado um espaço em branco, teria de escrever

$$+5 = 8$$

e você há de convir que isso fica esquisito e é difícil de ler. Assim, você vê que o ponto de interrogação tem a sua utilidade.

E, agora, você vai se espantar se eu lhe disser que estamos falando de álgebra? Pois estamos. Do momento em que passamos a usar um símbolo para representar uma quantidade desconhecida, estamos no reino da álgebra. A maior parte dos livros de aritmética, mesmo nos primeiros anos escolares, usam pontos de interrogação do modo como eu fiz aqui, e ao fazerem isso estão ensinando álgebra.

Mas isso é simples aritmética, você pode estar pensando.

Exatamente! Foi o que eu disse logo de saída. Álgebra *é* aritmética, só que ampliada e melhor, como você vai ver se continuar a ler o livro.

O modo que ela ensina de manejar símbolos é tão útil na investigação do mundo que nos cerca que toda a ciência moderna se baseia nela. Os cientistas não teriam como falar das coisas que acontecem à nossa volta se não usassem símbolos. E não teriam como usar os símbolos de modo apropriado se não conhecessem as regras que serão deduzidas neste livro.

INTRODUZINDO A LETRA

Na verdade, o ponto de interrogação não é dos mais convenientes como símbolo de incógnita. É difícil de ler,

porque em geral nós o encontramos no fim de uma pergunta, onde não o lemos. Se nos forçarmos a lê-lo, o resultado é uma frase de oito sílabas: "ponto de interrogação".

O natural é usar como símbolo uma letra, já que todo o mundo conhece bem as letras e está acostumado a lê-las. Para isso, no entanto, houve de início um problema. É que, antes da adoção dos algarismos arábicos, usavam-se letras como símbolos numéricos. No sistema romano usava-se V para "cinco", X para "dez", D para "quinhentos", etc. Se se fossem usar letras para representar valores desconhecidos, seria uma confusão sem tamanho.

Com a entrada dos algarismos arábicos, as letras ficaram livres para outros fins. Ainda assim, levou séculos para que os matemáticos pensassem em fazer uso das letras. (Acreditem ou não, é muito difícil idear bons símbolos. E muitas vezes a falta de um bom símbolo pode atrasar de séculos o progresso do pensamento humano. Por exemplo, uma coisinha tão simples como escrever 0 representando "zero" revolucionou a matemática.)

O primeiro a usar letras como símbolos de incógnitas foi um matemático francês chamado François Vieta. Foi por volta de 1590, e por causa disso ele é chamado por alguns de "pai da álgebra".

É claro que sempre existe a possibilidade de confundir letras representando incógnitas com letras que fazem parte de palavras. Por esse motivo, logo tornou-se habitual, para simbolizar incógnitas, usar as letras do fim do alfabeto. São as menos usadas nas palavras comuns, e assim há menos possibilidades de conclusão. De todas a menos usada é o x, e por isso é a mais comumente usada para representar uma incógnita.

Para reduzir ainda mais as possibilidades de confusão, o x e qualquer outro símbolo representando uma incógnita estará em itálico em todo este livro. Assim, quando a letra for

parte de uma palavra será "x"; quando for símbolo de incógnita será x.

Então, em vez de "? + 5 = 8", passaremos a escrever "$x + 5 = 8$".

Não vê como é muito melhor? Antes de mais nada, x é um símbolo familiar, que estamos habituados a ler, e que se diz numa única sílaba: "xis"

Naturalmente, algumas pessoas, assim que vêem um x, ficam com medo. A coisa começa a parecer álgebra. Mas é apenas um símbolo exercendo a mesma função que o ? encontrado em todas as aritméticas elementares. Por acaso é um "símbolo literal" (formado por uma letra) em vez de um símbolo numérico, mas as mesmas regras aplicam-se a ambos. Se você é capaz de manejar o símbolo 4, é capaz de manejar o símbolo x.

2

Igualando Coisas

A IMPORTÂNCIA DO =

Agora que temos o x, vejamos como trabalhar com ele. Eu disse, no final do capítulo anterior, que ele é manejado da mesma maneira como os números comuns. Portanto, comecemos com números comuns.

Seja a expressão

$$3 + 5 = 8$$

Observe-se, antes de mais nada, que ela contém um "sinal de igualdade". Há símbolos à esquerda do "sinal de igualdade" e símbolos à direita dele, e os dois conjuntos de símbolos, à esquerda e à direita, representam uma mesma quantidade. O símbolo à direita, 8, representa "oito". Os símbolos à esquerda, "3 + 5", representam "três mais cinco", o que também vem a ser "oito".

Sempre que tivermos um "sinal de igualdade" com símbolos dos dois lados, cada conjunto de símbolos representando uma mesma quantidade, temos uma "equação". (A palavra deriva de um termo latino que significa "igualar".) A palavra "equação" pode levá-lo a pensar em matemática "difícil", mas você está vendo que a soma mais simples feita por uma criança do primário envolve uma equação.

É claro que, para que um conjunto de símbolos forme uma equação, é preciso que se representem quantidades

iguais dos dois lados do sinal de igualdade. A expressão $4 + 5 = 8$ *não* é uma equação verdadeira: é uma equação falsa. Em matemática, é lógico, só nos interessam equações verdadeiras.

Vejamos agora uma equação que contenha um símbolo literal, como é o caso de

$$x + 5 = 8$$

O símbolo x, é certo, pode representar qualquer número, mas quando é parte de uma expressão que contém um sinal de igualdade, é mais do que razoável querermos que ele expresse somente números que façam da expressão uma equação verdadeira. Se, na expressão acima, resolvêssemos que x devia representar "cinco", poderíamos substituir x por 5, e teríamos a expressão $5 + 5 = 8$, que não é uma equação verdadeira.

Para fazer da expressão uma equação, só existe um número que pode ser representado por x, que é "três". Se substituirmos x por 3, teremos a expressão $3 + 5 = 8$, que é uma equação. Nenhum outro número no lugar de x servirá.

É claro que x só é igual a esse valor nessa expressão particular. Em outras expressões, poderá ser igual a outro inteiramente diferente.

Se $x + 17 = 19$, então $x = 2$; se $x + 8 = 13$, então $x = 5$, e assim por diante. Em cada caso, é preciso achar para x o número único que faz da expressão uma equação.

TIRANDO O VALOR DE x

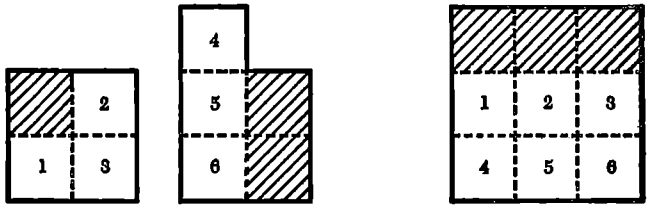
Mas como encontrar para x o número apropriado numa equação mais complicada? Na expressão $x + 5 = 8$ é fácil de ver que x tem de ser igual a 3, porque sabemos de pronto e quase sem precisar pensar que $3 + 5 = 8$. Vamos supor,

porém, que temos a expressão $x + 1865 = 2491$. Como achar nesse caso o valor de x?

Poderíamos experimentar diferentes números, um após outro, até encontrarmos um que fizesse da expressão uma equação. Se tivéssemos sorte, poderíamos acabar por dar com o número 626. Se substituirmos x por ele, temos $626 + 1865 = 2491$ e, olhe, isso é uma equação. Viva! Agora sabemos que $x = 626$, e a equação foi resolvida.

Mas os matemáticos detestam empregar o método das tentativas como meio de resolver uma equação. É muito incerto e muito demorado. Ademais, existem métodos de resolver uma equação que *não* o das tentativas. Para resolver equações existem *regras*.*

Essas regras nos ensinam a modificar uma equação de modo a tornar mais fácil achar o valor de x. Há diversos modos de modificar uma equação, mas um cuidado é sempre necessário. Ao modificar uma equação, é preciso que ela sempre se conserve uma equação verdadeira! Seja o que for que façamos, temos de cuidar que os símbolos à esquerda do sinal de igualdade representem sempre a mesma quantidade que os da direita.



(iguais subtraídas de iguais são iguais)

* Pelo ano de 825, algumas dessas regras foram pela primeira vez apresentadas num livro escrito por um matemático árabe chamado Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi. O nome do livro, em árabe, é *ilm al-jabr wa'l muqa-*

Uma das maneiras de modificar uma equação sem torná-la falsa é somar aos dois lados uma mesma quantidade, ou subtrair dos dois lados uma mesma quantidade. Podemos ver exemplos claros disso usando somente símbolos numéricos. Por exemplo, $3 + 5 = 8$, então

$$3 + 5 - 4 = 8 - 4$$

e

$$3 + 5 + 7 = 8 + 7$$

No primeiro caso, os dois lados da equação são iguais a quatro; e no segundo, ambos são iguais a quinze.

Ora, tudo que vale para símbolos numéricos vale também para símbolos literais. (Este é o segredo para entender a álgebra.) Se dizemos que $x + 5 = 8$ é uma equação, então $x + 5 + 3 = 8 + 3$ também é uma equação, e também o $x + 5 - 2 = 8 - 2$.

Suponha agora que neste caso particular subtraiamos cinco de cada lado da equação. Começamos com $x + 5 = 8$ e, subtraindo cinco de cada lado, temos

$$x + 5 - 5 = 8 - 5$$

Mas se a uma quantidade somamos cinco e em seguida subtraímos cinco, ficamos com a mesma quantidade. É o mesmo que dar cinco passos para a frente e em seguida cinco passos para trás: acabamos no lugar de onde saímos. Assim, $3 + 5 - 5 = 3$; $17 + 5 - 5 = 17$, e assim por diante.

---

balah, que quer dizer "ciência da redução e cancelamento". Redução e cancelamento foram os métodos que ele empregou para lidar com equações. Al-Khowarizmi não usava os símbolos que nós usamos hoje, mas os seus métodos de operar com equações impressionaram tanto os europeus quando estes tiveram acesso a traduções do seu livro, que a matéria que trata das equações até hoje é chamada "álgebra", que é uma corrutela da segunda palavra do título do livro.

Logo, $x + 5 - 5 = x$, e quando dizemos que $x + 5 - 5 = 8 - 5$, estamos dizendo que $x = 8 - 5$.

Então, o que concluímos foi:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & x + 5 = 8 \\ \text{então} & x \quad = 8 - 5 \end{array}$$

É como se tivéssemos modificado a equação passando o 5 do lado esquerdo para o direito. Essa passagem tem o nome de "transposição" (a palavra vem do latim, significando "pôr do outro lado"). Mas, por favor, preste muita atenção em como isso aconteceu. Na realidade nós não mudamos o 5 de lugar: o que fizemos foi subtrair um 5 dos dois lados da equação, e o efeito foi como se tivéssemos transportado o 5.

Hoje em dia, os matemáticos preferem insistir em subtrair números iguais dos dois lados da equação (ou a eles somar números iguais) e não tomar conhecimento do que parece ser uma transposição. No entanto, quando a gente se acostuma a lidar com equações, parece uma perda de tempo somar ou subtrair números a toda hora, se o mesmo resultado é alcançado simplesmente passando um número de um lado para o outro. Até o fim deste livro é isso o que eu vou fazer, e vou falar de "transpor" e "transposição". Você não deve esquecer, porém, que essa maneira de operar com equações nada mais é que uma abreviação, e que o que eu realmente estou fazendo é subtrair números iguais dos dois lados da equação (ou a eles somar números iguais).

Note também que quando eu transpus o 5 na equação acima, que usei como exemplo, o sinal mais mudou para sinal menos. Isso mostra um dos perigos de passar números de um lado para o outro sem pensar no que está de fato sendo feito. Se eu simplesmente mudo um 5 de lugar, o que é que o sinal tem a ver com isso? Mas se o que eu faço é subtrair 5 dos dois lados da equação, automaticamente o sinal mais se

transforma em menos quando o 5 aparentemente muda de lugar.

E se tivéssemos partido da equação

$$x - 5 = 8$$

Podemos somar 5 aos dois lados da equação e mantê-la verdadeira, portanto $x - 5 + 5 = 8 + 5$. Mas como $x - 5 + 5 = x$ (se você recua cinco passos, depois avança cinco passos, chega ao mesmo lugar), então

$$x = 8 + 5$$

Novamente, foi como se o 5 tivesse sido transferido, ou transposto, e novamente nós trocamos o sinal, desta vez de menos para mais.

Ora, a soma, representada pelo sinal mais, e a subtração, representada pelo sinal menos, são exemplos de "operações" efetuadas com números, quer representados por algarismos quer por letras. Essas operações são constantemente empregadas na aritmética, e também na álgebra, donde tanto podem ser chamadas de "operações aritméticas" como de "operações algébricas". Neste livro estamos nos concentrando na álgebra, por isso eu falarei delas como operações algébricas.

Soma e subtração, tomadas em conjunto, são exemplos de "operações inversas", o que significa que uma desfaz o efeito da outra. Se você começa somando cinco, pode em seguida desfazer o efeito subtraindo cinco. Ou, se começa subtraindo cinco, pode anular isso somando cinco. Acabamos de ver exemplos dos dois casos.

Vê-se, pois, que a transposição muda uma operação no seu inverso. Na transposição a soma se transforma em subtração, e a subtração em soma.

Entendeu por que tudo isso é útil? Voltemos à equação de números grandes dada no começo do capítulo. Era

$$x + 1865 = 2491$$

Por transposição, a equação se transforma em

$$x = 2491 - 1865$$

Agora a expressão à direita da equação é aritmética comum. Pode ser facilmente calculada como 626, portanto podemos escrever

$$x = 626$$

e nós tiramos o valor de x não por tentativa, mas pela simples dedução de uma regra algébrica. Analogamente, a equação $x - 3489 = 72$ torna-se, por transposição, $x = 72 + 3489$, e conclui-se de que x é igual a 3561.

Mas como ter certeza de que resolvemos a equação? Como ter certeza de que podemos confiar nas regras da álgebra? Sempre que tenhamos obtido um valor numérico para x numa equação, por complicada que seja e por complicado que tenha sido o método empregado, devemos poder substituir x por esse valor numérico na equação primitiva sem transformá-la num absurdo.

Na equação $x - 3489 = 72$, acabamos de encontrar para x o valor 3561. Substituindo x por esse valor na equação, temos $3561 - 3489 = 72$. A aritmética comum nos mostra que isso é uma equação, portanto o nosso valor de x está certo. Nenhum outro valor numérico faria dessa expressão uma equação.

Agora que temos uma regra, qual o melhor modo de formulá-la? Eu estive usando números particulares. Disse que se começamos com $x + 5 = 8$, podemos mudar para $x = 8 - 5$, e se começamos com $x + 1865 = 2491$, podemos mudar para $x = 2491 - 1865$. Mas, se enunciarmos uma regra desse modo, haverá sempre o perigo de darmos a impressão de que a regra só vale para o conjunto particular de números que usamos como exemplo.

Um modo de evitar isso seria listar a regra para todos os conjuntos possíveis de números, mas ninguém seria louco a ponto de tentar isso. Existe um grupo sem fim de conjuntos de números, e um trabalho desses nunca seria terminado. Em vez disso, podemos voltar mais uma vez ao uso dos símbolos.

Suponha que façamos a e b representar um par de números. Podem representar 1 e 2, ou 3 e 5, ou 75 e 8.358.111 -- *qualquer* par de números. Podemos então dizer que uma das regras para operar com equações é:

Se	$x + a = b$
então	$x = b - a$
E se	$x - a = b$
então	$x = b + a$

Veja que agora a regra abrange não apenas conjuntos particulares de números, mas qualquer conjunto. O que fizemos foi usar símbolos gerais em vez de símbolos numéricos particulares.

OS DOIS LADOS DO ZERO

Será que fui longe demais? Eu disse que a e b podem representar *quaisquer* números. Então suponhamos que eu faça a representar 8 e b representar 3. A equação geral $x + a$

$= b$ passa a ser $x + 8 = 3$. A regra da transposição permite mudar a equação em $x = 3 - 8$, e a pergunta é: O que quer dizer 3 - 8?

Os matemáticos da antiguidade consideravam expressões do tipo 3 - 8 como não tendo sentido. Como é possível de três tirar oito? Se eu só tenho três maçãs, como pode alguém tirar de mim oito maçãs? Assim eles concluíram que uma equação como $x + 8 = 3$ não tinha solução para x, e recusaram-se a trabalhar com equações desse tipo.

Mas isso não é resposta. Os matemáticos não gostam de ver-se na situação de esbarrar com uma incógnita para a qual não encontrem solução. Mais cedo ou mais tarde, um deles dá jeito de descobrir um sistema que leve a uma solução. No presente caso, o matemático que fez isso foi um italiano chamado Geronimo Cardano, pelos idos de 1550.

O sistema é bastante simples. Se eu tenho três maçãs, *é*, sim, possível alguém tirar de mim oito maçãs. Basta que eu lhe dê as três que tenho, e que concorde em lhe ficar devendo as outras cinco. Eu assumo uma dívida.

Analogamente, se você está no poste de partida de uma pista de corridas, avança três passos, depois recua oito passos, ficará cinco passos atrás do poste.

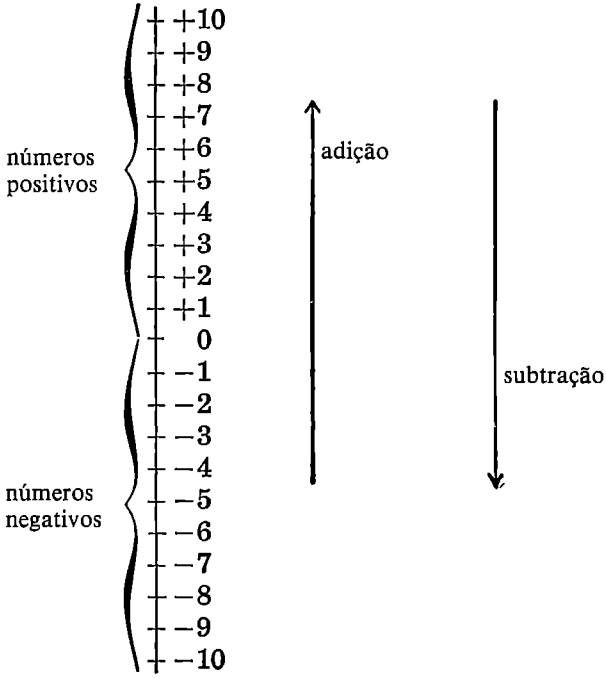
Tudo que se precisa é um modo de indicar números menores que zero, que representem uma dívida; que marquem uma posição atrás do poste de partida. Cardano explicou isso com grande precisão. Já que números que tais aparecem no processo da subtração, adota-se o sinal menos para distingui-los dos números comuns.

Assim, $3 - 8 = -5$. Se $x = 3 - 8$, então $x = -5$. O sistema de Cardano forneceu uma solução razoável para x em casos dessa espécie.

Números com o sinal menos, que simbolizam quantidade menores que zero, são chamados "números negativos" Isso mostra a relutância com que os matemáticos se dispuseram a fazer uso desses números, mesmo depois de percebe-

rem que não podiam evitá-lo, a menos que quisessem deixar sem solução determinadas equações. Foi como se continuassem a negar que tais números existissem realmente.

Os números comuns, simbolizando quantidade maiores que zero, são chamados "números positivos". Se você quiser mostrar sem sombra de dúvida que um número é positivo e não negativo, pode pôr um sinal mais na frente dele. Isso se faz porque, no processo da soma de números positivos só resultam números positivos. Em vez de escrever simplesmente 5, você pode escrever + 5.



No entanto, os números positivos foram usados por tantos séculos antes que fossem aceitos os números negativos —

e, o que é mais, números positivos ainda são tão mais usados que números negativos — que para todo o mundo o sinal mais é subentendido. Sempre que você vir um número sem sinal, pode crer tranqüilamente que é um número positivo. Quer dizer que se você quiser usar um número negativo, você *tem* de pôr na frente dele um sinal menos, sem o que todos o tomarão por positivo.

Existe um inconveniente nesse determinado sistema de sinais, que é o de fazer um mesmo sinal desempenhar duas funções diferentes, o que poderia dar causa a confusão. O sinal + é usado para indicar a operação de soma, e nesse caso é apropriadamente chamado "sinal mais". Também é usado para indicar que um número é positivo, e nesse caso deveria chamar-se "sinal positivo". Analogamente, o sinal menos deveria chamar-se "sinal negativo" quando usado para denotar um número negativo.

Um dos motivos por que podemos sem prejuízo deixar a esses símbolos o seu duplo papel é que o sinal positivo (tão mais aplicável do que o negativo) é geralmente omitido, de modo que nós nem nos damos conta dele. Isso nos leva a pensar no sinal mais como o único existente. Contudo, vamos ver como fica uma equação com os sinais positivos incluídos.

Por exemplo, a equação $x + 3 = 5$ deveria a rigor ser escrita

$$(+x) + (+3) = (+5)$$

Usamos os parênteses para mostrar que o sinal mais dentro deles pertence ao número e é um sinal positivo. Os parênteses, por assim dizer, amarram o símbolo ao número. O sinal mais fora dos parênteses é um verdadeiro sinal mais e denota o processo da soma.

Vejamos no que dá isso quando temos números negativos. Seja a equação

$$(+x) + (-3) = (+5)$$

Ora, quando somamos um número negativo a alguma coisa, estamos somando uma dívida, por assim dizer. Se eu lhe dou uma dívida de três dólares, estou somando essa dívida aos seus haveres, mas corresponde a fazer você três dólares mais pobre. É o mesmo que tirar-lhe três dólares. Então a equação também pode ser escrita

$$(+x) - (+3) = (+5)$$

Coisa muito parecida acontece quando subtraímos um número negativo, como em

$$(+x) - (-3) = (+5)$$

Se eu tiro de você uma dívida de três dólares oferecendo-me para pagá-la, automaticamente você fica três dólares mais rico. É o mesmo que eu lhe dar três dólares em dinheiro. Logo, a equação pode escrever-se

$$(+x) + (+3) = (+5)$$

Agora vamos tornar isso tão simples e familiar na aparência quanto possível, deixando de fora os sinais positivos e os parênteses que os acompanham. Em vez de dizer que $(+x)$ + (-3) é o mesmo que $(+x)$ - $(+3)$, diremos que

$$x + (-3) = x - 3$$

Isso parece uma equação, mas é mais que uma equação. Uma equação comum, como $x + 2 = 5$, só é verdadeira para um valor particular de x; no caso, só para $x = 3$.

Mas a declaração de que x + (-3) é o mesmo que x - 3

permanece verdadeira para todos os valores de x. Em outras palavras, não importa quanto dinheiro você tenha, somar uma dívida de três dólares é o mesmo que tirar três dólares em dinheiro.

Declarações que valem para todos os valores possíveis de x chamam-se "identidades". Muitas vezes, ainda que nem sempre, usa-se um sinal especial para indicar identidade, e eu farei uso dele todas as vezes que queira mostrar uma identidade. O "sinal de identidade" consiste em três traços curtos, $\equiv$, uma espécie de igualdade reforçada, por assim dizer. Lê-se "é o mesmo que" ou "é idêntico a".

Então podemos escrever $x + (-3) \equiv x - 3$, ou $x - (-3) \equiv x + 3$.

Para tornar a regra geral, devemos evitar o uso de números particulares. Ela vale para todos os números, e portanto devemos usar símbolos gerais, como por exemplo a letra a, e dizer

$$x + (-a) \equiv x - a$$

$$x - (-a) \equiv x + a$$

EVITANDO O NEGATIVO

Esse modo de trocar de negativo para positivo facilita as coisas quando numa equação há números negativos e nós temos de operar com eles. Seja a equação $x + (-3) = 5$. Podemos transpor o (-3), mudando a soma para subtração (é o sinal da operação que muda, não o sinal do número) e obter $x = 5 - (-3)$.

De imediato isso pode ser mudado para $x = 5 + 3$, que é 8.

Ou podemos trabalhar a equação antes de transpor. Tendo em mente as regras dos sinais, podemos mudar $x + (-3)$ para $x - (+3)$, que escrevemos simplesmente x - 3, e a

equação se torna $x - 3 = 5$. Transpondo, temos $x = 5 + 3$, ou novamente 8.

Como se vê, se usarmos corretamente as regras da álgebra o valor obtido para x será sempre o mesmo, seja qual for o caminho percorrido para chegar à solução. Se resolvendo uma equação por um caminho você encontrar $x = 6$, depois resolver por outro caminho e encontrar $x = 8$, pode ter certeza de que cometeu algum engano ao aplicar as regras.

Às vezes, trabalhando uma equação complicada, não é fácil perceber onde se errou ao aplicar as regras. Pode parecer então que é possível aplicar as regras para demonstrar um absurdo: por exemplo, que $1 = 2$. Uma contradição aparente como essa é o que se chama uma "falácia", que vem de um termo latino que quer dizer "enganar". Matemáticos profissionais em busca de novos avanços dão-se um cuidado especial em evitar falácias, mas às vezes acontece mesmo aos melhores deles serem vítima de uma.

As regras que governam os sinais positivo e negativo oferecem mais uma vantagem. Elas tornam possível evitar de vez a subtração, transformando todas as subtrações em somas. Em vez de escrever $x - 3$, sempre podemos escrever $x + (-3)$.

A justificativa para tal é que algumas das regras que regem a soma não são as mesmas que regem a subtração. Pode-se mostrar isso começando por considerar operações envolvendo somente símbolos numéricos.

A ordem em que somamos uma série de números é indiferente, não é verdade? Assim, $5 + 3 = 8$, e $3 + 5 = 8$. Se uma pessoa me dá \$5 e outra me dá \$3, não faz diferença para mim qual delas me paga primeiro; no final eu terei \$8, de um modo ou de outro. Usando símbolos gerais, podemos dizer que

$$a + b \equiv b + a$$

Mas e quanto à subtração? Se 5 - 3 = 2, 3 - 5 dá a mesma quantidade? Não. Como sabemos, 3 - 5 = -2. As duas respostas não são iguais e portanto

$$a - b \neq b - a$$

onde, como você já deve ter adivinhado, o símbolo $\neq$ significa "é diferente de".*

Vê-se, pois, que quando lidamos somente com somas, podemos ficar despreocupados no que toca à ordem em que se tomam os símbolos. Lidando com subtrações, é preciso ter cuidado com a ordem, ou pode-se chegar a uma resposta errada.

Dificilmente isso acontece em aritmética comum, em que é pouco provável que alguém escreva 3 - 5 quando pensa em 5 - 3. No entanto, em equações complicadas, onde se mudam os arranjos uma porção de vezes, é muito fácil mudar a ordem dos vários símbolos sem perceber. É quando podemos incorrer numa falácia.

Para evitar contratempos, podemos eliminar todas as subtrações mudando expressões como a - b para $a + (-b)$. Então a ordem deixa de ter importância. Por exemplo, se escrevermos a expressão x 3, não nos será permitido escrevê-la como 3 - x. Mas se a escrevermos na forma x + (-3), podemos escrevê-la (-3) + x sem receio algum.

Esse método de transformar subtração em soma de números negativos chama-se "soma algébrica", simplesmente porque é na álgebra que travamos conhecimento com ela. No entanto, ela em nada difere da soma comum, uma vez que tenhamos aprendido a operar com sinais positivos e negativos.

A propósito, quando um número negativo é o primeiro

* É claro que se a e b representassem um mesmo número, teríamos $a - b \equiv b - a$, porque ambas as expressões seriam iguais a 0. Mas essa não é uma exceção importante. É o que os matemáticos chamam de "trivial".

símbolo numa expressão, não é necessário empregar os parênteses, já que ele não é precedido de nenhum sinal de qualquer operação, e portanto não há como confundir o sinal negativo com um sinal menos. Por isso, $x + (-a)$ é sempre escrito com os parênteses, mas $(-a) + x$ escreve-se usualmente na forma simples $-a + x$.

3

Outras Velhas Conhecidas

OUTRO TIPO DE PASSAGEM

No capítulo anterior eu falei unicamente de duas operações algébricas, soma e subtração. É tempo de passarmos a outras duas, multiplicação e divisão. Também estas são velhas conhecidas, usadas com freqüência em aritmética comum, e usadas de maneira exatamente igual em álgebra.

Para ver como estas novas operações podem surgir no bojo de uma equação, suponha que você compre um certo número de laranjas por 48 ¢. Você não sabe exatamente quantas laranjas tem na sacola, mas sabe que essas determinadas laranjas custam 4 ¢ cada uma. Sabe portanto que o número de laranjas, seja ele qual for, multiplicado por 4, dará a resposta 48. Chamando o número de laranjas de x, você pode escrever a equação

$$x \times 4 = 48$$

Resta tirar o valor de x. Mas como proceder quando isso envolve o sinal de multiplicação (x)?

No capítulo anterior — lembra-se? — eu disse que uma equação continua sendo uma equação se um mesmo número é somado aos dois lados ou subtraído dos dois lados. Pois bem, também é verdade que uma equação continua sendo uma equação verdadeira se os dois lados forem multiplicados por um mesmo número. Aliás, também se podem dividir os dois lados por um mesmo número (com a única exceção de

que nenhum lado pode ser dividido por zero, como explicarei daqui a pouco). Por exemplo, vamos dividir por 4 os dois lados da equação que acabamos de dar. Podemos escrever o resultado assim:

$$x \times 4 \div 4 = 48 \div 4$$

onde $\div$ é o símbolo da divisão.

Ora, se multiplicamos um número por uma certa quantidade, e em seguida dividimos o produto pela mesma quantidade, teremos de volta o número original. (Se você tem dúvida, faça a experiência com diversos números.) Ou, dizendo de outro modo, a expressão $4 \div 4$ é igual a 1, donde $x \times 4 \div 4$ é igual a $x \times 1$. E, como qualquer número, conhecido ou desconhecido, multiplicado por 1, permanece inalterado, $x \times 1 = x$.

Portanto a equação fica sendo

$$x = 48 \div 4 \qquad (\text{ou } 12)$$

Uma situação muito parecida se apresenta se tivermos uma equação envolvendo uma divisão, como por exemplo

$$x \div 4 = 12$$

Multipliquemos os dois lados da equação por 4. Teremos

$$x \div 4 \times 4 = 12 \times 4$$

É claro que dividir por 4, e em seguida multiplicar o quociente por 4, dá-nos de volta o x original, logo a equação fica sendo

$$x = 12 \times 4 \qquad (\text{ou } 48)$$

Como a divisão anula o efeito da multiplicação, e vice-versa, as duas operações são operações inversas, formando um par à maneira da soma e subtração.

Se você repassar o que foi feito até aqui neste capítulo, vai ver que, como no caso da soma e subtração, o modo de operar com multiplicações e divisões envolve o que parece uma passagem de números de um lado para o outro da equação. Isso é tão semelhante à transposição de que tratei no capítulo precedente, que eu chamarei essa passagem pelo mesmo nome. Esse novo tipo de transposição é da mesma forma uma abreviação e nada mais. Lembre-se que o que de fato acontece é a multiplicação (ou divisão) dos dois lados de uma equação por um mesmo número. E, como antes, esta nova transposição muda uma operação no seu inverso: multiplicação se transforma em divisão, e divisão se transforma em multiplicação.

Usando símbolos literais, podemos fazer disso uma regra geral:

Se	$x \times a = b$
então	$x = b \div a$
E se	$x \div a = b$
então	$x = b \times a$

A propósito, com respeito à divisão os matemáticos têm uma regra especial que é muito importante, e convém que eu fale dela agora. Essa regra veda absolutamente a divisão por zero. É fácil de ver que dividir por zero não tem sentido. Pergunte a si mesmo o que é $5 \div 0$, ou $10 \div 0$, ou qualquer número dividido por zero. É o mesmo que perguntar quantos zeros devemos reunir para chegar a 5, ou a 10, ou a qualquer número. É o mesmo que perguntar quantas vezes é preciso

percebidos. E se os dois pontos saírem um pouco borrados, o sinal pode ficar muito semelhante ao sinal mais.

Por isso, em álgebra o usual é indicar a divisão escrevendo os dois símbolos juntos, com um traço entre eles. O traço tanto pode ser oblíquo (barra) como horizontal. O traço horizontal, —, usado na divisão pode se parecer ainda mais com o sinal menos do que o sinal comum de divisão, mas há diferenças capitais. O sinal menos fica entre dois números, um à esquerda, outro à direita. O traço horizontal de divisão separa dois números colocados um sobre o outro, não havendo assim qualquer possibilidade de confusão.

Portanto, $x \div 12$ pode-se escrever $x/12$ ou $\frac{x}{12}$. Esses novos símbolos podem ser usados mesmo quando trabalhamos só com numerais. Em vez de $48 \div 4$ podemos escrever $48/4$ ou $\frac{48}{4}$.

Usando esse sistema para simbolizar as operações de multiplicação e divisão, podemos escrever como segue as regras gerais para com elas trabalhar nas equações:

$$\text{Se} \qquad ax = b$$

$$\text{então} \qquad x = \frac{b}{a}$$

$$\text{E se} \qquad \frac{x}{a} = b$$

$$\text{então} \qquad x = ba$$

Compare com as regras dadas à página 34 e verá que eu só mudei o sistema de indicar as operações, mais nada.

Agora vou explicar uma coisa sobre multiplicação e divisão que é semelhante a um ponto já esclarecido com respeito a soma e subtração.

Quando se multiplica um número por outro, não importa qual deles se multiplica por qual. Assim, (6)(8) = 48 e (8)(6) = 48 também. Essa é uma regra geral, que se pode escrever

$$ab \equiv ba$$

Segue-se que $4x \equiv x4$, mas embora essas duas expressões tenham valores idênticos, os matemáticos sempre escrevem $4x$ e nunca $x4$. Não é errado escrever $x4$; apenas não se faz. É mais ou menos como se fosse uma espécie de etiqueta matemática, como não usar o garfo errado para comer salada, embora se possa perfeitamente comer salada com ele.

Sempre que os matemáticos, ou por sinal qualquer outro grupo de pessoas, adotam um determinado modo de fazer alguma coisa quando outro modo serviria igualmente bem, estão adotando uma "convenção". Por exemplo, qualquer letra, como q ou m, ou mesmo um sinal improvisado como + serviria para representar uma incógnita, mas é convenção, no mundo inteiro, usar x.

Essas convenções não são de modo algum uma manifestação de servilismo. São uma conveniência importante. Elas asseguram que todos os matemáticos, em todos os lugares, falem a mesma linguagem matemática. Seria um transtorno, uma perda de tempo e uma fonte de confusão se um matemático tivesse dificuldade em entender o que outro escreveu só porque cada um usasse uma convenção diferente.

Quanto à divisão, aqui, como no caso da subtração, a ordem dos números *faz* diferença. A expressão $\frac{15}{3}$ tem o valor 5, enquanto a expressão $\frac{3}{15}$ tem o valor $\frac{1}{5}$. Podemos expressar isso de modo geral dizendo que

$$\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$$

MANOBRANDO COM FRAÇÕES

Ao que parece, aqui esbarramos com frações,* pois certamente expressões como $\frac{x}{12}$ ou $\frac{x}{a}$ têm jeito de frações. E são frações mesmo.

A solução de qualquer equação que envolva multiplicação ou divisão muito provavelmente implicará em fazer aparecer uma fração. Às vezes a fração pode ser convertida num "número inteiro" comum (também se diz simplesmente "inteiro"). Assim, neste mesmo capítulo nós já encontramos a fração $\frac{48}{4}$, que pode ser escrita como o número inteiro 12. Mas esse é um caso excepcional.

Seja agora a equação

$$4x = 47$$

Transpondo, temos

$$x = \frac{47}{4}$$

A fração $\frac{47}{4}$ não pode se transformar num número inteiro. O mais que se pode fazer é escrevê-la sob a forma $11\frac{3}{4}$.

A uma fração também pode dar-se o nome de "razão", e é importante lembrar que números inteiros sempre podem ser escritos em forma de frações, ou razões. O número 12 pode ser escrito como $\frac{12}{1}$, ou $\frac{24}{2}$, ou $\frac{48}{4}$. Por isso, números inteiros e fra-

---

* Neste livro vou supor que você saiba lidar com frações e números decimais em aritmética comum. Se, por acaso, não se sentir muito firme ou quiser repassar os princípios gerais, você poderá folhear os Capítulos 4 e 5 de *O reino dos números*.

ções, tanto positivos como negativos, são agrupados como "números racionais", isto é, números que podem ser expressos em forma de razões, ou frações.

Em álgebra opera-se com frações do mesmo modo como na aritmética. Por exemplo, equações envolvendo soma e subtração de frações nada trazem de novo.

Se $x + 2\frac{1}{2} = 6$

então $x = 6 - 2\frac{1}{2}$ $\left(\text{ou } 3\frac{1}{2}\right)$

E se $x - \frac{1}{4} = 3$

então $x = 3 + \frac{1}{4}$ $\left(\text{ou } 3\frac{1}{4}\right)$

(Poderia ocorrer-lhe de repente que pelo sistema algébrico de denotar multiplicação, um número como $3\frac{1}{4}$ poderia significar 3 multiplicado por $\frac{1}{4}$. Mas não é o caso. Em aritmética, $3\frac{1}{4}$ significa 3 mais $\frac{1}{4}$, e a álgebra aceita isso como consagrado demais para mudar. Para escrever 3 multiplicado por $\frac{1}{4}$ sem usar o sinal de multiplicação, devem-se usar parênteses, assim: $(3)(\frac{1}{4})$. Quando se usam símbolos literais não é preciso esse cuidado, pois em aritmética comum não há o que se possa confundir com $x\frac{1}{4}$. Esta expressão, sim, significa x multiplicado por $\frac{1}{4}$, só que por convenção, como vimos, es-

creve-se sempre $\frac{1}{4}x$. Para indicar uma soma, usa-se a notação completa: $x + \frac{1}{4}$.)

Suponha agora que você se vê na conjuntura de multiplicar uma fração. Ela pode surgir numa situação como esta. Você sabe que a sua parte numa certa venda importará em $\frac{2}{5}$ do total. A venda é feita e você recebe \$18. Daí você pode calcular a quanto montou o total da venda. Se você chamar de x o valor desconhecido do total da venda, então $\frac{2}{5}$ dele é 18, e você pode escrever a equação

$$\frac{2}{5}x = 18$$

Quanto ao passo seguinte, há vários modos de proceder. Primeiro, qualquer fração multiplicada pela sua recíproca* é igual a 1. Por exemplo, $(\frac{2}{5})(\frac{5}{2})$ é igual a $\frac{10}{10}$, que é igual a 1.

Suponha, então, que multipliquemos os dois lados da equação por $\frac{5}{2}$, assim:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)x = (18)\left(\frac{5}{2}\right)$$

* A recíproca de uma fração é outra fração em que o numerador e o denominador trocaram de lugar. Por exemplo, a recíproca de $\frac{2}{3}$ é $\frac{3}{2}$; a recíproca de $\frac{5}{14}$ é $\frac{14}{5}$, e assim por diante. Mesmo os números inteiros têm recíprocas, pois como 12 pode ser escrito $\frac{12}{1}$, sua recíproca é $\frac{1}{12}$. E uma recíproca pode ser escrita como um número inteiro, pois a recíproca de $\frac{1}{7}$, por exemplo é $\frac{7}{1}$, que pode escrever-se simplesmente 7.

Como $(\frac{2}{5})(\frac{5}{2})$ é igual a 1, o lado esquerdo da equação fica sendo simplesmente x, e calculando o lado direito por aritmética comum, encontramos que x é igual a 45. Esse é o valor total da venda, pois se você verificar, verá que $\frac{2}{5}$ de 45 são, com efeito, 18.

A regra geral para situações como essa é portanto que uma fração envolvida numa multiplicação, quando transposta, converte-se na sua recíproca, assim:

$$\text{Se} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)x = c$$

$$\text{então} \qquad x = c\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pode parecer a você que nesse caso o que era uma multiplicação de fração continua sendo uma multiplicação de fração depois da transposição, em vez de converter-se na operação inversa. Há uma explicação para isso. Na verdade, uma expressão como $(\frac{a}{b})x$ envolve uma multiplicação e uma divisão, já que representa a multiplicado por x e em seguida o produto dividido por b. (Se você tem dúvida, experimente com uma expressão formada de numerais, como por exemplo $(\frac{2}{3})(6)$, e veja se a resposta não se obtém calculando 2 multiplicado por 6 e em seguida o produto dividido por 3.) Quando a fração é transposta, a multiplicação se transforma em divisão e a divisão em multiplicação. É por causa dessa *dupla* mudança para o inverso que parece não haver mudança.

Isso pode ficar ainda mais claro se operarmos com a fração por partes. Como $(\frac{2}{5})x$ significa 2 multiplicado por x divi-

$$(+a)(+b) \equiv +ab$$

$$(-a)(+b) \equiv -ab$$

$$(+a)(-b) \equiv -ab$$

Isso não esgota as variações possíveis. E se os números a multiplicar forem ambos negativos? Por exemplo, na equação $\frac{x}{(-3)} = -5$, a transposição mostra que $x = (-5)(-3)$. Qual é agora o valor de x?

Infelizmente, não há um modo fácil de perceber o sentido de uma multiplicação dessa espécie, de um negativo por um negativo. Poderia representar uma dívida de cinco dólares tida por cada uma de -3 pessoas, mas que diabo significaria -3 pessoas?

Em vez de tentar esse caminho, examinemos mais de perto as três regras de multiplicação de sinais já dadas. Observe que quando uma quantidade é multiplicada por um número positivo, o sinal do produto é o mesmo da quantidade original. Se $+a$ é multiplicado por um número positivo, o sinal do produto é +; e se $-a$ é multiplicado por um número positivo, o sinal do produto é -.

Parece razoável supor que quando uma quantidade é multiplicada por um número negativo, o sinal do produto seja o inverso do sinal da quantidade original. Nas três regras, temos um caso em que $+a$ é multiplicado por um número negativo e o sinal do produto é -. Sendo assim, quando $-a$ é multiplicado por um número negativo, o sinal do produto deve ser +. Esta conclusão mostrou-se satisfatória para os matemáticos, e assim podemos dizer que

$$(-a)(-b) \equiv +ab$$

As regras de sinal que valem para a multiplicação valem

para a divisão. Isso pode ser demonstrado de várias maneiras; vou demonstrá-lo utilizando as recíprocas.

Da aritmética comum, sabemos que $\frac{10}{2} = 5$ e que $(10)(\frac{1}{2}) = 5$. Veja que $\frac{1}{2}$ é a recíproca de 2 (que, lembre-se, pode-se escrever $\frac{2}{1}$). Do mesmo modo, as expressões $\frac{15}{5}$ e $(15)(\frac{1}{5})$ são ambas iguais a 3, e $\frac{1}{5}$ é a recíproca de 5. Visto isto, temos que $\frac{10}{(\frac{2}{5})}$ dá o mesmo resultado que $(10)(\frac{5}{2})$. É 25 em ambos os casos. Talvez você veja isso mais facilmente transformando as frações em decimais. A fração $\frac{2}{5}$ é 0,4, e $\frac{5}{2}$ é 2,5. Ora, tanto $\frac{10}{0,4}$ como (10)(2,5) dão como resultado 25.

Resumindo, você pode experimentar com qualquer número de casos semelhantes e sempre vai verificar que dá na mesma dividir uma quantidade por um certo número ou multiplicar a quantidade pela recíproca do número. De um modo ou de outro, o resultado é o mesmo. Generalizando:

$$\left(\frac{a}{b}\right)x \equiv \frac{x}{\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Isso quer dizer que, assim como podemos sempre transformar uma subtração em soma trocando o sinal do subtraendo, podemos sempre transformar uma divisão em multiplicação tomando a recíproca do divisor.

Se temos a expressão $\frac{(-15)}{5}$, que envolve a divisão de um número negativo por um positivo, podemos transformá-la em (-15)

$(\frac{1}{5})$, que envolve a multiplicação de um número negativo por um positivo. Como, pela regra dos sinais, $(-15)(\frac{1}{5})$ é igual a -3 (negativo vezes positivo igual a negativo), então $\frac{(-15)}{5}$ também é igual a -3.

Assim, a regra dos sinais tem de ser na divisão a mesma da multiplicação. Caso contrário, chegaríamos a um impasse, com dois resultados diferentes segundo o método usado para obtê-los. Poderíamos chegar a +3 dividindo, e a -3 utilizando a regra da recíproca e multiplicando.

Nesse caso a regra dos sinais seria "incongruente" com a regra da recíproca, e isso em matemática é um pecado mortal. Os matemáticos sabem que têm de ser a todo custo "congruentes". Todas as suas regras têm de concordar entre si, nenhuma regra pode contradizer outra.

Então, a bem da congruência, a regra dos sinais na divisão pode ser expressa assim:

$$\frac{+a}{+b} \equiv + \frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{+b} \equiv - \frac{a}{b}$$

$$\frac{+a}{-b} \equiv - \frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} \equiv + \frac{a}{b}$$

4

Misturando as Operações

MAIS DE UMA

Até aqui eu mantive as minhas equações tão simples quanto possível. Não usei nenhuma expressão que contivesse mais de um sinal mais ou de um sinal menos. Mas não há nenhuma regra que me obrigue a isso. Eu tenho completa liberdade de escrever uma expressão como $x + 3 + 2 - 72$, ou tão comprida quanto queira.

Cada elemento somado ou subtraído numa expressão como essa chama-se um "termo". Não importa se o elemento é um símbolo numérico ou um símbolo literal. Na expressão acima, 72, 2, 3 e x são todos eles termos.

A uma expressão formada por um único termo dá-se o nome de "monômio". (O prefixo *mono* vem do grego e significa "único".) Expressões com mais de um termo são designadas pela aplicação do prefixo grego que representa o número de termos contidos. Uma expressão com dois termos, como $x + 3$, é um "binômio", uma como $x + 3 + 2$ é um "trinômio", uma como $x + 3 + 2 - 72$ é um "tetranômio", e assim por diante. No entanto, é habitual agrupar todas as expressões contendo mais de um termo sob a denominação de "polinômios", em que o prefixo grego *poli* significa "muitos".

Na aritmética comum, dá-se pouca importância ao número de termos de uma expressão, já que, somando ou subtraindo, podemos reduzir todos a um termo só. Defrontando uma expressão como $17 + 5 - 16 + 12 - 3$, é trabalho de um momen-

to (graças a alguns anos de suados exercícios nas primeiras séries escolares) convertê-la no termo único 15.

Já em álgebra, onde nos vemos às voltas com termos literais, as coisas não são tão simples. Mas nem tudo está perdido. Para começar, pelo menos os termos numéricos podem ser convertidos num termo único. A equação $x + 3 + 2 + 5 = 17 + 4 - 9$ pode ser transformada sem problema em $x + 10 = 12$.

Quanto a termos literais, quando existe mais de um numa determinada expressão, pode-se fazer alguma coisa quando se tem um só tipo de símbolo literal. É claro que se você está diante de $x + a$, não há como operar a soma antes de saber que quantidades x e a representam. Mas, se você tem $x + x$, não é preciso saber o que x representa.

Para qualquer valor de x, $x + x$ é $2x$. Isso deve ser expresso como uma identidade: $x + x \equiv 2x$.

Do mesmo modo, $3x + 2x \equiv 5x$, e $75x - 11x \equiv 64x$. Por isso, uma equação como

$$5x - 3x + 2x = 11 + 12 - 7$$

reduz-se imediatamente a

$$4x = 16$$

Os termos $2x$ e $64x$, e outros como eles, consistem de duas partes, uma numérica e outra literal. Habitualmente, os matemáticos dão à parte numérica o nome de "coeficiente", termo usado pela primeira vez para esse fim por ninguém menos que Vieta, o pai da álgebra.

Símbolos literais também podem ser considerados coeficientes, de modo que no termo ax, a é o coeficiente. Considera-se que o coeficiente está ligado à incógnita sempre através de uma multiplicação, nunca de uma divisão. Um termo que envolva divisão tem de ser convertido em multiplicação pela regra das recíprocas antes que se possa dizer sem errar qual é o

coeficiente. Por exemplo, $\frac{x}{2}$ deve ser escrito $(\frac{1}{2})x$ e então se vê que o coeficiente é $\frac{1}{2}$ e não 2.

A própria expressão x pode ser considerada como tendo um coeficiente. Afinal, pode-se escrever $1x$, do mesmo modo como de um livro pode dizer-se 1 livro. Portanto, o coeficiente de x é 1. Quando o coeficiente é 1, geralmente nós o omitimos. Não se escreve $2x - 1x = 1x$; escreve-se $2x - x = x$. Ainda assim o coeficiente existe, e não deve ser esquecido, pois teremos ocasião de ocupar-nos dele antes de terminar o livro.

Mas agora pode ocorrer-lhe um pensamento. Um termo como $2x$ envolve uma operação, a de multiplicação. Uma expressão como $2x + 3$ envolve duas operações, uma multiplicação e uma soma. É 2 vezes x mais 3.

Quer dizer que temos três termos? Da primeira vez que falei de termos, eu os defini como elementos sendo somados ou subtraídos. E quanto a termos multiplicados ou divididos?

Para responder a essas perguntas, temos de examinar um pouco mais essas operações algébricas.

O QUE VEM PRIMEIRO?

Já sabemos que quando se somam duas quantidades, não faz diferença qual é somada a qual; ou seja, que $a + b \equiv b + a$. E se forem mais de duas as quantidades somadas? Se você fizer a experiência, verá que numa expressão como $8 + 5 + 3$ o resultado será 16, qualquer que seja a ordem em que tome os números.

Aliás, você já tem como evidente que em tais casos a ordem é diferente. Ao somar uma coluna de números de cima para baixo, você sabe que pode conferir o resultado repetindo a soma de baixo para cima. Você tem a convicção de obter o mesmo resultado dos dois modos, desde que não tenha cometido nenhum erro de conta, embora invertendo a ordem da segunda vez.

Visto isto, a ordem também não importa no caso de subtrações, ou de somas e subtrações combinadas, *desde que* todas as subtrações sejam convertidas em somas mediante o uso de números negativos, de acordo com o método exposto no Capítulo 2. Assim, embora $6 - 3 \neq 3 - 6$, também é verdade que $6 + (-3) = (-3) + 6$.

A mesma linha de raciocínio aplica-se a multiplicações e divisões. Experimente calcular expressões como (8)(4)(2) e compare o resultado com o obtido em (4)(8)(2), (4)(2)(8), (8)(2)(4), (2)(4)(8) e (2)(8)(4). Em todos os casos será 64. Se considerarmos divisões, ou combinações de multiplicações e divisões, vale o mesmo princípio. A ordem é indiferente, desde que as divisões sejam convertidas em multiplicações pelo uso das recíprocas, de acordo com o método exposto no Capítulo 3. Assim, embora $\frac{x}{3} \neq \frac{3}{x}$, também é verdade que $x(\frac{1}{3}) \equiv (\frac{1}{3})x$.

A regra geral é que é indiferente a ordem em que se efetuam as operações quando estas são só de soma ou só de multiplicação.

A pergunta seguinte é: E quando uma expressão contém não somente somas nem somente multiplicações, mas ambas as operações?

Tomemos o caso mais simples, uma expressão que envolva uma multiplicação e uma soma, e para começar usemos símbolos numéricos somente. Para tornar as coisas tão claras quanto possível, voltarei provisoriamente a usar o sinal de multiplicação.

Tomemos como exemplo a expressão $5 \times 2 + 3$. Se efetuarmos as operações da esquerda para a direita, teremos que 5×2 é 10, e que $10 + 3$ é 13. Poderíamos querer verificar a resposta pelo mesmo método que usamos para conferir a soma de uma coluna de números: isto é, fazendo as contas de trás para

diante para ver se chegamos ao mesmo resultado. Ora, calculado de trás para diante, $3 + 2$ é 5, e 5×5 é 25.

As respostas não são iguais, pois a expressão dá 13 num sentido e 25 no outro. Não houve erro de conta, e não podemos aceitar que a resposta mude pela simples variação do método aplicado à solução de um problema. Seria uma incongruência. É importante estabelecer um sistema que evite que isso aconteça.

O sistema hoje empregado (introduzido por volta de 1600) é pôr entre parênteses as operações a serem efetuadas primeiro. A expressão $5 \times 2 + 3$ poderia ser escrita, por exemplo, $(5 \times 2) + 3$, indicando que a primeira operação é a multiplicação, de modo que a expressão passa a ser $10 + 3$ (os parênteses desaparecem depois de efetuada a operação), ou seja, 13. Se, em vez disso, a expressão é escrita $5 \times (2 + 3)$, começa-se pela soma, e a expressão fica sendo 5×5, ou seja, 25.

Agora não há incongruência. Em vez de uma única expressão, temos duas expressões, que, graças aos parênteses, podem ser escritas de modo diferente. Cada expressão tem uma única resposta possível.

Expressões muito complicadas, incluindo muitas somas e multiplicações, podem ser manipuladas com a colocação de parênteses dentro de parênteses. A bem da clareza, é costume usar parênteses de formas diferentes, mas todos têm a mesma função. A convenção é começar efetuando as operações contidas nos parênteses mais internos e prosseguir em ordem de dentro para fora.

Se tivermos a expressão

$$\left\{[4 + (6 \times 5) - 12] \times 4 \times \frac{1}{11}\right\}$$

o parêntese mais interno contém a expressão 6×5, portanto esta é a primeira operação a efetuar. Dá 30 e, eliminados os parênteses, resta

$$\left\{[4 + 30 - 12] \times 4 \times \frac{1}{11}\right\}$$

O parêntese mais interno dos que ficaram contém a expressão 4 + 30 - 12. Ela envolve apenas soma e subtração, e não é grande façanha reduzi-la a 22; com isso sobra

$$\left\{22 \times 4 \times \frac{1}{11}\right\}$$

Agora só temos multiplicações, e o valor final de toda a expressão inicial é portanto 8.

Quando só há símbolos numéricos envolvidos, é fácil eliminar os parênteses efetuando as operações indicadas dentro deles. Em álgebra, com seus símbolos literais, os parênteses não são tão facilmente eliminados. É por isso que a questão dos parênteses é mais importante na álgebra do que na aritmética, e que dificilmente você depara com parênteses antes de começar a estudar álgebra.

Entretanto, aplica-se a símbolos literais o mesmo sistema que se aplica aos símbolos numéricos. Não há nada de novo ou complicado. Vejamos a expressão $6 \times x + 3$. Se quisermos que seja efetuada primeiro a multiplicação, escrevemos $(6 \times x) + 3$; e se quisermos que seja efetuada primeiro a soma, escrevemos $6 \times (x + 3)$.

Como você já sabe, em expressões algébricas o sinal de multiplicação é geralmente omitido. As duas expressões dadas podem ser escritas mais simplesmente $(6x) + 3$ quando queremos indicar que a multiplicação deve ser efetuada primeiro, e $6(x + 3)$ quando a soma deve ser efetuada primeiro.

Mas, como sempre, os matemáticos omitem símbolos sempre que possível. Na expressão $6x$, os dois símbolos estão tão estreitamente unidos entre si que é desnecessário uni-los ainda mais por meio de parênteses. Os parênteses ficam subentendidos, e a expressão $(6x) + 3$ escreve-se simplesmente $6x + 3$;

do mesmo modo como $+ 5$ se escreve simplesmente 5, e $1x$ se escreve simplesmente x.

No entanto, isso torna tanto mais importante lembrar-se de usar os parênteses assim, $6(x + 3)$, quando se quer que a soma seja efetuada primeiro. Se a expressão é escrita simplesmente $6x + 3$, entende-se automaticamente que os parênteses (embora invisíveis) encerram o $6x$.

O mesmo vale para a divisão. Se tivermos a expressão $6 \div x - 1$, podemos escrevê-la ou $(6 \div x) - 1$, ou $6 \div (x - 1)$, dependendo de querermos que ou a divisão ou a subtração seja efetuada primeiro. A maneira algébrica de escrever essas duas expressões deveria ser $(\frac{6}{x}) - 1$, ou $\frac{6}{(x - 1)}$. No primeiro caso, entretanto, o 6 e o x também aqui estão tão estreitamente unidos que os parênteses são omitidos por desnecessários, e a expressão é escrita simplesmente $\frac{6}{x} - 1$.

Quanto à expressão $\frac{6}{(x - 1)}$, os parênteses podem ser dispensados porque o traço estende-se de modo a cobrir toda a expressão $x - 1$, assim: $\frac{6}{x - 1}$.

Agora temos a nossa resposta para o que constitui um termo. Toda expressão que não inclui uma operação, como x ou 75, é um termo. Além disso, toda expressão que inclui uma ou mais operações mas é encerrada entre parênteses é um termo. Assim, $x - 1$ é uma expressão formada de dois termos, mas $(x - 1)$ forma um único termo.

É importante lembrar que multiplicações e divisões são consideradas como se estivessem entre parênteses, ainda que esses parênteses não sejam marcados. Assim, $6x$ é um termo único, e $\frac{6}{x - 1}$ é um termo único.

TRANSPONDO PELA ORDEM

Agora podemos falar de equações que envolvam multiplicação *e* soma, como por exemplo

$$6x + 3 = 21$$

Aqui nos vemos diante de uma dúvida. Se a equação fosse simplesmente $x + 3 = 21$, não haveria problema. Por transposição teríamos $x = 21 - 3$, e vemos de imediato que x seria igual a 18.

Se, por outro lado, a equação fosse simplesmente $6x = 21$, a transposição daria $x = \frac{21}{6}$ ou $3\frac{1}{2}$.

Mas a equação $6x + 3 = 21$ envolve uma multiplicação e uma soma, e surge o problema de qual transposição fazer primeiro. Se transpusermos primeiro a soma e depois a multiplicação, teremos:

$$\begin{aligned} 6x + 3 &= 21 \\ 6x &= 21 - 3 \qquad (\text{ou } 18) \\ x &= \frac{18}{6} \qquad (\text{ou } 3) \end{aligned}$$

Mas se transpusermos primeiro a multiplicação e depois a soma:

$$\begin{aligned} 6x + 3 &= 21 \\ x + 3 &= \frac{21}{6} \qquad \left(\text{ou } 3\frac{1}{2}\right) \\ x &= 3\frac{1}{2} - 3 \qquad \left(\text{ou } \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ora, se a mesma equação nos dá duas respostas diferentes segundo o método que usamos para resolvê-la, estamos diante de uma incongruência, que deve ser suprimida. Um dos dois métodos deve ser impugnado. Para saber qual o método a vetar, voltemos aos nossos parênteses.

Lembre-se que em álgebra uma multiplicação é sempre entendida como se estivesse entre parênteses. A expressão $6x + 3$ poderia ser mais claramente escrita $(6x) + 3$, o que significa que é preciso obter um valor numérico para $6x$ antes que possamos somar-lhe 3. Mas não podemos obter um valor numérico para $6x$ porque não sabemos quanto x representa.

Portanto, a única coisa que podemos fazer é deixar a expressão $6x$ como está e abster-nos de parti-la enquanto houver uma operação de soma na equação. Transpor o 6 seria parti-la, logo não pode ser feito.

Então, podemos dar uma regra geral. Quando um lado da equação consiste de mais um termo, só podemos transpor termos completos. Quando, porém, um lado da equação consistir de um único termo, partes desse termo podem ser transpostas.

Examinando outra vez a equação

$$6x + 3 = 21$$

vemos que $6x + 3$ contém dois termos. O número 3 é por si mesmo um termo completo e pode ser transposto. O número 6, porém, é apenas uma parte do termo $6x$ e não pode ser transposto enquanto existir mais de um termo.

Portanto, transpomos o 3, o que nos dá $6x = 18$. Agora $6x$ é o único termo do seu lado da equação, e o 6 pode ser transposto. A resposta é $x = 3$, e é a única resposta. Manipular a equação do outro modo, que resulta em $x = \frac{1}{2}$, transgride as regras da transposição.

Se, por outro lado, tivéssemos a equação

$$6(x + 3) = 21$$

$6(x + 3)$, do lado esquerdo da equação, é um termo único. Quer dizer que podemos transpor o 6 ou o 3, à vontade? Bem, lembre-se de que a expressão, incluindo uma multiplicação, se comporta como se estivesse escrita assim: $\left[6(x + 3)\right]$. Isso indica, como você deve estar lembrado, que a operação dentro do parêntese mais interno, no caso $x + 3$, deve ser efetuada primeiro. Como essa operação, por envolver um símbolo literal, não pode ser efetuada agora, o jeito é deixá-la como está até segunda ordem. Em outras palavras, se as operações se efetuam dos parênteses mais internos para fora, as transposições devem efetuar-se dos mais externos para dentro.

Assim, transpomos primeiro o 6, que está no parêntese mais externo, e temos

$$x + 3 = \frac{21}{6} \qquad \left(\text{ou } 3\frac{1}{2}\right)$$

Agora, tendo restado apenas o parêntese mais interno (sem os parênteses, já que é de hábito omiti-los quando encerram uma expressão completa), podemos transpor o 3:

$$x = 3\frac{1}{2} - 3 \qquad \left(\text{ou } \frac{1}{2}\right)$$

Guardando estas duas regras:

(1) Existindo mais de um termo, só transpor termos completos;

(2) Existindo um só termo, efetuar as transposições do parêntese mais externo para dentro;

você chegará à única solução possível da equação. Aliás, é para o que servem as regras: para assegurar que se chegue a uma solução única, eliminando a possibilidade de entrar por caminhos errados e cair numa incongruência.

A esta altura, é bem possível que você esteja com a impressão de que resolver equações exige longas reflexões, contando

termos e localizando parênteses. Na verdade, acredite ou não, a coisa não é assim. Uma vez habituado a manipular equações, você pega o jeito de quais transposições vêm antes de quais. A coisa toda torna-se tão mecânica e automática que você nem precisa parar para pensar.

É claro que a única maneira de chegar a esse feliz estado de coisas é resolver uma porção de equações. É a prática que leva à perfeição na manipulação de equações, como na manipulação de um teclado de piano.

É por isso que os livros escolares de álgebra bombardeiam o aluno com centenas de equações para resolver. Pode ser difícil para o aluno dar-se conta do porquê de tão infindáveis exercícios enquanto a eles submetido, mas é como os exercícos de dedilhação ao piano. No fim compensa.

E, é evidente, quanto melhor você entender o que está fazendo e por quê, tanto mais depressa terá a recompensa.

5

De Trás para Diante!

LÁ COMO CÁ

Até aqui, tivemos símbolos literais envolvidos em operações algébricas só de um lado da equação. Não há qualquer motivo para as coisas serem tão restritas. Símbolos literais podem estar presentes dos dois lados. Os x podem estar tanto lá como cá, por assim dizer.

Vejamos um exemplo do tipo de problema que dá origem a uma duplicação como essa. Suponha que João tem um certo número de livros, e José tem o dobro desse número. João compra cinco livros para acrescentar ao seu acervo, e José compra só um. Depois disso eles passam a ter o mesmo número de livros. Quantos livros tinha cada um inicialmente?

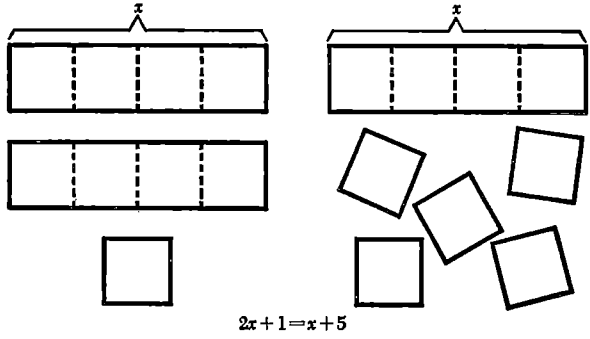
Eu comecei informando que "João tem um certo número de livros", portanto chamemos esse "certo número" de x. José tem o dobro, isto é, 2x. João compra cinco livros, totalizando $x + 5$; e José compra um totalizando $2x + 1$. Eles acabam com o mesmo número, portanto

$$2x + 1 = x + 5$$

De imediato, isso levanta uma questão. Enquanto eu me limitei a ter símbolos literais de um só lado da equação, pode ter parecido natural tê-los do lado esquerdo. Agora que temos símbolos literais dos dois lados, qual ou quais devem ficar à esquerda? Eu não poderia ter escrito a equação assim?

$$x + 5 = 2x + 1$$

E se tivesse, faria alguma diferença?



Talvez nem lhe tenha ocorrido essa pergunta. É claro que, se $3 + 3 = 6$, $6 = 3 + 3$. O modo como escrevemos não pode mudar isso, não é mesmo? Ou, se quisermos fixar uma regra geral, podemos dizer que se $a = b$, então $b = a$.

Isso pertence à categoria de coisas que se consideram "óbvias" ou "evidentes por si". Que todo o mundo aceita sem questionar. Uma proposição como essa, evidente por si e aceita por todos, tem o nome de "axioma". Neste livro eu já usei alguns. Por exemplo, a afirmação que fiz no Capítulo 2, de que se pode somar uma mesma quantidade aos dois lados de uma equação e continuar tendo uma equação, é outro exemplo de axioma. Poderia ser posto em palavras diferentes, dizendo-se que "iguais somados a iguais são iguais". Ou poderia expressar-se em forma de equações gerais, assim: Se $a = b$, então $a + c = b + c$.

Talvez você esteja a perguntar-se por que a preocupação especial com axiomas, se todo o mundo os aceita. Por estranho que pareça, até 1900 mais ou menos os matemáticos não davam muita atenção aos axiomas que usavam, mas então levantaram-se questões sobre até que ponto o sistema matemático era efetivamente fundamentado na lógica.

Matemáticos como o italiano Giuseppe Peano e o alemão David Hilbert corrigiram essa situação arrolando cuidadosamente todos os axiomas de que faziam uso. Em seguida deduziram todas as regras e proposições da álgebra a partir exclusivamente desses axiomas. É claro que neste livro eu não estou me propondo fazer nada parecido, mas é bom que se saiba que pode ser feito. (Ademais, os matemáticos passaram a considerar os axiomas simplesmente como os princípios básicos de qualquer sistema de pensamento ordenado, sem mais se preocupar se eram "óbvios" ou não. Na verdade, alguns axiomas não são nada óbvios.)

Voltemos à equação

$$2x + 1 = x + 5$$

Uma coisa que podemos fazer é transpor o 1 do lado esquerdo da equação para o direito, exatamente como temos feito sempre. Mas suponha que por algum motivo quiséssemos em vez disso transpor o 5 do lado direito para o esquerdo, mudando a operação para o seu inverso, de modo que a equação ficaria

$$2x + 1 - 5 = x$$

Se você se lembra de como eu demonstrei, de começo, a possibilidade da transposição (Capítulo 2), deve lembrar-se de que utilizei para isso o axioma "iguais somados a iguais são iguais". Isso, é claro, implica que "iguais subtraídos de iguais são iguais", visto que a subtração nada mais é que a soma de um número negativo.

Também aqui podemos fazer uso desse axioma. Vamos subtrair 5 de cada lado da equação primitiva. Teremos

$$2x + 1 - 5 = x + 5 - 5$$

ou

$$2x + 1 - 5 = x$$

Vemos que o mesmo axioma que permite a transposição da esquerda para a direita, permite-o também da direita para a esquerda. Podemos fazê-la da frente para trás, e podemos fazê-la de trás para diante!

Não há dúvida, pois, que podemos manobrar os símbolos numéricos em qualquer sentido e juntá-los todos do lado esquerdo, ou do direito, como nos der na telha. E quanto aos símbolos literais? Até aqui, neste livro, eu não transpus um símbolo literal.

E por que não, se me der vontade? Logo no começo do livro, eu disse que tanto símbolos numéricos como literais representam quantidades, e que uns e outros estão sujeitos às mesmas regras e podem ser tratados de idêntica maneira. Se símbolos numéricos como 1 e 5 podem ser transpostos, um símbolo literal como x pode ser transposto, e está acabado.

Portanto, na equação

$$2x + 1 = x + 5$$

vamos transpor o 1 da esquerda para a direita à maneira usual, e o x da direita para a esquerda à maneira oposta, com o que teremos todos os símbolos literais do lado esquerdo e todos os símbolos numéricos do lado direito, assim:

$$2x - x = 5 - 1$$

Em ambos os casos a operação se transformou no inverso, de modo que as duas somas tornaram-se subtrações. Num relance, a equação se reduz a

$$x = 4$$

e é essa a solução do nosso problema.

O que concluímos é que João tinha 4 livros, e José tinha o dobro, ou seja, 8. Quando João comprou mais 5 livros e José comprou mais 1 livro, os dois ficaram, exatamente como proposto no problema, com o mesmo número de livros, 9 cada um.

Você está achando que é uma maneira demorada e complicada de resolver o problema? De modo algum. Só parece demorado e complicado porque eu me estou dando ao trabalho de explicar cada passo em detalhe. Tão logo tenha dominado o sistema de manipulação algébrica, você dará conta de equações como essa num piscar de olhos. Uma equação simples como a que eu vim trabalhando neste capítulo será para você tão "canja" que você poderá resolvê-la de cabeça num instante.

CONGRUÊNCIA OUTRA VEZ

Mas, por simples que seja essa equação, eu ainda não tirei dela todo o caldo. Vamos verificar se inverter o sentido da transposição não nos levaria a uma incongruência.

Aqui está a equação mais uma vez:

$$2x + 1 = x + 5$$

Eu obtive o valor de x transpondo de modo a ter todos os símbolos literais do lado esquerdo e todos os símbolos numéricos do lado direito. Haverá alguma coisa que nos obrigue a isso? Ou teria dado na mesma se tivéssemos transposto todos os símbolos literais para o lado direito, em vez do esquerdo, e todos os símbolos numéricos para o lado esquerdo, em vez do direito?

A coisa mais simples a fazer é experimentar e ver se obtemos o mesmo resultado quando invertemos o processo.

Então, transpomos o 5 da direita para a esquerda e o $2x$ da esquerda para a direita. (Lembre-se que a expressão $2x$ é um termo único, e deve ser transposto intato enquanto fizer parte de um polinômio.) O resultado é

$$1 - 5 = x - 2x$$

que se reduz a

$$-4 = -x$$

Agora há lugar para uma pequena dúvida. Transpondo termos no sentido normal, nós chegamos a $x = 4$. Transpondo no sentido inverso, chegamos a $-4 = -x$. Serão respostas diferentes? Será que descobrimos uma incongruência?

Para apurar isso, lembremos que no Capítulo 3 eu disse que os dois lados de uma equação podem ser multiplicados por um mesmo número sem destruir a equação. (Esse é mais um axioma, que pode ser expresso na forma "iguais multiplicados por iguais são iguais", ou, se $a = b$, então $ac = bc$.)

Suponha-se, então, que tomemos a expressão $-4 = -x$ e multipliquemos cada lado da equação por -1. Teremos

$$(-1)(-4) = (-1)(-x)$$

Segundo a regra da multiplicação de sinais, isso se transforma em

$$4 = x$$

E pelo axioma que nos diz que a equação não se altera se trocarmos os lados entre si, podemos dizer que isso é o mesmo que

$$x = 4$$

Vemos pois que chegamos ao mesmo resultado, independentemente do sentido em que fizemos as transposições. Daqui por diante, você sabe que pode sem problemas transpor em qualquer sentido.

A propósito, o artifício de multiplicar por -1 pode ser usado para trocar todos os sinais dos dois lados de qualquer equação. Usando símbolos gerais, podemos dizer:

Se $a + b = c + d$

então $-a - b = -c - d$

E se $a - b = c - d$

então $-a + b = -c + d$

E já que uma expressão como $-a + b$ nos parece mais familiar se escrita $b - a$, o último conjunto de expressões pode ser escrito

Se $a - b = c - d$

então $b - a = d - c$

À medida que eu vou empilhando as regras de manipular equações e mostrando o quanto elas são flexíveis, talvez você esteja formando a idéia de que elas são uma maneira maravilhosamente mecânica de extrair a verdade de um problema. E de fato são, mas não espere demais. A esta altura nós já avançamos o suficiente para que eu possa explicar que a manipulação algébrica não pode extrair de uma equação mais verdade que a que nela foi inicialmente posta.

Suponha que, em vez da equação $2x + 1 = x + 5$, que neste capítulo viemos batendo de todos os lados, eu lhe apresentasse esta outra, muito parecida:

$$x + 1 = x + 5$$

Transpondo, você obtém

$$x - x = 5 - 1$$

ou

$$0 = 4$$

que é uma resposta absurda.

Por que isso? A manipulação algébrica obedeceu estritamente às regras. Será que as regras estão erradas?

Bem, examinemos a equação $x + 1 = x + 5$. Ela diz que se você tomar um certo número e a ele somar 1, obterá um resultado que é o mesmo que obteria se lhe somasse 5.

Ora, isso é absurdo. Qualquer número tem de dar duas somas diferentes se duas quantidades diferentes lhe são adicionadas. (Pode-se expressar isso dizendo que "desiguais somados a iguais são desiguais", ou, se $a \neq b$, então $x + a \neq x + b$.)

Portanto, $x + 1$ não pode ser igual a $x + 5$ para nenhum valor de x, e $x + 1 = x + 5$ é uma falsa equação. Fazer de conta que é uma equação verdadeira e aplicar as regras de manipulação que só servem para equações verdadeiras não nos leva a parte alguma. Partindo de um absurdo, chegamos a um absurdo.

Certifique-se sempre de que está sendo lógico de saída, e a álgebra lhe valerá. Se de início a sua idéia não tiver sentido, nada poderá valer-lhe, a álgebra muito menos.

então toda a divisão, novamente tomada como se estivesse entre parênteses, passaria a ser um parêntese dentro de um parêntese: $[(x + 3)/4]$.

A regra é eliminar os parênteses de fora para dentro. Portanto, eliminamos primeiro os parênteses externos transpondo o 4 e deixando intato o $(x + 3)$ interno:

$$x + 3 = (11)(4) \qquad \text{(ou 44)}$$

Então, e só então, podemos transpor o 3:

$$x = 44 - 3 \qquad \text{(ou 41)}$$

Outro pequeno porém decorre do fato de que o mais comum é que a divisão seja representada por um traço horizontal e não por uma barra, assim: $\frac{x + 3}{4}$. Omitem-se os dois parênteses, mas ainda assim a expressão deve ser considerada como se fosse $\left[\frac{(x + 3)}{4}\right]$, não obstante não haver parênteses visíveis. Temos de continuar a nos lembrar de transpor primeiro o 4, como parte do parêntese externo, e depois o 3, como parte do parêntese interno.

Mas não desanime. Basta uma certa prática para que tudo isso se transforme numa segunda natureza, e você não vai mais se preocupar com parênteses omitidos. E se de início você tiver consciência do que está fazendo, vai ver que nem são precisos muitos exercícios para chegar a esse feliz desfecho.

Uma dificuldade um pouco mais séria advém do fato de que um símbolo literal pode estar no denominador de uma fração. É um caso que não consideramos antes, mas não há por que não se possa apresentar.

Vejamos um exemplo:*

$$\frac{10}{x-5} = 5$$

Na expressão à esquerda há um parêntese dentro de um parêntese, $[\frac{10}{(x-5)}]$, e portanto temos de transpor primeiro o 10, que pertence ao parêntese externo. Mas, até aqui, nós nunca transpusemos o numerador de uma fração. Como proceder?

Um dos modos de agir seria converter a divisão numa multiplicação. Como a expressão $\frac{10}{x-5}$ representa 10 dividido por $(x-5)$, podemos escrevê-la como 10 multiplicado pela recíproca de $(x-5)$, ou $(10)(\frac{1}{x-5})$. Assim, podemos mudar a equação primitiva para a forma

$$(10)\left(\frac{1}{x-5}\right) = 5$$

e agora podemos transpor o 10 da maneira usual, de modo que

$$\frac{1}{x-5} = \frac{5}{10}$$

No entanto verificamos que, tendo transposto o numerador sem problemas, continuamos tendo à esquerda uma fração, e uma fração que ainda contém uma letra no denominador.

* Neste exemplo, vê-se de imediato que o valor de x, seja ele qual for, não pode ser 5. Percebeu por quê? Se x fosse igual a 5, x - 5 seria igual a zero, e você teria a expressão $\frac{10}{0}$. Isso implica a divisão por zero, que é *vedada*.

Um plano de ataque alternativo seria transpor o denominador como um todo, com parênteses e tudo. A presença dos parênteses internos em $[\frac{10}{(x-5)}]$ diz-nos que não podemos partir a expressão $(x - 5)$ enquanto existirem os parênteses externos. No entanto, não há nada nas regras que nos impeça de transpô-la intata, *sem* parti-la.

Dessa forma, se

$$\frac{10}{x-5} = 5$$

então

$$10 = 5(x - 5)$$

Transpondo de trás para diante,

$$\frac{10}{5} = x - 5$$

e

$$\frac{10}{5} + 5 = x$$

donde x é igual a 7, que é a solução do problema.

Outro método ainda de manobrar a equação seria contornar completamente o problema da letra no denominador. É fácil passar o símbolo literal para o numerador. Basta tomar a recíproca da fração, isto é, virá-la ao contrário. Em vez de escrever $\frac{10}{x-5}$, escrevemos $\frac{x-5}{10}$.

Ah, mas o que acontece com a equação?

Bem, voltemos aos símbolos numéricos. Se $\frac{10}{5} = 2$, o que

acontece se transformarmos a fração na sua recíproca $\frac{5}{10}$? Veja que $\frac{5}{10}$ é igual a $\frac{1}{2}$, que é a recíproca de 2.

Em outras palavras (e você pode verificar experimentando outros exemplos), uma equação permanece inalterada se tomarmos as recíprocas de *ambos* os lados da equação. Em expressões gerais:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (em que nem a, nem b, nem c, nem d podem ser zero)

então $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Portanto, a equação

$$\frac{10}{x - 5} = 5$$

pode ser transformada em

$$\frac{x - 5}{10} = \frac{1}{5}$$

e pelas transposições apropriadas

$$x - 5 = \left(\frac{1}{5}\right)(10) \qquad \text{(ou 2)}$$

e

$$x = 2 + 5 \qquad \text{(or 7)}$$

A solução é, como antes, x igual a 7.

O PROBLEMA DAS FRAÇÕES

Mas a regra das recíprocas expõe o principiante a uma armadilha em que é muito fácil cair — uma armadilha muito sedutora mas fatal. Seja a equação

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{5}$$

Pensando na regra das recíprocas, você poderia ser levado a tomar as recíprocas de todas as frações envolvidas, passando a equação para a forma $2x + 3x = 5$, que em seguida se reduz a $5x = 5$, e por transposição a $x = \frac{5}{5}$, ou 1.

Mas, substituindo por 1 o x da equação primitiva, você encontra que $\frac{1}{(2)(1)} + \frac{1}{(3)(1)} = \frac{1}{5}$, ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$, o que não é uma equação verdadeira, pois de fato $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Onde está o erro?

Se você experimentasse com diversas equações, veria que a regra das recíprocas só funciona quando se toma a recíproca de cada lado da equação como um todo, e não como partes distintas. Em outras palavras, se cada lado da equação for um monômio, pode-se tomar a recíproca de cada lado da equação e esta permanecerá inalterada. Contudo, se um ou os dois lados forem polinômios, tomar a recíproca de cada termo separadamente quase inevitavelmente reduz a equação a um absurdo.

O que fazer então se nós temos de haver com um binômio, como no lado esquerdo da equação

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{5}$$

Evidentemente, o que tem de ser feito, se quisermos aplicar a regra das recíprocas, é converter o binômio, num termo único. E isso significa que nos defrontamos com o problema da soma de frações.

Felizmente, essa matéria se apresenta na aritmética comum, e nela é tratada de forma completa. As mesmas regras deduzidas na aritmética aplicam-se em álgebra, portanto tudo que precisamos é refrescar rapidamente a memória.

Para começar, não há problema quando se trata de somar frações do mesmo denominador. Nesse caso, basta somar os numeradores e deixar o denominador como está. Assim, $\frac{5}{3}$ mais $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{7}{3}$, e $\frac{16}{19}$ mais $\frac{54}{19}$ é igual a $\frac{70}{19}$.

Para somar frações com denominadores diferentes, é preciso dar um jeito de transformá-las em frações do mesmo denominador, ou você fica em sinuca. E isso, é claro, tem de ser feito sem mudar o valor das frações.

Ora, toda fração pode ser transformada na forma sem mudança de valor se o numerador e o denominador forem multiplicados por um mesmo número. Assim, se você multiplica a fração $\frac{1}{2}$, em cima e embaixo, por 2, fica tendo $\frac{2}{4}$; se multiplica em cima e embaixo por 3, tem $\frac{3}{6}$; se multiplica em cima e embaixo por 15, tem $\frac{15}{30}$. O valor não muda, ainda que a forma sim, pois você sabe da sua aritmética que $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$, e que $\frac{3}{6}$ e $\frac{15}{30}$ também são iguais a $\frac{1}{2}$.

Agora vejamos a equação que nos criou problemas no início deste parágrafo.

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{1}{5}$$

ou

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

que, evidentemente, é uma equação verdadeira, e mostra que desta vez encontramos a solução correta.

7

Dentro e Fora dos Parênteses

ELIMINANDO OS PARÊNTESES

Estou certo de que a esta altura você está perfeitamente convencido da utilidade dos parênteses para resolver uma equação sem confusões. Entretanto, há ocasiões em que os parênteses são decididamente um tropeço. Vou dar-lhe um exemplo.

Imagine dois retângulos de altura conhecida, ambos com 5 metros de altura. Mas você não sabe exatamente as larguras; sabe apenas que um dos retângulos é 3 metros mais largo que o outro. Sabe também que a área total dos dois retângulos somados é de 35 metros quadrados. Pergunta-se: Quais são as larguras dos retângulos?

Para determinar a área de um retângulo, multiplica-se a largura pela altura. Isto é, a área de um retângulo de 17 metros de largura e 12 metros de altura é 17 vezes 12, ou 204 metros quadrados.*

Entendido isso, ataquemos o problema e comecemos chamando de x metros a largura do retângulo mais estreito. O outro retângulo, que é 3 metros mais largo, terá naturalmente $x + 3$ metros de largura. Em cada caso, a largura deve ser

* Aqui eu poderia fazer uma interrupção e analisar o fato de que a largura e a altura de um quadrilátero sendo medidas em metros, a área será medida em metros quadrados, mas isso me afastaria muito do tema principal do livro. Se você não estiver muito em dia com o assunto e quiser se enfronhar um pouco mais, poderá encontrá-lo (além de outros aspectos relativos a medidas) no meu livro *O reino das medidas*.

multiplicada pela altura (5 metros) para se ter a área. Portanto, a área do retângulo mais estreito é $5x$ metros quadrados, e a do outro é $5(x + 3)$ metros quadrados.

Como a soma das áreas é 35 metros quadrados, podemos escrever

$$5(x + 3) + 5x = 35$$

(Não precisamos escrever "metros" e "metros quadrados" numa equação como essa, porque em álgebra comum só lidamos com quantidades. Entretanto, é preciso ter sempre em mente as "unidades de medida" devidas.)

Numa equação como essa, como tiramos o valor de x? Nosso impulso natural é fazer com que o x fique sozinho de um lado da equação, e todos os símbolos numéricos do outro, mas como fazer isso com os parênteses barrando o caminho?

Podemos transpor o 5x, depois o 5, depois o 3, de modo que a equação tomará as seguintes formas:

$$5(x + 3) = 35 - 5x$$

$$x + 3 = \frac{35 - 5x}{5}$$

$$x = \frac{35 - 5x}{5} - 3$$

Agora temos um x sozinho do lado esquerdo da equação, mas, ai de nós, também temos um símbolo literal do lado direito. Para voltar com o $5x$ para o lado esquerdo, temos de transpor primeiro o 3, depois o 5, e só então o $5x$, e estamos de novo onde começamos.

Não, se quisermos chegar a algum lugar, temos de livrar-nos dos parênteses, que nos impedem de combinar o x dentro deles com o $5x$ de fora num único termo. Mas como fazer isso?

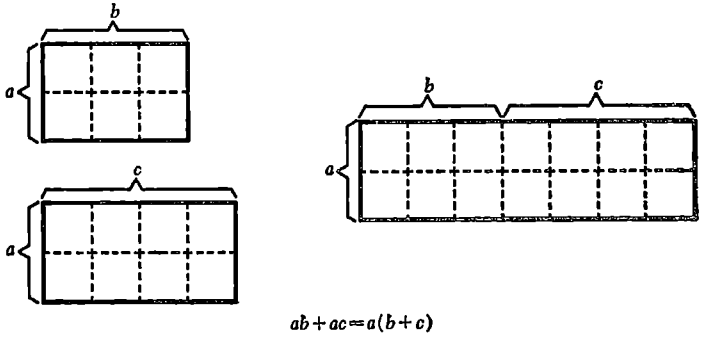
Vamos examinar com atenção o termo $5(x + 3)$ e perguntar-nos o que faríamos se só tivéssemos símbolos numéricos. Suponhamos que em lugar dele tivéssemos o termo $5(2 + 3)$. Nesse caso, é claro, não haveria problema, pois $2 + 3$ é igual a 5, donde podemos mudar a expressão para $(5)(5)$ e ter de pronto a resposta, 25.

Mas não podemos combinar x e 3, como podemos combinar 2 e 3; então devemos perguntar-nos: Como calcular o valor da expressão $5(2 + 3)$ se, por algum motivo, fôssemos proibidos de combinar o 2 e o 3?

O mais natural, me parece, é experimentar multiplicar cada número dentro do parêntese por 5. Isso nos dá $(5)(2)$ ou 10, e $(5)(3)$ ou 15, e, pensando bem, $10 + 15$ é 25. Você pode experimentar com qualquer combinação de números e vai ver que dá certo. Assim, $6(10 + 5 + 1)$ é $(6)(16)$ ou 96. Mas multiplicando o 6 por cada número dentro do parêntese separadamente, tem-se $(6)(10)$ ou 60, $(6)(5)$ ou 30 e $(6)(1)$ ou 6; e somando os produtos, tem-se $60 + 30 + 6$, que também dá 96.

Usando símbolos gerais, podemos dizer que

$$a(b + c) \equiv ab + ac$$



Então não há dúvida que podemos transformar $5(x + 3)$

em $(5)(x) + (5)(3)$ ou $5x + 15$. Agora a equação primitiva teria a forma

$$5x + 15 + 5x = 35$$

Eu mantive os parênteses apenas para mostrar-lhe que não esqueci a existência deles, mas como só temos somas, e a ordem em que se soma é indiferente, podemos muito bem abandoná-los:

$$(5x + 15) + 5x = 35$$

Agora estamos livres para somar os dois termos que contêm x e proceder às transposições:

$$10x + 15 = 35$$

$$10x = 35 - 15 \qquad (\text{ou } 20)$$

$$x = 20/10 \qquad (\text{ou } 2)$$

Se substituirmos x por 2 na equação primitiva, teremos

$$5(2 + 3) + (5)(2) = 35$$

$$25 + 10 = 35$$

e, como você vê, está tudo em ordem.

Portanto, dos retângulos de que falei no princípio do capítulo, um tem 2 metros de largura, e o outro (que é 3 metros mais largo) tem 5 metros de largura. A área do primeiro é 2 vezes 5 ou 10 metros quadrados; a do segundo é 5 vezes 5 ou 25 metros quadrados; logo, a área total é de fato 35 metros quadrados, como especificado no problema.

SUBTRAÇAO E PARÊNTESES

Agora temos pela frente outra possível armadilha. No parágrafo precedente, eu eliminei os parênteses dizendo sucintamente que só havia somas envolvidas. Será que isso se justifica? Vamos experimentar com uma expressão contendo apenas símbolos numéricos, como 7 + 4(2 + 6). Para encontrar o seu valor, primeiro combinamos os números dentro do parêntese obtendo 8, e a expressão fica 7 + (4)(8). Multiplicando primeiro, temos 7 + 32 ou 39.

Comecemos de novo e eliminemos os parênteses, com o que teremos 7 + (4)(2) + (4)(6), ou 7 + 8 + 24. A resposta, como vê, continua sendo 39.

Até aqui, tudo bem; mas agora façamos a coisa um pouco diferente e consideremos esta expressão: 7 − 4(2 + 6). Combinando primeiro os números dentro do parêntese, teremos 7 − (4)(8), ou 7 − 32, ou -25 como valor da expressão.

No entanto, se eliminarmos os parênteses exatamente como antes, teremos 7 − (4)(2) + (4)(6), ou 7 − 8 + 24, ou +23. Estamos em face de uma incongruência, pois há duas respostas, -25 e +23. Onde está o erro?

Evidentemente, foi o sinal menos que criou um caso. Portanto, vamos eliminá-lo e transformá-lo num sinal mais. Isso pode ser feito, pois você deve lembrar-se de que há muito nós concluímos que a − b pode escrever-se a + (-b).

Então, em vez de escrever a expressão como 7 − 4(2 + 6), vamos escrevê-la como 7 + (-4)(2 + 6). Está vendo o que fizemos? Para eliminar os parênteses, teremos de multiplicar cada número dentro do parêntese não por 4, mas por -4, e isso implica uma troca de sinais.

A expressão torna-se 7 + (-4)(2) + (-4)(6), ou 7 + (-8) + (-24). E como $a + (-b)$ pode ser escrito $a - b$, a expressão pode ser escrita 7 − 8 − 24, ou -25.

Agora repare bem. Quando você partiu da expressão 7 + 4(2 + 6), chegou, eliminando os parênteses, a 7 + 8 + 24. Mas

quando partiu da expressão $7 - 4(2+6)$, chegou, eliminando os parênteses, a $7 - 8 - 24$. Os sinais dentro do parêntese foram trocados!

Isso também vale quando uma expressão entre parênteses é simplesmente subtraída, sem nenhum número visível do lado de fora deles, como no caso de $5 - (2+3)$. Se você combina os números dentro do parêntese, o valor da expressão é $5 - 5$, ou 0. Se, porém, você tenta simplesmente tirar os parênteses, fica $5 - 2 + 3$, que dá 6. Em vez disso, considere a expressão como $5 - 1(2 + 3)$, que é o que ela realmente é, já que 1 vezes qualquer expressão é equivalente à própria expressão.

Isso pode escrever-se também $5 + (-1)(2 + 3)$, e, eliminando os parênteses, teremos $5 + (-1)(2) + (-1)(3)$, ou $5 + (-2) + (-3)$, ou $5 - 2 - 3$, que dá zero, como devia.

Podemos estabelecer regras gerais como segue:

$$a - b(c + d) \equiv a - bc - bd$$

$$a - b(c - d) \equiv a - bc + bd$$

$$a - b(-c - d) \equiv a + bc + bd$$

e assim por diante.

Generalizando, isso vem a dar em que quando se tem um sinal menos antes de um parêntese, todos os sinais positivos dentro dele devem ser trocados por negativos, e todos os negativos por positivos, quando os parênteses são eliminados. Na escola, o aluno é obrigado a fazer intermináveis exercícios para aprender a fazer isso automaticamente. Agora que você sabe a razão da inversão de sinais, não lhe será difícil lembrar-se — espero.

DECOMPONDO FRAÇÕES

Agora, não vá pensar que parênteses têm sempre de ser eliminados a todo custo, do instante em que você dá com eles. Às

vezes, você sabe, é útil contar com eles. Aliás, há ocasiões em que você pode tornar as coisas mais fáceis colocando parênteses numa expressão em que antes não havia nenhum.

Para ver como isso pode acontecer, comecemos por examinar a fração $\frac{2}{10}$.

Como o valor de uma fração não se altera quando o numerador e denominador são multiplicados ou divididos pela mesma quantidade, pode-se dividir $\frac{2}{10}$, em cima e embaixo, por 2, e obtém-se a fração $\frac{1}{5}$. Isso é aritmética comum, e já deve ser para você uma segunda natureza, de modo que a um simples olhar você sabe que $\frac{2}{10}$ é igual a $\frac{1}{5}$, que $\frac{3}{9}$ é igual a $\frac{1}{3}$, que $\frac{14}{21}$ é igual a $\frac{2}{3}$, $\frac{25}{65}$ igual a $\frac{5}{13}$, e assim por diante.

Quando, dividindo uma fração, em cima e embaixo, você chega à menor combinação possível de números inteiros que conserva o seu valor, a fração foi "reduzida aos termos mais simples", ou "simplificada". Por exemplo, a fração $\frac{14}{21}$ não está reduzida aos termos mais simples, mas a fração equivalente $\frac{2}{3}$ sim.

Agora, sejamos um pouco mais sistemáticos com respeito à simplificação de frações. Um número pode ser decomposto em dois ou mais números menores que, multiplicados, dão como produto o número primitivo. Os números menores assim obtidos chamam-se "fatores", e o número primitivo expresso como produto de números menores diz-se "fatorado".

Por exemplo, pode-se fatorar 10 escrevendo (5)(2). Então, 5 e 2 são fatores de 10. Pode-se fatorar 12 em (4)(3), ou

(2)(6), ou (2)(2)(3). Em certos casos pode até ser conveniente escrever 10 na forma (1)(10) ou 12 na forma (1)(12).*

Suponhamos agora que o numerador e o denominador de uma fração sejam fatorados, e se verifique que pelo menos um fator do numerador é igual a um fator do denominador. Por exemplo, a fração $\frac{14}{21}$ pode ser escrita $\frac{(7)(2)}{(7)(3)}$. Se dividirmos o numerador e o denominador por 7, teremos $\frac{\frac{(7)(2)}{7}}{\frac{(7)(3)}{7}}$, que é igual a $\frac{(1)(2)}{(1)(3)}$ ou $\frac{2}{3}$. Em vez de tudo isso, o aluno aprende simplesmente a cortar todo fator que apareça em cima e embaixo. Os 7 são "cancelados", e por conseqüência a fração é simplificada, como você aprendeu a fazer em arimética.

Mas é importante lembrar que o cancelamento é simplesmente uma operação abreviada, e que o que você realmente está fazendo é dividir o numerador e o denominador por números iguais. Cancelar estabanadamente pode levar a uma armadilha, e nunca será demais, em casos duvidosos, voltar a dividir as duas partes da fração para ter a segurança de estar fazendo a coisa certa.

Se o numerador e o denominador não têm nenhum fator em comum além de 1, nada pode ser cancelado, e a fração já está reduzida aos termos mais simples. Assim, a fração $\frac{15}{22}$ pode

* Em muitos casos, um número só pode ser expresso como ele mesmo vezes 1, sem nenhuma outra forma possível de fatoração. Por exemplo, 5 pode ser escrito como (5)(1), 13 como (13)(1), 17 como (17)(1), e de nenhum outro modo. Números assim chamam-se "números primos". Ao fatorar um "número múltiplo", isto é, não primo, muitas vezes é conveniente fatorá-lo em números primos. Por exemplo, 210 pode ser fatorado em (10)(21), ou em (70)(3), ou de vários outros modos, mas se você o reduz a números primos, 210 é igual a (2)(3)(5)(7). É um teorema importante do ramo da matemática chamado "teoria dos números" que um número múltiplo só pode ser dividido em fatores primos de um único modo.

ser escrita $\frac{(3)(5)}{(2)(11)}$. Aqui não há o que cancelar, e a fração está na forma mais simples possível.

Entretanto, para ter certeza de que uma fração está nos termos mais simples, é preciso assegurar-se de que o numerador e o denominador tenham sido fatorados até onde possível. Suponhamos a fração $\frac{24}{30}$. Como 24 pode ser fatorado em (8)(3) e 30 pode ser fatorado em (6)(5), a equação pode escrever-se $\frac{(8)(3)}{(6)(5)}$. Parece não haver fatores em comum — mas espere. Afinal, 8 pode ser fatorado em (2)(2)(2), e 6 pode ser fatorado em (2)(3). Em vez de escrever 24 como (8)(3), vamos escrever (2)(2)(2)(3), e em vez de escrever 30 como (6)(5), vamos escrever (2)(3)(5). Agora a fração pode escrever-se $\frac{(2)(2)(2)(3)}{(2)(3)(5)}$, e podemos cancelar o 3 e um dos 2. A fração se transforma em $\frac{(2)(2)}{5}$, ou $\frac{4}{5}$. Como não há mais fatores comuns, a fração está nos termos mais simples.

Agora um aviso contra uma armadilha. Depois que aprende a cancelar, o aluno costuma ficar tão ansioso por fazê-lo que muito freqüentemente o faz onde as regras não permitem. Lembre-se que cancelamento subentende fatores, e que fatores subentendem multiplicação. Pode-se decompor um número em números menores que dão o número primitivo por soma, como, por exemplo, 13 pode ser decomposto em $7 + 6$. Mas 7 e 6 *não* são fatores de 13, e não podem ser objeto de cancelamento.

Suponhamos que você se veja diante da fração $\frac{13}{21}$. Aqui, numerador e denominador não têm nenhum fator comum além de 1, e a fração está nos termos mais simples. Mas o aluno

aflito pode decompô-la assim: $\frac{7 + 6}{(7)(3)}$, e cancelar os 7, chegando ao resultado $\frac{6}{3}$ ou 2, que é evidentemente falso. Naturalmente, o aluno veria isso de pronto e se daria conta do engano. Mas, em se tratando de expressões mais complicadas, não perceberia o erro de imediato, e poderia levar um bom tempo para localizá-lo.

ENXERTANDO PARÊNTESES

As regras de fatoração e cancelamento podem aplicar-se a símbolos literais quase sem dificuldades.

Seja, por exemplo, a fração $\frac{4x}{10}$. O 10 não oferece problemas: pode ser fatorado em (2)(5). Mas e quanto ao $4x$? Bem, $4x$ pode escrever-se $(2)(2x)$, não pode?

Então vamos escrever a fração na forma $\frac{(2)(2x)}{(2)(5)}$ e cancelar os 2. Logo, a fração, simplificada, é $\frac{2x}{5}$.

Mas suponhamos que tivéssemos partido de $\frac{2x}{10}$. O 10, novamente, pode ser fatorado em (2)(5), e o $2x$ pode ser fatorado em $(2)(x)$. A fração pode escrever-se $\frac{(2)(x)}{(2)(5)}$, os 2 se cancelam, e a fração, simplificada, é $\frac{x}{5}$.

Acho que não preciso explicar por que a fração $\frac{(x + 2)}{10}$ não pode ser simplificada por cancelamento. Você pode escrever a fração $\frac{x + 2}{(5)(2)}$, mas isso não lhe adiantará. O 2 no numerador não é fator.

Por outro lado, a fração $\frac{3(x + 2)}{15}$ pode escrever-se $\frac{(3)(x + 2)}{(3)(5)}$, e o 3 no numerador *é* fator, embora o 2 não seja. Os 3 podem ser cancelados, e a fração, simplificada, reduz-se a $\frac{(x + 2)}{5}$.

Sem dúvida, é fácil ver os fatores numa expressão contendo símbolos literais quando acontece os fatores mostrarem-se ostensivamente. Você enxerga que os fatores de $5x$ são 5 e x, e que os fatores de $3(x + 2)$ são 3 e $x + 2$; mas é capaz de enxergar os fatores presentes numa expressão como $5x + 15$?

Daqui a pouquinho será.

Mais atrás neste capítulo, nós concluímos que $a(b + c)$ se pode escrever $ab + ac$. Esse procedimento também funciona ao contrário. Partindo de $ab + ac$, você pode escrever $a(b + c)$.

Vamos examinar mais de perto. A expressão ab pode ser fatorada em $(a)(b)$, e ac pode-se fatorar em $(a)(c)$. Então, o que se fez foi achar um fator comum, a, e pô-lo fora de um parêntese criado para o que restou.

Voltando a $5x + 15$, vemos que $5x$ pode escrever-se $(5)(x)$, e 15 é (5)(3). Como 5 é um fator comum, podemos pô-lo fora de um parêntese encerrando o resto, e temos $5(x + 3)$. Se agora eliminarmos os parênteses pelas regras dadas no começo do capítulo, obteremos novamente $5x + 15$ e a congruência se mantém.

Com isso torna-se possível simplificar a fração $\frac{5x + 15}{20}$.

Da maneira como ela se apresenta, parece nada haver a cancelar, porque o numerador não está decomposto em fatores. Entretanto, se escrevermos o numerador na forma $5(x + 3)$, ele estará fatorado, sendo os dois fatores 5 e $x + 3$. O denominador, é claro, pode ser fatorado em (5)(4). Portanto, a fra-

ção pode escrever-se $\frac{5(x + 3)}{(5)(4)}$, os 5 podem ser cancelados, e a fração se reduz aos termos mais simples: $\frac{x + 3}{4}$.

Como eu anunciei no começo do capítulo, nós enxertamos parênteses para simplificar uma expressão.

Pode-se, também, dispensar o incômodo de introduzir os parênteses. Cada termo do numerador pode ser fatorado separadamente, de modo que a fração fica $\frac{(5)(x) + (5)(3)}{(5)(4)}$. Então basta cancelar os 5 que aparecem em todos os termos em cima e embaixo para termos $\frac{(x + 3)}{4}$. Este método é um pouco mais rápido para quem tiver bastante prática de fatoração, mas só funciona se um fator determinado ocorrer de fato em *todos* os termos, em cima e embaixo, sem exceção. Se um único termo, no numerador ou no denominador, não contiver o fator, o cancelamento não pode ser feito. É muito comum o principiante esquecer isso e cancelar o que não devia. O mais seguro é dar-se ao trabalho de inserir os parênteses e tirar para fora o fator comum onde você possa vê-lo claramente e ter certeza de que é um fator comum. Aí, poderá cancelar tranqüilamente.

A propósito, o cancelamento não se restringe a símbolos numéricos. Símbolos literais podem ser tratados de idêntica maneira. Na fração $\frac{5x}{6x}$, o x é um fator em cima e embaixo, e pode ser cancelado, dando a fração $\frac{5}{6}$. Ou seja a fração $\frac{21x}{14x}$. O numerador pode ser fatorado em $(3)(7x)$ e o denominador em $(2)(7x)$. Portanto a fração pode escrever-se $\frac{(3)(7x)}{(2)(7x)}$ e, cancelando-se o $7x$, reduz-se aos termos mais simples $\frac{3}{2}$. No entanto, é preciso nesses casos certificar-se de que não se está cancelando uma expressão que eventualmente seja igual a ze-

ro. Lembre-se que o cancelamento é na verdade uma divisão, e não se pode dividir por zero.

O CANCELAMENTO AMPLIADO

As regras de fatoração e cancelamento, que eu vim usando em frações, funcionam também para equações. Para comprovar, consideraremos uma equação geral em que chamaremos o lado esquerdo de E e o lado direito de D. A equação seria

$$E = D$$

Eu disse no começo do livro que os dois lados de uma equação podem ser divididos por uma mesma quantidade sem destruir a equação, portanto vamos dividir os dois lados pelo lado direito. A equação (desde que, bem entendido, D não seja igual a zero) torna-se

$$\frac{E}{D} = \frac{D}{D}$$

ou

$$\frac{E}{D} = 1$$

Assim, os dois lados de uma equação podem ser escritos como numerador e denominador de uma fração igual a um. Portanto, nada há de surpreendente em que as regras de fatoração e cancelamento aplicáveis a frações apliquem-se igualmente a equações.

Como exemplo específico, seja a equação

$$10x = 15$$

Transpondo, temos

$$x = \frac{15}{10}$$

Podemos fatorar a fração de modo a simplificá-la, assim:

$$x = \frac{(5)(3)}{(5)(2)} = \frac{3}{2}$$

Em vez disso, podíamos de saída cancelar na própria equação. $10\,x$ pode escrever-se $(5)(2x)$ e 15 é (5)(3). Quer dizer que se pode escrever a equação na forma

$$(5)(2x) = (5)(3)$$

Agora podemos cancelar os fatores comuns, à esquerda e à direita, tal como faríamos, em cima e embaixo, numa fração. A equação fica sendo

$$2x = 3$$

e, por transposição,

$$x = \frac{3}{2}$$

Como vemos, obtém-se o mesmo resultado, quer transpondo primeiro e fatorando depois, como eu fiz no primeiro caso, ou primeiro fatorando a equação e depois transpondo, como fiz no segundo. Em equação simples como as que eu uso neste livro (apenas para explicar as técnicas da álgebra) não chega a haver diferença de comodidade. Entretanto, em equações mais complicadas, geralmente é bem mais cômodo fatorar e cancelar o mais possível antes de qualquer transposição. Portanto é melhor acostumar-se a fatorar primeiro e transpor depois.

Naturalmente, ao fatorar expressões que formam equações é preciso precaver-se contra as mesmas armadilhas que ao fatorar frações. Na equação

$$x + 6 = 15$$

poder-se-ia escrever assim:

$$x + (3)(2) = (3)(5)$$

A equação continua certa, mas você poderia ser tentado a cancelar os 3 à esquerda e à direita, o que lhe daria a equação $x + 2 = 5$. Transpondo, você concluiria que $x = 5 - 2$, ou 3. Mas alguma coisa está errada, pois substituindo x por 3 na equação primitiva, ter-se-ia $3 + 6 = 15$, o que é absurdo.

O engano foi cancelar os 3, pois na expressão $x + (3)(2)$, 3 *não* é um fator da expressão inteira: é fator de um dos termos apenas. Só cabe o cancelamento quando cada lado da equação tem um fator comum; cada lado como um todo.

Ao fatorar uma expressão com mais de um termo, o mais seguro é introduzir parênteses. Seja, por exemplo, a equação

$$10x + 35 = 15$$

Poderíamos fatorar cada termo deste modo:

$$(5)(2x) + (5)(7) = (5)(3)$$

O lado esquerdo da equação tem dois termos com o fator comum 5. Portanto esse fator pode ser posto fora de um parêntese que encerre os fatores restantes, de modo que a equação se torna

$$5(2x + 7) = (5)(3)$$

Agora o 5 à esquerda é realmente um fator de todo esse lado da equação e não de um termo apenas. Então os 5 podem ser cancelados à esquerda e à direita, e a equação fica

$$2x + 7 = 3$$

Quer o valor de x seja calculado na equação $10x + 35 = 15$, quer, depois de fatorar e cancelar, na equação $2x + 7 = 3$, teremos o mesmo resultado. No primeiro caso:

$$x = \frac{(15 - 35)}{10} \qquad (\text{ou } -2)$$

E no segundo caso:

$$x = \frac{(3 - 7)}{2} \qquad (\text{ou } -2)$$

Ou seja, fatorar e cancelar antes de transpor (quando feito da maneira certa) não cria incongruências.

8

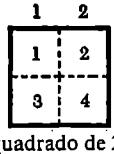
As Últimas Operações

QUADRADOS E CUBOS

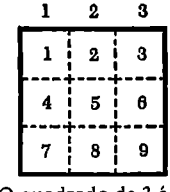
Até aqui, o que fizemos com os símbolos literais? Nós os combinamos com símbolos numéricos por via de soma ($x + 7$), subtração ($x - 7$), multiplicação ($7x$) e divisão $\frac{x}{7}$. Também os combinamos com outros símbolos literais por via de soma ($x + 7x$), subtração ($x - 7x$) e divisão ($\frac{x}{7x}$).

A única combinação que não usamos foi a de um símbolo literal multiplicado por outro símbolo literal, e é tempo de atacarmos essa situação.

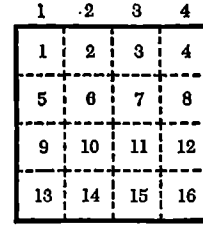
Vejamos como um caso de multiplicação entre símbolos literais pode se apresentar naturalmente em matemática. Uma das figuras geométricas mais familiares é o quadrado. É uma figura de quatro lados com todos os ângulos retos,* o que faz



O quadrado de 2 é 4



O quadrado de 3 é 9



O quadrado de 4 é 16

* Ângulo reto é o ângulo formado pelo encontro de uma reta perfeitamente horizontal com outra perfeitamente vertical.

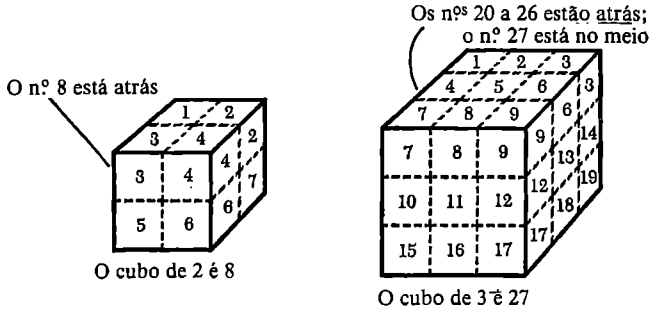
dele uma espécie de retângulo. Entretanto, um quadrado difere dos retângulos comuns pelo fato de os seus quatro lados terem o mesmo comprimento.

Para obter a área de um quadrado, temos de multiplicar a largura pela altura, como em qualquer outro retângulo. Mas, como todos os lados do quadrado são iguais, a largura de um quadrado é sempre igual à sua altura. Um quadrado de 2 metros de comprimento tem também 2 metros de altura; um de 5 metros de comprimento tem também 5 metros de altura, e assim por diante. Portanto a área de um quadrado de 2 metros de lado é 2 vezes 2 ou 4 metros quadrados. A área de um quadrado de 5 metros de lado é 5 vezes 5 ou 25 metros quadrados, e assim por diante.

Por causa dessa ligação com o quadrado, diz-se que 4 é quadrado de 2, e 25 o quadrado de 5. O produto de qualquer número multiplicado por si mesmo é o quadrado desse número. Suponhamos, então, que não conhecêssemos o comprimento do lado de um certo quadrado. Poderíamos chamar de x, e então teríamos de imediato uma situação em que símbolos literais têm de ser multiplicados, pois a área do quadrado seria x multiplicado por x, ou xx. Naturalmente, xx é o quadrado de x, por isso, embora parecesse natural ler xx como "xis xis", é mais comum ler "xis ao quadrado".

Uma situação semelhante surge em relação com o cubo, que é uma figura sólida com todos os ângulos retos e todas as arestas do mesmo tamanho. Dados e blocos de jogos de armar são exemplos de cubos. Para obter o volume de um cubo, multiplica-se o comprimento pela largura e pela altura. Como todas as arestas são do mesmo tamanho, comprimento, largura e altura são iguais. O volume de um cubo de 2 metros de aresta é (2)(2)(2), ou 8 metros cúbicos. Se a aresta medir 5 metros, o volume será (5)(5)(5), ou 125 metros cúbicos.*

* Estou certo de que metros cúbicos não o assustam. Se ainda assim você achar que precisa refrescar um pouco a memória em relação às unidades de volume, pode dar uma olhada em *O reino das medidas*.



Por causa disso, diz-se que 8 é o cubo de 2, e 125 o cubo de 5. O produto de três números iguais quaisquer é o cubo do número multiplicado.

Semelhantemente, se não soubermos o comprimento da aresta de um cubo, e chamarmos de *x* esse comprimento, sabemos que o volume é igual a *xxx*. Naturalmente, *xxx* é chamado de "xis ao cubo".

Os conceitos de quadrado e cubo de um número tiveram sua origem entre os gregos, que se interessaram de modo especial pelas figuras geométricas. Entretanto, não existem figuras geométricas que se possam desenhar ou construir representando situações em que quatro ou mais números iguais devam ser multiplicados, por isso não há nomes especiais para *xxxx* ou *xxxxx*. Os matemáticos designam essas expressões simplesmente como "*x* à quarta", "*x* à quinta", e assim por diante. Se eu dissesse "*x* à décima sétima", você saberia prontamente que eu me estaria referindo ao produto de dezessete *x*.

Nos primórdios da álgebra, os matemáticos verificaram que freqüentemente teriam de se avir com produtos dessa espécie, e naturalmente trataram de buscar algum meio mais simples e conveniente de simbolizá-los. Escrever uma sucessão de *x* ocupa espaço e pode gerar confusão. Olhando para *xxxxxxxx*, você não é capaz de dizer num relance se está diante de *x* à sétima, *x* à oitava ou *x* à nona. Terá de contar os *x*.

Uma abreviação conveniente foi inventada pelo matemático francês René Descartes, em 1637. Consiste em indicar o número de x a serem multiplicados por meio de um número pequeno colocado à direita e acima do x. Por exemplo, xx passou a escrever-se x^2, e xxx passou a escrever-se x^3. Continua-se a ler como "x ao quadrado" e "x ao cubo". A seguir tem-se x^4, x^5, x^{216} ou o que for, e continua-se a ler como "x à quarta", "x à quinta", "x à ducentésima décima sexta" etc. O número pequeno em expressões desse tipo tem o nome de "expoente".

OPERANDO COM POTÊNCIAS

Ao indicar uma expressão como x^3 ou x^5, dizemos que estamos "elevando x a uma potência". Esta é mais uma operação algébrica.

Até aqui tratamos de soma, subtração, multiplicação e divisão — as quatro operações algébricas ordinariamente utilizadas em aritmética comum. A elevação a uma potência, ou "potenciação", é uma quinta operação, de ordinário não utilizada em aritmética comum.

Você poderá conjeturar se é razoável dizer que a potenciação é uma quinta operação. Não é uma simples multiplicação? x^2 não é simplesmente x multiplicado por x?

Sim, é, mas do mesmo modo a multiplicação pode ser vista como uma forma de soma, não pode? Por exemplo, $2x$, que é um exemplo de multiplicação, pode ser visto simplesmente como x mais x, que obviamente é uma soma.

Uma das razões por que se considera a multiplicação como uma operação distinta é que nas equações ela é tratada de forma diferente da soma. Numa equação como $2x + 3 = 10$, sabemos que temos de transpor o 3 antes de transpor o 2; que não podemos mexer com a multiplicação antes de mexer com a soma.

A equação poderia ser escrita $x + x + 3 = 10$, que é a mesma equação, mas agora envolvendo apenas somas. Agora

você pode transpor à vontade qualquer termo; pode, por exemplo, transpor um dos x, separando-o do outro, mudando a equação em $x + 3 = 10 - x$. (De nada adianta para efeito de tirar o valor de x, mas pelo menos a equação é congruente com o que era antes.)

Assim também, verifica-se que potências não se manipulam do mesmo modo que produtos, embora a potenciação possa ser considerada uma forma de multiplicação. É o que faz da potenciação uma operação distinta. Para mostrar isso, tomemos uma expressão simples envolvendo unicamente símbolos numéricos.

Qual é o valor de (2)(2)(5)? A resposta, imediata, é 20. Não importa se calculamos primeiro (2)(2) obtendo 4 e em seguida (4)(5) obtendo 20, ou se mudamos a ordem, (2)(5) igual a 10 e (10)(2) igual a 20. A resposta é uma só, seja qual for a ordem em que multiplicamos.

Suponha, porém, que em vez de (2)(2)(5) tivéssemos escrito $(2^2)(5)$. É a mesma expressão, mas agora contendo uma potência. 2^2 é 4, e multiplicado por 5 dá 20. Mas, será que poderíamos multiplicar primeiro 2 por 5 e depois potenciar? Vamos experimentar, só para ver o que acontece. (2)(5) é 10, e 10^2 é 100; temos uma incongruência.

Para evitar incongruência, potenciações têm de ser efetuadas primeiro, antes de multiplicações; do mesmo modo como multiplicações têm de ser efetuadas antes de somas.

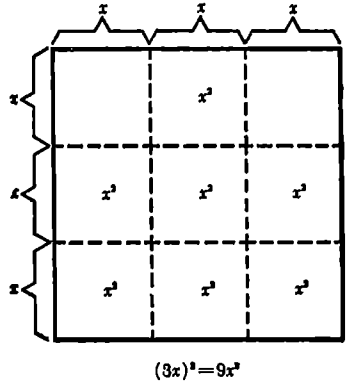
A título de exemplo, examinemos a expressão $3x^2$ e nos perguntemos o que ela significa. Significa $(3x)(3x)$ ou $(3)(x)(x)$?

Para ter a resposta a essa pergunta, lembremos o que eu expliquei atrás: visto que multiplicações devem ser efetuadas antes de somas, um produto é sempre considerado como se estivesse entre parênteses. A expressão $3x + 2$ entende-se como se fosse $(3x) + 2$. Assim também, como a potenciação deve ser efetuada antes da multiplicação, numa expressão que envolva

ambas, é a potência que se considera como se estivesse entre parênteses.

Portanto, $3x^2$ é na verdade $3(x^2)$, e significa $(3)(x)(x)$. Não há confusão possível. O hábito consagrado de dispensar os parênteses em expressões como $3x^2$ é o único motivo de surgir a dúvida no espírito do principiante.

(A esta altura, talvez você esteja um pouco irritado com o modo como se dispensam os parênteses. Por que não usá-los sempre que cabíveis, para evitar confusões? Bem, se fizéssemos isso, as equações ficariam atulhadas de parênteses. E, à medida que se tornasse um perito em manipular equações, você mesmo se cansaria deles e por si mesmo passaria a abandoná-los.)



Mas e se quiséssemos de fato multiplicar $3x$ por $3x$? Como indicá-lo? Mais uma vez podemos nos valer dos utilíssimos parênteses e escrever a potência $(3x)^2$. Agora vê-se facilmente que toda a expressão contida no parêntese está sendo elevada ao quadrado, do mesmo modo como antes entendemos que na expressão $3(x + 2)$ toda a porção entre parênteses está sendo multiplicada. Pelo uso apropriado dos parênteses, podemos mudar a ordem em que as operações devem ser efetuadas.

Se escrevermos a expressão $(3x)^2$ em forma de produto, ela se torna $(3)(x)(3)(x)$. Agora só temos multiplicações, e podemos arranjar os símbolos em qualquer ordem que queiramos sem alterar o valor final. Logo, podemos escrever $(3)(3)(x)(x)$, e retornar a expressão à forma de potência como $(3^2)(x^2)$. Se você experimentar o mesmo truque com a expressão $(7x)^5$, verificará que ela equivale a $(7^5)(x^5)$.

Na verdade, podemos escrever que

$$(ab)^n \equiv (a^n)(b^n)$$

onde ^{n} é o símbolo geral usualmente adotado para representar um expoente.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, não haverá dificuldades em perceber que $(5x)(3x)$ é igual a $15x^2$, e que $30x^3$ pode ser fatorado $(2x)(3x)(5x)$, ou em $(2)(3)(5)(x)(x)(x)$.

COMBINANDO POTÊNCIAS

E se nos virmos diante de uma operação envolvendo duas potências? Por exemplo, seja a expressão $(x^3)(x^2)$, em que temos uma potência multiplicada por outra. Podemos simplificá-la, substituindo potências por produtos. Assim, x^3 é xxx, e x^2 é xx. Logo, $(x^3)(x^2)$ é $(xxx)(xx)$. Como só temos produtos, não há necessidades dos parênteses, e a expressão torna-se $xxxxx$ ou x^5. Em resumo, $(x^3)(x^2) = x^5$. Aparentemente, o que nós fizemos foi simplesmente somar os expoentes.

Experimente outros exemplos e vai verificar que é sempre assim. Em todos os casos semelhantes os expoentes se somam. Generalizando, podemos escrever

$$(a^m)(a^n) \equiv a^{(m+n)}$$

O tópico seguinte é obviamente a divisão de uma expres-

são envolvendo uma potência por outra. Você é capaz de calcular o valor de $\frac{x^5}{x^3}$?

É fácil de imaginar que, se a multiplicação de potências envolve soma de expoentes, a divisão de potências deve envolver subtração de expoentes. Assim, o resultado de x^5 dividido por x^3 deve ser x^2, pois $5 - 3$ é 2.

A expressão x^5 pode escrever-se *xxxxx*, e x^3 pode escrever-se *xxx*. Portanto, $\frac{x^5}{x^3}$ é $\frac{xxxxx}{xxx}$. Podemos cancelar três dos x em cima e embaixo, porque cada um deles representa um fator comum. Desse modo, os três x do denominador se subtraem dos cinco do numerador e sobram dois, logo a resposta é, com efeito, x^2.

Generalizando:

$$a^m/a^n \equiv a^{(m-n)}$$

Essa conclusão nos leva a algumas conseqüências interessantes.

Descartes só usou expoentes para indicar o produto de dois ou mais símbolos iguais. Nessas condições, o menor expoente seria 2. Mas, e se dividirmos x^3 por x^2? Segundo a regra da subtração de expoentes, $\frac{x^3}{x^2}$ é igual a x^1. O que significa isso?

Bem, se escrevermos $\frac{x^3}{x^2}$ na forma $(\frac{xxx}{xx})$, dois dos x podem ser cancelados em cima e embaixo, e o valor da fração é simplesmente x. Então temos duas respostas para o mesmo problema, x^1 e x, dependendo do caminho seguido para chegar à solução. A maneira de manter a congruência é concluir que as duas respostas são na verdade uma só, dizendo que $x^1 \equiv x$. De certo modo, isso faz sentido, pois, pela regra de Descartes, x^1 significaria a multiplicação de um único x. Ora, como é impossível multiplicar um x sozinho (são precisos dois fatores pa-

ra termos um produto), isso equivale a dizer que x permanece como estava, ou seja, x^1 é o mesmo que x. O mesmo se aplica a qualquer símbolo, portanto podemos dizer que

$$a^1 \equiv a$$

Mas podemos ir mais longe. E se dividirmos x^3 por x^3? Como qualquer número dividido por si mesmo é igual a 1, podemos dizer que $\frac{x^3}{x^3} = 1$. No entanto, se aplicarmos a regra da subtração de expoentes, diremos também que $\frac{x^3}{x^3} = x^{(3-3)}$ ou x^0.

Novamente, o único modo de evitar uma incongruência é admitir que os dois resultados são iguais, e que x^0 é igual a 1. Chegaremos ao mesmo desfecho dividindo 2^3 por 2^3 ou 7^5 por 7^5. Somos forçados a concluir que qualquer símbolo, numérico ou literal, elevado à potência zero, é igual a um. Generalizando, podemos dizer:

$$a^0 \equiv 1$$

Esse exemplo nos mostra que em matemática a congruência é mais importante que o "senso comum". Você pode achar que x^0 deveria representar o produto de zero x. Na verdade isso não faz sentido, mas para a maioria das pessoas a *impressão* é de que o resultado devia ser zero.

Mas se admitirmos x^0 igual a zero, teremos a incongruência de que $\frac{x^3}{x^3}$ pode ser igual a 1 ou 0, dependendo da regra de divisão que aplicamos. Em nenhuma hipótese podemos aceitar isso, portanto estabelecemos que x^0 é igual a 1, não importa que o "senso comum" nos diga coisa diferente.

E podemos ir ainda mais longe. Suponha que queremos dividir x^3 por x^5. Aplicando a regra da subtração de expoentes,

temos que $\frac{x^3}{x^5}$ é igual a $x^{(3-5)}$ ou x^{-2}. Mas que diabo pode significar um expoente negativo? Como é possível multiplicar menos dois x?

Por outro lado, suponha que escrevamos a expressão $\frac{x^3}{x^5}$ de um modo que envolva só produtos, assim: $\frac{xxx}{xxxxx}$. Se agora cancelarmos os x em cima e embaixo, ficamos com $\frac{1}{xx}$ ou $\frac{1}{x^2}$.

Mais uma vez temos dois valores para a mesma expressão, x^{-2} e $\frac{1}{x^2}$. Portanto, temos de igualá-los. Se experimentarmos a mesma coisa com outros expoentes, verificaremos que x^{-7} deve ser igualado a $\frac{1}{x^7}$, x^{-11} a $\frac{1}{x^{11}}$, e assim por diante.

Generalizando:

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n}$$

Tendo liquidado o assunto da multiplicação e divisão de expressões envolvendo potências, que tal potenciar uma potência? Parece uma coisa esquisita, mas logo ficará claro o que isso quer dizer. Suponha que eu queira multiplicar x^3 por si mesmo. O resultado será $(x^3)(x^3)$, ou $(x^3)^2$. É um exemplo de potência de potência.

Pela regra da soma de expoentes, $(x^3)(x^3)$ é igual a x^6. Portanto, $(x^3)^2 = x^6$. Do mesmo modo, $(x^4)^3$ é $(x^4)(x^4)(x^4)$, ou x^{12}. Ao potenciar uma potência, é como se multiplicássemos os expoentes, e podemos dizer que a regra geral é

$$(a^m)^n \equiv a^{mn}$$

Assim, o uso de expoentes simplifica operações. Potência de potência se reduz a multiplicação de expoentes. Multiplicação de potências se reduz a soma de expoentes. Divisão de potências se reduz a subtração de expoentes.*

O INVERSO DA POTENCIAÇÃO

As outras operações algébricas que não a potenciação existem aos pares. A soma tem o seu inverso na subtração, a multiplicação tem o seu inverso na divisão. Seria de estranhar que a potenciação existisse sozinha, sem o seu inverso.

Então, qual é o inverso da potenciação? Bem, vejamos. Multiplicar uma quantidade por si mesma, assim, (3)(3), é potenciação, e o produto é 9. Para conceber a operação inversa, basta que partamos do produto e raciocinemos de trás para diante. Qual é o número que multiplicado por si mesmo dá 9? A resposta, obviamente, é 3?.

Ou poderíamos perguntar: Que número, tomado cinco vezes e multiplicado, dá 1.024? Podemos procurar a resposta por tentativa. Podemos começar por 2, mas (2)(2)(2)(2)(2) dá só 32. Cinco 3 multiplicados dão 243. Mas cinco 4 multiplicados são efetivamente 1.024, portanto a resposta é 4.

(Existem métodos melhores que o de tentativa para resolver esse tipo de problema. Neste livro eu não tratarei disso. Para o fim de explicar a álgebra, bastam-se problemas simples do gênero — tão simples que você poderá resolvê-los de cabeça.)

Ao inverso da potenciação, que consiste portanto em encontrar um valor que multiplicado por si mesmo um certo número de vezes dá um resultado conhecido, os matemáticos dão o nome de "radiciação" ou "extração de raiz".

---

* O emprego de expoentes desse modo levou à invenção dos "logaritmos" como meio de simplificar cálculos. Seu autor foi um matemático escocês chamado John Napier, por volta de 1600. Não me cabe aqui falar de logaritmos, mas se você tiver curiosidade, pode encontrá-los explicados no Capítulo 8 de *O reino dos números*.

O termo tem origem nos matemáticos árabes da Idade Média. Imagino que eles vissem o número 1.024 como se crescendo a partir de uma série de quatros, como uma planta cresce a partir da raiz. Portanto, 4 é uma raiz de 1.024. Então, tal como uma raiz deve ser extraída do solo, 4 deve ser "extraído" de 1.024.

Naturalmente, há diferentes graus de raízes. Como (4)(4) é 16, (4)(4)(4) é 64 e (4)(4)(4)(4) é 256, 4 é uma raiz de 16, de 64 e de 256, tanto quanto de 1.024. Essas diferentes situações distinguem-se do mesmo modo como se distinguem as diferentes potências na potenciação.

Assim, se 16 é o quadrado de 4, 4 é a raiz quadrada de 16. Analogamente, 64 é o cubo de 4, logo 4 é a raiz cúbica de 64; 256 é a quarta potência de 4, logo 4 é a raiz quarta de 256, e assim por diante.

A operação de radiciação é indicada por meio de um sinal chamado "radical" (que nada tem a ver com política, mas simplesmente deriva da palavra latina *radix*, que quer dizer "raiz"). O sinal é este: $\sqrt{\ }$. Foi inventado por um matemático alemão chamado Christoff Rudolff, que o empregou pela primeira vez num livro publicado em 1525. Antes disso, usava-se a letra *r* (de *radix*), e é bem possível que $\sqrt{\ }$ seja simplesmente uma espécie de *r* deformado.

Por volta de 1700, os matemáticos passaram a distinguir os tipos de raiz usando um número pequeno, exatamente como no caso das potências. Assim, a raiz cúbica indica-se por $\sqrt{^3}$; a raiz quarta por $\sqrt{^4}$; a raiz oitava por $\sqrt{^8}$, e assim por diante. Ao número dá-se o nome de "índice".

Usando esse sinal de radical, podemos mostrar de maneira muito simples como potências e raízes se inter-relacionam:

$$\text{Se} \qquad a^n = b$$

$$\text{então} \qquad a = \sqrt[n]{b}$$

Existe uma exceção a essa regra geral dos índices, que diz respeito à raiz quadrada. Para sermos completamente lógicos, ela deveria ser escrita $\sqrt{^2}$. Mas a raiz quadrada é usada tão mais freqüentemente que todas as outras juntas, que os matemáticos economizam tempo considerando esse índice particular como subentendido, do mesmo modo como habitualmente dispensam o 1 em expressões como $1x$, $\frac{x}{1}$ e x^1.

Ou seja, o sinal $\sqrt{}$ sozinho e sem índice, entende-se como raiz quadrada. Aliás, isso é tão comum que o sinal quase nunca é chamado radical. É chamado quase sempre "sinal de raiz quadrada".

Operações inversas sempre introduzem novas dificuldades. É a subtração, não a soma, que introduz os números negativos. É a divisão, não a multiplicação, que introduz as frações.

Que novas complicações trará a radiciação?

Vejamos o problema aparentemente simples de achar a raiz quadrada de 2, ou, para usar o símbolo, $\sqrt{2}$. A resposta não é 1, porque o produto de (1)(1) é 1, que é menos que a quantidade desejada, 2. A resposta não é 2, porque (2)(2) é 4, que é mais que a quantidade desejada. Então, deve ser algum valor entre 1 e 2, e se você quiser pode experimentar com várias frações nessa faixa. Por exemplo, $\frac{7}{5}$ quase dá certo, pois $(\frac{7}{5})(\frac{7}{5})$ dá o produto $\frac{49}{25}$ ou 1,96. É preciso encontrar uma fração que seja um pouquinho maior que $\frac{7}{5}$.

Infelizmente, se você continuasse tentando, nunca iria achar a fração certa. Cada uma que você tentasse, multiplicada por si mesma daria um valor um pouco acima ou um pouco abaixo de 2. Jamais daria exatamente 2. Por exemplo, a fração $\frac{707.107}{500.000}$ multiplicada por si mesma dá o produto

2,000001237796, que é um nada maior que 2, mas não é 2 exatamente.

Foram os gregos os primeiros a descobrir que havia números, como $\sqrt{2}$, que não podiam ser expressos em forma de fração, e ficaram um tanto embatucados com isso. Hoje, números como esses são chamados "irracionais". Todo o mundo sabe que, em linguagem comum, "irracional" quer dizer louco ou mentalmente desequilibrado, e talvez você ache que é um bom nome a ser dado a números dessa espécie. Em matemática, porém, o nome significa simplesmente "sem razão", sendo que razão, como você deve estar lembrado, é outra designação de fração.*

Quase todas as raízes, com muito poucas exceções, são irracionais. Neste livro eu estarei usando sempre essas poucas exceções como material de trabalho, para evitar complicações. Contudo, não se deixe enganar por isso. Raízes e números irracionais andam de mãos dadas, do mesmo modo como a divisão e as frações.

EXPOENTES FRACIONÁRIOS

Em casos anteriores, sempre demos jeito de livrar-nos de algum modo de operações inversas. Usando números negativos, livramo-nos de subtrações, por exemplo, escrevendo $8 + (-7)$ em vez de $8 - 7$. Livramo-nos de divisões usando recíprocas, escrevendo $(4)(\frac{1}{2})$ em vez de $4 \div 2$.

Parece provável que possamos livrar-nos também da radiciação.

Para isso, comecemos por considerar uma expressão como $x^{\frac{1}{2}}$, em que temos um expoente fracionário. Não se in-

* Eu poderia seguir falando de números irracionais por muitas páginas, mas não vou fazê-lo. Se você estiver curioso por saber mais sobre eles, encontrará uma exposição em *O reino dos números*.

quiete com isso, nem se ponha a imaginar como será possível multiplicar a metade de um x. Lembre-se que o conceito de expoente como indicador do número de fatores a multiplicar é por demais restrito. Já o ultrapassamos ao analisar expressões como x^0 e x^{-2}, e demos um sentido a essas representações. Por que não descobrimos um sentido em $x^{\frac{1}{2}}$ também?

Para começar, multipliquemos $x^{\frac{1}{2}}$ por si mesmo. Pela regra da soma de expoentes, $(x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}})$ é igual a $x^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}$, que dá x^1, ou simplesmente x.

Se perguntássemos agora: Qual o número que multiplicado por si mesmo dá x?, a resposta seria $x^{\frac{1}{2}}$. Mas ao perguntarmos que número multiplicado por si mesmo dá x, estamos perguntando: Qual é a raiz quadrada de x? Logo, temos de dizer que a raiz quadrada de x é $x^{\frac{1}{2}}$, ou seja, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Isso nos dá o sentido do expoente fracionário $\frac{1}{2}$. É outro modo de simbolizar a raiz quadrada.

De modo semelhante, verifica-se que $(x^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}})$ é igual a x, logo $x^{\frac{1}{3}}$ é a raiz cúbica de x, ou seja, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$.

Podemos generalizar dizendo que

$$\sqrt[n]{a} \equiv a^{\frac{1}{n}}$$

Agora você tem tudo que precisa para entender o significado de uma expressão como $x^{2\frac{1}{2}}$. Isso pode escrever-se $x^{\frac{5}{2}}$, e sabemos que é o mesmo que $(x^5)^{\frac{1}{2}}$, porque pela regra da multiplicação de expoentes $(x^5)^{\frac{1}{2}}$ é igual a $x^{(5)(\frac{1}{2})}$ ou $x^{\frac{5}{2}}$.

Como o expoente $\frac{1}{2}$ indica a raiz quadrada, podemos escrever $(x^5)^{\frac{1}{2}}$ como $\sqrt{x^5}$. Ou seja, $x^{\frac{5}{2}}$ é igual a $\sqrt{x^5}$, e, generalizando,

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m}$$

Esse modo de trocar índices por expoentes e vice-versa pode eliminar temporariamente a radiciação e facilitar a multiplicação de raízes. Por exemplo, você poderia ficar atrapalhado se lhe pedissem para multiplicar a raiz quadrada de x pela raiz cúbica de x, se você não pudesse fazer outra coisa além de escrever $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$.

No entanto, trocando os índices por expoentes, você tem $x^{\frac{1}{2}}$ $^{\frac{1}{3}}$ e, pela regra da soma de expoentes, a resposta é $x^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}$ ou $x^{\frac{5}{6}}$, que se pode escrever $\sqrt[6]{x^5}$.

E agora você pode soltar um suspiro de alívio. Não precisa esperar novas surpresas em matéria de operações algébricas, porque não há mais nenhuma. Em toda a álgebra não há mais que três pares de operações:

(1) Soma e subtração
(2) Multiplicação e divisão
(3) Potenciação e radiciação

e isso é tudo.

Nosso próximo passo é o manejo de equações envolvendo potências e raízes.

9

As Equações por Graus

UMA NOVA TRANSPOSIÇÃO

Suponha que tivéssemos um cubo com um volume de 27 metros cúbicos e quiséssemos saber o comprimento da aresta. Vamos dizer que a aresta do cubo mede x metros de comprimento e, como o volume do cubo se obtém elevando o comprimento da aresta à terceira potência, temos a equação

$$x^3 = 27$$

Em capítulos anteriores, vimos que um mesmo número pode ser somado ou subtraído dos dois lados de uma equação; e que um mesmo número pode multiplicar ou dividir os dois lados. Não é difícil supor que potenciação e radiciação se acrescentem à lista. Os dois lados de uma equação podem ser elevados a uma mesma potência ou reduzidos a uma mesma raiz sem destruir a equação.

Para transformar x^3 em x, basta tirar a raiz cúbica de x^3. A raiz cúbica de x^3 é $\sqrt[3]{x^3}$, que é o mesmo que $x^{\frac{3}{3}}$, que, naturalmente, é igual a x^1, ou simplesmente x.

Mas para tirar a raiz cúbica de um lado da equação, temos que tirar a raiz cúbica do outro, para manter a equação. Portanto:

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$$

O lado esquerdo da equação é x, como acabamos de ver, e

o lado direito é 3, visto que (3)(3)(3) é igual a 27. A equação fica sendo

$$x = 3$$

que é a solução.

Seja agora uma equação como esta:

$$\sqrt[3]{x} = 4$$

Para converter $\sqrt[3]{x}$ em x, nós elevamos ao cubo $\sqrt[3]{x}$. Afinal, o cubo da raiz cúbica de x é $(\sqrt[3]{x})^3$, que se pode escrever $x^{\frac{3}{3}}$, ou simplesmente x.

Aliás, por essa linha de raciocínio, podemos estabelecer uma regra geral para qualquer potência ou índice:

$$\sqrt[n]{a^n} \equiv (\sqrt[n]{a})^n \equiv a$$

Voltando à nossa equação $\sqrt[3]{x} = 4$, e elevando os dois lados ao cubo, temos

$$(\sqrt[3]{x})^3 = 4^3$$

ou

$$x = 64$$

Como no caso das outras operações, estamos resolvendo equações que envolvem potencialização e radiciação, movendo um símbolo de um para o outro lado da equação. Estamos deslocando o número pequeno que representa o índice de uma raiz ou o expoente de uma potência. Se você examinar mais uma vez as equações vistas até aqui neste capítulo, verá que

$$\text{Se} \qquad x^3 = 27$$

então $x = \sqrt[3]{27}$

E se $\sqrt[3]{x} = 4$

então $x = 4^3$

Em cada um dos casos, poder-se-ia dizer que o pequeno ^{3} foi transposto. (A rigor, o termo "transpor" limita-se às operações de soma e subtração. Mesmo assim, eu o empreguei em relação à multiplicação e divisão, e a transformação no caso das potências e raízes é sob certos aspectos tão semelhante que também o empregarei aqui.) Também neste caso, como no das outras operações, a transposição implica uma inversão. Potência transforma-se em raiz quando o expoente é convertido em índice. E raiz transforma-se em potência quando o índice é convertido em expoente. Isso é bastante evidente nos exemplos que acabei de dar.

A razão de não ser tão evidente quanto deveria, é que quase todas as raízes usadas em álgebra são raízes quadradas, e esse é o único caso em que o índice é omitido.

Se dizemos, por exemplo, que

$$x^2 = 16$$

você vê de imediato, pelo que eu disse até aqui, que

$$x = \sqrt{16}$$

só que agora o pequeno ^{2} parece ter sumido no processo, e o fato de que foi transposto e mudado de expoente em índice não é patente. Seria patente se escrevêssemos a raiz quadrada de 16 como $\sqrt[2]{16}$, que é o que logicamente deveríamos fazer — mas não fazemos.

Por outro lado, se partirmos de

$$\sqrt{x} = 8$$

podemos converter em

$$x = 8^2$$

e o pequeno ^{2} parece ter brotado do nada

SOLUÇÕES NO PLURAL

Os matemáticos dão grande atenção à presença de potências em equações. Elas tornam as equações mais difíceis de resolver. Aliás, quanto maiores as potências, mais difícil é manejar as equações. Em vista disso, por volta de 1600 os matemáticos passaram a classificar as equações de acordo com a maior potência da incógnita nelas encontrada.

As equações dizem-se de um certo "grau". Em equações simples do tipo que eu vim apresentando até este capítulo, como $x - 3 = 5$, a incógnita pode escrever-se x^1, portanto a equação é uma "equação do primeiro grau".

Do mesmo modo, uma equação como $x^2 - 9 = 25$ é uma "equação do segundo grau", porque a incógnita está elevada à segunda potência. Numa equação como $x^2 + 2x - 9 = 18$, em que a incógnita está elevada à segunda potência em um termo e à primeira potência em outro, é a maior potência que conta, e a equação é ainda do segundo grau.

Equações como $x^3 - 19 = 8$, ou $2x^3 + 4x^2 - x = 72$, são "equações do terceiro grau", e assim por diante.*

Essa é a maneira mais simples e lógica de classificar equações, mas, infelizmente, os matemáticos se familiarizaram tanto com esses diferentes tipos que também lhes deram nomes es-

* A rigor, estas deveriam ser citadas como "equações polinômias" de tal ou tal grau, porque envolvem polinômios, o que não se dá com certos tipos de equações. No entanto, como neste livro eu só falo de equações polinômias e de nenhum outro tipo, não me preocuparei em particularizar todas as vezes.

peciais. Como os nomes especiais são usados tão freqüentemente quanto a simples classificação por grau, é melhor que você os fique conhecendo.

A equação do primeiro grau é chamada "equação linear", porque o gráfico dessa equação é uma linha reta. (Gráficos, infelizmente, são um assunto que eu não posso abordar neste livro.)

A equação do segundo grau é chamada "equação quadrática", por envolver quadrados.

Por razões igualmente óbvias, as equações do terceiro grau são chamadas "equações cúbicas".

As do quarto grau são "equações quárticas, e as do quinto grau, "equações quínticas". Às vezes, uma equação do quarto grau é chamada "biquadrada", porque envolve a multiplicação de dois quadrados. Afinal, $(x^2)(x^2) = x^4$.

Visto isso, passemos a examinar a mais simples possível das equações do segundo grau:*

$$x^2 = 1$$

Transpondo o expoente, temos

$$x = \sqrt{1}$$

e só nos resta perguntar que número multiplicado por si mesmo dá 1. A resposta parece ridiculamente simples, pois sabemos que (1)(1) é igual a 1, logo

$$x = 1$$

Mas, espere um pouco. Nós não temos pensado nos sinais. Quando dizemos que $x^2 = 1$ e que $x = \sqrt{1}$, o que realmen-

* Poderia parecer que $x^2 = 1$ não é uma equação polinômia, já que não há polinômio à vista. No entanto, transpondo, tem-se $x^2 - 1 = 0$, e aí está o polinômio.

te queremos dizer é que $x^2 = +1$, que $x = \sqrt{+}1$. (O sinal mais, lembre-se, é um daqueles vários símbolos que os matemáticos teimam em omitir.)

Isso muda as coisas. Se perguntarmos que número multiplicado por si mesmo dá + 1, estaremos de repente num dilema. E verdade que $(+1)(+1)$ é igual a + 1, mas não é também verdade que (-1)(-1) é igual a + 1? Então, + 1 e -1 são ambos soluções para x na equação $x^2 = 1$?

Não lhe parece uma incongruência, duas respostas para o valor de x numa equação? Um modo de eliminar essa complicação incômoda seria firmar uma regra que não considerasse números negativos como solução de uma equação. Com efeito, até o século XVI os matemáticos adotaram essa regra.

Mas não andaram bem em fazê-lo. Os números negativos são tão úteis que eliminá-los simplesmente para evitar complicações é errado. Além do mais, a regra não resolve o caso. Há equações do segundo grau que dão duas respostas e ambas positivas.

Por exemplo, veja-se a equação $x^2 - 3x = -2$. Sem entrar no procedimento para encontrar o valor de x, eu lhe afirmo simplesmente que tanto 1 como 2 são soluções. Se substituirmos x por 1, então x^2 é 1, $3x$ é 3 e $1 - 3$ é de fato -2. Se, por outro lado, substituirmos x por 2, x^2 é 4, $3x$ é 6 e $4 - 6$ também é igual a -2.

Há também equações do segundo grau em que existem duas soluções e ambas negativas. Na equação $x^2 + 3x = -2$, as duas soluções para x são -1 e -2.

Por volta de 1600, os matemáticos resignaram-se à idéia de que as regras aplicáveis às equações quadráticas não eram as mesmas aplicáveis às equações lineares. Numa equação do segundo grau, podia haver duas soluções diferentes para a incógnita.

Quer dizer então que esbarramos numa incongruência? É claro que não. Tem-se uma incongruência quando a solução de uma equação por um método dá uma resposta, e a solução por

outro dá uma segunda resposta. A solução de uma equação do segundo grau dá duas respostas *ao mesmo tempo*. E não importa que diferentes métodos se usem, obtêm-se as mesmas duas respostas.

Para deixar isso bem claro, se eu lhe perguntasse o nome da maior cidade dos Estados Unidos e você respondesse uma vez Nova York e outra vez Chicago, você estaria sendo incongruente. Mas, se eu lhe perguntasse os nomes das duas maiores cidades dos Estados Unidos e você respondesse Nova York e Chicago, *não* estaria sendo incongruente. Estaria certo.

Aliás, voltando às equações, logo descobriu-se que a incógnita numa equação cúbica podia ter três soluções, e que a incógnita numa equação quártica podia ter quatro soluções. Em 1637, René Descartes, o homem que inventou os expoentes, concluiu que a incógnita de qualquer equação tinha um número de soluções exatamente igual ao grau da equação. A prova completa disso foi dada finalmente em 1799 por um matemático alemão chamado Carl Friedrich Gauss.

NÚMEROS IMAGINÁRIOS

Se é assim, e se a incógnita de uma equação cúbica tem três soluções, então na mais simples das equações cúbicas (em que desta vez eu farei constar os sinais),

$$x^3 = +1$$

deveria haver três soluções para x.

Transpondo o expoente, temos

$$x = \sqrt[3]{+1}$$

e basta perguntar-nos que número tomado três vezes e multiplicado dá $+1$. De imediato podemos dizer que $+1$ é uma solução, já que $(+1)(+1)(+1)$ é igual a $+1$.

E as outras duas soluções, onde estão? Seria -1 uma delas? Bem, (-1)(-1) é + 1, e o produto multiplicado por um terceiro -1 dá (+1)(-1), que é igual a -1. Logo, (-1)(-1)(-1) é igual a -1 e não a +1, portanto -1 não é uma solução para a equação cúbica acima.

E não existe número nenhum, nenhuma fração, nem mesmo nenhum irracional, seja positivo ou negativo, com a única exceção de +1, que seja a raiz cúbica de +1.

Que conclusão podemos tirar, senão que temos uma equação cúbica em que a incógnita só tem uma solução?

Será que pilhamos em erro grandes matemáticos como Descartes e Gauss? Tão depressa e tão facilmente?

É um pouco bom demais para ser verdade, portanto vamos dar um passo atrás e voltar à equação do segundo grau. Agora que estamos fazendo constar os sinais, vamos experimentar uma equação desse tipo com um sinal negativo, como esta:

$$x^2 = -1$$

Transpondo o expoente, temos

$$x = \sqrt{-1}$$

e agora temos de achar um número que, multiplicado por si mesmo, seja igual a -1. Como (+1)(+1) é +1 e (-1)(-1) também é +1, de repente assalta-nos a idéia de que não existe *nenhum* número cuja raiz quadrada seja -1. Será possível que para uma equação tão simples como $x^2 = -1$ não haja solução?

Acontece que em 1545, Cardano, que, como você deve estar lembrado, introduziu os números negativos, resolveu inventar um número que, multiplicado por si mesmo, dava como produto -1. Como esse número parecia não existir no mundo real mas somente na imaginação, ele chamou-lhe "número imaginário". Em 1777, o matemático suíço Leonhard Euler

representou a raiz quadrada de -1 pelo símbolo i (de "imaginário").

Ou seja, i é definido como um número que, multiplicado por si mesmo, dá -1. Podemos escrever: (i)(i) = -1, ou $i^2 = -1$, ou $i = \sqrt{-1}$.

Parece difícil aceitar que i seja um número tão válido quanto 1. De nada adianta chamar i de "imaginário" e números como + 1 ou -1 de "números reais", mas é o que se faz até hoje.

A verdade é que i nada tem de imaginário. Pode-se lidar com ele com tanta segurança como com 1. Assim, podemos ter dois diferentes tipos de i, do mesmo modo que podemos ter dois diferentes tipos de 1. Podemos ter + i e -i. Assim como + 1 e -1 têm o mesmo quadrado, + 1, assim também + i e -i têm o mesmo quadrado, -1.

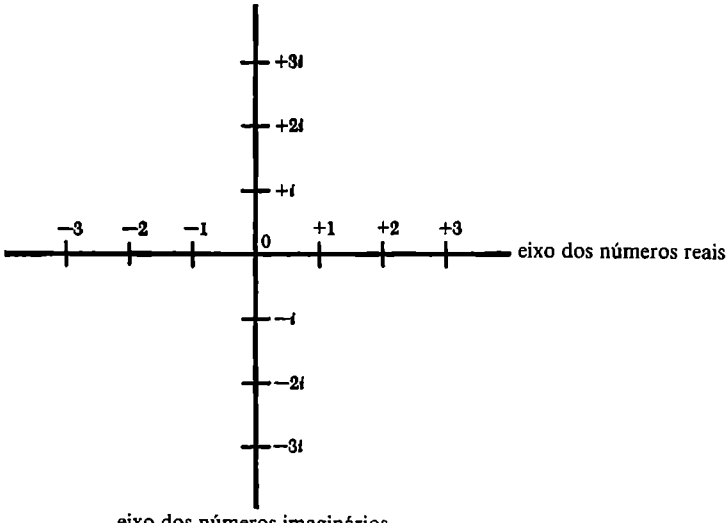
Portanto, a raiz quadrada de -1 tem, em vez de solução nenhuma, duas soluções: + i e -i. É comum, quando uma incógnita é simultaneamente igual ao positivo e ao negativo de um mesmo número, escrever esse número com um sinal que combina o positivo e o negativo, assim: ±. Lê-se "mais ou menos", de modo que o número ±1 se lê "mais ou menos um". Usando esse sinal:

$$\text{Se} \qquad x^2 = -1$$

$$\text{então} \qquad x = \pm i$$

Você deve estar meio aflito, se esforçando por visualizar o que é i e formar uma idéia clara da sua exata natureza. Bom, lembre-se de que a princípio houve esse mesmo problema com os números negativos. Uma maneira de explicar o que seriam aqueles misteriosos números menores que zero foi utilizar direções. Assim, + 1 podia ser representado por um ponto 1 metro a leste de um certo ponto de partida, + 2 por um ponto 2 me-

tros a leste do ponto de partida, + 5 por um ponto 5 metros a leste, e assim por diante. Nesse caso, os números negativos representariam posições a oeste; -1 seria representado por um ponto 1 metro a oeste do ponto de partida, etc.



Podemos levar isso mais adiante, e fazer com que + i e os outros imaginários positivos sejam representados por distâncias ao norte, e -i e os outros imaginários negativos, por distâncias ao sul.

Efetivamente os imaginários são representados desse modo, e têm sido de enorme utilidade para os matemáticos. Com os números reais somente, os matemáticos se viam limitados, por assim dizer, a uma única linha, leste-oeste. Com a introdução dos números imaginários, puderam viajar em todas as direções — leste, oeste, norte e sul. Foi como sair de uma prisão, e a chamada "matemática superior" seria impossível sem os números imaginários.

Tudo que precisamos para lidar com números imaginários é o símbolo i. Num primeiro instante, alguém poderia imaginar que seria necessário uma infinidade de símbolos para a infinidade dos imaginários. Por exemplo, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-16}$, etc. São todos imaginários, já que não existe nenhum número real de nenhum tipo que dê um número negativo de qualquer tipo como quadrado.

Para entender por que o número i é suficiente, examinemos primeiro a expressão $\sqrt{36}$, que é igual a 6. Ela pode escrever-se $\sqrt{(9)(4)}$, e se decompusermos esse radical no produto de duas raízes, assim, $(\sqrt{9})(\sqrt{4})$, podemos calculá-lo como sendo (3)(2), que é ainda igual a 6. Outros exemplos mostrariam que essa é uma regra geral, e que

$$\sqrt{ab} = (\sqrt{a})(\sqrt{b})$$

Agora então podemos escrever $\sqrt{-4}$ como $\sqrt{4(-1)}$, que, pela regra que acabamos de citar, pode escrever-se $(\sqrt{4})(\sqrt{-1})$, que se resolve em (2)(i), ou simplesmente 2i. Do mesmo modo, $\sqrt{-16}$ resolve-se em 4i, e $\sqrt{-8}$ em $\sqrt{8}$i. (O valor de $\sqrt{8}$ é um número irracional; seu valor aproximado é 2,824, portanto podemos dizer que $\sqrt{-8}$ é aproximadamente igual a 2,824i.)

Com efeito, podemos estabelecer como regra geral que

$$\sqrt{-n} \equiv \mathrm{i}\sqrt{n}$$

e assim sendo, a existência de i atende às raízes quadradas de todos os números negativos.

Agora podemos afirmar que a incógnita de qualquer equação do segundo grau tem duas soluções, desde que nos lembremos de que as soluções não são obrigatoriamente números reais, mas podem ser imaginários.

Podemos até aventurar uma questão do quarto grau, como

$$x^4 = +1$$

Transpondo o expoente, temos

$$x = \sqrt[4]{+1}$$

e precisamos encontrar valores de x tais que tomados quatro vezes e multiplicados dêem $+1$. Dois valores possíveis são $+1$ e -1, já que $(+1)(+1)(+1)(+1) = +1$, e $(-1)(-1)(-1)(-1) = +1$. Se você não está muito certo da correção deste último produto, pense nele assim: $[(-1)(-1)]\ [(-1)(-1)]$. O produto dos dois primeiros -1 é $+1$, e o dos dois outros também. Logo, a expressão se torna $(+1)(+1)$, ou $+1$.

Outros dois valores possíveis de x são $+i$ e $-i$. Consideremos primeiro $(+i)(+i)(+i)(+i)$. Decompondo em pares, $[(+i)(+i)]\ [(+i)(+i)]$, vemos que o produto do primeiro par é -1, e também o do segundo par. Portanto, a expressão se transforma em $(-1)(-1)$, que dá o resultado desejado, $+1$. Pelo mesmo raciocínio, $(-i)(-i)(-i)(-i)$ é também igual a $+1$.

Vê-se assim que na equação quártica $x^4 = +1$ há realmente quatro soluções possíveis para x, que são $+1$, -1, $+i$ e $-i$. Os números imaginários são portanto essenciais para determinar o número correto de soluções. Mas, serão suficientes?

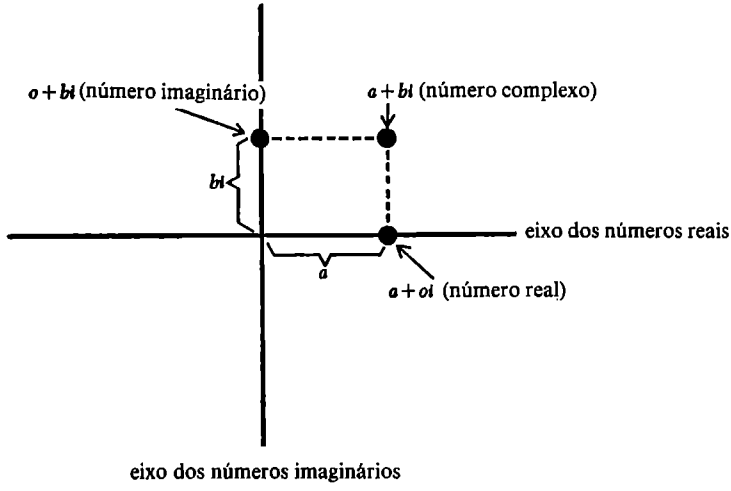
COMBINANDO O REAL E O IMAGINÁRIO

Voltemos à equação cúbica

$$x^3 = +1$$

na qual, até aqui, só encontramos uma solução para x, a saber, $+1$. Admitindo-se agora soluções imaginárias, seriam $+i$ e $-i$ a segunda e a terceira?

Vejamos a expressão $(+i)(+i)(+i)$. Os dois primeiros $+i$, multiplicados, dão -1, logo a expressão passa a $(-1)(+i)$,



que, pela lei dos sinais, dá o produto -i. Portanto, +i não é solução da equação. Do mesmo modo, verifica-se que (-i)(-i)(-i) dá o produto +i, logo -i também não é solução da equação. Onde, então, estão a segunda e a terceira soluções da equação $x^3 = +1$?

Para encontrar a resposta a essa pergunta, devemos compreender que a maioria dos números não são nem inteiramente reais nem inteiramente imaginários. São uma combinação dos dois. Usando símbolos gerais, podemos dizer que o número típico apresenta-se assim: $a + bi$, em que a é um número real e bi um número imaginário.

A esses números, em parte reais e em parte imaginários, Gauss, em 1832, deu o nome de "números complexos".

Na verdade, os números inteiramente reais ou inteiramente imaginários também podem ser considerados como exêmplos de números complexos. Suponha que na expressão $a + bi$ se faça a igual a zero. A expressão se torna $0 + bi$, ou simplesmente bi. Dando a b qualquer valor exceto zero, podemos produzir qualquer número imaginário. Portanto,

todos os números imaginários são números complexos da forma $0 + bi$.

Suponha, por outro lado, que na expressão $a + bi$ se faça b igual a zero. A expressão torna-se $a + 0i$. Mas, como qualquer número multiplicado por zero é zero, $0i$ é 0, logo a expressão pode escrever-se $a + 0$, ou simplesmente a. Dando a a qualquer valor que não zero, podemos produzir qualquer número real. Portanto, todos os números reais são números complexos da forma $a + 0i$.

As soluções da equação $x^2 = +1$ podem ser dadas em forma de números complexos. São $1 + 0i$ e $-1 + 0i$. No caso de $x^2 = -1$, as duas soluções, em forma de números complexos, são $0 + i$ e $0 - i$.

Mas os números complexos que constituem soluções para x numa equação particular não envolvem necessariamente zeros. Uma solução pode consistir de um número complexo, $a + bi$, em que nem a nem b é zero. E, por sinal, é o que acontece na equação cúbica $x^3 = +1$. A solução a que eu vim chamando $+1$ pode ser escrita em forma complexa como $1 + 0i$. As outras duas soluções não envolvem zeros. São $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Qualquer dessas expressões elevada ao cubo dá -1.*

É através do sistema dos números complexos que é possível demonstrar que em qualquer equação x tem um número de soluções exatamente igual ao grau da equação.

Assentado isso, voltaremos à equação quadrática, e, por algum tempo pelo menos, podemos esquecer as equações de grau maior que dois.

---

* Em relação a isso peço-lhe que aceite a minha palavra, pois neste livro não disponho de espaço para aprofundar mais o assunto dos imaginários. Entretanto, em *O reino dos números*, onde trato dos imaginários mais detalhadamente, você pode encontrar o cálculo dos cubos dessas expressões no final do Capítulo 9.

10

Fatorando a Equação Quadrática

ATACANDO O SEGUNDO GRAU

Podemos tornar a equação do segundo grau um pouco mais complicada acrescentando outras operações, como em

$$3x^2 - 8 = 100$$

Já expliquei que uma multiplicação é tratada como se estivesse entre parênteses. O mesmo, com maior razão, aplica-se à potenciação, de modo que, quando há uma multiplicação presente, a potência é encerrada num parêntese interno. Se todos os parênteses fossem indicados, a equação se escreveria

$$[3(x^2)] - 8 = 100$$

Como sabemos, devemos transpor primeiro o 8, depois o 3, depois o 2, trabalhando de fora para dentro as camadas de parênteses. Os resultados são:

$$3x^2 = 100 + 8 \qquad \text{(ou 108)}$$

$$x^2 = \frac{108}{3} \qquad \text{(ou 36)}$$

$$x = \sqrt{36} \qquad \text{(ou } \pm 6\text{)}$$

que são as soluções.

Quando os parênteses se dipõem num arranjo diferente, a ordem das transposições muda correspondentemente. Na equação

$$(x + 3)^2 - 7 = 42$$

que poderia ser escrita, de forma completa, como

$$[(x + 3)^2] - 7 = 42$$

transpõe-se primeiro o 7, mas a outra operação de soma está dentro de um parêntese interno e não pode ser trabalhada antes de cuidarmos do expoente dentro do parêntese externo. Logo, a ordem de transposição é o 7, depois o 2, depois o 3, assim:

$$(x + 3)^2 = 42 + 7 \qquad \text{(ou 49)}$$

$$x + 3 = \sqrt{49} \qquad \text{(ou } +7 \text{ ou } -7\text{)}$$

Portanto, temos

$$x = 7 - 3 \qquad \text{(ou 4)}$$

que é uma das soluções, ou

$$x = -7 - 3 \qquad \text{(ou } -10\text{)}$$

que é outra solução.

Até aqui, as equações do 2º grau se parecem com simples equações lineares, apenas com a complicação adicional de haver três conjuntos de operações com que se preocupar em vez de dois, e de haver duas soluções em vez de uma.

As duas soluções, é claro, são perfeitamente válidas. Tomando como exemplo o segundo caso, um e outro valor numérico determinado para x podem ser levados à equação

$$(x + 3)^2 - 7 = 42$$

Levando 4, temos:

$$(4 + 3)^2 - 7 = 42$$

$$7^2 - 7 = 42$$

$$49 - 7 = 42$$

que está certo.
Levando -10, temos:

$$(-10 + 3)^2 - 7 = 42$$

$$-7^2 - 7 = 42$$

$$49 - 7 = 42$$

que também está certo.

Mas a equação do 2º grau abrange algo mais do que vimos até aqui. Lembre-se que uma equação do 2º grau também pode ter um termo contendo x elevado à primeira potência, assim:

$$x^2 + 5x = 6$$

Uma equação como essa pode apresentar-se muito naturalmente a partir de um problema como o seguinte: Seja um objeto retangular cuja largura é 5 metros maior que o comprimento, e cuja área é 6 metros quadrados. Pede-se o comprimento e a largura do retângulo.

Para começar, chamemos o comprimento de x. A largura, sendo 5 metros maior que o comprimento, será, evidentemente, $x + 5$. Como a área do retângulo se obtém multiplicando o

comprimento pela largura, $x(x + 5)$ é essa área, dada como 6 metros quadrados.

Pela regra referente à eliminação de parênteses, que vimos atrás neste livro, sabemos que $x(x + 5)$ pode escrever-se $(x)(x) + (x)(5)$, que vem a ser $x^2 + 5x$, e isso nos leva à nossa equação $x^2 + 5x = 6$.

Aparentemente, teríamos uma solução para x transpondo como a seguir:

$$x^2 = 6 - 5x$$

$$x = \pm\sqrt{6 - 5x}$$

mas isso não nos leva a parte alguma, pois temos x igual a uma expressão que contém um x, e não podemos calculá-la. Na verdade, o que fizemos foi pular da frigideira para o fogo, pois trocamos uma potência por uma raiz, e raízes são mais difíceis de lidar.

DO SEGUNDO GRAU PARA O PRIMEIRO

Uma maneira possível de sair do impasse está no processo da fatoração. Fatoração, como você deve estar lembrado, é o método de decompor uma expressão em duas outras que, multiplicadas, recompõem a expressão primitiva. Assim, 69 pode ser fatorado em (23)(3), e $5x - 15$ pode ser fatorado em $(5)(x - 3)$. Geralmente, a fatoração converte uma expressão complicada em duas ou mais mais simples, e há sempre uma boa possibilidade de podermos manejar as mais simples onde a primitiva, mais complicada, não se deixava manejar.

Antes de chegarmos a saber como fatorar uma expressão, temos de formar certas idéias sobre o processo da multiplicação. Se soubermos o tipo de multiplicação que dá origem a um tipo particular de expressão, saberemos melhor como decompor essa expressão.

Eu já dei um exemplo de multiplicação que dá origem a um termo do 2º grau, quando falei de $x(x + 5)$. Esse era um caso que não criava problemas, pois sabemos que numa multiplicação desse tipo o termo fora do parêntese se multiplica por cada um dos termos dentro dele, e se somam todos os produtos. Mas seja uma expressão como $(x + 7)(x + 4)$. Como multiplicar?

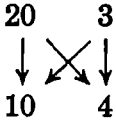
Parece lógico avançar um passo. Tome-se cada termo dentro de um parêntese e multiplique-se por cada termo do outro, depois somem-se todos os produtos. Será que isso daria a resposta certa?

Para verificar, voltemos aos simples símbolos numéricos e vejamos o que eles nos dizem. Suponha que queremos multiplicar 23 por 14. Na verdade, 23 é 20 + 3 e 14 é 10 + 4, logo (23)(14) também se pode escrever (20 + 3)(10 + 4).

Experimentemos a multiplicação. Primeiro, multiplicamos 20 por cada termo do outro par: (20)(10) é 200, e (20)(4) é 80. Fazemos em seguida a mesma coisa com o 3, (3)(10) é 30 e (3)(4) é 12. Se somarmos os quatro "produtos parciais", temos 200 + 80 + 30 + 12, ou 322. Multiplique 23 por 14 do seu modo e veja se não é essa a resposta que obtém.

Você poderá achar que esse não é o modo como *você* multiplica, mas na verdade é. Você aprendeu uma regra mecânica expedita de multiplicar um número por outro, mas se a examinar atentamente, verá que o que você faz é exatamente o que eu acabei de fazer.

Podemos escrever a multiplicação de 23 por 14 assim:



com as setas indicando as várias multiplicações envolvidas. Aliás, há quem acredite que foram as setas cruzadas no centro que deram origem ao sinal × de multiplicação.

Ora, o mesmo sistema funciona quando símbolos numéricos são substituídos por símbolos literais. Na expressão $(x + 7)(x + 4)$, podemos armar a multiplicação assim:

$$\begin{array}{c} x + 7 \\ \downarrow\!\times\!\downarrow \\ x + 4 \end{array}$$

As quatro multiplicações são: $(x)(x) = x^2$; $(x)(4) = 4x$; $(7)(x) = 7x$; e $(7)(4) = 28$.

Agora, como somar esses quatro produtos parciais? Não adianta querer somar um termo contendo x^2 com um que contém x ou com um que não contém nenhum símbolo literal.

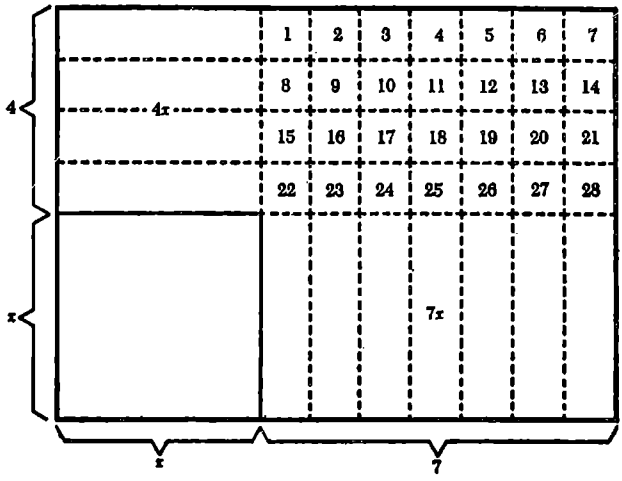
O x^2 tem de permanecer x^2 e, pelo mesmo raciocínio, o 28 tem de permanecer 28. No entanto, os dois submúltiplos restantes contêm x. São $4x$ e $7x$, e pelo menos podem ser somados, dando $11x$. Então temos finalmente:

$$(x + 7)(x + 4) \equiv x^2 + 11x + 28$$

Quer dizer que, topando a expressão $x^2 + 11x + 28$, você pode prontamente substituí-la por $(x + 7)(x + 4)$. A expressão do 2.º grau estaria fatorada, dessa forma, em duas expressões, cada uma delas, em si mesma, do primeiro grau.

Tudo bem, você deve estar pensando: mas como se faz isso? Como é possível, só de olhar a expressão $x^2 + 11x + 28$, dizer que ela pode ser fatorada em $(x + 7)(x + 4)$? Neste caso, só sabemos disso porque fizemos antes a multiplicação, e isso é como olhar as respostas no fim do livro.

Bem, você tem razão. Fatorar é um negócio espinhoso e às vezes trabalhoso. E o mesmo se dá na própria aritmética. Você sabe que 63 pode ser fatorado em (7)(9), mas como sabe disso? Só porque multiplicou 7 por 9 tantas vezes na vida que $63 = (7)(9)$ é parte do seu cabedal geral de conhecimentos.



$(x+4)(x+7)=x^2+7x+4x+28$

Mas você é capaz de fatorar o número 24.577.761?

A maioria das pessoas não é capaz de fazê-lo só olhando, como não o é de fatorar uma expressão algébrica polinômia. Contudo, existem regras de fatoração. Por exemplo, a soma dos dígitos de 24.577.761 é 39, que é divisível por 3. Quer dizer que 3 é um fator de 24.577.761, que portanto pode ser fatorado em (3)(8.192.587).

Também existem regras que podem orientá-lo na fatoração de expressões algébricas.

Por exemplo, suponha que multipliquemos duas expressões, usando símbolos literais em vez de símbolos numéricos. Vamos multiplicar $x + a$ por $x + b$. A multiplicação teria este aspecto:

$$\begin{array}{c} x + a \\ \downarrow \times \downarrow \\ x + b \end{array}$$

Os quatro produtos parciais são x^2, ax, bx e ab. ax e bx podem ser combinados em $(a + b)x$, portanto podemos dizer o seguinte:

$$(x + a)(x + b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$$

Isso nos dá um modelo. O coeficiente do termo em x é $a + b$, e o termo sem x é ab. Agora podemos combinar expressões sem mesmo nos dar ao trabalho de multiplicá-las. Dada a multiplicação $(x + 17)(x + 5)$, temos imediatamente que o coeficiente do termo em x é $17 + 5$, ou 22, e que o termo sem x é (17)(5) ou 85. Portanto, o produto é $x^2 + 22x + 85$.

Para fatorar um polinômio, é só seguir esse caminho em marcha à ré: procurar dois números que somados dêem o coeficiente do termo em x, e multiplicados, o termo numérico.

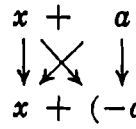
Seja o polinômio $x^2 + 7x + 12$. Considerando 7 e 12, você pode concluir que os números procurados são 3 e 4, pois $3 + 4$ é 7, e (3)(4) é 12. O polinômio pode ser fatorado em $(x + 3)(x + 4)$. Multiplique esses fatores e veja se não obtém o polinômio.

Ou seja a expressão $x^2 - 2x - 15$. Se você pensar um pouco, poderá ocorrer-lhe que $-5 + 3$ é igual a -2, enquanto (-5)(3) é -15. Então, -5 e 3 são os números procurados, e o polinômio pode ser fatorado em $(x - 5)$ e $(x + 3)$.

É claro que para isso dar certo o primeiro termo tem de ser x^2, e não $3x^2$ ou $5x^2$ ou coisa assim. Se o coeficiente de x^2 for outro que não 1, a fatoração ainda pode ser efetuada, mas torna-se um pouquinho mais complicada.

Às vezes é possível fatorar uma expressão em que falta o termo em x, como, por exemplo, $x^2 - 16$.

Para ver como se faz isso, vamos multiplicar novamente símbolos gerais, mas com uma pequena diferença. Desta vez vamos multiplicar $x + a$ por $x - a$. Armaremos o produto substituindo $x - a$ por $x + (-a)$, assim:



Os quatro produtos parciais são x^2, ax, $-ax$ e $-a^2$. A soma de ax e $-ax$ é zero, ficando portanto

$$(x + a)(x - a) \equiv x^2 - a^2$$

Assim sendo, uma expressão como $x^2 - 16$ é facil de fatorar. Pode escrever-se $x^2 - 4^2$, já que 4^2 é igual a 16, e pelo modelo da equação geral que acabei de dar, vê-se que x^2-4^2 deve fatorar-se em $(x + 4)(x - 4)$. Multiplique esses fatores e veja se não obtém x^2 - 16.

As regras de fatoração não acabam aqui. Por exemplo, você é capaz de imaginar o que é preciso fazer quando se tem um coeficiente no termo em x^2? Como fatorar a expressão $2x^2 + 13x + 15$? Mas isso fica por sua conta. No que toca à fatoração, já fui até onde é preciso para os objetivos deste livro.

AS UTILIDADES DA FATORAÇÃO

Você deve estar-se perguntando para que lhe serve fatorar. De que modo isso o ajuda a manipular equações?

A melhor maneira de responder a isso é dar um exemplo de como a fatoração transforma uma equação aparentemente complicada numa simples. Comecemos pela seguinte equação:

$$\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 25} = 15$$

Uma maneira de operar seria transpor o denominador

$$x^2 + x - 20 = 15(x^2 - 25)$$

eliminar os parênteses

$$x^2 + x - 20 = 15x^2 - 375$$

e, por meio das transposições devidas, levar todos os símbolos literais para a esquerda e todos os símbolos numéricos para a direita:

$$x^2 - 15x^2 + x = -375 + 20$$

ou

$$-14x^2 + x = -355$$

Podemos eliminar o sinal negativo no princípio multiplicando cada lado da equação por -1, obtendo

$$14x^2 - x = 355$$

Podemos até experimentar fatorar o lado esquerdo da equação de modo a transformá-la em

$$x\,(14x - 1) = 355$$

mas e agora? Estamos encalacrados, a menos que procuremos, por tentativas repetidas, um valor de x que satisfaça a equação.

Agora voltemos à equação primitiva

$$\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 25} = 15$$

e experimentemos fatorar antes de fazer qualquer outra coisa. Examinemos o numerador da fração, $x^2 + x - 20$. O coeficiente do termo em x é $+1$ (como sabemos, o coeficiente 1 é sempre omitido, mas não se esqueça de que ainda assim ele existe, e que eu lhe preveni mais atrás que é preciso tê-lo sempre

em mente), e o termo numérico é -20. Ora, acontece que a soma de $+5$ e -4 é $+1$, e o seu produto é -20. logo, o numerador pode ser fatorado em $(x + 5)(x - 4)$.

Quanto ao denominador, $x^2 - 25$, pode escrever-se $x^2 - 5^2$ e portanto fatorar-se em $(x + 5)(x - 5)$. Agora a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{(x + 5)(x - 4)}{(x + 5)(x - 5)} = 15$$

Mas o fator $x + 5$ aparece tanto no numerador como no denominador e portanto pode ser cancelado.

A equação se torna

$$\frac{x - 4}{x - 5} = 15$$

e de repente tudo ficou muito simples. Transpõe-se o denominador e prossegue-se segundo as regras usuais:

$$x - 4 = 15(x - 5)$$

$$x - 4 = 15x - 75$$

$$x - 15x = -75 + 4$$

$$-14x = -71$$

$$14x = 71$$

$$x = \frac{71}{14}$$

que é a solução.

Há um outro caso em que a fatoração pode ser de utilidade. Seja a equação

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Como -3 e -6 somados dão -9 e multiplicados dão $+18$, podemos fatorar a expressão e escrever a equação assim:

$$(x - 3)(x - 6) = 0$$

Agora podemos valer-nos de um fato aritmético. Sempre que multiplicamos dois fatores e encontramos o resultado 0, um ou outro fator tem de ser igual a zero. Se nenhum dos fatores for zero, o produto nunca poderá ser zero.

Suponhamos, então, que $x - 3$ é igual a 0. Por transposição, temos de imediato que se

$$x - 3 = 0$$

então

$$x = 3$$

Mas é possível que o outro fator é que seja 0; isto é, que

$$x - 6 = 0$$

e

$$x = 6$$

Qual, então, é a resposta certa? x é igual a 3 ou a 6? Não há por que supor que um fator tenha mais possibilidade de ser 0 do que o outro, logo as duas respostas são igualmente válidas. Isso não nos deve surpreender, já que a equação é do 2º grau e deve mesmo ter duas soluções. Podemos verificar (só para ter certeza) experimentando as duas soluções na equação primitiva, $x^2 - 9x + 18 = 0$.

Experimentando o 3, a equação se torna $3^2 - (9)(3) + 18$, ou $9 - 27 + 18$, que realmente dá 0, logo 3 é uma solução correta.

Substituindo em seguida x por 6, a equação se torna $6^2 - (9)(6) + 18$, que é $36 - 54 + 18$, que também dá 0, logo 6 é outra solução correta.

É claro que só nos podemos valer desse artifício quando podemos fazer o produto de dois fatores igual a zero, e para isso devemos começar conseguindo um zero no lado direito da equação.

Por exemplo, antes, neste capítulo, eu falei de um objeto retangular de largura 5 metros maior que o comprimento e área de 6 metros quadrados. A equação envolvida era:

$$x^2 + 5x = 6$$

Àquela altura, nós não sabíamos o que fazer com a equação, mas agora suponha que transponhamos o 6 para o lado esquerdo de modo a deixar um zero muito desejável no direito. A equação ficaria:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Como os números 6 e -1 somados dão 5 e multiplicados dão -6, a expressão da esquerda pode ser fatorada e a equação escrita

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

e as nossas duas soluções para x são -6 e 1, obtidas fazendo cada fator igual a zero.

O significado da solução 1 é claro. O objeto retangular tem o comprimento de 1 metro. A altura, que é 5 metros maior que o comprimento, é portanto 6 metros, e a área é (1)(6) ou 6 metros quadrados, como especificado no problema.

Mas, e a solução -6? Poderemos dizer que o comprimento é -6 metros, e a largura, que é 5 metros maior, é -1 metro? A área seria (-6)(-1) ou ainda 6 metros quadrados, mas qual o significado de um comprimento negativo? Os gregos desconsideravam soluções negativas para equações como essa, certos de que não havia sentido num comprimento negativo.

No entanto, podemos arranjar um sentido admitindo que medições feitas numa direção sejam positivas e na direção oposta, negativas. Nesse caso, as duas soluções aplicam-se ao mesmo objeto colocado de dois modos diferentes.

11

Resolvendo em Geral

O PRIMEIRO GRAU

Resolver equações quadráticas por fatoração não chega a ser muito satisfatório. Afinal, há equações não muito fáceis de fatorar. Não haverá um meio de resolver *qualquer* equação quadrática, sem se preocupar com fatores?

Para chegar aonde queremos, vamos considerar não equações específicas, mas equações gerais. Por exemplo, aqui temos a "equação geral do primeiro grau", uma equação que usa parâmetros em vez de números, portanto pode representar qualquer equação desse tipo:

$$ax + b = 0$$

Dando-se valores particulares a a e b, qualquer equação particular pode ser representada por essa expressão. Se fizermos a igual a 2 e b igual a 3, a equação fica sendo $2x + 3 = 0$. O sinal mais da equação geral não exclui subtração, pois se fizermos a igual a 2 e b igual a -3, a equação se torna $2x + (-3) = 0$, ou $2x - 3 = 0$

Mesmo uma equação como $9(x + 4) = 25$ pode ser expressa na forma geral. Eliminando os parênteses e transpondo, temos

$$9(x + 4) = 25$$

$$9x + 36 = 25$$

$$9x + 36 - 25 = 0$$

$$9x + 11 = 0$$

Portanto, a equação $9(x + 4) = 25$ pode ser posta na forma geral $ax + b = 0$, com a igual a 9 e b igual a 11.

Resolver a equação geral do primeiro grau é fácil:

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Portanto, dada qualquer equação do primeiro grau, basta dispô-la na forma geral e imediatamente obtemos o valor de x. Não há mais que preocupar-se em transpor, simplificar ou fatorar. Basta-nos conhecer os coeficientes, os valores de a e b.

Assim, na equação $17x - 8 = 0$, o valor de x é $\frac{8}{17}$ e está acabado. Se fosse $17x - 8 = 0$, a resposta seria $-\frac{8}{17}$.

Como se vê, o valor de x na equação geral do primeiro grau pode ser qualquer inteiro ou fração imaginável, se a a e b se atribuírem os valores inteiros correspondentes. Se inventarmos uma fração ao acaso, digamos $\frac{17.541}{222.222}$, será esse o valor de x na equação $222.222x - 17.541 = 0$.

Podemos expressá-lo de outro modo, dizendo que na equação geral $ax + b = 0$, em que a e b sejam inteiros quaisquer, positivos ou negativos, o valor de x pode ser qualquer número racional. Nunca será um número irracional, pois o resultado é inevitavelmente uma fração definida.

Você poderá estar se perguntando o que acontece se os valores de a e b não forem inteiros. E se forem fracionários? Nesse caso, as frações poderão sempre converter-se em inteiros. Assim, na equação

$$\left(\frac{15}{22}\right)x + \frac{3}{5} = 0$$

podemos multiplicar os dois lados da equação pelo produto dos denominadores das duas frações: (22)(5) ou 110. Teremos então

$$\left[\left(\frac{15}{22}\right)x + \frac{3}{5}\right][110] = (0)(110)$$

Eliminando os parênteses da maneira habitual e lembrando que (0)(110) (ou zero vezes qualquer número, aliás) é 0, temos

$$\left[\left(\frac{15}{22}\right)x\right][110] + \left(\frac{3}{5}\right)(110) = 0$$

$$\left(\frac{1650}{22}\right)x + \frac{330}{5} = 0$$

$$75x + 66 = 0$$

Assim, a equação de coeficientes fracionários converteu-se em uma de coeficientes inteiros, e a solução para x é $-\frac{66}{75}$. Qualquer equação de qualquer grau pode ser convertida de coeficientes fracionários para coeficientes inteiros, portanto é suficiente considerarmos este último caso.

Suponhamos que a e b não fossem números racionais (isto é, frações) e sim irracionais, como na equação $\sqrt{2}x - \sqrt{3} = 0$.

Nesse caso o valor de x seria $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, e seria ele próprio irracional. Entretanto, se considerarmos somente equações polinômias gerais com coeficientes racionais, podemos dizer que o valor de x numa equação do primeiro grau pode ser qualquer número racional, e não pode ser irracional.

O SEGUNDO GRAU

Visto tudo isso, que é bastante simples, estamos em condições de perguntar como proceder com a equação do segundo grau. Como encontrar o valor de x simplesmente conhecendo os coeficientes e os dispondo numa fórmula estabelecida?

A equação geral pode escrever-se $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c podem ser quaisquer inteiros ou, aliás, quaisquer números racionais. Os símbolos b e c podem inclusive ser iguais a zero. Se b for zero, a equação torna-se $ax^2 + c = 0$; se c for zero, a equação torna-se $ax^2 + bx = 0$; e se b e c forem ambos zero, a equação torna-se $ax^2 = 0$. Todas essas formas são ainda equações do segundo grau.

Contudo, a não pode ser nulo, pois isso converteria a equação na forma $bx + c = 0$. Numa equação geral de qualquer grau, o coeficiente do termo de maior potência não pode ser nulo, ou a equação se reduz em grau. Na equação do primeiro grau $ax + b = 0$, b pode ser nulo, mas a não. Neste último caso, a equação se tornaria simplesmente $b = 0$, que já não é uma equação do primeiro grau.

A dificuldade de resolver a equação geral do segundo grau reside no fato de ela não poder ser fatorada. Então, o que temos a fazer é convertê-la numa forma que possa ser fatorada.

Primeiro, as regras de fatoração que eu dei no capítulo anterior sempre diziam respeito a uma equação quadrática contendo um simples x^2. Vamos ver se, para começar, podemos conseguir isso. Para tanto, vamos dividir os dois lados da equação por a, assim:

$$\frac{(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{0}{a}$$

Quanto ao lado esquerdo da equação, sabemos da aritmética que $\frac{(8 + 4)}{4}$ pode escrever-se $\frac{8}{4} + \frac{4}{4}$. (Experimente e veja se a resposta não é 3 em ambos os casos, e se, em outros casos do mesmo gênero, o resultado obtido não é o mesmo, de um ou de outro modo.)

Portanto, podemos escrever a equação assim:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

Na fração $\frac{ax^2}{a}$, podemos cancelar os a. A fração $\frac{bx}{a}$ pode escrever-se $(\frac{b}{a})x$, e quanto ao lado direito da equação, $\frac{0}{a}$, evidentemente, é 0. Agora a equação pode ser escrita

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Nessa forma da equação do segundo grau temos o x^2 simples, mas ainda não podemos fatorá-la. Precisamos duas quantidades que somadas dêem o coeficiente do termo em x (que é $\frac{b}{a}$) e multiplicados dêem o termo numérico (que é $\frac{c}{a}$), de acordo com as regras dadas no capítulo anterior. Entretanto, não há maneira óbvia de fazer isso.

Então, por que não remover o termo $\frac{c}{a}$ e substituí-lo por algo mais fácil de manejar? Remover $\frac{c}{a}$ é fácil. Basta transpor, assim:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

A questão agora é: substituir por o quê? Bem, a maneira mais simples de encontrar dois valores que somem certa quantidade é tomar a metade dessa quantidade e somá-la a si mesma. Ou seja, 4 é igual a 2 + 2, 76 a 38 + 38, e assim por diante. A metade de $\frac{b}{a}$ é $(\frac{1}{2})(\frac{b}{a})$ ou $\frac{b}{2a}$, logo $\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}$ é $\frac{b}{a}$.

Temos assim dois valores, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{b}{2a}$, que somados dão o coeficiente do termo em x. Qual é o produto desses mesmos dois valores? A resposta é:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2}$$

Temos que somar isso ao lado esquerdo da equação, e para fazê-lo temos de somá-lo também ao lado direito, de modo que a equação se transforma em

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Agora, por um momento, concentremo-nos no lado direito da equação. Suponha que multipliquemos a fração $-\frac{c}{a}$, em cima e embaixo, pela quantidade $4a$. Temos assim $-\frac{4ac}{4a^2}$, o que não muda o valor da fração e nos dá o mesmo denominador da segunda fração do lado direito. Agora o lado direito da equação ficou sendo

$$-\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou

$$\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

Portanto, a nossa equação geral pode escrever-se

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

Agora é tempo de examinarmos o lado esquerdo da equação. Nós o arranjamos de modo a ter dois valores, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{b}{2a}$, que somados dão $\frac{b}{a}$, o coeficiente do termo em x, e multiplicados dão $\frac{b^2}{4a^2}$, que representa o termo sem incógnita. Isso quer dizer, de acordo com as regras do capítulo anterior, que o lado esquerdo da equação pode ser fatorado em $(x + \frac{b}{2a})(x + \frac{b}{2a})$, ou $(x + \frac{b}{2a})^2$. Agora a equação se transforma em

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

Podemos transpor o expoente, o que nos dá

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}}$$

Como se vê, formar a raiz quadrada torna necessário introduzir um sinal "mais ou menos".

Quanto ao lado direito, $\pm\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{4a^2}$ pode escrever-se

$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$. A raiz quadrada do numerador não pode ser calculada, mas a do denominador sim, já que $(2a)(2a)$ é igual a $4a^2$. Logo, $\sqrt{4a^2}$ é igual a $2a$.

Agora a equação pode escrever-se

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por transposição, temos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como as duas frações têm o mesmo denominador, podemos combiná-las, e a equação toma finalmente a forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é a solução geral para x em qualquer equação do segundo grau, expressa em termos dos coeficientes submetidos a várias operações algébricas. Para resolver qualquer equação quadrática, basta dispô-la em sua forma geral e levar os coeficientes à fórmula de x acima.

Por exemplo, na equação $17x^2 - 2x - 5 = 0$, $a = 17$, $b = -2$ e $c = -5$. Levemos esses valores numéricos à solução geral e teremos

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)(-2) - (4)(17)(-5)}}{(2)(17)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 340}}{34}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{344}}{34} = \frac{2 \pm \sqrt{(4)(86)}}{34} = \frac{2 \pm 2\sqrt{86}}{34}$$

$$x = \frac{(2)(1 \pm \sqrt{86})}{(2)(17)} = \frac{1 \pm \sqrt{86}}{17}$$

Note em primeiro lugar que há duas respostas, já que temos um sinal "mais ou menos". É uma resposta quando aplicado o mais, e outra quando se aplica o menos:

$$x = \frac{(1 + \sqrt{86})}{17} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{(1 - \sqrt{86})}{17}$$

Note também que $\sqrt{86}$ é um número irracional. Você vê então que em equações do segundo grau é possível obter para x valores irracionais, mesmo os coeficientes da equação sendo racionais. Em problemas práticos que envolvam soluções como essa, pode-se achar uma resposta aproximada tomando o valor do número irracional com tantas casas decimais quantas sejam necessárias. (Felizmente, esses valores podem ser calculados, ou simplesmente encontrados em tabelas).

O valor de $\sqrt{86}$, por exemplo, é aproximadamente 9,32576. Portanto, as duas respostas são aproximadamente 0,6074 e $-0,4309$.

É claro que também podemos ter soluções racionais para uma equação quadrática.

Na equação $x^2 + 5x + 6 = 0$, a é igual a 1, b igual a 5 e c igual a 6. Levando esses valores à fórmula geral, temos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)(5) - (4)(1)(6)}}{(2)(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Aqui, como se vê, a raiz quadrada desapareceu, pois $\sqrt{1}$ é igual a 1. As duas soluções são portanto:

$$x = \frac{(-5 + 1)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

ou

$$x = \frac{(-5 - 1)}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

que, aliás, poderíamos obter diretamente por fatoração.

GRAUS MAIORES

As soluções gerais para as equações do primeiro e segundo graus já eram conhecidas antes da ascensão da álgebra no século XVI. Por isso, a essa altura os matemáticos passaram a interessar-se na possibilidade de uma solução para a equação geral do terceiro grau em termos de manipulações algébricas dos coeficientes.

Não entrarei na natureza da solução geral, mas ela foi descoberta, e o descobrimento está ligado a um episódio conhecido.

Foi em 1530 que um matemático italiano chamado Nicolo Fontana conseguiu finalmente encontrar a solução geral. (Fontana tinha um defeito de fala que lhe valeu o apelido de Tartaglia — "gago" em italiano. O apelido se vulgarizou de tal modo que até hoje ele é conhecido quase unicamente como Nicolo Tartaglia.)

Naquele tempo, não era raro que os matemáticos guardassem segredo sobre as suas descobertas, mais ou menos como hoje as indústrias às vezes mantém secretos os seus métodos de produção. Tartaglia ganhou grande fama por ser capaz de resolver problemas que envolviam equações cúbicas e que ninguém mais sabia resolver. Sem dúvida ele se comprazia na sua condição de milagreiro matemático.

Outros matemáticos, naturalmente, viviam insistindo com Tartaglia para que revelasse o seu segredo. Por fim, Tartaglia cedeu às pressões e, em 1545, revelou o método a Geronimo Cardano, o matemático que introduziu os números negativos e os imaginários. Ele exigiu de Cardano o juramento de manter o assunto em sigilo.

Mas Cardano, de posse da solução, prontamente publicou-a e a deu como sua. O pobre Tartaglia teve de travar uma longa luta para assegurar-se os méritos da descoberta, e desde então os matemáticos discutem a quem se deve creditá-la.

Hoje em dia, como se sabe, considera-se imoral que um cientista guarde em segredo uma descoberta. Achamos que ele tem o dever de publicá-la e de comunicá-la a todos os colegas cientistas; só assim a ciência e a cultura podem progredir. Aliás, o mundo científico confere a paternidade de qualquer descobrimento, fato ou fenômeno à pessoa que primeiro o divulgar. Se alguém mais fez a mesma descoberta antes e a manteve em segredo, perde o direito às honras.

Segundo esse modo de ver, Tartaglia estava errado em manter a solução em segredo, e Cardano estava certo em publicá-la, e de justiça merece o crédito. Contudo, no século XVI não era esse o ponto de vista comum, e deve-se levar em conta o fato de que na época não se considerava imoral manter segredos científicos.

Ademais, mesmo estando certo, como matemático, em publicar a solução, Cardano estava errado, como ser humano, em anunciá-la como de sua autoria e não dar a Tartaglia o mérito de tê-la ideado primeiro. A verdade é que Cardano, a par

de grande matemático, foi também um grande patife em muitos aspectos.

Mais ou menos na mesma ocasião, Cardano tentou encontrar solução para a equação geral do quarto grau. Não teve êxito, e passou o problema para um jovem chamado Ludovico Ferrari, que era seu aluno. Ferrari resolveu-o prontamente.

Depois disso, os matemáticos acharam que seria apenas questão de paciência e perseverança encontrar a solução para a equação geral de qualquer grau, mas quando atacaram a do quinto grau, viram-se em apuros. Nada parecia funcionar. Por quase trezentos anos tentaram tudo que podiam imaginar, e por quase trezentos anos falharam. O próprio Euler (o primeiro a usar o i para representar a raiz quadrada de -1), um dos maiores matemáticos de todos os tempos, quebrou a cabeça com o quinto grau e fracassou.

Em 1824, um jovem matemático norueguês, Niels Henrik Abel (então com apenas 22 anos, e que viria a morrer apenas cinco anos depois), demonstrou que a equação geral do quinto grau era insolúvel: não podia ser resolvida em termos de seus coeficientes por meio de operações algébricas. Havia outros meios, mas não por álgebra.

Ficou provado que nenhuma equação de grau maior que o quarto pode ser resolvida desse modo. Em 1846, um jovem e brilhante matemático francês, Evariste Galois, tragicamente morto num duelo com apenas 21 anos de idade, criou uma matemática nova e mais avançada, a "teoria dos grupos", capaz de manobrar equações de grau superior, mas isso, é claro, não é para este livro.

ALÉM DOS GRAUS

Se tomarmos uma equação geral de qualquer grau, qualquer valor que sirva de solução para x é chamado um "número algébrico"

Por exemplo, já vimos que no caso da equação geral do

primeiro grau, qualquer número racional, positivo ou negativo, pode servir de solução. Mesmo zero pode ser solução para x, na equação $ax=0$. Portanto, todos os números racionais são números algébricos.

No caso da equação geral do segundo grau, qualquer número racional pode ser solução, bem como certos números irracionais. Assim, a raiz quadrada de qualquer número racional pode ser solução.

No caso da equação geral do terceiro grau, números racionais, raízes quadradas e raízes cúbicas podem ser soluções. O quarto grau acrescenta raízes quartas à lista, o quinto grau raízes quintas, e assim por diante.

Enfim, o rol dos números algébricos inclui todos os números racionais, e todos os irracionais que sejam raízes (de qualquer grau) de números racionais.

Será que isso abrange todos os números? Haverá números irracionais que não sejam raízes, desse ou daquele grau, de algum número racional?

Em 1844, um matemático francês chamado Joseph Liouville demonstrou a existência de tais irracionais, mas não foi capaz de demonstrar que algum número particular fosse um exemplo. Só em 1873 outro francês, Charles Hermite, conseguiu a façanha.

Demonstrou que uma certa quantidade, de grande aplicação nas matemáticas superiores e geralmente simbolizada por e, era um número irracional que não era raiz, em nenhum grau, de nenhum número racional. (Hermite também resolveu a equação geral do quinto grau por métodos não-algébricos.)

O valor aproximado de e é 2,71828182845904523536028-74... Modernos computadores calcularam-lhe o valor até 60.000 casas decimais. A quantidade e foi o primeiro número não-algébrico a ser descoberto, e é um exemplo de "número transcendente" (do latim, significando "que sobe além", por-

que esses números existem além da longa lista dos números algébricos).*

Outra quantidade interessante é a que os matemáticos usualmente representam por π, que é a letra grega "pi". Representa a razão da circunferência de círculo para o diâmetro. Multiplicando por π o comprimento do diâmetro de um círculo, encontra-se o comprimento da circunferência. O valor aproximado de π é 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510... e modernos computadores já lhe calcularam o valor até dez mil decimais.

Em 1882, o matemático alemão Ferdinand Lindemann, empregando métodos de Hermite, provou ser π transcendente. Hoje se sabe que quase todos os logaritmos são transcendentes; que quase todas as "funções trigonométricas", como por exemplo o seno de um ângulo (matéria do ramo da matemática chamado "trigonometria"), são transcendentes; e que todo número elevado a uma potência irracional, como por exemplo $2^{\sqrt{2}}$, é transcendente.

Aliás, existem muito mais números transcendentes do que números algébricos. Se bem que existam mais números algébricos do que é possível contar, ainda assim é verdade que quase todos os números são transcendentes.**

---

* A importância de *e* está no fato de ser ele essencial ao cálculo de dois conjuntos de valores de grande importância em computações e relações matemáticas. São os logaritmos (ver *No Mundo dos Números*) e as razões entre os lados do triângulo retângulo ("funções trigonométricas"). Quase todos os logaritmos e funções trigonométricas são irracionais, e os que o são, são também transcendentes.

** Um modo de expressar isso é que o conjunto de todos os números algébricos, conquanto infinito, pode ser representado pelo menor número transfinito. O conjunto de todos os números transcendentes também é infinito, mas pode ser representado por um transfinito maior. Se o assunto lhe desperta a curiosidade, eu trato dele com algum detalhe no último capítulo de *No Mundo dos Números*.

12

Duas de Uma Vez

EQUAÇÕES SEM SOLUÇÃO

Até aqui, não nos ocupamos de nenhum problema ou equação em que houvesse mais de uma quantidade desconhecida. No entanto, pode haver mais de uma incógnita.

Vejamos um caso. Suponha que lhe digam que o perímetro de um certo retângulo é de 200 metros (perímetro é a soma dos comprimentos dos quatro lados). Pergunta-se: Quais são os comprimentos dos lados?

Para começar, chamemos de x o comprimento de um dos lados do retângulo. O lado oposto a esse também será x (pois uma das propriedades do retângulo é que lados opostos têm o mesmo comprimento). A soma dos comprimentos desses dois lados opostos é $2x$.

E quanto ao outro par de lados opostos? Pode-se ter idéia de qual seja o seu comprimento?

Infelizmente não, pelo menos em valor numérico. Eles são tão desconhecidos quanto o primeiro par, e também devem ser designados por um símbolo literal representando uma incógnita. Usar x causaria confusão, pois x já está sendo usado no problema. O costume é usar y como segunda incógnita. Do outro par de lados pode-se então igualar cada um a y, dando um total de $2y$.

Agora podemos dizer que

$$2x + 2y = 200$$

Podemos tentar tirar nessa equação o valor de x e ver no que dá, e para isso podemos começar fatorando:

$$2(x + y) = 2(100)$$

Dividindo cada lado da equação por 2, temos

$$x + y = 100$$

E, por transposição,

$$x = 100 - y$$

Aí está o nosso valor de x, mas de que nos adianta? Como não sabemos o valor de y, não podemos converter o nosso valor de x num valor numérico. Claro, se soubéssemos ser y igual a 1 metro, x seria igual a 100 − 1 ou 99 metros. Ou se de algum modo pudéssemos determinar ser y igual a 7 metros, x seria igual a 100 − 7 ou 93 metros. Ou, se y fosse igual a 84,329 metros, x seria igual a 100 − 84,329 ou 15,671 metros.

Cada um desses pares de valores satisfaria a equação.

$$2(99) + 2(1) = 200$$

$$2(93) + 2(7) = 200$$

$$2(15.671) + 2(84.329) = 200$$

Poder-se-ia formar qualquer número de outros pares que também satisfariam a equação. É claro que isso não significa que dois números quaisquer serviriam. Uma vez escolhido um valor para y, só há um valor possível para x. Ou, se de início se escolhe um valor para x, só resta um valor possível para y.

Outra observação. Não se pode escolher um valor para x ou para y que seja 100 ou acima de 100 sem incorrer em certas

dificuldades práticas. Se fizermos y igual a 100, então x será igual a 100 − 100 ou 0. Então não teríamos um retângulo, mas simplesmente uma reta. Se fizermos y igual a 200, x será igual a 100 − 200 ou -100, e será necessário julgar qual o significado de um retângulo em que o comprimento de um dos lados é um número negativo.

Contudo, apesar dessas dificuldades práticas, matematicamente esses conjuntos de valores satisfazem a equação:

$$2(0) + 2(100) = 200$$

$$2(-100) + 2(200) = 200$$

Mas, mesmo se decidirmos limitar os valores de x e y à faixa dos números maiores que zero e menores que 100, existirá ainda a escolher um número infinito de pares que satisfariam a equação. E não há qualquer motivo para achar que um determinado par de valores fosse solução mais certa que outro par qualquer. Não haveria como escolher entre esse número infinito de pares, e por isso uma equação como $2x + 2y = 200$ é chamada uma "equação indeterminada".

SÓ INTEIROS

Você deve estar pensando que uma equação sem solução definida é uma coisa que não serve para nada, e que com certeza os matemáticos devem jogá-la no lixo. Nada disso. Na verdade, equações dessa espécie têm fascinado os matemáticos sobremaneira.

Um dos primeiros a se interessar em equações indeterminadas foi um matemático grego chamado Diofanto, que viveu por volta do ano 275 D.C. na cidade de Alexandria, no Egito. Ele interessou-se particularmente em equações cujas soluções só podiam ser números inteiros. Veja-se um exemplo de problema que leva a uma equação como essa.

Suponha que uma classe tem 8 alunos, sendo que alguns são meninos e alguns são meninas. Quantos são os meninos, e quantas as meninas? Se chamarmos de x o número de meninos e de y o de meninas, teremos a equação

$$x + y = 8$$

Ora só podemos admitir para x e y certos valores. Não podemos ter x ou y igual a $\sqrt{2}$ ou a $1\frac{1}{2}$, porque não podemos ter uma quantidade irracional de crianças, nem tampouco uma quantidade fracionária. Também não podemos ter nem x nem y igual a zero, porque dissemos que há meninos e meninas na classe. E nenhum dos dois pode ser igual a 8, pois então o outro seria igual a zero, nem maior que 8, pois o outro seria um número negativo, e um número negativo de crianças também não nos serve.

Visto isso, só há um número muito limitado de soluções possíveis para a equação. Se $x = 1$, então $y = 7$; se $x = 2$, então $y = 6$, e assim por diante. Na verdade, só há 7 conjuntos possíveis de respostas: 1 menino e 7 meninas, 2 meninos e 6 meninas, 3 meninos e 5 meninas, 4 meninos e 4 meninas, 5 meninos e 3 meninas, 6 meninos e 2 meninas, e 7 meninos e 1 menina.

Embora o número de respostas seja limitado, a equação continua indeterminada, porque não temos como dizer qual dos 7 pares de números é a resposta certa, porque não há *uma* resposta certa. Todas são igualmente certas.

Uma equação indeterminada cujas soluções só possam ser expressas por números inteiros é chamada "equação diofantina", em homenagem ao velho matemático grego.

Algumas equações diofantinas são famosas na história da matemática.

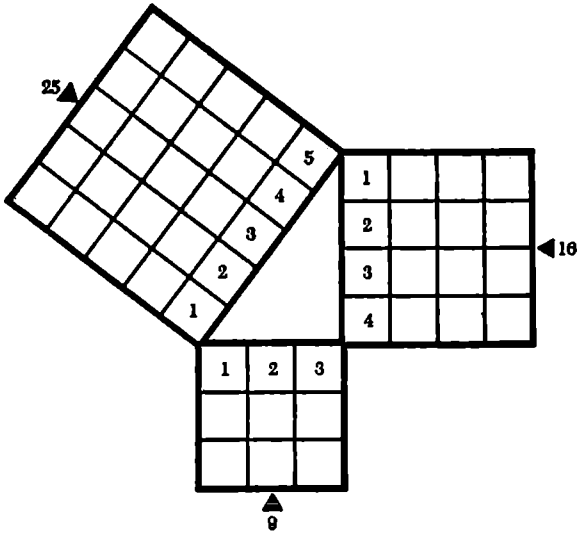
Por exemplo, os gregos interessaram-se muito no triângulo retângulo (figura de três lados em que um dos ângulos é reto). Um matemático grego chamado Pitágoras, que viveu em

torno de 530 A.C., demonstrou que a soma dos quadrados dos dois lados que formam o ângulo reto do triângulo retângulo era igual ao quadrado do lado oposto ao ângulo reto (chamado "hipotenusa"). Em sua homenagem, esse fato matemático é conhecido como "teorema de Pitágoras".

Isso pode expressar-se algebricamente, chamando um lado de x, o segundo de y, e a hipotenusa de (o que agora?) z. A equação fica sendo

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Como temos três incógnitas numa única equação, temos um número infinito de soluções possíveis. Escolhendo à vontade valores quaisquer para duas das incógnitas, determina-se um valor para a terceira. Se dermos a x e a y o mesmo valor 1, então z^2 é igual a 1^2 mais 1^2 ou 2, donde z é igual a $\sqrt{2}$. Se fizer-



TEOREMA DE PITÁGORAS

mos x igual a 2 e y igual a 13, então z^2 será igual a 2^2 mais 13^2 ou 173, e z será igual a $\sqrt{173}$.

Temos assim dois conjuntos de três números, a saber, 1, 1, $\sqrt{2}$ e 2, 13, $\sqrt{173}$, que satisfazem a equação pitagórica. Você pode encontrar quantos outros conjuntos queira sem nenhum esforço.

Mas suponha que só nos interessem soluções em que x, y e z sejam todos números inteiros, de modo que a equação se torne diofantina.

De início você poderá conjeturar se existem soluções atendendo a essa condição. Bem, suponha que façamos x igual a 3 e y igual a 4. Então z^2 é igual a 3^2 mais 4^2 ou 25, e z é igual a $\sqrt{25}$ ou 5. Aí temos um conjunto de inteiros — 3, 4 e 5 — que serve como solução para a equação.

Existem outras. Por exemplo, $5^2 + 12^2 = 13^2$, de modo que 5, 12 e 13 são uma solução. Na verdade, verifica-se que existe um número infinito de soluções de números inteiros para a equação. Os matemáticos determinaram regras para achar essas soluções, e em o fazendo aprenderam muito sobre a manipulação dos números inteiros.

Um matemático francês chamado Pierre de Fermat, que viveu nos começos do século XVII, estudou o comportamento dos inteiros de forma tão completa que fundou um ramo da matemática relativo aos inteiros e chamado "teoria dos números".

Fermat tinha o hábito de rabiscar nas margens dos livros que lia, e certa vez escreveu que tinha descoberto um fato interessante sobre as equações do tipo

$$x^n + y^n = z^n$$

em que n pode ser qualquer número inteiro. (A equação pitagórica é um caso particular desse grupo, em que n é igual a 2.)

Fermat anotou ter descoberto que, sempre que n fosse maior que 2 nessa equação, não havia soluções formadas só de

inteiros. Ou seja, é possível somar os quadrados de dois inteiros e encontrar o quadrado de outro inteiro, como em $3^2 + 4^2 = 5^2$, mas não é possível somar os cubos de dois inteiros e encontrar o cubo de outro inteiro, nem somar quartas potências de dois inteiros e encontrar a quarta potência de outro inteiro, e assim por diante.

Fermat escreveu no livro que tinha disso uma simples e elegante prova, mas que a margem era pequena demais para contê-la. Ele nunca escreveu a prova (ou, se o fez, ninguém a encontrou), e o chamado "Último Teorema de Fermat" não foi provado até hoje.

Os matemáticos têm tentado. Fermat foi um estudioso tão brilhante que é difícil crer que se tivesse enganado. A prova deve existir. Todos os grandes matemáticos têm-se esforçado por achá-la. Ofereceram-se prêmios. O teorema parece verdadeiro — mas, quanto à prova, até hoje nada.

É possível que Fermat se tenha equivocado ao julgar que tinha a prova, mas não há nada que possamos afirmar.

Pena que a margem do livro não fosse um pouquinho maior.

ACRESCENTANDO INFORMAÇÕES

O que faz que uma equação seja indeterminada é a falta de dados. Se alguém nos diz que o total de meninos e meninas numa classe é 8, tudo que podemos afirmar é que $x + y = 8$, e não há solução definida. Mas suponha que algo mais nos fosse informado. Suponha que nos dissessem que há três vezes mais meninas que meninos. Se nós chamamos de x o número de meninos e de y o de meninas, podemos dizer que $y = 3x$.

Agora, os dados que temos permitem-nos armar duas equações, cada qual com duas incógnitas:

$$x + y = 8$$

$$y = 3x$$

São chamadas "equações simultâneas", porque os mesmos valores de x e y devem satisfazer simultaneamente as duas equações.

Se $y = 3x$, naturalmente podemos substituir y por $3x$ onde quer que ele apareça. Em particular, podemos substituir y por $3x$ na primeira equação e obter

$$x + 3x = 8$$

E eis que temos uma equação com uma incógnita só, e por sinal muito simples, que dá:

$$4\,x = 8$$

$$x = \frac{8}{4} = \rightarrow x = 2$$

O número de meninos é 2, e agora podemos substituir x por 2 onde quer que ele apareça. Podemos fazê-lo na equação $y = 3x$, que se torna $y = (3)(2)$ ou 6. Nossa solução final é pois que há 2 meninos e 6 meninas na classe. A soma, com efeito, é 8 e, com efeito, há três vezes mais meninas que meninos.

O mesmo princípio funciona em situações mais complicadas. Sejam as duas equações seguintes:

$$7x - 3y = 7$$

$$5x + 2y = 34$$

Vamos tirar o valor de x na primeira equação:

$$7x - 3y = 7$$

$$7x = 7 + 3y$$

$$x = \frac{(7 + 3y)}{7}$$

Agora podemos substituir x por $\frac{(7+3y)}{7}$ na segunda equação e obter:

$$\frac{5(7 + 3y)}{7} + 2y = 34$$

$$\frac{(35 + 15y)}{7} + 2y = 34$$

$$\frac{35}{7} + \frac{15y}{7} + 2y = 34$$

$$5 + \frac{15y}{7} + 2y = 34$$

$$\frac{15y}{7} + 2y = 34 - 5$$

$$\frac{15y}{7} + 2y = 29$$

Espero que até aqui as razões de cada passo tenham sido claras para você. Agora vamos fazer desaparecer as frações, simplesmente como faríamos em aritmética, multiplicando cada lado da equação por 7:

$$7\left(\frac{15y}{7} + 2y\right) = 7(29)$$

$$7\left(\frac{15y}{7}\right) + 7(2y) = 7(29)$$

$$15y + 14y = 203$$

$$29y = 203$$

$$y = \frac{203}{29}$$

$$y = 7$$

Agora que sabemos que $y = 7$, podemos voltar a qualquer das equações primitivas e substituir y por 7. Na primeira equação:

$$7x - 3(7) = 7$$

$$7x - 21 = 7$$

$$7x = 7 + 21$$

$$7x = 28$$

$$x = \frac{28}{7}$$

$$x = 4$$

Ou, se preferirmos usar a segunda equação:

$$5x + 2(7) = 34$$

$$5x + 14 = 34$$

$$5x = 34 - 14$$

$$5x = 20$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

De um modo ou de outro, a resposta única a que chegamos é que x é igual a 4 e y igual a 7, e se os dois valores forem levados a qualquer das equações, você verificará que são soluções válidas.

O que é mais, se tirássemos x na segunda equação e levássemos o seu valor à primeira, ou se tirássemos y em qualquer das equações e levássemos o seu valor à outra, chegaríamos sempre à mesma solução: x é 4 e y é 7. (Você pode comprovar por si mesmo.)

Outro procedimento seria tirar em ambas as equações o valor de x ou o de y; digamos que fosse o de y. No primeiro caso:

$$7x - 3y = 7$$

$$-3y = 7 - 7x$$

$$3y = 7x - 7$$

$$y = \frac{(7x - 7)}{3}$$

No segundo caso:

$$5x + 2y = 34$$

$$2y = 34 - 5x$$

$$y = \frac{(34 - 5x)}{2}$$

Agora temos duas expressões diferentes para y. Para que não haja incongruência, temos de admitir que as duas expressões têm o mesmo valor, logo podemos igualá-las:

$$\frac{(7x - 7)}{3} = \frac{(34 - 5x)}{2}$$

Agora temos uma única equação com uma incógnita. Podemos começar eliminando as frações pelo método usual aritmético de multiplicar as duas frações pelo produto dos dois denominadores, (3)(2) ou 6:

$$\frac{6(7x - 7)}{3} = \frac{6(34 - 5x)}{2}$$

$$2(7x - 7) = 3(34 - 5x)$$

$$14x - 14 = 102 - 15x$$

$$14x + 15x = 102 + 14$$

$$29x = 116$$

$$x = \frac{116}{29}$$

$$x = 4$$

E, naturalmente, substituindo x por 4 em qualquer das equações primitivas, encontraremos que y é igual a 7.

UM TERCEIRO MÉTODO

Há ainda um outro artifício que podemos aplicar às nossas duas equações com duas incógnitas. Para entendê-lo melhor, comecemos por considerar duas equações gerais muito simples: $a = b$ e $c = d$.

Sabemos que um valor qualquer pode ser somado ou subtraído dos dois lados de uma equação sem tornar falsa a equação. Até aqui eu sempre somei ou subtraí a mesma expressão de cada lado, mas não tem de ser necessariamente assim. Posso somar (ou subtrair) expressões diferentes, desde que tenham o mesmo valor. Por exemplo, posso somar 5 a um lado da equação e 17 − 12 ao outro.

Ora, se $c = d$, posso somar c a um lado da equação e d ao outro sem tornar falsa a equação. Expressando isso em símbolos:

$$\begin{array}{ll} \text{Se} & a = b \\ \text{e} & c = d \\ \text{então} & a + c = b + d \\ \text{ou} & a - c = b - d \\ \text{ou} & ac = bd \\ \text{ou} & \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \end{array}$$

e assim por diante.

Agora podemos voltar às nossas duas equações:

$$7x - 3y = 7$$

$$5x + 2y = 34$$

Pela regra geral que acabamos de ver, posso somar o lado esquerdo da segunda equação ao lado esquerdo da primeira, e o lado direito da segunda equação ao lado direito da primeira. Obtenho:

$$(7x - 3y) + (5x + 2y) = 7 + 34$$

$$7x + 5x - 3y + 2y = 41$$

$$12x - y = 41$$

Agora você perguntará o que foi que eu consegui com isso, e a resposta é: nada. Mas não seria bom se com a soma eu me livrasse de x ou de y? Se pudéssemos dar um jeito de fazer com que o termo em y de uma equação somado ao termo em y da outra desse 0, teríamos esse resultado. Vejamos como fazê-lo.

Suponha que eu multiplique a primeira equação por 2, dos dois lados, como posso fazer sem destruir a equação. Terei:

$$2(7x - 3y) = 2(7)$$

$$14x - 6y = 14$$

Suponha que, em seguida, eu multiplique a segunda equação, dos dois lados, por 3:

$$3(5x + 2y) = 3(34)$$

$$15x + 6y = 102$$

Veja que fazendo isso eu consegui ter um $-6y$ em uma equação e um $+6y$ na outra. Se agora eu somar as duas equações, esses dois termos somados dão zero, e não mais haverá termo em y na equação:

$$(14x - 6y) + (15x + 6y) = 14 + 102$$

$$14x + 15x - 6y + 6y = 116$$

$$29x = 116$$

$$x = \frac{116}{29}$$

$$x = 4$$

e, por substituição, temos novamente y igual a 7.

Assim, por diferentes artifícios, é sempre possível tomar duas equações, cada uma contendo duas incógnitas, e fazer delas uma única equação contendo só uma incógnita. Entretanto, um ponto importante a lembrar é que a segunda equação deve ser independente da primeira; isto é, deve realmente acrescentar uma nova informação.

Se uma das equações puder ser convertida na outra por soma ou subtração de um mesmo valor dos dois lados, ou por multiplicação, divisão, elevação a uma potência ou radiciação igualmente dos dois lados, elas são na verdade uma mesma equação. A segunda não acrescenta nenhum dado.

Para tomar um caso simples, suponha que tivéssemos:

$$x - y = 2$$

$$2x - 2y = 4$$

A primeira equação se converte na segunda, simplesmente multiplicando por 2 cada lado; ou a segunda se converte na

primeira se se divide por 2 os dois lados. Portanto elas são uma mesma equação. Se você não levar isso em conta e quiser de qualquer modo ir em frente para ver o que acontece, pode tirar o valor de x na primeira equação e encontrar $x = 2 + y$.

Em seguida substituir x por $2 + y$ na segunda equação:

$$2(2 + y) - 2y = 4$$

$$4 + 2y - 2y = 4$$

A soma dos termos em y dá zero, e resta apenas

$$4 = 4$$

o que sem dúvida é verdade, mas não ajuda muito para determinar os valores de x e y. É um exemplo de "raciocínio em círculo".

Naturalmente, se tivermos três incógnitas, precisaremos de três equações independentes. As equações 1 e 2 podem ser combinadas de modo a eliminar uma das incógnitas, e as equações 1 e 3 (ou 2 e 3) podem ser combinadas para eliminar essa mesma incógnita. Isso nos dá duas equações com duas incógnitas, e desse ponto em diante proceder-se-á do modo que já vimos.

Analogamente, podem-se encontrar valores numéricos para quatro incógnitas se existirem quatro equações independentes; cinco incógnitas se existirem cinco equações independentes, e assim por diante. É certo que o processo torna-se progressivamente trabalhoso, e requer técnicas especiais, mas em princípio o número de incógnitas não nos deve amedrontar — desde que disponhamos de dados suficientes.

13

Pondo a Álgebra para Funcionar

GALILEU ROLA BOLAS

Pode ser que, ao ler este livro, lhe ocorra o pensamento: Para que serve tudo isso?

Estou certo de que no fundo você sabe que a matéria é de fato utilíssima, mas, enquanto tenta acompanhar todos os modos em que as equações devem ser manipuladas, é possível que ainda assim você se sinta um tanto impaciente. Será que a álgebra vale todo o esforço que custa aprendê-la?

Sem dúvida ela pode ser de utilidade na solução de problemas que ocorrem no dia-a-dia. Por exemplo, suponha que você têm $10 para gastar, e pretende fazer compras numa loja em que todas as mercadorias estão sendo oferecidas com 15% de desconto sobre os preços de lista. Se você tem um catálogo que dá somente os preços de lista, qual é o preço do artigo mais caro que você pode comprar?

Você poderia, se quisesse, simplesmente tomar alguns preços ao acaso e subtrair 15% até encontrar um que lhe desse o preço líquido de $10. Mas isso seria pouco prático. Por que, em vez disso, não dizer a si mesmo que com 15% de desconto você paga 85% ou $\frac{85}{100}$ do preço de lista, de modo que $\frac{85}{100}$ de um valor desconhecido, que chamará de x, é $10? A equação é:

$$\frac{85x}{100} = 10$$

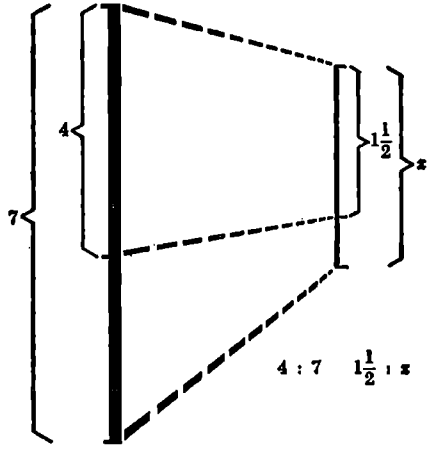
e você deve ser capaz de resolvê-la facilmente, aplicando os princípios expostos neste livro:

$$x = \frac{(10)(100)}{85} = 11\frac{65}{85}$$

Com aproximação de centavos, isso dá \$11,77. Verificando, você verá que um desconto de 15% em \$11,77 é, com aproximação de centavos, \$1,77, o que deixa um preço líquido de \$10,00.

Ou suponha que alguém está seguindo uma receita destinada a preparar 4 porções de um certo prato, quando precisa de 7 porções. A cozinheira sabe, é claro, que deve aumentar todos os ingredientes proporcionalmente. Na vida real isso geralmente é feito "a olho", e por isso o quitute não sai como devia, embora preparado com a receita em mãos.

Por que não fazer uso da álgebra? Se a receita original manda botar 1 ½ colher de chá, você pode dizer: "Quatro está para sete como um e meio está para alguma coisa que eu ainda



não sei o que é." Um modo de escrever matematicamente esse enunciado é: $4:7::1{,}5:x$, que o expressa em forma de "razões".

Mas, quando falei de frações à página 40 eu disse que elas podiam considerar-se razões, logo a equação também pode escrever-se

$$\frac{4}{7} = \frac{1.5}{x}$$

e pode resolver-se como segue:

$$4x = (1.5)(7) = 10.5$$

$$x = \frac{10.5}{4} = 2.625$$

É claro que você não vai medir tempero com aproximação de milésimos de colher de chá, mas poderá tentar medir um pouquinho mais que 2½ colheres, o que será bem melhor que usar a chutometria.

Evidentemente, essas são coisas corriqueiras, e você talvez ache que a álgebra não é tão importante, se só serve para calcular preços e adaptar receitas de cozinha.

Mas não é *só* para isso que ela serve. A principal utilidade da álgebra está ligada aos esforços dos cientistas de compreender o universo. Vejamos como ela se aplica nesse contexto, e como alguns símbolos podem ajudar a realizar as mais notáveis conquistas. Começarei pelo começo.

Os filósofos da Grécia antiga interessaram-se de modo especial nas formas dos objetos, e assim levaram a geometria a um alto grau de desenvolvimento. Não se interessaram propriamente em pesos e medidas, e por isso não desenvolveram a álgebra.

O resultado foi que os seus conceitos neste campo eram um tanto nebulosos. Por exemplo, o maior dos filósofos gregos, Aristóteles, interessou-se no modo como os corpos se moviam quando abandonados a si mesmos. Entretanto, contentou-se em declarar que corpos sólidos e líquidos moviam-se para baixo, espontaneamente, em direção ao centro da Terra, ao passo que o ar e o fogo se moviam, espontaneamente, para cima, em direção oposta ao centro da Terra. Além disso, afirmou que objetos pesados moviam-se para baixo (caíam) mais depressa que objetos leves, de modo que uma pedra caía mais depressa que uma folha, por exemplo.

Não lhe ocorreu tentar medir o tempo que uma pedra levava caindo, ou se ela caía em velocidades diferentes no começo e no fim da queda.

No despontar da idade moderna, as coisas começaram a mudar. O artista italiano Leonardo da Vinci, em fins do século XV, desconfiou que objetos em queda aumentavam de velocidade à medida que caíam. Mas foi somente cem anos depois, em fins do século seguinte, que o cientista italiano Galileu Galilei (geralmente conhecido só pelo primeiro nome) se propôs efetivamente medir os tempos de queda.

Não era coisa fácil, pois Galileu não dispunha de relógios com que trabalhar. Para medir o tempo, tinha de valer-se do seu pulso, ou então medir o peso da água escorrida através de um orifício feito no fundo de um balde. Isso não se prestava à medição dos pequenos intervalos envolvidos no estudo de objetos caindo livremente por efeito da ação da gravidade. Então, o que ele fez foi rolar bolas ao longo de calhas suavemente inclinadas.

Dessa forma, o rolamento das bolas era mais lento do que seria a sua queda livre. A força da gravidade, por assim dizer, se diluía, e os meios toscos de medir o tempo de que dispunha Galileu eram suficientes.

Nessas experiências, Galileu verificou que a velocidade com que uma bola se movia num plano inclinado era direta-

mente proporcional ao tempo que se movia. (Não me darei ao trabalho de explicar como ele media velocidades, pois não é o que nos interessa aqui.)

Assim, podia ser que a bola, tendo partido de uma posição de repouso no alto da calha, se estivesse movendo à razão de 3 metros por segundo ao fim de um segundo. Ao fim do dobro desse tempo (2 segundos), estaria se movendo com o dobro da velocidade (6 metros por segundo). Ao fim de quatro vezes o tempo (4 segundos), a velocidade seria 4 vezes maior (12 metros por segundo), e assim por diante.

Como se vê, para calcular a velocidade basta multiplicar o tempo que a bola esteve rolando por um número fixo. No caso descrito, o número fixo ou "constante" é 3, logo pode-se de imediato concluir que ao fim de 37,5 segundos a bola estaria se movendo à velocidade de (37,5)(3) ou 112,5 metros por segundo.

Para expressá-lo em termos gerais, podemos chamar de t o tempo que a bola esteve rolando. (É costume em experiências desse gênero simbolizar as diferentes grandezas pela respectiva inicial.) A velocidade é representada por v, e a constante por k (que pelo menos tem o som da inicial c).

A equação determinada por Galileu para representar a sua descoberta sobre os corpos em movimento foi

$$v = kt$$

Ora, k tinha um valor constante numa determinada experiência, mas Galileu verificou que esse valor mudava quando ele mudava a inclinação da calha. Quando a inclinação era mais suave, o valor de k diminuía, quando era mais íngreme, aumentava.

Evidentemente, o valor de k seria máximo quando a inclinação da calha fosse a maior possível — isto é, perfeitamente vertical. Então a bola cairia livremente sob a ação da gravidade, e a constante então seria simbolizada por g (de gravidade).

A equação do movimento de um corpo em queda livre é portanto

$$v = gt$$

A partir das experiências com planos inclinados, Galileu calculou o valor de g (aliás, não por álgebra comum, mas por outro ramo da matemática chamado trigonometria), verificando ser ele igual a 980, de modo que a equação se torna

$$v = 980t$$

Isso quer dizer que se um corpo é mantido imóvel acima da superfície da Terra e em seguida largado de modo a cair livremente, ao fim de um segundo se estará movendo à velocidade de 980 centímetros por segundo; ao fim de dois segundos, a 1.960 centímetros por segundo; ao fim de três segundos, a 2.940 centímetros por segundo; e assim por diante.

Galileu também descobriu experimentalmente que a mesma equação de movimento valia para todos os corpos rolando ou caindo sob a ação da gravidade — para *todos* os corpos, fossem pesados ou leves. Havia uma segunda força, a resistência do ar, que se opunha à atração da gravidade, sendo porém muito pequena e só mostrando efeitos perceptíveis em corpos muito leves que oferecessem uma grande superfície ao ar — penas, folhas, pedaços de papel, etc. Esses caíam lentamente, e foi isso que levou Aristóteles a julgar equivocadamente que a força da gravidade atuava de modo diferente em diferentes corpos.

Galileu mediu também as distâncias percorridas por um corpo rolando num plano inclinado. Naturalmente, sendo a velocidade crescente, em cada segundo ele percorria mais terreno do que no segundo anterior. Galileu verificou que a distância total era diretamente proporcional ao quadrado do tempo. Em 3 segundos a distância percorrida era (3)(3) ou 9 vezes a

distância percorrida em 1 segundo. Em 17 segundos era (17)(17) ou 289 vezes a distância percorrida em 1 segundo, e assim por diante.

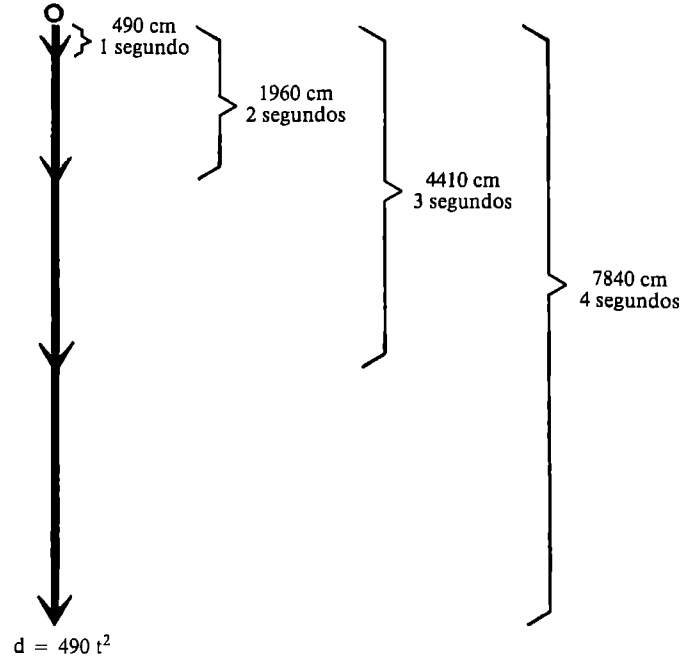
A equação determinada por Galileu para a distância d percorrida por um corpo em queda livre foi

$$d = \frac{gt^2}{2}$$

Como g é igual a 980, a equação se reduz a

$$d = 490t^2$$

Isso significa que, depois de 1 segundo, um corpo em queda livre percorre uma distância de (490)(1)(1) ou 490 centíme-



tros; ao fim de 2 segundos, percorre uma distância de (490)(2)(2) ou 1.960 centímetros; ao fim de 7 segundos, uma distância de (490)(7)(7) ou 24.010 centímetros, e assim por diante.

Dessa forma, Galileu expressou o comportamento de corpos em movimento por meio de equações algébricas. Com isso, o comportamento pôde ser descrito de maneira mais concisa e clara do que o seria só por meio de palavras. Além disso, com o emprego de equações, os problemas ligados à queda de corpos podiam ser resolvidos através das técnicas algébricas que os matemáticos tinham desenvolvido no século precedente.

Em conseqüência, o estudo do movimento dos corpos progrediu rapidamente, e o mundo dos estudiosos foi contemplado com o espetáculo de como o conhecimento aumentava quando a matemática e as técnicas matemáticas eram aplicadas aos fenômenos naturais. O resultado foi que a álgebra veio mostrar-se essencial para a ciência (assim como, mais tarde, as matemáticas superiores). Na verdade, as experiências de Galileu com corpos rolantes assinalam o nascimento da ciência moderna.

NEWTON DEDUZ A GRAVITAÇÃO

As equações usadas para expressar observações experimentais podem levar à dedução de importantes generalizações a respeito do universo.

Por exemplo, suponhamos que ao plano inclinado de Galileu fosse dada a menor inclinação possível; ou seja, suponhamos que ele se tornasse perfeitamente horizontal. Nesse caso, k seria igual a 0. (Isso pode ser verificado por experiência direta com um plano horizontal, ou por cálculo, empregando a trigonometria, a partir de experiências com planos não horizontais.) A equação do movimento numa superfície horizontal é portanto:

$$v = 0t$$

ou

$$v = 0$$

Isso significa que uma bola descansando numa superfície horizontal permanece imóvel.

Agora suponhamos que a bola já se estivesse movendo a uma velocidade constante, que chamaremos de V, e depois passasse a rolar num plano inclinado. Sua velocidade aumentaria de acordo com a equação que já vimos, e em cada ponto, a essa velocidade variável, somar-se-ia a velocidade constante inicial. Ou seja,

$$v = kt + V$$

Suponhamos, porém, que o plano fosse horizontal, de modo que k fosse igual a zero. Então o movimento da bola com a velocidade inicial constante seria, de acordo com a equação,

$$v = 0t + V$$

ou

$$v = V$$

Isto é, um corpo que se movesse a uma velocidade constante em condições nas quais nem a gravidade nem outra força qualquer agisse sobre ele, continuaria a mover-se àquela velocidade constante. Não há termo em t na equação, logo não há variação da velocidade com o tempo.

O cientista que pela primeira vez expressou isso claramente foi o matemático inglês Isaac Newton, nascido em 1642, o ano da morte de Galileu.

Newton estabeleceu que todo objeto em repouso permanece em repouso a menos que sofra a ação de uma força externa, como a gravidade, e que todo corpo em movimento conti-

nua a mover-se a velocidade constante e em linha reta a menos que sofra a ação de uma força externa, como a gravidade.

É a "Primeira Lei do Movimento", ou "princípio da inércia".

Nenhum dos filósofos antigos pressentiu essa verdade. Imaginavam que um corpo em movimento espontaneamente tendia para o repouso, a menos que uma força contínua o mantivesse em movimento. A razão desse conceito é que os fenômenos reais são complexos. Bolas rolando numa superfície nivelada parecem chegar ao estado de repouso espontaneamente, quando na verdade isso se deve à ação de forças externas como o atrito e a resistência do ar.

O próprio Newton, talvez o maior pensador de todos os tempos, possivelmente não teria concebido a Primeira Lei do Movimento se não lhe fosse dado fazer mais que observar o comportamento de objetos movendo-se realmente na superfície da Terra. Seu princípio derivou da análise das equações de Galileu, simplificadas propositalmente pela *não consideração* da ação do atrito e da resistência do ar.

Desde os tempos de Newton foram freqüentes os casos em que o emprego de equações redundou na simplificação de fenômenos naturais a um ponto que permitiu apreender um padrão subjacente.

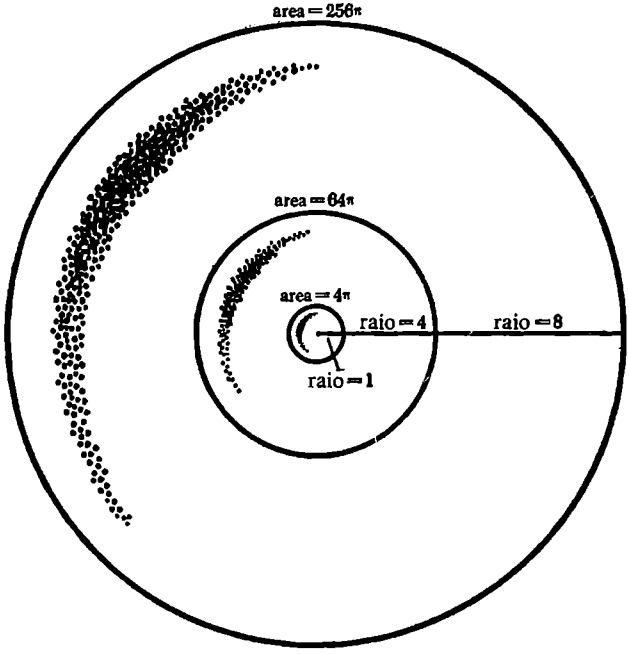
Newton deduziu de modo semelhante duas outras leis do movimento, perfazendo as chamadas "Três Leis do Movimento".

No século entre 1550 e 1650 fizeram-se grandes descobertas astronômicas. O astrônomo polonês Nicolau Copérnico afirmou ser o Sol, e não a Terra, o centro do sistema solar. (Em sua maioria os antigos filósofos gregos, inclusive Aristóteles, insistiram na centralidade da Terra.) Depois, o astrônomo alemão Johann Kepler demonstrou que os planetas, a Terra inclusive, moviam-se em torno do Sol em elipses, e não em círculos como supunham os astrônomos antecedentes.

Daí surgiu a questão da explicação de os planetas se move-

rem em elipses e a velocidades variáveis com a sua distância ao Sol. (Kepler calculou também quais deveriam ser essas velocidades.) Tanto Kepler como Galileu pressentiram que devia haver alguma força atraindo os planetas para o Sol, mas nenhum dos dois chegou a definir como essa força operava.

Newton percebeu que no espaço exterior não havia nada que criasse atrito ou resistência ao movimento dos planetas, e que assim as Leis do Movimento operavam de modo perfeito. Ele manipulou as equações representativas dessas leis e demonstrou que a força entre dois corpos quaisquer do universo era diretamente proporcional ao produto da "massa" (quantidade de matéria) de um dos corpos pela massa do outro.



multiplicando o raio por 4 multiplica a área por 16
multiplicando o raio por 8 multiplica a área por 64

Por outro lado, ao afastar-se de um corpo, essa força podia imaginar-se como que se distendendo numa esfera gigantesca que continuamente aumentasse de tamanho. Assim, a força se distribuiria na superfície da esfera e tornar-se-ia mais fraca à medida que aumentasse a área a cobrir.

Como varia a área da esfera em função do tamanho desta? Bem, a área (A) da esfera varia com o quadrado do raio (r), que é a distância do centro à superfície da esfera. A fórmula exata é

$$A = 4\pi r^2$$

onde π é a quantidade mencionada no fim do Capítulo 11.

Se a área da esfera cresce de acordo com o quadrado da distância do centro à superfície, Newton concluiu que a força de atração da gravidade entre dois corpos devia decrescer com o quadrado da distância entre eles.

Agora ele estava pronto para pôr suas idéias sobre a força da gravidade em forma de uma equação, e aqui está ela:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

onde F simboliza a força da gravidade, m_1 a massa de um dos corpos, m_2 a massa do outro corpo, e d a distância entre eles (de centro a centro), enquanto G é uma constante chamada "constante gravitacional".

Vejamos como a equação funciona. Suponhamos que a massa de um dos corpos seja duplicada: em vez de m_1 temos $2m_1$. A expressão $\frac{Gm_1m_2}{d^2}$ transforma-se em $\frac{G(2m_1)m_2}{d^2}$, que pode escrever-se $\frac{2Gm_1m_2}{d^2}$. A nova expressão é exatamente duas vezes a anterior, o que significa que dobrando a massa de um dos corpos, dobra a força gravitacional. Se duplicarmos as

massas de ambos os corpos, teremos $\frac{G(2m_1)(2m_2)}{d^2}$ ou $\frac{4Gm_1m_2}{d^2}$, ou quatro vezes a força gravitacional.

Suponhamos que a distância entre os corpos triplique. A expressão torna-se $\frac{Gm_1m_2}{(3d)^2}$ ou $\frac{Gm_1m_2}{9d^2}$ ou $\left(\frac{1}{9}\right)\frac{Gm_1m_2}{d^2}$, mostrando que a força é agora apenas $\frac{1}{9}$ do que era, ou, em outras palavras, diminuiu nove vezes. Diminuiu, como se vê, com o quadrado da distância, que aumentou só três vezes.

CAVENDISH PESA A TERRA

Verificou-se que a equação de Newton explicava bastante exatamente o movimento de todos os corpos do sistema solar. Isso impressionou de tal modo os sábios do século XVIII que todos passaram a imitar Newton, procurando chegar a grandes generalizações a partir de poucos dados e solucionar problemas pelo raciocínio. Tanto assim que o século ficou conhecido como a "Idade da Razão".

No século XIX a equação de Newton ganhou projeção ainda maior, quando se verificou que ela se aplicava igualmente às estrelas duplas, girando uma em torno da outra a trilhões de quilômetros da Terra. Depois, quando se observou que um planeta recém-descoberto, Urano, não obedecia rigorosamente à equação de Newton, os astrônomos inferiram a existência de um planeta ainda desconhecido, cuja atração devia ser a causa de Urano sair da linha. Esse planeta ignorado foi procurado e logo descoberto — graças à manipulação de equações algébricas.

Vejamos um exemplo do que a equação de Newton pode fazer.

Suponha que você segurasse uma pedra na borda do Grand Canyon e a soltasse. Ela começaria a cair. Ao fim de ca-

da segundo (desprezando a resistência do ar) ela estaria caindo 980 centímetros por segundo mais depressa que no fim do segundo anterior. Esse aumento de velocidade ("aceleração") é considerado, de acordo com a Segunda Lei do Movimento de Newton, igual à força de atração da gravidade que age sobre a pedra, sendo o seu valor 980 centímetros por segundo em cada segundo. Assim, na equação de Newton, F pode ser substituído por 980.

Suponhamos que a pedra pesa 1 grama. Sua distância ao centro da Terra é aproximadamente 637.100.000 centímetros.

Se na equação de Newton substituirmos F por 980, m_1 por 1 e d por 637.100.000, teremos

$$980 = \frac{G(1)(m_2)}{637{,}100{,}000^2}$$

$$980(637{,}100{,}000)^2 = Gm_2$$

$$Gm_2 = 398{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$$

Agora, seria formidável se pudéssemos achar o valor de m_2, que representa a massa da Terra, mas, por transposição, tudo que podemos afirmar é que

$$m_2 = \frac{398{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}{G}$$

e nós não sabemos o valor de G, que é a constante gravitacional. Newton também não sabia, nem ninguém depois dele, por todo um século, soube.

Mas, em 1798, um cientista inglês chamado Henry Cavendish imaginou uma experiência. Ele fez o seguinte. Por meio de um arame, pendurou pelo centro uma vareta leve. Em cada extremidade da vareta havia uma bolinha de chumbo. A vareta era livre para girar na ponta do arame, de modo que bastava

uma pequena força aplicada às bolinhas para produzir uma torção. Cavendish determinou experimentalmente a intensidade da força que produzia uma determinada torção.

Em seguida aproximou duas bolas grandes das duas bolinhas, em lados opostos. A força de gravidade entre as bolas grandes e as pequenas torceu o arame. Com base no grau de torção, Cavendish pôde calcular a intensidade da força gravitacional (F). Ele conhecia as massas das diversas bolas (m_1 e m_2) e a distância entre elas, centro a centro, (d).

Vamos tomar valores simples, só para mostrar como a coisa funcionou, e supor que as bolas grandes (m_2) pesavam 1.000 gramas, e as pequenas (m_1) 1 grama; que a distância entre elas (d) era 10 centímetros, e que Cavendish calculou a força gravitacional entre elas como sendo igual a 0,000000667 — uma força muito pequena, como se vê.

Substituindo na equação de Newton, temos

$$0.000000667 = \frac{G(1)(1000)}{(10)^2}$$

Portanto, pela aritmética comum,

$$0.000000667 = 10G$$

e, por transposição,

$$\frac{0.000000667}{10} = G$$

e então

$$G = 0.0000000667$$

Voltando à nossa equação anterior da massa da Terra

$$m_2 = \frac{398{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}{G}$$

e substituindo G por 0,0000000667, temos

$$m_2 = \frac{398{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}{0.0000000667}$$

que vem a ser

$$m_2 = 6{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000 \text{ gramas}$$

ou

$$m_2 = 6{,}600{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000 \text{ toneladas}$$

Assim Cavendish, por meio de uma experiência cuidadosa com pequenas bolas, mais as técnicas da álgebra, conseguiu pesar a Terra.

E agora, você está convencido da utilidade da álgebra?

Se está, olhe mais longe. A verdadeira importância da álgebra, e da matemática em geral, não é o fato de ter permitido resolver tal ou tal problema, mas o de ter proporcionado ao homem uma nova visão do universo.

Do tempo de Galileu para cá, a matemática animou o homem a examinar o universo com a constante indagação: "Exatamente quanto?"

Dessa forma, ela deu nascimento à grandiosa estrutura da ciência, e essa estrutura em si mesma é muito mais importante que qualquer fato ou grupo de fatos que simplesmente constituem partes da estrutura.

Índice Remissivo

Abel, Niels Henrik, 150
Aceleração, 182
Algarismos arábicos, 10
Álgebra, origem da, 20
Ângulo reto, 95
Aristóteles, 172
Axioma, 71, 72

Binômio, 49
Biquadrada, equação, 115

Cancelamento, 91 ss.
Cardano, Geronimo, 25, 118, 149
Cavendish, Henry, 182
Coeficiente, 50
Congruência, 49
Constante, 173
- gravitacional, 180 ss.
Convenção, 39
Copérnico, Nicolau, 178
Cubo, 96

Descartes, René, 99, 117
Diofanto, 155
Divisão, 34 ss.
  números negativos e -, 45 ss.
  símbolos de -, 38 ss.

e, 151, 152
Equação, 17
- biquadrada, 115
- cúbica, 115, 117 ss., 122 ss.
- diofantina, 156
  grau da -, 114 ss.
- indeterminada, 155 ss.
- linear, 115
- quadrática, 115
  métodos de solução da - -, 125 ss.
  solução geral da - -, 142 ss.
- quártica, 115, 122
- quíntica, 115
  solução geral da -, 150 ss.
Equações polinômias, 114
- simultâneas, 160 ss.

Falácia, 30
Fatores, 85 ss.
  polinômios e -, 132 ss.
Fermat, Pierre de, 158
  Último Teorema de -, 159
Ferrari, Ludovico, 150
Fontana, Nicolo, 148
Frações, 40 ss., 74 ss.
  simplificação de -, 84 ss.

G, 180 ss.
g, 173
Galileu (Galileo Galilei), 172 ss.
Galois, Evariste, 150
Gauss, Carl Friedrich, 117, 123
Gravidade, 178 ss.

Hermite, Charles, 151
Hilbert, David, 62
Hipotenusa, 157

i, 119 ss.
Identidades, 29
Incógnita, 13
Índice, 106
Inércia, 178

Kepler, Johann, 178

Leis do Movimento, 178
Leonardo da Vinci, 172
Lindemann, Ferdinand, 152
Liouville, Joseph, 151
Logaritmos, 105

Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, 19
Monômio, 49
Multiplicação, 33 ss.
  números negativos e -, 45 ss.
  parênteses e -, 79 ss.
  polinômios e -, 128 ss.
  símbolos de -, 36 ss.

Números, 9
- algébricos, 150
- complexos, 123
- imaginários, 118 ss.
- inteiros, 40
- irracionais, 108
- múltiplos, 86
- negativos, 25 ss.
  divisão e - -, 45 ss.
  multiplicação e - -, 45 ss.
  parênteses e - -, 83 ss.
- positivos, 26
- racionais, 41
- reais, 119
- transcendentes, 151

Operação algébrica, 22, 98, 105
- inversa, 22, 35, 105
Operações, 22
  ordem das -, 51 ss., 98 ss.

Parênteses, 27 ss., 55 ss.
  eliminação de -, 79 ss.
  inserção de -, 88 ss.
Peano, Giuseppe, 62
Pi (π), 152
Pitágoras, 156
Polinômios, 49
  fatoração de -, 132 ss.
  multiplicação de -, 128 ss.
Potenciação, 99

Quadrado, 95
Queda dos corpos, 172 ss.

Radical, 106
Radiciação, 105
Raiz quadrada, 106
Raízes, extração de, 105
Razão, 40, 171
Recíproca, 42, 47, 71 ss.
Rudolph, Christoff, 106

Símbolos, 9, 36 ss.
- literais, 6
- numéricos, 10
Soluções, número de, 114 ss.
Soma, 17 ss.
- algébrica, 31
Subtração, 20 ss.

Tartaglia, Nicolo, 148
Teorema de Pitágoras, 157
Teoria dos números, 86, 158
Termo, 49
Terra, massa da, 183 ss.
Tetranômio, 49
Transposição, 21, 35, 111 ss.
  ordem de -, 56 ss.
  sentido de -, 65 ss.
Trinômio, 49

Vieta, François, 15, 61

Zero, divisão por, 35
- uso exponencial do, 103

Atendemos também pelo Reembolso Postal
LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S.A.
Rua Sete de Setembro, 177 – Centro
20.050 – Rio de Janeiro, RJ
Caixa Postal 658

Impresso em off-set por
ERREGÊ EDITORA, GRÁFICA E PUBLICIDADE LTDA

Rua Sargento Silva Nunes, 154 - Ramos Tel 270-3946
Rio de Janeiro - RJ
com filmes fornecidos pelo editor

NO MUNDO DOS NÚMEROS

"De uma proveitosa viagem ao mundo da ciência ao âmago da matemática, o Dr. Asimov continua o seu extraordinário trabalho de expor clara e lucidamente o assunto... Altamente recomendado para as bibliotecas e leitores em geral".

Science Review

"Esta lúcida aproximação à matemática fascinará a todos... Explicações desses símbolos complexos foram brilhantemente expostos".

Saturday Review

Francisco Alves
qualidade há mais de um século