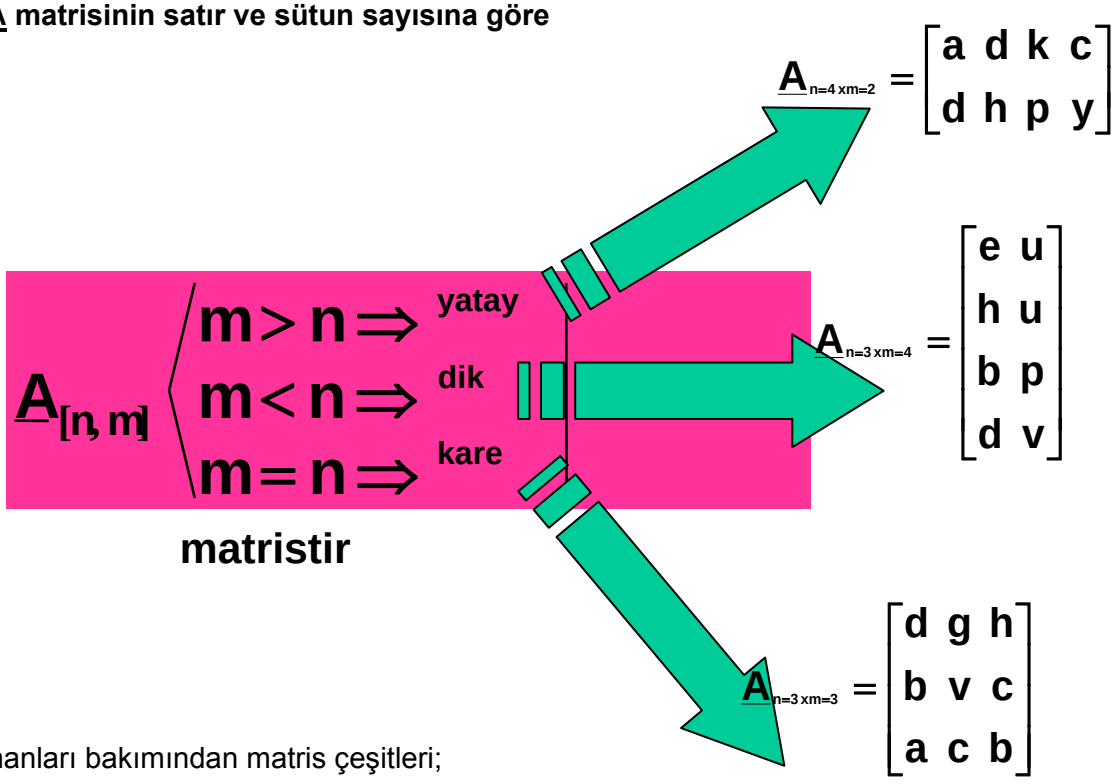
BÖLÜM 1

1.1.MATRİS

Matris: Bir problemin çözümünde hesaba katılan değerlerin belli bir düzen içinde satır ve sütun formunda oluşturulması sonucu elde edilen dikdörtgen bir dizeydir. Örneğin bir yapı sisteminin çözümü söz konusu ise matrisin her elemanı yapı sisteminin bir çözüm değerine karşı gelmektedir. Yani bir problemin çözümüne cevap olacak değerlerin oluşturduğu dizeylerdir.

$$\underline{A} = \begin{matrix} n \\ \end{matrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots\ldots\ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots\ldots\ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots\ldots\ldots & a_{3m} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \ldots\ldots\ldots & a_{4m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ldots\ldots\ldots\ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \ldots\ldots\ldots & a_{nm} \end{bmatrix}^{m}$$

Bir $\underline{A}$ matrisinin satır ve sütun sayısına göre



Elemanları bakımından matris çeşitleri;

i. Matrisin bütün elemanları sayılardan oluşuyor ise bu tür matrislere SABİT matrisler denir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

ii. Matrisin elemanlarından sayılardan ve fonksiyonlardan oluşuyor ise bu tür matrislere REEl matrisler denir (sabit değildir).

$$A=\begin{bmatrix}\cos\omega t & 2 & 8\\ 2 & \sin\omega t & 5\end{bmatrix}$$

iii. Matrisin elemanları sayılardan ve kopleks değerlerden oluşuyor ise bu tür matrislere KOMPLEK matrisler denir.

$$A=\begin{bmatrix}5i & 2 & 8+i\\ 2 & 2i & 5\end{bmatrix}$$

Karşılıklı elemanları birbirine eşit olan matrislere **eşit matris** denir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{bmatrix} \quad a_{ij}=b_{ij}\Rightarrow \underline{A}=\underline{B}$$

Sayısal örnek;

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & 5 & -3 & -2\\ -2 & -3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ -1 & -6 & 4 & 3\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}2 & 5 & -3 & -2\\ -2 & -3 & 2 & -5\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ -1 & -6 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

1.2. MATRİS ÇEŞİTLERİ

Matrisin çeşitli özelliklerine göre tanımlanan matris çeşitleri aşağıda maddeler halinde açıklanmaktadır.

1. **Dikdörtgen matris:** (A_{nxm}) satır sayısı kolon sayısından farklı **(n≠m)** olan matrisler.

$$\underline{A}_{nxm}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots a_{1m}\\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots a_{2m}\\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots a_{3m}\\ \hline a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \ldots a_{nm}\\ \hline\end{array}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ n\end{matrix}\quad \begin{matrix}m\end{matrix}$$

2. **Kare matris:** (A_{nxm}) satır sayısı kolon sayısına eşit **(n=m)** olan matrisler.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & A_{13} & a_{14} & \ldots a_{1m}\\ \hline a_{21} & a_{22} & A_{23} & a_{24} & \ldots a_{2m}\\ \hline\end{array}\quad m$$

$\underline{A}_{nxm}=$

a_{31}	a_{32}	A_{33}	a_{34}	$...a_{3m}$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	$...a_{4m}$
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{n4}	$...a_{nm}$

n

3. **Satır matris:** (A_{1xm}) bir satırı ve m kolonu bulunan **(n=1 m >1)** olan matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

A_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$...a_{1m}$

m

4. **Kolon matris:** (A_{nx1}) bir kolonu ve n satırı bulunan **(n>1 m =1)** matrisler.

m=1

$\underline{A}_{nxm}=$

a_{11}
a_{21}
a_{31}
a_{41}
a_{n1}

n

5. **Sıfır matris:** (A_{nxm}) bütün elemanları sıfır olan matrisler **(a_{ij} =0)**.

m

$\underline{0}_{nxm}=$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

n

6. **Köşegen matris:** (A_{nxm}) köşegen (diyagonal) **(a_{ij} i=j)** elemanları dışındaki bütün elemanları sıfır olan matrisler. Bu matrislerde köşegen elemanlarının tamamı olmamak üzere bazıları da sıfır olabilir

m

a_{11}	0	0	0	0
0	a_{22}	0	0	0

$\underline{A}_{nxm}=$

0	0	a_{33}	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	$...a_{nm}$

n

Bu şekilde de göstermek mümkündür. $\underline{A} = [a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{nn}]$ **diag** $= [a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{nn}]$

7. **Alt üçgen matris:** (A_{nxm}) köşegen (diyagonal) üzerindeki **(n<m ise $a_{nxm}=0$)** bütün elemanları sıfır olan kare matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

a_{11}	0	0	0	0
a_{21}	a_{22}	0	0	0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	a_{n4}	$...a_{nm}$

m, n

8. **Üst üçgen matris:** (A_{nxm}) köşegen (diyagonal) altındaki **(n>m** ise **$a_{nxm}=0$)** bütün elemanları sıfır olan kare matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$...a_{1m}$
0	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$...a_{2m}$
0	0	a_{33}	a_{34}	$...a_{3m}$
0	0	0	a_{44}	$...a_{4m}$
0	0	0	0	$...a_{nm}$

m, n

9. **Tersinir matrisi:** Verilen bir **A** ve **B** matrisi olsun bu matrisler arasında
10. **A B = B A =I** bağıntısı var ise **B** matrisine **A** matrisinin **tersiniri (tersi)** denir. İlerdeki konularda açıklanacaktır.

Örnek: verilen $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersiniri olan [$\underline{B}$=?] **B** matrisinin bulunması.

A B =I ise $\underline{A} = \frac{I}{\underline{B}} = \underline{B^{-1}}\ I$ buna göre $\underline{A}=\underline{B}^{-1}$

Kontrol A B=I		B	
		-1	**3**
		1	**2**
2	**3**	1	0
1	**1**	0	1
A		A B=I	

Örnek: Verilen $\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin tersi $\underline{B}=\underline{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 11 & -6\\ 4 & 1 & -13 & 7\\ -3 & -1 & 11 & -6\\ 1 & 0 & -3 & 2\end{bmatrix}$ olduğunun gösterilmesi.

Kontrol A B=I				B			
				-4	0	11	-6
				4	1	-13	7
				-3	-1	11	-6
				1	0	-3	2
1	**4**	**4**	**1**	1	0	0	0
2	**4**	**3**	**1**	0	1	0	0
1	**2**	**2**	**2**	0	0	1	0
1	**1**	**1**	**3**	0	0	0	1
A				A B=I			

veya

Kontrol B A =I				A			
				1	**4**	**4**	**1**
				2	**4**	**3**	**1**
				1	**2**	**2**	**2**
				1	**1**	**1**	**3**
-4	0	11	-6	1	0	0	0
4	1	-13	7	0	1	0	0
-3	-1	11	-6	0	0	1	0
1	0	-3	2	0	0	0	1
B				B A=I			

11. Birim matris: (A_{nxm}) köşegen (diyagonal) elemanları 1 diğer elemanları sıfır **(n=m ise a_{nxm}=1 ve n≠m ise a_{nxm}=0)** olan kare matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

1	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**1**

m

10.a. Birim matris bir matris ile sağdan ve soldan çarpıldığında matrisin değerini değiştirmez

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&3&0&4\\2&3&2&0\\1&3&0&2\\2&0&5&4\end{bmatrix} \qquad \underline{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad \underline{I}\,\underline{A}=\underline{A}\,\underline{I}=\begin{bmatrix}2&3&0&4\\2&3&2&0\\1&3&0&2\\2&0&5&4\end{bmatrix}$$

10.b. Birim matrisin kuvveti yine kendisine eşittir.

$$\underline{I}=\underline{I}^4 \qquad \underline{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \underline{I}^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

12. Simetrik matris: ($\underline{A}_{nxm}$) $a_{ij}=a_{ji}$ olan kare matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

1	4	-3	2	5
4	5	3	2	1
-3	3	1	7	5
2	2	7	1	0
5	1	5	0	6

$\underline{A}_{nxm}=$

1	4	-3	2	5
	5	3	2	1
		1	7	5
	SİM		1	0
				6

13. Ters simetrik matris: ($\underline{A}_{nxm}$) $a_{ij}=-a_{ji}$ ve n=m $a_{ij}=0$ olan kare matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

0	4	-3	2	5
-4	0	3	2	1
3	-3	0	7	5
-2	-2	-7	0	0
-5	-1	-5	0	0

$\underline{A}_{nxm}=$

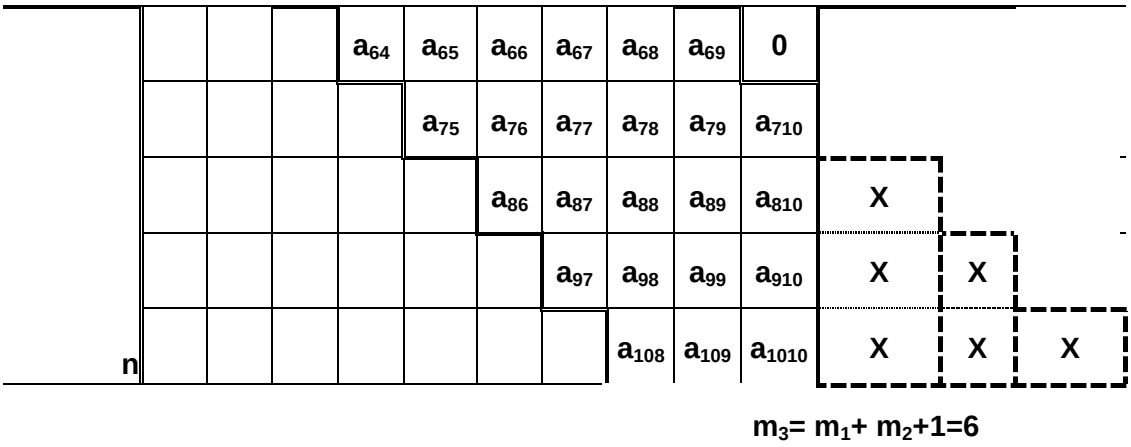
0	4	-3	2	5
	0	3	2	1
		0	7	5
	Ters SİM		0	0
				0

14. Band matris: Her satırda diyagonalin sağındaki **(m_2=üst band genişliği)** ve altındaki (**m_1= alt band genişliği**) eşit sayıda sıfırdan faklı ve bu elemanlar dışındaki bütün elemanları sıfır olan kare matrisler. m_3 (**$m_3=m_1+m_2+1=6$**) bir matrisin band genişliğidir.

$\underline{A}_{nxm}=$

		$m_2=3$								
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	0	0	0	0	0	0
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	0	0	0	0	0
$m_1=2$	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	0	0	0	0
		a_{42}	a_{43}	A_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	0	0	0
			a_{53}	A_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}	0	0

m



$m_3 = m_1 + m_2 + 1 = 6$

Band genişliği [m_1=1, m_2=2 $m_3 = m_1 + m_2 + 1 = 1+2+1 = 4$] **4** olan 5 x 5 boyutunda bir kare matris aşağıdaki şekilde yazılabilir. (Not: 1. satır ve n. satır dışındaki satırlardaki sıfırdan farklı sayıların sayısının fazla olanı band genişliğini verir.)

$\underline{A}_{5x5}=$

5	6	4	0	0
4	2	1	4	0
0	2	1	8	7
0	0	4	0	5
0	0	0	2	1

15. Eşit matrisler: Boyutları ve her bir elemanında $a_{ij}=b_{ji}$ özelliği bulunan matrisler.

$\underline{A}_{nxm}=$

4	4	-3	2
-4	9	3	2
3	-3	4	16

$\underline{B}_{nxm}=$

2X	K	-3N	S
2Y	L^2	3P	U
Z	M	2R	V^2

X=2	K=4	N=1	S=2
Y=-2	L=3	P=1	U=2
Z=3	M=-3	R=2	V=4

16. Sıfır bölenler: $\underline{A} \neq 0$ ve $\underline{B} \neq 0$ **olduğu halde** $\underline{A}\ \underline{B}=0$ olan matrise denir.

A	=	3	1	1	2		**B**	=	1	-3	0	3
		3	1	-1	0				-2	9	1	-7
		-3	-1	4	3				1	0	1	2
		0	0	1	1				-1	0	-1	-2

A B	=	0	0	0	0
		0	0	0	0
		0	0	0	0
		0	0	0	0

1.2.1. TRANSPOZ MATRİS

Transpoz matris: A_{nxm} matrisinin satırları (n) ile kolonlarının (m) yer değiştirmesi sonucu oluşan (A^T_{mxn}) matristir.

$\underline{A}_{nxm}=$

5	6	4	0	9	5
4	2	1	4	4	4
0	2	1	8	7	8
0	0	4	0	5	-5
5	6	4	0	0	6

$A^T=$

5	4	0	0	5
6	2	2	0	6
4	1	1	4	4
0	4	8	0	0
9	4	7	5	0
5	4	8	-5	6

1.a. Kolon matrisin transpozu satır matris, satır matrisinin tersi ise kolon matrisdir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}3\\4\\-2\\4\end{bmatrix} \qquad \underline{A^T}=\begin{bmatrix}3 & 4 & -2 & 4\end{bmatrix} \qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad \underline{B^T}=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\6\\0\end{bmatrix}$$

1.b. Simetrik matrisin transpozu kendisine eşittir. **($A=A^T$)**

$\underline{A}=$

1	4	-3	2	5
4	5	3	2	1
-3	3	1	7	5
2	2	7	1	0
5	1	5	0	6

$\underline{A^T}=$

1	4	-3	2	5
	5	3	2	1
		1	7	5
	SİM		1	0
				6

1.c. $A=(A^T)^T$

$\underline{A}=$

1	4	-3	2
4	5	3	2
-3	3	1	7

$A^T=$

1	4	-3
4	5	3
-3	3	1
2	2	7

$(A^T)^T=$

1	4	-3	2
4	5	3	2
-3	3	1	7

1.d. $(A+B)^T=(A^T+B^T)$

A			
	2	2	4
	3	1	5
	0	2	1
	1	0	3

B			
	2	0	0
	1	3	0
	1	1	4
	1	1	2

A+B			
	4	2	4
	4	4	5
	1	3	5
	2	1	5

$(A+B)^T$				
	4	*4*	*1*	*2*
	2	*4*	*3*	*1*
	4	*5*	*5*	*5*

A^T				
	2	**3**	**0**	**1**
	2	**1**	**2**	**0**
	4	**5**	**1**	**3**

B^T				
	2	**1**	**1**	**1**
	0	**3**	**1**	**1**
	0	**0**	**4**	**2**

A^T+B^T				
	4	***4***	***1***	***2***
	2	***4***	***3***	***1***
	4	***5***	***5***	***5***

1.e. $(A.B)^T=(B^T.\ A^T)$

A				
	2	**2**	**2**	**4**
	3	**1**	**1**	**5**
	0	**0**	**2**	**1**
	1	**0**	**0**	**3**

B				
	2	**0**	**1**	**0**
	1	**3**	**2**	**0**
	1	**1**	**1**	**4**
	1	**1**	**4**	**2**

A.B				
	12	12	24	16
	13	9	26	14
	3	3	6	10
	5	3	13	6

$(A.B)^T$				
	12	**13**	**3**	**5**
	12	**9**	**3**	**3**
	24	**26**	**6**	**13**
	16	**14**	**10**	**6**

A^T	=				
		2	**3**	**0**	**1**
		2	**1**	**0**	**0**
		2	**1**	**2**	**0**
		4	**5**	**1**	**3**

B^T	=				
		2	**1**	**1**	**1**
		0	**3**	**1**	**1**
		1	**2**	**1**	**4**
		0	**0**	**4**	**2**

$B^T.\ A^T$	=				
		12	***13***	***3***	***5***
		12	***9***	***3***	***3***
		24	***26***	***6***	***13***
		16	***14***	***10***	***6***

1.f. $(kA)^T=kA^T$ (k=2)

A				
	2	2	2	4
	3	1	1	5
	0	0	2	1
	1	0	0	3

(kA)				
	4	4	4	8
	6	2	2	10
	0	0	4	2
	2	0	0	6

$(kA)^T$				
	4	**6**	**0**	**2**
	4	**2**	**0**	**0**
	4	**2**	**4**	**0**
	8	**10**	**2**	**6**

A^T				
	2	3	0	1
	2	1	0	0
	2	1	2	0
	4	5	1	3

kA^T				
	4	**6**	**0**	**2**
	4	**2**	**0**	**0**
	4	**2**	**4**	**0**
	8	**10**	**2**	**6**

1. g. $A.A^T$=simetrik matris

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&3&0&4\\2&3&2&0\\1&3&0&2\\2&0&5&4\end{bmatrix} \quad \underline{A}^T=\begin{bmatrix}2&2&1&2\\3&3&3&0\\0&2&0&5\\4&0&2&4\end{bmatrix} \quad \underline{A}\,\underline{A}^T=\begin{bmatrix}29&13&19&20\\13&17&11&14\\19&11&14&10\\20&14&10&45\end{bmatrix}$$

Örnek 6.10: Verilen matrislerde $(\underline{A}\ \underline{B})^T = \underline{B}^T\ \underline{A}^T$ olduğunu gösteriniz.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix}1&1&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix} \quad \underline{A}^T=\begin{bmatrix}2&4&2\\2&2&3\\3&3&2\end{bmatrix} \quad \underline{B}^T=\begin{bmatrix}1&4&2\\1&2&3\\3&3&2\end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^T\underline{A}^T=\begin{bmatrix}16&18&18\\15&17&14\\18&24&19\end{bmatrix}\quad \underline{C}=\underline{A}\underline{B}=\begin{bmatrix}16&15&18\\18&17&24\\18&14&19\end{bmatrix}$$

$$\underline{C}^T=\begin{bmatrix}16&18&18\\15&17&14\\18&24&19\end{bmatrix}$$

BÖLÜM 2

2. MATRİSLERDE İŞLEMLER

2.1. MATRİSLERDE TOPLAM [+], ÇIKARMA [-]

A. Toplama [+] [-] [matrislerin nxm boyutları eşit olmak koşulu ile]

İki matrisin toplanması için her iki matrisin boyutlarının eşit olması **[A_{xm}=B_{nm}]** olması gerekir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\qquad \underline{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\b_{41}&b_{42}&b_{43}&b_{44}\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}&a_{14}+b_{14}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}&a_{24}+b_{24}\\a_{31}+b_{31}&a_{32}+b_{32}&a_{33}+b_{33}&a_{34}+b_{34}\\a_{41}+b_{41}&a_{42}+b_{42}&a_{43}+b_{42}&a_{44}+b_{44}\end{bmatrix}$$

Örnek 2.2: Verilen matrislerin toplamı olan **D** matrisinin bulunması.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&3&0&4\\2&3&2&0\\1&3&0&2\\2&0&5&4\\2&3&1&4\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}1&3&2&4\\2&0&2&2\\1&0&0&1\\2&1&2&4\\0&3&2&1\end{bmatrix}\quad \underline{C}=\begin{bmatrix}3&3&0&0\\2&1&2&1\\1&3&0&1\\2&0&1&1\\2&3&1&2\end{bmatrix}\quad \underline{D}=\underline{A}+\underline{B}+\underline{C}=\begin{bmatrix}6&9&2&8\\6&4&6&3\\3&6&0&4\\6&1&8&9\\4&9&4&7\end{bmatrix}$$

Örnek 2.3: Verilen **A** matrisini $\underline{A}^3$ değerinin bulunması.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&3&0&4\\2&3&2&0\\1&3&0&2\\2&0&5&4\end{bmatrix}\quad \underline{A}^2=\begin{bmatrix}18&15&26&24\\12&21&6&12\\12&12&16&12\\17&21&20&34\end{bmatrix}\quad \underline{A}^3=\begin{bmatrix}140&177&150&220\\96&117&102&108\\88&120&84&128\\164&174&212&244\end{bmatrix}$$

2.2. MATRİSLERİN TOPLAMA ÖZELLİKLERİ

1. **(A + B) + C = A + (B + C)**
2. **A + 0 = A**
3. **A + (-A) =0**
4. **(A + B) = (B + A)**
5. **k(A + B)= k(A) + k (B)**
6. **(k+r) (A)= k (A) + r (A)**
7. **(k.r) (A)= k (r A)**
8. **1. (A)= (A)**
9. **0. (A)= 0**

2.3. MATRİSLERDE ÇARPMA [X] İŞLEMLERİ

B. ÇARPMA [x] [birinci matrisin sütün sayısı [$A_{n=3}$] ile ikinci matrisin satır sayısının ($B_{m=4}$) eşit olması koşulu ile matrislerin çarpımı mümkündür]

$$A_{n=3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}^{m=4} \qquad B_{n=4}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}^{m=2} \qquad C = A_{4x4}.B_{2x4}$$

$$A_{n_A m_A} \; X \; B_{n_B m_B} = C_{n_A m_B}$$

A matrisinin kolon sayısı B matrisinin satır sayısına eşit olması halinde AxB=C

C matrisinin boyutunu belirler

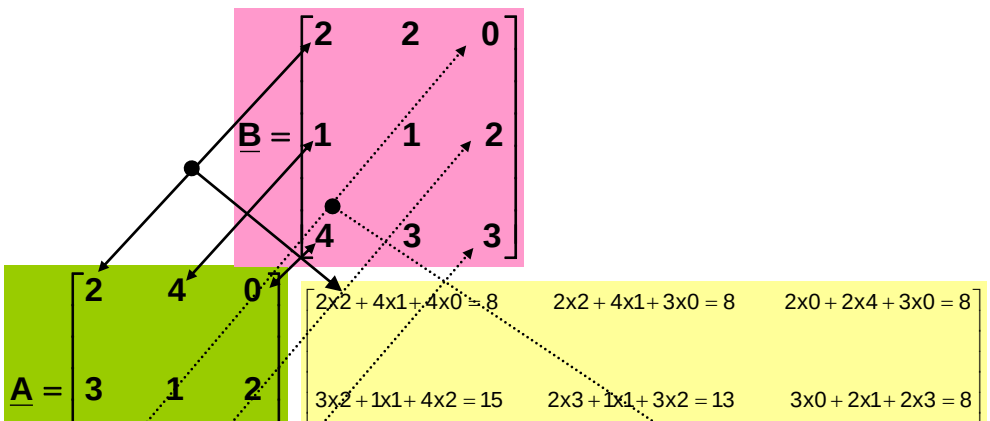
$A_{n_A m_A}$ matrisinin kolon [sütun] sayısı [m_A]=

$B_{n_B m_B}$ matrisinin satır sayısına[n_B] $C_{n_A m_B}$

Çarpımda kullanılan FALK şeması

Örnek 2.4: Verilen matrisleri falk şeması kullanılarak çarpımının yapılması

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



					A^{-1}			
					2	**-1**	**1**	**-1**
					5	**-7**	**8**	**0**
					1	**-1**	**1**	**0**
					-5	**5**	**-5**	**1**
A	**1**	**0**	**4**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
	3	**1**	**4**	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**
	2	**1**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**0**
	0	**0**	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
					A A^{-1}=I			

2.3. TEKİL (SİNGULER, DEJENERE) MATRİS

Bir matrisin determinantı sıfıra eşitse bu matrise tekil matris denir.

$\underline{A}_{3x3}$=			
	3	**-5**	**2**
	4	**5**	**-2**
	1	**10**	**-4**

det $\underline{A}$	**=**				**=0**
		3	**-5**	**2**	
		4	**5**	**-2**	
		1	**10**	**-4**	

Örnek 2.5: Aşağıda verilen matrisin tekil matris olması için (a=?) **a** değeri kaç olmalıdır?

$\underline{A}$ =

5	6	**a**	4
4	2	1	-3
0	2	8	8
0	0	4	2

Cevap: a=2.75

2.4. ORTAGONAL MATRİS ($A.A^T=I$)

Tranpozu ile kendisinin çarpımı birim matris olan matrise **ortaganal** matris denir. Bu matris en kolay yoldan birim matrisin kendisi ile transpozunun çarpımı birim matrisi verir.

				A^{-1}	
				1	**0**	**0**	**0**

					0	1	0	0
					0	0	1	0
					0	0	0	1
A	1	0	0	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	0	0	0	1
					$A\,A^{-1}=I$			

2.5. MATRİSİN MERTEBESİ (RANKI)

Bir matrisin mertebesi (rankı); mxn boyutlu bir matriste bazı satır ve sütunların silinmesiyle elde edilebilecek matrislerin determinantlarının sıfırdan faklı olanlarının büyük kare boyutlusuna denir. Yani determinantı sıfırdan faklı olan en büyük boyutlu kare matristir. Bir matrisin mertebesi ilk yaklaşım olarak en büyük satır ve sütun sayısından küçük olanına eşit olabilir veya bundan daha da küçük olabilir. Yani nxn olan bir matriste ilk bakışta mertebe en büyük n, nxm olan bir matriste ise küçük olanına eşit olabilir. Örneğin 4x4 olan kare bir matrisin mertebesi en büyük 4, 6x3 olan bir matrisin ise en büyük 3 olabilir. Bu konuda aşağıdaki örneklerin incelenmesiyle daha da iyi anlaşılabilir.

Örnek 2.6: Verilen matrisin mertebesinin (rankı) belirlenmesi,

Bu matrisin ilk bakıştaki mertebesi **r ≤ 5** dür. Bunun için determinantının hesaplanması gerekir.

$\underline{A}_{5x5}=$	5	6	4	0	0		det A=	5	6	4	0	0	=8768
	4	2	1	4	0			4	2	1	4	0	
	0	2	1	8	7			0	2	1	8	7	
	0	0	4	0	5			0	0	4	0	5	
	9	8	1	2	8			9	8	1	2	8	

Det =8768 olduğundan yani **det≠0** olduğundan bu matrisin mertebesi **r=5** dir.

Örnek 2.7: Verilen matrisin mertebesinin (rankı) belirlenmesi,

Bu matrisin ilk bakıştaki mertebesi **r ≤ 3** dür. Bunun için determinantının hesaplanmalı.

$\underline{A}_{3x3}=$	6	5	-3		det $\underline{A}$	6	5	-3	=0
	3	0	2			3	0	2	
	24	15	-5			24	15	-5	

Determinant sıfır olduğu için bu matrisin mertebesi **3** den küçüktür. Bunun için bu matrisin mertebesinin **2** olması için **2x2** olan matrislerin oluşturulması gerekir. Bunun için bu **3x3** olan bir matristen **3x3=9** tane **2x2** lik matris elde edilir ve bunların determinantlarının sıfırdan faklı olup olmadıklarına bakılarak mertebesine karar verilir. Burada 2. satır ile 2. sütunun silinmesiyle elde edilen matrisin determinantı,

$\underline{A}_{2x2}=$	6	-3		det $\underline{A}$	6	-3	=12
	24	-5			24	-5	

12 olduğundan (det≠0) bu matrisin **mertebesi** yani **rankı 2** dir.

Örnek 2.6: Verilen matrisin mertebesinin (rankı) belirlenmesi,

Bu matrisin ilk bakıştaki mertebesi **r ≤ 3** dür. Bunun için determinantının hesaplanması gerekir.

$\underline{A}_{3x3}=$	3	-5	2	-1	det $\underline{A}$	3	-5	2	=0
	4	5	-2	6		4	5	-2	
	1	10	-4	7		1	10	-4	

Verilen matris **3x4** boyutunda olduğu için en büyük boyutlu kare matris **3x3** olarak elde edilir. Bunun için her bir satırı silerek **4** tane **3x3** tane aşağıdaki tabloda görüldüğü gibi kare matris elde etmek mümkündür.

3	-5	2	det=0
4	5	-2	
1	10	-4	

3	-5	-1	det=0
4	5	6	
1	10	7	

3	2	-1	det=0
4	-2	6	
1	-4	7	

-5	2	-1	det=0
5	-2	6	
10	-4	7	

Elde edilen bu matrislerinde determinantları sıfır olduğu için mertebesi **3** değil **2** olabilir. Bunun için bu matriste **2x2** alt matrislerin determinantına bakılarak karar verilir. Burada **1.** ve **2.** satır ve **1** sütun silinerek elde edilen matrisin determinantı,

$\underline{A}_{2x2}=$	-2	6		det $\underline{A}$	-2	6	=-38
	-4	7			-4	7	

-38 bulunur ve matrisin mertebesinin **2** olduğu görülür.

Örnek 2.7: Verilen matrisin mertebesinin (rankı) belirlenmesi,

	1	3	-1	7	4	5

$\underline{A}_{4x6}$=						
	5	**2**	**2**	**6**	**7**	**1**
	3	**-1**	**-4**	**2**	**0**	**-1**
	7	**21**	**-7**	**49**	**28**	**35**

Bu matrisin il bakıştaki mertebesi **r ≤ 4** dür. Bunun için determinantının hesaplanması gerekir.

$\det\underline{A}_{4x4}$=							$\det\underline{A}_{4x4}$=						$\det\underline{A}_{4x4}$=						$\det\underline{A}_{4x4}$=					
	3	**-1**	**7**	**4**	=	**0**		**1**	**3**	**-1**	**7**	=	**0**		**-1**	**7**	**4**	**5**	=	**0**
	2	**2**	**6**	**7**				**5**	**2**	**2**	**6**				**2**	**6**	**7**	**1**		
	-1	**-4**	**2**	**0**				**3**	**-1**	**-4**	**2**				**-4**	**2**	**0**	**-1**		
	21	**-7**	**49**	**28**				**7**	**21**	**-7**	**49**				**-7**	**49**	**28**	**35**		

Determinant sıfırdan olduğu için bu matrisin mertebesi r<4'dür. Bu matristen de görülebileceği gibi determinant hesaplanarak boyut bulunması matrislerin boyutları büyüdükçe oldukça işlemler artmaktadır. Bunun için şu teoremin uygulanması işlemleri kolaylaştıracaktır.

Teorem: ***"Bir matrisin mertebesi, bu matrisin bir satırı (sütunu) herhangi bir sayı ile çarpılıp diğer bir satırına (sütununa) eklenmesiyle elde edilen matrisin mertebesine eşittir."*** Kuralı kullanılarak bu matrisin mertebesi buna göre bulunmuştur.

$\underline{A}_{4x6}$=													
	1	**3**	**-1**	**7**	**4**	**5**		1	3	-1	7	4	5
	5	**2**	**2**	**6**	**7**	**1**	**-5x1**.satır+**2**.satır	0	-13	7	-29	-13	-24
	3	**-1**	**-4**	**2**	**0**	**-1**	**-3x1**.satır+**3**.satır	0	-10	-1	-19	-12	-16
	7	**21**	**-7**	**49**	**28**	**35**	**-4x1**.satır+**4**.satır	0	0	0	0	0	0

Bu uygulama yapıldıktan sonra 4. satırın tüm elemanları sıfır olduğundan dolayı bu matrisin mertebesi 4 den küçük olduğu söylenebilir. Yani bir matrisin sıfır olan satır ve sütunu mertebeyi bir azaltmaktadır. Bu matrisin mertebesi ise son matristen bir 3x3 boyutlu matris alınarak hesaplanır.

$\det\underline{A}_{3x3}$=					
	7	4	5	=	**-87**
	-29	-13	-24		
	-19	-12	-16		

Determinant –87 olmasından yani det≠0 olması nedeniyle matrisin mertebesi **r=3** dür.

BÖLÜM 3

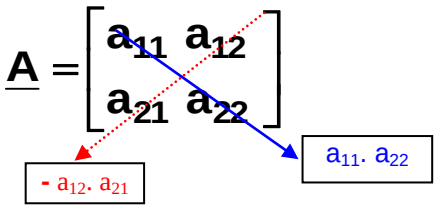
3.1. MATRİSLERİN DETERMİNANTININ HESABI

A_{1x1} boyutundaki bir matrisin determinantının hesaplanması

$$\underline{A} = [a_{11}] \qquad \det \underline{A} = [a_{11}]$$

A_{2x2} boyutundaki bir matrisin determinantının hesaplanması

$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı hesaplanması aşağıdaki şekilde olur.



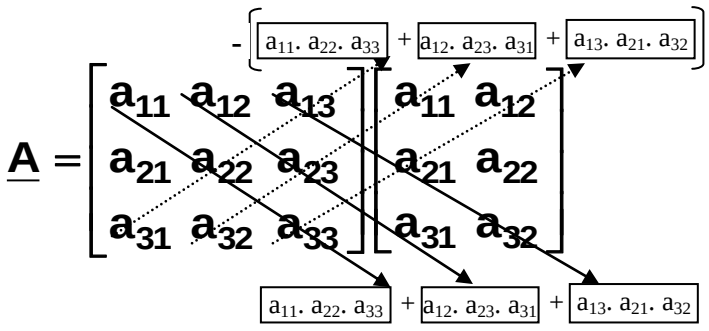
$$\det \underline{A} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Örnek 3.1: Verilen matrisin determinantının hesaplanması

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{A} = [-2x5] - [4x2] = -18$$

3.2. SARRUS YÖNTEMİ (A_{3X3})

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



$$\det \underline{A} = \left[[a_{11}. a_{22}. a_{33}] + [a_{12}. a_{23}. a_{31}] + [a_{13}. a_{21}. a_{32}] \right] - \left[[a_{11}. a_{22}. a_{33}] + [a_{12}. a_{23}. a_{31}] + [a_{13}. a_{21}. a_{32}] \right]$$

Örnek 3.2: Verilen matrisin determinantının **Sarrus** yöntemiyle hesabı.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{\det A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = [36]$$

UYGULAMA: **Determinant kullanılarak denklem sisteminin köklerini bulmak mümkündür.** Aşağıda verilen denklem sisteminde **[X_2=? X_3=?]** bilinmeyeninin bulunması.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$\underbrace{a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3}_{AX} = \underbrace{b_3}_{=b}$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$$
$$1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$
$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$$

Bulunması istenen bilinmeyen satırına eşitlik değerleri (b) yazılarak determinantı bulunur. Bulunan bu determinant katsayılar matrisinin determinantına bölünerek bilinmeyen bulunur.

$$X_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & \overset{b}{\underset{=}{2}} & 4 \\ 1 & \underset{=}{4} & 4 \\ 6 & \underset{=}{5} & 2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & \overset{b}{\underset{=}{2}} & 4 \\ 1 & \underset{=}{4} & 4 \\ 6 & \underset{=}{5} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{-56}{-2} = 28$$

$$X_3 = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & \overset{b}{\underset{=}{2}} \\ 1 & 3 & \underset{=}{4} \\ 6 & 2 & \underset{=}{5} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & \overset{b}{\underset{=}{2}} \\ 1 & 3 & \underset{=}{4} \\ 6 & 2 & \underset{=}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{39}{-2} = -19.5$$

Örnek 3.3: Verilen denklem sisteminde X_5 bilinmeyenin bulunması.

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2$$
$$+ 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4$$

$$1x_1 + \quad + 2x_3 + 1x_4 + 4x_5 = 6$$
$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 10$$

$$X_5 = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}} = \frac{180}{100} = 1.8 \qquad X_1=0.80 \qquad X_2=4.10 \qquad X_3=4.6 \qquad X_4=-11.20$$

3.3. CHIO YÖNTEMİYLE DETERMİNANT HESABI

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

İlk $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ kolonu veya $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ satır değerleri sabit alınarak tüm diğer kolon

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} a_{12} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} a_{13} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} a_{14}$$

ve satır

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \quad a_{21} \quad a_{22}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \quad a_{31} \quad a_{32}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \quad a_{41} \quad a_{42}$$

elemanları taranarak **n-1** boyutlu **2x2** lik matrisler aşağıdaki şekilde oluşturularak determinantları hesaplanır. Herbir **Chio** yöntemi uygulanması halinde matris boyutu bir derece küçültülür. Örneğin n=7 boyutlu bir matrisin (7x7) determinantı için 4 defa **Chio** yöntemi uygulanarak 3x3 boyutuna indirgenerek **Sarrus** yöntemiyle determinant hesaplanır.

$$\underline{A}=\frac{1}{a_{11}^{n-2}}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{12}\\ \underline{a_{21}} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{13}\\ \underline{a_{21}} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{14}\\ \underline{a_{21}} & a_{24}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{12}\\ \underline{a_{31}} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{13}\\ \underline{a_{31}} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{14}\\ \underline{a_{31}} & a_{34}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{12}\\ \underline{a_{41}} & a_{42}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{13}\\ \underline{a_{41}} & a_{43}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{a_{11}} & a_{14}\\ \underline{a_{41}} & a_{44}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Burada dikkat edilmesi gereken a_{11} elemanın **"0"** olması durumunda satır veya sütun değiştirilerek işleme devam edilir. **[Bir matriste Satır ve sütun değiştirmek matrisin determinantının işaretini değiştirir.]**

Örnek 3.4: Verilen matrisin determinantını hesaplayınız. (CHIO)

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5\\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$\det\underline{A}=\frac{1}{1^{5-2}}\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -5\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}3 & -5 & 7 & 6\\ 3 & -1 & 3 & 3\\ -2 & -6 & 0 & -3\\ 4 & -7 & 8 & 4\end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = \frac{1}{3^{4-2}} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\det \underline{A} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 12 & -12 & -9 \\ -28 & 14 & 3 \\ -1 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -28 & 14 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3^2}[(12 \text{ x} 14 \text{x}(-12)) + ((-12)\text{x}3\text{x}(-1)) + (-9\text{x}(-28)\text{x}(-4))]$$
$$- \ [((-9)\text{x}14\text{x}(-1)) + (12\text{x}3\text{x}(-4)) + (-12)\text{x}(-28)\text{x}(-12))] = 118$$

Bilgisayar ile kontrol yapılmıştır (excel)	1	-2	3	-2	-2		det <u>A</u>=118
	2	-1	1	3	2		
	1	1	2	1	1		
	1	-4	-3	-2	-5		
	3	-2	2	2	-2		

3.4. MATRİSİN DETERMİNANTININ ÖZELLİKLERİ

1. Bir kare matrisin bir satırında ve sütunundaki elemanların hepsi "0" ise o matrisin determinantı sıfırdır.

$A\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ den

bulunur ise. det A= 0 dır. Aynı şekilde satırın sıfır olması durumunda da determinantın sıfır olacağı görülür.

$B\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ det B= 0 olur.

2. Kare bir matrisin bir satırındaki veya sütunundaki elamanlar bir k sabitiyle çarpılmış olursa determinantı da bu k sayısıyla çarpılmış olur.

Örnek: satır

$A\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&0\\0&4&0\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&2\\0&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&2\\0&4\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise **det A= 10 + 0 + 36 - 8 - 30 = 8** dir. Verilen A matrisinin ilk satırı
[1 2 3] 4 ile çarpılır ise.

$A\begin{bmatrix}4&8&12\\3&2&2\\0&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&8\\3&2\\0&4\end{bmatrix}$ den hesaplanır ise.

det A= 40 + 0 + 144 -32 - 120 = 32 önceki determinant 8 x 4 =32 eder.

Örnek: sütun

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\4&2\\6&4\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise **det A= 8 + 36 + 48 - 36 - 24 - 16 = 16** dir.

Verilen **A** matrisinin ilk sütunu [2 4 6] **2** ile çarpılır ise.

$A\begin{bmatrix}2x2&2&3\\2x4&2&3\\2x6&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\8&2\\12&4\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı hesaplanır ise.

det A= 16 + 72 + 96 -72 - 48 - 32 = 32 önceki determinant 16 x 2 =32 idi.

AYRICA: 2 ile çarpılan bu sütunun başka bir sütuna eklenmesiyle yine determinant değişmez.

$A\begin{bmatrix}4&2+4&3\\8&2+8&3\\12&4+12&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&6\\8&10\\12&16\end{bmatrix}$

det A= 80 + 216 + 384 - 360 - 192 - 96 = 32 bu işlemi satır içinde yapabilirsiniz.

3. Bir matrisin herhangi komşu iki satırı veya sütunu yer değiştirdiği zaman matrisin determinantı işaret değiştirir.

Örnek: sütun değişimi.

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\4&2\\6&4\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise det A= 8 + 36 + 48 - 36 - 24 - 16 = **16** dir.

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&4&3\\4&6&2\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&4&3\\4&6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&4\\4&6\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise det A= 16 + 24 + 36 - 48 - 36 - 8 = - **16** dır.

Örnek: satır değişimi.

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\6&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\4&2\\6&4\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise det A= 8 + 36 + 48 - 36 - 24 - 16 = **16** dir.

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&4&3\\4&6&2\end{bmatrix}$ matrisinin determinantı. $A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&4&3\\4&6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&4\\4&6\end{bmatrix}$ den

hesaplanır ise **det A= 16 + 24 + 36 - 48 - 36 - 8 = - 16** dır.

VEYA. Verilen bir matrisin iki veya daha fazla satır veya sütunu yer değiştirmiş ise determinantın işareti

$(-1)^k$ ile bulunur. (k = değiştirilen sütun veya satır sayısı)

$A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&4&3\\4&6&2\end{bmatrix}$ verilen **A** matrisinin 2 satırı yer değiştirecek olur ise determinantı.

$A\begin{bmatrix}4&6&2\\2&2&3\\2&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&6\\2&2\\2&4\end{bmatrix}$ **det A = 24 + 36 + 16 - 8 - 48 - 36 = -16** dır. Bu

matrisin ilk halindeki determinantı 16 idi şimdi **$(-1)^1$ x 16 = -16**

4. Verilen bir matrisin iki satırı veya sütunu aynı ise matrisin determinantı sıfırdır.

Örnek: iki sütunun aynı olması durumu.

$$A\begin{bmatrix}2&2&5\\2&2&3\\4&4&2\end{bmatrix}$$ verilen bu matrisin iki sütunu aynı. buna göre determinantı

hesaplanır ise; $$A\begin{bmatrix}2&2&5\\2&2&3\\4&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&2\\4&4\end{bmatrix}$$ det A= 8 + 24 + 40 - 24 - 40 - 8 = 0

Örnek: İki satırın aynı olması durumu.

$$A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\4&6&2\end{bmatrix}$$ verilen bu matrisin iki sütunu aynı. buna göre determinantı

hesaplanır ise $$A\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\4&6&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&2\\4&6\end{bmatrix}$$ **det A= 8 + 24 + 36 - 24 - 36 - 8 = 0**

Bir matrisin bir satırı diğer bir satırına eşitse veya belli bir katı ise o matrisin determinantı sıfırdır. Buna matrisin kolon ve satırları LİNEER BAĞIMLI denir.

5. Bir köşegen matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\0&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}$$ det A= 2 x 2 x 2 = 8 dir.

6. Bir matrisin birinci satırının a_{11} elemanı hariç diğerleri sıfır ise determinantı a_{11}'re göre açılımın a_{11} ile çarpımına eşittir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\quad \det\underline{A}=a_{11}\begin{bmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\1&5&3&2\\4&1&3&4\\4&3&2&4\end{bmatrix}\quad \det\underline{A}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\1&5&3&2\\4&1&3&4\\4&3&2&4\end{bmatrix}=120\quad \det\underline{A}=4\begin{bmatrix}5&3&2\\1&3&4\\3&2&4\end{bmatrix}=4\text{x}30=120$$

7. İki matrisinin determinantlarının çarpımı matrislerin çarpımlarının determinantına eşittir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \underline{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad \underline{A}x\underline{B}=\underline{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \det\underline{A}=-20 \qquad \underline{B}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \det\underline{B}=91$$

$$\underline{C}=\underline{A}\ .\ \underline{B}=\begin{bmatrix} 24 & 36 & 26 \\ 30 & 37 & 29 \\ 22 & 46 & 39 \end{bmatrix} \qquad \det\underline{C}=-1820$$

$$\det\underline{A}\ x\ \det\underline{B}=\det\underline{C} \qquad \det\underline{C}=-20\,x\,91=-1820$$

8. **det $\underline{A}$=det $\underline{A}^T$**

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad \det\underline{A}=9 \qquad \underline{A}^T=\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \det\underline{A}^T=9$$

9. Bir matrisin determinantı **SATIR** veya **KOLON** göre kofaktörleri ile elemanların çarpımının toplamına eşittir.

Satıra göre $\underline{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}=[-48]-[18]+[46]=-20$

Kolona göre $\underline{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}+5\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=[-48]+[20]+[8]=-20$

10. $A^{-1}=\dfrac{[A^c]^T}{\det A}$ bağıntısı ile bir matrisin tersi bulunur. [A^c:Matrisin kofaktörüdür.]

ÖRNEK: Aşağıda verilen matrisin tersini determinantını kullanarak bulunuz.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^c = [-1]^{n+m}\det[x] = [-1]^{1+1}\det[1] = 1 \qquad \underline{A}^c = [-1]^{1+2}\det[5] = -5$$

$$\underline{A}^c = [-1]^{2+1}\det[2] = -2 \qquad \underline{A}^c = [-1]^{2+2}\det[4] = 4$$

$$\underline{A}^c = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad [\underline{A}^c]^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{A} = [-6]$$

$$A^{-1} = \frac{[A^C]^T}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}}{[-6]} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 5/6 & -2/3 \end{bmatrix}$$

KONTROL: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{I}$ $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 5/6 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ÖrnekK: Aşağıda verilen matrisin tersini determinantını kullanarak bulunuz.

$$\underline{A}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^c = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 8 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad [\underline{A}^c]^T = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \det \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 10$$

$$A^{-1} = \frac{[A^C]^T}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}}{[10]} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 0.6 \\ 0.8 & -0.2 & -0.4 \end{bmatrix}$$

KONTROL: $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{I}$ $\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.2 & -0.2 & 0.6 \\ 0.8 & -0.2 & -0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.4. LAPLACE AÇILIMI:

Bu yönteme göre açılım ya bir sütuna göre ya bir satıra göre yapılır.

i satırına göre açılım; $\det \underline{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}\right|$ **j** sütununa göre açılım;

$$\left|A_{ij}\right| = a_{ij}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \left[a_{ijko}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Satıra göre açılım:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Kolona göre açılım:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3+2} a_{31} \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Örnek: Verilen matrisin determinantının hesaplanması

$$\underline{A}\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+3}3\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}=10$$

Elemanına ait alt matrisin determinantıdır. Determinantı a_{ij} elemanının satır ve sütununun atılması ile elde edilen yeni matrise $[A_{ij}]$ alt matrisi veya a_{ij} elemanın **MİNÖRÜ** denir.

ÖRNEK: Aşağıda verilen $\underline{A}$ matrisinde 4'ün kofaktörünün bulunması.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&5&-3&-2\\-2&-3&2&-5\\1&3&-2&2\\-1&-6&4&3\end{bmatrix}\qquad \det\underline{A}=[-1]^{3+4}[4]\begin{bmatrix}2&5&-2\\-2&-3&-5\\1&3&2\end{bmatrix}=-36$$

Örnek : Aşağıda verilen $\underline{A}$ matrisinin determinantını **sütundaki** her elamana göre **Laplace** açılımı uygulayarak bulunması.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&5&-3&-2\\-2&-3&2&-5\\1&3&-2&2\\-1&-6&4&3\end{bmatrix}$$

$$\det A=(-1)^{1+1}(2)\begin{bmatrix}-3&2&-5\\3&-2&2\\-6&4&3\end{bmatrix}+(-1)^{2+1}(-2)\begin{bmatrix}5&-3&-2\\3&-2&2\\-6&4&3\end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{3+1}(1)\begin{bmatrix}5&-3&-2\\-3&2&-5\\-6&4&3\end{bmatrix}+(-1)^{4+1}(-1)\begin{bmatrix}5&-3&-2\\-3&2&-5\\3&-2&2\end{bmatrix}$$

$$\det A=(-1)^{1+1}2[0]+(-1)^{2+1}(-2)[-7]+(-1)^{3+1}(1)[13]+(-1)^{4+1}(-1)[-3]=-4$$

NOT:

1. **Sonuçların incelenmesinden de görülebileceği gibi satır ve sütuna göre açılım fark etmemektedir.**
2. **Sıfırı en çok bulunan kolon ve satırdan başlamak işlemleri azaltır.**

3.5. HERMİT MATRİS

Verilen bir matriste,

$$\underline{A} = \underline{A}^{H}$$

bağıntısı var ise bu matrise **HERMİT** matris denir. [$\underline{A}^{H}$ hermit transpoz]. Ayrıca,

$$\underline{A}\underline{A}^{H} = \underline{A}^{H}\underline{A}$$

bağıntısın sağlanıyor ise **normaldir.** Buna göre hermit matrisler aynı zamanda normaldir. Bir hermit matrisin reel bir skaler ile çarpımı ve hermit matrislerin toplamı yine hermittir.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$ verilen matris kare olmadığı için normal değildir.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$ verilen matris kare ve simetrik olduğu için normaldir.

Örnek: Verilen matrisin hermit olup olmadının belirlenmesi,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^{H} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{A}^{H} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix} = \underline{A}^{H}\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Yukarıda $\underline{A}\underline{A}^{H} = \underline{A}^{H}\underline{A}$ bağıntısının sağlandığı görülmektedir. Buna göre verilen matris hem normal hem de hermittir.

3.6. ADJOUT MATRİS

Bir matrisin $\mathbf{a_{ij}}$ elemanlarının yerine başlangıç artı (+) ve bundan sonra bir artı bir eksi olarak devam eden aynı elemanlara ait kofaktörlerinin determinantlarının yazılmasıyla elde edilen matrisin **transpozuna** denir.

Örnek: Verilen A matrisinde a_{11} ve a_{23} elemanlarının kofaktörlerinin hesaplanması.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a_{11}}$ elemanı için verilen matriste ($\underline{A}$) $\mathbf{a_{11}}$'in bulunduğu satır ve sütun silinerek geri kalandır. Bir elemanın kofaktörünün boyutu verilen matrisin boyutunun bir eksiğidir.

a_{11} için

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad a_{11ko} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{23} için

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad a_{23ko} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Açılımdaki işaret kuralı hem satırlar arasında hem sütunlar arasında değişerek devam eder. Boyutu tek sayılı olan matrislerde fark etmez iken çift sayılı matrislerde fark etmektedir.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}^T \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}^T \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{bmatrix}^T$$

Örnek: Verilen $\underline{A}$ matrisin **adj$\underline{A}$** hesabının yapılması

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\underline{A} = \begin{bmatrix} +\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ +\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & +\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 8 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj}\underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \\ 8 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Örnek: Verilen matris için $\underline{A}.[\text{adj}\underline{A}] = [\det \underline{A}]\underline{I}$ olduğunu gösteriniz.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. İlk önce Laplaca açılımı ile determinant aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}1\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}2\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+4}3\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 7 - 2 + 2x54 - 3x86 = -145$$

2. Adjoint matris hesaplanır.

$$\text{adj}\underline{A}=\begin{bmatrix} +\begin{bmatrix}4&3&2\\1&6&4\\3&1&1\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}2&3&2\\3&6&4\\5&1&1\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}2&4&2\\3&1&4\\5&3&1\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}2&4&3\\3&1&6\\5&3&1\end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix}2&2&3\\1&6&4\\3&1&1\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}1&2&3\\3&6&4\\5&1&1\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&4\\5&3&1\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}1&2&2\\3&1&6\\5&3&1\end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix}2&2&3\\4&3&2\\3&1&1\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\5&1&1\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&2\\5&3&1\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&3\\5&3&1\end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix}2&2&3\\4&3&2\\1&6&4\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&6&4\end{bmatrix} & -\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&2\\3&1&4\end{bmatrix} & +\begin{bmatrix}1&2&2\\2&4&3\\3&1&6\end{bmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}7&-1&54&-86\\25&-45&-35&45\\-9&22&-28&7\\-35&5&20&-5\end{bmatrix}^T$$

$$\text{adj}\underline{A}=\begin{bmatrix}7&-1&54&-86\\25&-45&-35&45\\-9&22&-28&7\\-35&5&20&-5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}7&25&-9&-35\\-1&-45&22&5\\54&-35&-28&20\\-86&45&7&-5\end{bmatrix}$$

$\underline{A}.[\text{adj}\underline{A}]=[\det \underline{A}]\underline{I}$ bağıntısı aşağıdaki şekilde ifade edilmiş olur.

$$\underline{A}.[\text{adj}\underline{A}]=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&3&2\\3&1&6&4\\5&3&1&1\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}7&25&-9&-35\\-1&-45&22&5\\54&-35&-28&20\\-86&45&7&-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-145&0&0&0\\0&-145&0&0\\0&0&-145&0\\0&0&0&-145\end{bmatrix}$$

$$[\det \underline{A}]\underline{I}=-145\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Örnek: Verilen matris için $\text{adj}.[\text{adj}\underline{A}]=\underline{A}$ olduğunu gösteriniz (A_{2X2}).

$$\underline{A}\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix} \qquad \text{adj}\underline{A}=\begin{bmatrix}(2)&-(4)\\(2)&-(2)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&2\\-4&-2\end{bmatrix}$$

$$\text{adj}[\text{adj}\,\underline{A}]=\text{adj}\left[\text{adj}\underline{A}=\begin{bmatrix}2&2\\-4&-2\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2&-(-4)\\2&-(-2)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix}$$

3.7. TEKİL VE TEKİL OLMAYAN MATRİS

det A = 0 ise matris tekildir (Düzensiz)

det A ≠ 0 ise matris tekil olmayan (Düzenli**)**

BÖLÜM 4

4. MATRİSLERİN TERSİNİN HESABI

Matrisler arasında **A.B=C** bağıntısında **A** matrisini elde etmek için normalde beklenen bağıntı $\mathbf{A=\frac{C}{B}}$ olur. Ancak matrisler arasında bölme işlemi $\mathbf{A=C.B^{-1}}$ şeklinde yapılmaktadır. Yani bir matrisin bir diğer matrise bölümü bölüm matrisinin tersinin alınarak bölünen matrisle çarpılmasıyla yapılmaktadır. Tersi alınan matrisin çarpılan matris ile boyutları yani çarpım boyutlarına uygun olması gerekir.

$$\frac{A}{B}=C \qquad A\frac{1}{B}=C \qquad AB^{-1}=C \qquad A^{-1}A=AA^{-1}=I\ (\text{birim matris})$$

4.1. ADJOUNT MATRİS YARDIMIYLA TERS MATRİSİN HESAPLANMASI

$$\underline{A}^{-1}=\frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det\underline{A}} \qquad \det\underline{A}\neq 0 \qquad \text{.....1}$$

Örnek 4.1. $A=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 8 & 7\end{bmatrix}$ matrisinin tersini hesaplayınız.

$$\underline{A}^{-1}=\frac{adj\underline{A}}{det\underline{A}}=\frac{\begin{bmatrix}7&-8\\-6&5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}5&6\\8&7\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}7&-6\\-8&5\end{bmatrix}}{5x7-6x8}=\frac{\begin{bmatrix}7&-6\\-8&5\end{bmatrix}}{-13}=\begin{bmatrix}-7/13&+6/13\\+8/13&-5/13\end{bmatrix}$$

sağlaması yapılacak olur ise; $A^{-1}x\ A=I=\begin{bmatrix}-7/13&+6/13\\+8/13&-5/13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\8&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Örnek 4.2. $\underline{A}\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}$ verilen $\underline{A}$ matrisinin tersini ($\underline{A}^{-1}$) bulunuz.

$$A\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&3\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2\\2&3\end{pmatrix}\\-\begin{pmatrix}2&3\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}\\+\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3\\4&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-5&-2&8\\5&-2&-2\\0&6&-4\end{bmatrix}=A^{T}\begin{bmatrix}-5&5&0\\-2&-2&6\\8&-2&-4\end{bmatrix}\qquad adj\underline{A}=\begin{bmatrix}-5&-2&0\\-2&-2&6\\8&-2&-4\end{bmatrix}$$

$\underline{A}$ matrisinin determinantı **Laplace** açılımından hesaplanacak olur ise.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=(-1)^{1+1}2\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+3}3\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}=10$$

bulunan **adj$\underline{A}$** ve **det$\underline{A}$** değerleri 1 denkleminde yerlerine yazılacak olur ise;

$$\underline{A}^{-1}=\frac{adj\underline{A}}{det\underline{A}}=\frac{adjA\begin{bmatrix}-5&5&0\\-2&-2&6\\8&-2&-4\end{bmatrix}}{det\underline{A}[10]}=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\-0.2&-0.2&0.6\\0.8&-0.2&-0.4\end{bmatrix}$$

KONTROL: $A^{-1}A=I$ kullanılarak;

			A=	2	2	3
				4	2	3
				2	3	2
I=	-0.5	0.5	0	**1**	**0**	**0**
	-0.2	-0.2	0.6	**0**	**1**	**0**
	0.8	-0.2	-0.4	**0**	**0**	**1**
	$\underline{A}^{-1}$			$\underline{I}$		

Örnek 4.3: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin **tersinin** bulunması.

İlk önce bu matrisin determinantı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\det A = (-1)^{1+1}2\begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1}(-2)\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1}1\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{4+1}(-1)\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+1}2[0] + (-1)^{2+1}(-2)[-7] + (-1)^{3+1}(1)[13] + (-1)^{4+1}(-1)[-3] = -4$$

Bundan sonra **adjA** matrisi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\ +\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \\ -1 & -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Yukarıda matrisin içindeki matrislerin determinantı **(3x3) Sarrus** yöntemine göre hesaplanır.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & -12 & 0 \\ 7 & -17 & -23 & -1 \\ 13 & -31 & -41 & -3 \\ 3 & -13 & -19 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 13 & 3 \\ -8 & -17 & -31 & -13 \\ -12 & -23 & -41 & -19 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{-1}=\frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det\underline{A}}=\frac{\text{adjA}=\underline{A}^{T}=\begin{bmatrix}0&7&13&3\\-8&-17&-31&-13\\-12&-23&-41&-19\\0&-1&-3&-1\end{bmatrix}}{\det\underline{A}(-4)}=\begin{bmatrix}0&-7/4&-13/4&-3/4\\2&17/4&31/4&13/4\\3&23/4&41/4&19/4\\0&1/4&3/4&1/4\end{bmatrix}$$

Kontrol **(A^{-1} A=I)**

					A			
					2	**5**	**-3**	**-2**
					-2	**-3**	**2**	**-5**
					1	**3**	**-2**	**2**
					-1	**-6**	**4**	**3**
	0	**-1.75**	**-3.25**	**-0.75**	1	0	0	0
	2	**4.25**	**7.75**	**3.25**	0	1	0	0
	3	**5.75**	**10.25**	**4.75**	0	0	1	0
	0	**0.25**	**0.75**	**0.25**	0	0	0	1
	$\underline{A}^{-1}$				**I**			

ÖRNEK: [A] matrisin tersinin **[A^{-1}]** adjount matrisi **[adjA]** kullanarak bulunması $\underline{A}^{-1}=\frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det\underline{A}}$

A	=						
		4	2	0	4	0	1
		2	2	0	2	2	2
		3	3	-3	3	-2	3
		5	1	2	0	-2	1
		1	1	1	0	-2	2
		2	0	2	2	2	3

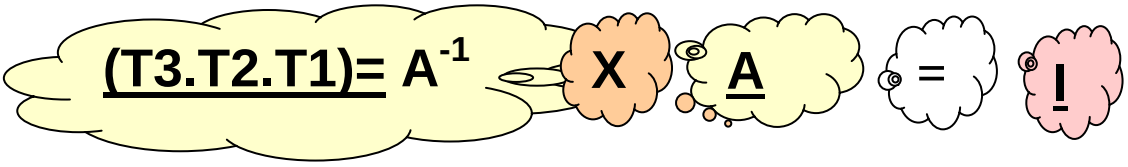
A=

| | | | | | |

| | | |

Bu yöntem adım adım yöntemi olarak da bilinir. Bu yöntemde **Anxn** düzenli matrisin tersi ardışık transformasyonlar yardımıyla bulunur. Her adımda bir tane diyagonal eleman olmak üzere toplam **n** adımda **T1. T2. T3.....Tn** transformasyon matrisleri ile **Anxn** matrisi soldan ardışık çarpımlarla birim matris oluşturulur.

Buna göre **T3.T2.T1 A = I** olmalıdır.



Yani $A^{-1} A = I$ olmaktadır. İşlemler aşağıda adım adım açıklanmaktadır.

Birim matris $\underline{I}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ olduğuna göre ve sonuçta elde edilmesi gereken matris olduğundan bu matris üzerinde işlemler yapılarak sonuca gidilmektedir.

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

1. Adım $T_1=\begin{bmatrix}1/a_{11}&0&0&0\\-a_{21}/a_{11}&1&0&0\\-a_{31}/a_{11}&0&1&0\\-a_{41}/a_{11}&0&0&1\end{bmatrix}$ $\qquad \underline{B}=T_1\underline{A}=\begin{bmatrix}1&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\0&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\0&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\0&b_{42}&b_{43}&b_{44}\end{bmatrix}$

2. Adım $T_2=\begin{bmatrix}1&-b_{12}/b_{22}&0&0\\0&1/b_{22}&0&0\\0&-b_{32}/b_{22}&1&0\\0&-b_{42}/b_{22}&0&1\end{bmatrix}$ $\qquad \underline{C}=\underline{T_2}\underline{B}=\begin{bmatrix}1&0&c_{13}&c_{14}\\0&1&&\\0&0&&\\0&0&&\end{bmatrix}$

3. **Adım** $T_3=\begin{bmatrix}1&0&-c_{13}/c_{33}&0\\0&1&-c_{23}/c_{33}&0\\0&0&1/c_{33}&0\\0&0&-c_{43}/c_{33}&1\end{bmatrix}$ $\qquad \underline{D}=\underline{T_3}\,\underline{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&d_{14}\\0&1&0&d_{24}\\0&0&1&d_{34}\\0&0&0&d_{44}\end{bmatrix}$

4. **Adım** $T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d_{14}/d_{44} \\ 0 & 1 & 0 & -d_{24}/d_{44} \\ 0 & 0 & 1 & -d_{34}/d_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 1/d_{44} \end{bmatrix}$ $E = \underline{T_4 D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Genel olarak nxn matris için aşağıdaki şekilde yazılır.

n. Adım $T_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ..... & -d_{1n}/d_{nn} \\ 0 & 1 & 0 & ..... & -d_{2n}/d_{nn} \\ 0 & 0 & 1 & ..... & -d_{3n}/d_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & ..... & 1/d_{nn} \end{bmatrix}$ $N = \underline{T_n N_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ÖRNEK: Verilen rijitlik matrisinin tersinin bulunması [**GAUSS-JORDAN YÖNTEMİYLE**]

A	=	264.50	-132.25	0	0
		-132.25	264.50	-132.25	0
		0	-132.25	264.50	-132.25
		0	0	-132.25	132.25

264.50	-132.25	0	0	1	0	0	0	1/264.50	0	0	0
-132.25	264.50	-132.25	0	0	1	0	0	132.25/264.50	1	0	0
0	-132.25	264.50	-132.25	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	-132.25	132.25	0	0	0	1	0	0	0	1
[A]				[I]				[T_1]			

0.00378	0	0	0	x	264.50	-132.25	0	0	=	1	-0.5	0	0
0.50	1	0	0		-132.25	264.50	-132.25	0		0	198.375	-132.25	0
0	0	1	0		0	-132.25	264.50	-132.25		0	-132.25	264.5	-132.25
0	0	0	1		0	0	-132.25	132.25		0	0	-132.25	132.25
[T_1]				x	[A]				=	[B]= [T_1] [A]			

[T_2]	=	1	-0.5/198.375	0	0
		0	1/198.375	0	0
		0	-132.25/198.375	1	0
		0	0	0	1

[T_2]	=	1	0.00252	0	0
		0	0.00504	0	0
		0	0.66667	1	0
		0	0	0	1

1	0.00252	0	0	x	1	-0.5	0	0	=	1	0	-0.33327	0
0	0.00504	0	0		0	198.375	-132.25	0		0	1	-0.66654	0
0	0.66667	1	0		0	-132.25	264.5	-132.25		0	0	176.3333	-132.25
0	0	0	1		0	0	-132.25	132.25		0	0	-132.25	132.25

$[T_2]$	x	$[B]$	=	$[C]= [T_2]\,[B]$

$[T_3]$ =

1	0	-0.33327	0
0	1	-0.66654	0
0	0	176.3333	-132.25
0	0	-132.25	132.25

$[T_3]$ =

1	0	0.00189	0
0	1	0.00378	0
0	0	0.00567	0
0	0	0.75	1

1	0	0.00189	0	x	1	-0.5	0	0	=	1	0	0	-0.24995
0	1	0.00378	0		0	198.375	-132.25	0		0	1	0	-0.49991
0	0	0.00567	0		0	-132.25	264.5	-132.25		0	0	1	-0.74986
0	0	0.75	1		0	0	-132.25	132.25		0	0	0	33.0625
$[T_3]$				x	$[C]$				=	$[D]= [T_3]\,[C]$			

$[T_4]$ =

1	0	0	-0.24995
0	1	0	-0.49991
0	0	1	-0.74986
0	0	0	33.0625

$[T_4]$ =

1	0	0	0.00756
0	1	0	0.01510
0	0	1	0.02268
0	0	0	0.030246

1	0	0	0.00756	x	1	0	0.00189	0	x	1	0.00252	0	0	x	0.00378	0	0	0	=	0.00756	0.00756	0.00756	0.00756
0	1	0	0.0151		0	1	0.00378	0		0	0.00504	0	0		0.5	1	0	0		0.007555	0.01511	0.015105	0.0151
0	0	1	0.02268		0	0	0.00567	0		0	0.66667	1	0		0	0	1	0		0.00756	0.01512	0.02268	0.02268
0	0	0	0.030246		0	0	0.75	1		0	0	0	1		0	0	0	1		0.007562	0.015123	0.022685	0.030246
$[T_4]$				x	$[T_3]$				x	$[T_2]$				x	$[T_1]$				=	$[A^{-1}] =[T_4]\,[T_3]\,[T_2]\,[T_1]$			

ÖRNEK: [A] matrisin tersinin **[A^{-1}]** adjount matrisi **[adjA]** kullanarak bulunması $\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det \underline{A}}$

A =

264.50	-132.25	0	0
-132.25	264.50	-132.25	0
0	-132.25	264.50	-132.25
0	0	-132.25	132.25

A=

	264.50	-132.25	0		-132.25	-132.25	0		-132.25	264.50	0		-132.25	264.50	-132.25
+	-132.25	264.50	-132.25	-	0	264.50	-132.25	+	0	-132.25	-132.25	-	0	-132.25	264.50
	0	-132.25	132.25		0	-132.25	132.25		0	0	132.25		0	0	-132.25
	-132.25	0	0		264.50	0	0		264.50	-132.25	0		264.50	-132.25	0
-	-132.25	264.50	-132.25	+	0	264.50	-132.25	-	0	-132.25	-132.25	+	0	-132.25	264.50
	0	-132.25	132.25		0	-132.25	132.25		0	0	132.25		0	0	-132.25
	-132.25	0	0		264.50	0	0		264.50	-132.25	0		264.50	-132.25	0
+	264.50	-132.25	0	-	-132.25	-132.25	0	+	-132.25	264.50	0	-	-132.25	264.50	-132.25
	0	-132.25	132.25		0	-132.25	132.25		0	0	132.25		0	0	-132.25
	-132.25	0	0		264.50	0	0		264.50	-132.25	0		264.50	-132.25	0
-	264.50	-132.25	0	+	-132.25	-132.25	0	-	-132.25	264.50	0	+	-132.25	264.50	-132.25
	-132.25	264.50	-132.25		0	264.50	-132.25		0	-132.25	-132.25		0	-132.25	264.50

A	=	2313060.8	2313061	2313060.8	2313061	T
		2313061	4626121.5	4626122	4626121.5	
		2313060.8	4626122	6939182.3	6939182	
		2313061	4626121.5	6939182	9252243.1	

adjA	=	2313061	2313061	2313060.8	2313061
		2313061	4626122	4626122	4626122
		2313061	4626122	6939182.3	6939182
		2313061	4626122	6939182	9252243

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det \underline{A}} = \frac{\begin{bmatrix} 2313061 & 2313061 & 2313061 & 2313061 \\ 2313061 & 4626122 & 4626122 & 4626122 \\ 2313061 & 4626122 & 6939182 & 6939182 \\ 2313061 & 4626122 & 6939182 & 9252243 \end{bmatrix}}{\det \underline{A}\,(305902286.3)}$$

2313061	2313061	2313060.8	2313061		3.27E-09	0	0	0		0.007561396	0.007561396	0.007561396	0.007561396
2313061	4626122	4626122	4626122		0	3.27E-09	0	0		0.007561396	0.015122791	0.015122793	0.015122791
2313061	4626122	6939182.3	6939182	x	0	0	3.27E-09	0	=	0.007561396	0.015122793	0.022684187	0.022684186
2313061	4626122	6939182	9252243		0	0	0	3.27E-09		0.007561396	0.015122791	0.022684186	0.030245583
adj[A]				x	**det[A]**				=	$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det \underline{A}}$			

KONTROL $[A^{-1}][A]=[I]$						$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{adj}\,\underline{A}}{\det \underline{A}}$			
						0.007561396	0.007561396	0.007561396	0.007561396
						0.007561396	0.015122791	0.015122793	0.015122791
						0.007561396	0.015122793	0.022684187	0.022684186
						0.007561396	0.015122791	0.022684186	0.030245583
A	**=**	264.50	-132.25	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**
		-132.25	264.50	-132.25	0	**0**	**1**	**0**	**0**
		0	-132.25	264.50	-132.25	**0**	**0**	**1**	**0**
		0	0	-132.25	132.25	**0**	**0**	**0**	**1**
						$[A^{-1}][A]=[I]$			

Örnek 4.4: Aşağıda verilen matrisinin tersinin ($\underline{A}^{-1}$) **Gauss-Jordan** yöntemiyle hesaplanması

$$\underline{A}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B = T_1A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1/4 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1/4 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 11/4 \end{bmatrix} \quad C = T_2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 13/8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 13/8 \end{bmatrix} = C$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/8/(13/8) \\ 0 & 1 & 3/4/(13/8) \\ 0 & 0 & 1/(13/8) \end{bmatrix} \quad T_3C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/13 \\ 0 & 1 & -6/13 \\ 0 & 0 & 8/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_3C$$

$T_3\ T_2\ T_1$ çarpılarak ters matris olan A^{-1} bulunur.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/13 \\ 0 & 1 & -6/13 \\ 0 & 0 & 8/13 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/13 & -4/13 & 1/13 \\ -4/13 & 11/13 & -6/13 \\ 1/13 & -6/13 & 8/13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \quad T_3 \quad . \quad T_2 \quad . \quad T_1$$

Kontrol yapılacak olur ise; **[A A^{-1}=I]**

$$\underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/13 & -4/13 & 1/13 \\ -4/13 & 11/13 & -6/13 \\ 1/13 & -6/13 & 8/13 \end{bmatrix} \underline{A} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek 4.5: Aşağıda verilen matrisin **Gauss-Jordan** yöntemiyle tersini ($\underline{A}^{-1}$) bulunuz.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2/1 & 1 & 0 & 0 \\ -2/1 & 0 & 1 & 0 \\ -2/1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

				A								$B=T_1A$			
				1	**2**	**0**	**1**					1	2	0	1
				2	**2**	**1**	**2**					0	-2	1	0
				2	**0**	**0**	**1**					0	-4	0	-1
				2	**0**	**2**	**0**					0	-4	2	-2
1	**0**	**0**	**0**	1	2	0	1	1	1	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**
-2/1	**1**	**0**	**0**	0	-2	1	0	0	-1/2	0	0	**0**	**1**	**-1/2**	**0**
-2/1	**0**	**1**	**0**	0	-4	0	-1	0	-2	1	0	**0**	**0**	**-2**	**-1**

-2/1	**0**	**0**	**1**	0	-4	2	-2
T_1				B=T_1 A			

0	-2	0	1	**0**	**0**	**0**	**-2**
T_2				**C=T_2 B**			

				C			
				1	**0**	**1**	**1**
				0	**1**	**-1/2**	**0**
				0	**0**	**-2**	**-1**
				0	**0**	**0**	**-2**
1	**0**	**1/2**	**0**	1	0	0	1/2
0	**1**	**-1/4**	**1**	0	1	0	1/4
0	**0**	**-1/2**	**0**	0	0	1	1/2
0	**0**	**0**	**0**	0	0	0	-2
T_3				D=T_3C			

T_4=	**1**	**0**	**0**	**1/4**
	0	**1**	**0**	**1/8**
	0	**0**	**1**	**1/4**
	0	**0**	**0**	**-1/2**

T4, T3, T2, T1 bulunduktan sonra bunların çarpımı olan ters matris aşağıdaki şekilde bulunur. **[(T4.T3.T2.T1)= A^{-1}]**

				T_3				T_2				T_1			
				1	**0**	**1/2**	**0**	1	1	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**
				0	**1**	**-1/4**	**1**	0	-1/2	0	0	**-2/1**	**1**	**0**	**0**
				0	**0**	**-1/2**	**0**	0	-2	1	0	**-2/1**	**0**	**1**	**0**
				0	**0**	**0**	**0**	0	-2	0	1	**-2/1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1/4**	1	0	1/2	1/4	**1**	**-1/2**	**1/2**	**1/4**	1/2	-1/2	1/2	1/4
0	**1**	**0**	**1/8**	0	1	-1/4	1/8	**0**	**-1/4**	**-1/4**	**1/8**	3/4	-1/4	-1/4	1/8
0	**0**	**1**	**1/4**	0	0	-1/2	1/4	**0**	**1/2**	**-1/2**	**1/4**	-1/2	1/2	-1/2	1/4
0	**0**	**0**	**-1/2**	0	0	0	-1/2	**0**	**1**	**0**	**-1/2**	-1	1	0	-1/2
T_4				T_4 T_3				**T_4 T_3 T_2**				A^{-1}=T_4 T_3 T_2 T_1			

Kontrol yapılırsa,

$$A^{-1}A = I$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol yapılacak olur ise (Excel), **(A^{-1} A=I)**

					A			
					1	2	0	1
					2	2	1	2
					2	0	0	1
					2	0	2	0
A^{-1}	0.5	-0.5	0.5	0.25	1	0	0	0
	0.75	-0.25	-0.25	0.125	0	1	0	0

	-0.5	0.5	-0.5	0.25	0	0	1	0
	-1	1	0	-0.5	0	0	0	1

Örnek 4.6:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$$ verilen matrisin tersini **Gauss-Jordan** yöntemiyle bulunuz.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

				A	2	4	3	2
					3	6	5	2
					2	5	2	-3
					4	5	14	14
T_1	0,5	0	0	0	1	2	1,5	1
	-1,5	1	0	0	0	0	0,5	-1
	-1	0	1	0	0	1	-1	-5
	-2	0	0	1	0	-3	8	10
					$B = T_1 A$			

NOT: B matrisinde a_{22} diyagonal elemanının **"0"** olmasından dolayı **2.** Satır ile **3.** Satır yer değiştirilir.

2.satır ile 3.satır değişti			
1	2	1,5	1
0	1	-1	-5
0	0	0,5	-1
0	-3	8	10

T_2			
1	**-2**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**3**	**0**	**1**

				T_2B	1	2	1,5	1
					0	1	-1	-5
					0	0	0,5	-1
					0	-3	8	10
T_2	**1**	**-2**	**0**	**0**	1	0	3,5	11
	0	**1**	**0**	**0**	0	1	-1	-5
	0	**0**	**1**	**0**	0	0	0,5	-1
	0	**3**	**0**	**1**	0	0	5	-5
					$C = T_2 B$			

$T_2 C$	1	0	3,5	11
	0	1	-1	-5

					0	0	0,5	-1
					0	0	5	-5
$\underline{T_3}$ =	**1**	**0**	**-7**	**0**	1	0	0	18
	0	**1**	**2**	**0**	0	1	0	-7
	0	**0**	**2**	**0**	0	0	1	-2
	0	**0**	**-10**	**1**	0	0	0	5
					$\underline{D} = \underline{T_2}\,\underline{C}$			

T_4	**1**	**0**	**0**	**-3,6**
	0	**1**	**0**	**1,4**
	0	**0**	**1**	**0,4**
	0	**0**	**0**	**0,2**

					T_3				T_2				T_1			
					1	0	-7	0	**1**	**-2**	**0**	**0**	0,5	0	0	0
					0	1	2	0	**0**	**1**	**0**	**0**	-1,5	1	0	0
					0	0	2	0	**0**	**0**	**1**	**0**	-1	0	1	0
					0	0	-10	1	**0**	**3**	**0**	**1**	-2	0	0	1
T_4	1	0	0	-3,6	1	0	29	-3,6	1	-12,8	29	-3,6	-2,1	-12,8	29	-3,6
	0	1	0	1,4	0	1	-12	1,4	0	5,2	-12	1,4	1,4	5,2	-12	1,4
	0	0	1	0,4	0	0	-2	0,4	0	1,2	-2	0,4	-0,6	1,2	-2	0,4
	0	0	0	0,2	0	0	-2	0,2	0	0,6	-2	0,2	0,7	0,6	-2	0,2
					$\underline{T_4}\,\underline{T_3}$				$\underline{T_4}\,\underline{T_3}\,\underline{T_2}$				$\underline{A^{-1}} = \underline{T_4}\,\underline{T_3}\,\underline{T_2}\,\underline{T_1}$			

$\underline{A^{-1}} = \underline{T_4}\,\underline{T_3}\,\underline{T_2}\,\underline{T_1}$	-2,1	-12,8	29	-3,6
	1,4	5,2	-12	1,4
	-0,6	1,2	-2	0,4
	0,7	0,6	-2	0,2

2.kolon ile 3.kolon yer değiştirir			
-2,1	29	-12,8	-3,6
1,4	-12	5,2	1,4
-0,6	-2	1,2	0,4
0,7	-2	0,6	0,2

$\underline{A^{-1}} = \underline{T_4}\,\underline{T_3}\,\underline{T_2}\,\underline{T_1}$					-23	29	-12,8	-3,6
					10	-12	5,2	1,4
					1	-2	1,2	0,4
					2	-2	0,6	0,2
A	2	4	3	2	1	0	0	0
	3	6	5	2	0	1	0	0
	2	5	2	-3	0	0	1	0
	4	5	14	14	0	0	0	1

$\underline{A^{-1}}$	=	-23	29	-64/5	-18/5		-23	29	-12.8	-3.6
		10	-12	26/5	7/5		10	-12	5.2	1.4
		1	-2	6/5	2/5		1	-2	1.2	0.4
		2	-2	3/5	1/5	=	2	-2	0.6	0.2

UYGULAMA: Verilen matrisin tersinin **Gauss-Jordan** yöntemiyle bulunması.

A	=						
		4	2	0	4	0	1
		2	2	0	2	2	2
		3	3	-3	3	-2	3
		5	1	2	0	-2	1
		1	1	1	0	-2	2
		2	0	2	2	2	3

T_1	=						
		0.25	0	0	0	0	0
		-0.50	1	0	0	0	0
		-0.75	0	1	0	0	0
		-1.25	0	0	1	0	0
		-0.25	0	0	0	1	0
		-0.50	0	0	0	0	1

T_1	=							**A**					
								4	2	0	4	0	1
								2	2	0	2	2	2
								3	3	-3	3	-2	3
								5	1	2	0	-2	1
								1	1	1	0	-2	2
								2	0	2	2	2	3
		0.25	0	0	0	0	0	**1**	0.5	0	1	0	0.25
		-0.50	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1.5
		-0.75	0	1	0	0	0	0	1.5	-3	0	-2	2.25
		-1.25	0	0	1	0	0	0	-1.5	2	-5	-2	-0.25
		-0.25	0	0	0	1	0	0	0.5	1	-1	-2	1.75
		-0.50	0	0	0	0	1	0	-1	2	0	2	2.5
								B=T_1A					

T_2	=						
		1	-0.5	0	0	0	0
		0	**1**	0	0	0	0
		0	-1.5	1	0	0	0
		0	1.5	0	1	0	0
		0	-0.5	0	0	1	0
		0	1	0	0	0	1

T_2	=							**B**					
								1	0.5	0	1	0	0.25
								0	1	0	0	2	1.5
								0	1.5	-3	0	-2	2.25
								0	-1.5	2	-5	-2	-0.25
								0	0.5	1	-1	-2	1.75
								0	-1	2	0	2	2.5
		1	-0.5	0	0	0	0	**1**	0	0	1	-1	-0.5
		0	1	0	0	0	0	0	**1**	0	0	2	1.5
		0	-1.5	1	0	0	0	0	0	-3	0	-5	0
		0	1.5	0	1	0	0	0	0	2	-5	1	2
		0	-0.5	0	0	1	0	0	0	1	-1	-3	1
		0	1	0	0	0	1	0	0	2	0	4	4
								C=T_2B					

T_3	=						
		1	0	0	0	0	0
		0	1	0	0	0	0
		0	0	**-0.3333**	0	0	0
		0	0	0.6667	1	0	0
		0	0	0.3333	0	1	0
		0	0	0.6667	0	0	1

C					
1	0	0	1	-1	-0.5
0	1	0	0	2	1.5
0	0	-3	0	-5	0
0	0	2	-5	1	2
0	0	1	-1	-3	1
0	0	2	0	4	4

T_3	=												
		1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	-0.5
		0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1.5
		0	0	-0.3333	0	0	0	0	0	1	0	1.6665	0
		0	0	0.6667	1	0	0	0	0	0	-5	-2.3335	2
		0	0	0.3333	0	1	0	0	0	0	-1	-4.6665	1
		0	0	0.6667	0	0	1	0	0	0	0	0.6665	4
								D=T_3C					

T_4	=						
		1	0	0	0.20	0	0
		0	1	0	0	0	0
		0	0	1	0	0	0
		0	0	0	**-0.20**	0	0
		0	0	0	-1	1	0
		0	0	0	0	0	1

D					
1	0	0	1	-1	-0.5
0	1	0	0	2	1.5
0	0	1	0	1.6665	0
0	0	0	-5	-2.3335	2
0	0	0	-1	-4.6665	1
0	0	0	0	0.6665	4

T_4	=												
		1	0	0	0.20	0	0	1	0	0	0	-1.4667	-0.1
		0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	2	1.5
		0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1.6665	0
		0	0	0	**-0.20**	0	0	0	0	0	1	0.4667	-0.4
		0	0	0	-0.20	1	0	0	0	0	0	-4.1998	0.6
		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.6665	4
									E=T_4D				

T_5	=													
		1	0	0	0	-1.4667/4.1998	0	=	1	0	0	0	-0.3492	0
		0	1	0	0	2/4.1998	0		0	1	0	0	0.4762	0
		0	0	1	0	1.6665/4.1998	0		0	0	1	0	0.3968	0
		0	0	0	1	0.4667/4.1998	0		0	0	0	1	0.1111	0
		0	0	0	0	-1/4.1998	0		0	0	0	0	**-0.2381**	0
		0	0	0	0	0.6665/4.1998	1		0	0	0	0	0.1587	1

E					
1	0	0	0	-1.4667	-0.1
0	1	0	0	2	1.5
0	0	1	0	1.6665	0
0	0	0	1	0.4667	-0.4
0	0	0	0	-4.1998	0.6
0	0	0	0	0.6665	4

T_5	=												
		1	0	0	0	-0.3492	0	1	0	0	0	0	-0.3095

		0	1	0	0	0.4762	0	0	1	0	0	0	1.78572
		0	0	1	0	0.3968	0	0	0	1	0	0	0.23808
		0	0	0	1	0.1111	0	0	0	0	1	0	-0.3333
		0	0	0	0	**-0.2381**	0	0	0	0	0	1	-0.1429
		0	0	0	0	0.1587	1	0	0	0	0	0	4.09522
								F=T$_5$E					

T$_6$	=	1	0	0	0	0	-0.3095/4.09522	=	1	0	0	0	0	0.07558
		0	1	0	0	0	1.78572/4.09522		0	1	0	0	0	-0.4360
		0	0	1	0	0	0.23808/4.09522		0	0	1	0	0	-0.05814
		0	0	0	1	0	-0.3333/4.09522		0	0	0	1	0	0.08139
		0	0	0	0	1	-0.1429/4.09522		0	0	0	0	1	0.03489
		0	0	0	0	0	1/4.09522		0	0	0	0	0	**0.2442**

KONTROL [T_6] NIN

								F					
								1	0	0	0	0	-0.3095
								0	1	0	0	0	1.78572
								0	0	1	0	0	0.23808
								0	0	0	1	0	-0.3333
								0	0	0	0	1	-0.1429
								0	0	0	0	0	4.09522
T$_6$	=	1	0	0	0	0	0.07558	1	0	0	0	0	0
		0	1	0	0	0	-0.4360	0	1	0	0	0	0
		0	0	1	0	0	-0.05814	0	0	1	0	0	0
		0	0	0	1	0	0.08139	0	0	0	1	0	0
		0	0	0	0	1	0.03489	0	0	0	0	1	0
		0	0	0	0	0	0.2442	0	0	0	0	0	1
								G=T$_6$F					

						T$_5$						**T$_4$**					
						1	0	0	0	-0.3492	0	1	0	0	0.2	0	0
						0	1	0	0	0.4762	0	0	1	0	0	0	0
						0	0	1	0	0.3968	0	0	0	1	0	0	0
						0	0	0	1	0.1111	0	0	0	0	**-0.2**	0	0
						0	0	0	0	**-0.2381**	0	0	0	0	-0.2	1	0
						0	0	0	0	0.1587	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0.07558	1	0	0	0	-0.33721	0.07558	1	0	0	0.267441	-0.33721	0.07558
0	1	0	0	0	-0.436	0	1	0	0	0.407007	-0.436	0	1	0	-0.0814	0.407007	-0.436
0	0	1	0	0	-0.05814	0	0	1	0	0.387573	-0.05814	0	0	1	-0.07751	0.387573	-0.05814
0	0	0	1	0	0.08139	0	0	0	1	0.124017	0.08139	0	0	0	-0.2248	0.124017	0.08139
0	0	0	0	1	0.03489	0	0	0	0	-0.23256	0.03489	0	0	0	0.046513	-0.23256	0.03489
0	0	0	0	0	**0.2442**	0	0	0	0	0.038755	0.2442	0	0	0	-0.00775	0.038755	0.2442
T$_6$						**T$_6$T$_5$**						**T$_5$T$_4$**					

						T$_3$						**T$_2$**						**T$_1$**					
1	0	0	0	0	0	1	-0.5	0	0	0	0	0.25	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.5	1	0	0	0	0
0	0	-0.3333	0	0	0	0	-1.5	1	0	0	0	-0.75	0	1	0	0	0
0	0	0.6667	1	0	0	0	1.5	0	1	0	0	-1.25	0	0	1	0	0
0	0	0.3333	0	1	0	0	-0.5	0	0	1	0	-0.25	0	0	0	1	0
0	0	0.6667	0	0	1	0	1	0	0	0	1	-0.5	0	0	0	0	1
1	0	0.116302	0.267441	-0.33721	0.07558	1	-0.02911	0.116302	0.267441	-0.33721	0.07558	-0.11046	-0.02911	0.116302	0.267441	-0.33721	0.07558
0	1	-0.2093	-0.0814	0.407007	-0.436	0	0.552339	-0.2093	-0.0814	0.407007	-0.436	0.098803	0.552339	-0.2093	-0.0814	0.407007	-0.436
0	0	-0.29456	-0.07751	0.387573	-0.05814	0	0.073646	-0.29456	-0.07751	0.387573	-0.05814	0.213169	0.073646	-0.29456	-0.07751	0.387573	-0.05814
0	0	-0.05428	-0.2248	0.12402	0.08139	0	-0.2364	-0.05428	-0.2248	0.124017	0.08139	0.36822	-0.2364	-0.05428	-0.2248	0.124017	0.08139
0	0	-0.02324	0.046513	-0.23256	0.03489	0	0.255804	-0.02324	0.046513	-0.23256	0.03489	-0.12792	0.255804	-0.02324	0.046513	-0.23256	0.03489
0	0	0.170557	-0.00775	0.038755	0.2442	0	-0.04264	0.170557	-0.00775	0.038755	0.2442	-0.2287	-0.04264	0.170557	-0.00775	0.038755	0.2442
T$_5$T$_4$ T$_3$						**T$_5$T$_4$ T$_3$ T$_2$**						**I=T$_5$T$_4$ T$_3$ T$_2$ T$_1$**					

KONTROL	**A^{-1}**					
	-0.110462	-0.029108	0.116302	0.267441091	-0.337205454	0.07558
	0.098803	0.552339	-0.209296	-0.08140136	0.4070068	-0.436
	0.213169	0.073646	-0.294563	-0.077514636	0.387573182	-0.05814
	0.368217	-0.236405	-0.054279	-0.224803319	0.124016593	0.08139
	-0.127915	0.255804	-0.023242	0.046512591	-0.232562957	0.03489
	-0.228698	-0.04264	0.170557	-0.007750908	0.03875454	0.2442

4	2	0	4	0	1	1	0	0	0	0	0
2	2	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0
3	3	-3	3	-2	3	0	0	1	0	0	0
5	1	2	0	-2	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	-2	2	0	0	0	0	1	0
2	0	2	2	2	3	0	0	0	0	0	1
A						$AA^{-1}=I$					

4.3. TERS MATRİSİN ÖZELLİKLER

1. Simetrik matrisin terside simetriktir.

A				
	2	3	-2	4
	3	1	3	2
	-2	3	2	-3
	4	2	-3	2

A^{-1}				
	-0.19534	0.125364	-0.01166	0.247813
	0.125364	-0.00583	0.186589	0.034985
	-0.01166	0.186589	0.029155	-0.11953
	0.247813	0.034985	-0.11953	-0.20991

2. Üst ve alt üçgen matrislerin tersi de alt ve üst üçgen matristir.

A=				
	2	3	-2	4
	0	1	3	2
	0	0	2	-3
	0	0	0	2

A^{-1}=				
	0.50	-1.5	2.75	4.63
	0	1	-1.50	-3.25
	0	0	0.50	0.75
	0	0	0	0.50

Örnek 4.7: Şekilde verilen alt üçgen matrisin tersinin hesaplanması

A					
	6	0	0	0	0
	2	2	0	0	0
	-3	3	3	0	0
	4	-1	2	4	0
	1	2	1	5	2

A^{-1}					
	0.167	0	0	0	0
	-0.167	0.5	0	0	0
	0.333	-0.5	0.333	0	0
	-0.375	0.375	-0.167	0.25	0
	0.854	-1.188	0.25	-0.625	0.5

3. Diyagonal elemanları 1 olan matrisin tersi kendisidir.

A	=					
		1	0	0	0	0
		0	1	0	0	0
		0	0	1	0	0
		0	0	0	1	0

A^{-1}	=					
		1	0	0	0	0
		0	1	0	0	0
		0	0	1	0	0
		0	0	0	1	0

		0	0	0	0	1			0	0	0	0	1

4. Diyagonal matrislerin tersi diyanogal elemanların tersine eşittir. (sadece diyagonelerde elemanları olan)

A	1	0	0	0	0
	0	2	0	0	0
	0	0	3	0	0
	0	0	0	4	0
	0	0	0	0	5

$\underline{A^{-1}}$	**1**	0	0	0	0
	0	**½=0.5**	0	0	0
	0	0	**1/3=0.33**	0	0
	0	0	0	**¼=0.25**	0
	0	0	0	0	**1/5=0.20**

5. Band matrisin tersi band matris olmayıp dolu matristir.

					A	**1**	**2**	0	0	0
						3	**2**	**4**	0	0
						0	**3**	**3**	**5**	0
						0	0	**6**	**4**	**5**
						0	0	0	**3**	**5**
A^{-1}	-0.6875	0.5625	0.0833	-0.4167	0.4167	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0.84375	-0.2813	-0.0417	0.2083	-0.2083	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	0.09375	-0.0313	-0.0417	0.2083	-0.2083	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
	-0.5625	0.1875	0.25	-0.25	0.25	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	0.3375	-0.1125	-0.15	0.15	0.05	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

6. $[A^{-1}]^{-1}$ =A Bir matrisin tersinin tersi kendisidir.

					A	**1**	**2**	0	0	0
						3	**2**	**4**	0	0
						0	**3**	**3**	**5**	0
						0	0	**6**	**4**	**5**
						0	0	0	**3**	**5**
A^{-1}	-0.68750	0.5625	0.0833	-0.4167	0.4167	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0.84375	-0.2813	-0.0417	0.2083	-0.2083	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	0.09375	-0.0313	-0.0417	0.2083	-0.2083	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
	-0.56250	0.1875	0.25	-0.25	0.25	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	0.33750	-0.1125	-0.15	0.15	0.05	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

					A^{-1}	-0.6875	0.5625	0.0833	-0.4167	0.4167
						0.84375	-0.2813	-0.0417	0.2083	-0.2083
						0.09375	-0.0313	-0.0417	0.2083	-0.2083
						-0.5625	0.1875	0.25	-0.25	0.25
						0.3375	-0.1125	-0.15	0.15	0.05
$[A^{-1}]^{-1}$	1	2	0	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
	3	2	4	0	0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	0	3	3	5	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**

	0	0	6	4	5	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	0	0	0	3	5	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

7. A =A^T simetrik ise $[A^{-1}]^T = A^{-1}$ olur.

A	1	9	0	0	0	**A^T**	1	9	0	0	0
	9	2	3	0	0		9	2	3	0	0
	0	3	3	5	0		0	3	3	5	0
	0	0	5	4	3		0	0	5	4	3
	0	0	0	3	5		0	0	0	3	5

A^{-1}=	-0.0395	0.115497	0.041428	-0.09416	0.056493
	0.1155	-0.01283	-0.0046	0.010462	-0.00628
	0.0414	-0.0046	-0.12122	0.275492	-0.1653
	-0.0942	0.010462	0.275492	-0.17157	0.102943
	0.0565	-0.00628	-0.1653	0.102943	0.138234

$[A^{-1}]^T$=	-0.03948	0.115497	0.041428	-0.09416	0.056493
	0.115497	-0.01283	-0.0046	0.010462	-0.00628
	0.041428	-0.0046	-0.12122	0.275492	-0.1653
	-0.09416	0.010462	0.275492	-0.17157	0.102943
	0.056493	-0.00628	-0.1653	0.102943	0.138234

8. $[kA]^{-1} = \frac{A^{-1}}{k}$ olur. Örnekte k=2

A	1	2	0	0	0	**kA**	2	4	0	0	0
	4	2	3	0	0		8	4	6	0	0
	0	3	3	1	0		0	6	6	2	0
	0	0	2	4	3		0	0	4	8	6
	0	0	0	3	4		0	0	0	6	8

kA^{-1}	0.131206	0.092199	-0.14894	0.085106	-0.06383
	0.184397	-0.0461	0.074468	-0.04255	0.031915
	-0.29787	0.074468	0.148936	-0.08511	0.06383
	0.340426	-0.08511	-0.17021	0.382979	-0.28723
	-0.25532	0.06383	0.12766	-0.28723	0.340426

A	1	2	0	0	0
	4	2	3	0	0
	0	3	3	1	0
	0	0	2	4	3

						0	0	0	3	4
A^{-1}	0.262411	0.184397	-0.29787	0.170213	-0.12766	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
	0.368794	-0.0922	0.148936	-0.08511	0.06383	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
	-0.59574	0.148936	0.297872	-0.17021	0.12766	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
	0.680851	-0.17021	-0.34043	0.765957	-0.57447	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
	-0.51064	0.12766	0.255319	-0.57447	0.680851	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

$\frac{A^{-1}}{k}$ =

0.262411**/2**	0.184397**/2**	-0.29787**/2**	0.170213**/2**	-0.12766**/2**
0.368794**/2**	-0.0922**/2**	0.148936**/2**	-0.08511**/2**	0.06383**/2**
-0.59574**/2**	0.148936**/2**	0.297872**/2**	-0.17021**/2**	0.12766**/2**
0.680851**/2**	-0.17021**/2**	-0.34043**/2**	0.765957**/2**	-0.57447**/2**
-0.51064**/2**	0.12766**/2**	0.255319**/2**	-0.57447**/2**	0.680851**/2**

$\frac{A^{-1}}{k}$	0.1312	0.0922	-0.1489	0.0851	-0.0638	=	kA^{-1}	0.1312	0.0922	-0.1489	0.0851	-0.0638
	0.1844	-0.0461	0.0745	-0.0426	0.0319			0.1844	-0.0461	0.0745	-0.0426	0.0319
	-0.2979	0.0745	0.1489	-0.0851	0.0638			-0.2979	0.0745	0.1489	-0.0851	0.0638
	0.3404	-0.0851	-0.1702	0.3830	-0.2872			0.3404	-0.0851	-0.1702	0.3830	-0.2872
	-0.2553	0.06383	0.12766	-0.2872	0.3404			-0.2553	0.06383	0.12766	-0.2872	0.3404

9. $[A^T]^{-1} = [A^{-1}]^T$ **olur.**

						A	**1**	**2**	0	0	0
							3	**2**	**4**	0	0
							0	**3**	**3**	**5**	0
							0	0	**6**	**4**	**5**
							6	0	0	**3**	**5**
A^T	**1**	**3**	0	0	6		**-0.21084**	**0.605422**	**-0.1446**	**-0.39759**	**0.491566**
	2	**2**	**4**	0	0		**0.162651**	**-0.08133**	**0.16868**	**-0.03614**	**-0.17349**
	0	**4**	**3**	**6**	0	$[A^T]^{-1}$	**0.024096**	**-0.01205**	**-0.0121**	**0.216867**	**-0.15904**
	0	0	**5**	**4**	**3**		**-0.12048**	**0.060241**	**0.06024**	**-0.08434**	**0.195181**
	0	0	0	**5**	**5**		**0.120482**	**-0.06024**	**-0.0602**	**0.084337**	**0.004819**

						A^{-1}	-0.19643	0.160714	0.02381	-0.11905	0.119048
							0.598214	-0.08036	-0.0119	0.059524	-0.05952
							-0.15179	0.169643	-0.0119	0.059524	-0.05952
							-0.26786	-0.05357	0.214286	-0.07143	0.071429
							0.396429	-0.16071	-0.15714	0.185714	0.014286
A	**1**	**2**	0	0	0		**-0.21084**	**0.605422**	**-0.1446**	**-0.39759**	**0.491566**
	3	**2**	**4**	0	0		**0.162651**	**-0.08133**	**0.16868**	**-0.03614**	**-0.17349**
	0	**3**	**3**	**5**	0	$[A^{-1}]^T$	**0.024096**	**-0.01205**	**-0.0121**	**0.216867**	**-0.15904**
	0	0	**6**	**4**	**5**		**-0.12048**	**0.060241**	**0.06024**	**-0.08434**	**0.195181**

6	0	0	**3**	**5**	0.120482	-0.06024	-0.0602	0.084337	0.004819

10. Her biri ≠0 olmak şartı ile $[A\ B\ C]^{-1} = [C^{-1}\ B^{-1}\ A^{-1}]$ olur.

A	2	3	1	2	**B**	4	0	1	2	**C**	4	0	1	2
	1	6	0	3		1	6	0	3		1	6	0	3
	5	2	2	4		5	2	5	0		5	2	5	0
	2	1	1	1		2	1	1	5		2	1	1	5

					B	4	0	1	2	**C**	4	0	1	2
						1	6	0	3		1	6	0	3
						5	2	5	0		5	2	5	0
						2	1	1	5		2	1	1	5
A	2	3	1	2	**AB**	20	22	9	23	**ABC**	193	173	88	221
	1	6	0	3		16	39	4	35		193	277	71	324
	5	2	2	4		40	20	19	36		347	194	171	320
	2	1	1	1		16	9	8	12		137	82	68	119

$[ABC]^{-1}=$	-0.78315	0.2695	-0.06563	0.897137
	0.066	-0.01947	-0.02563	-0.00061
	1.266129	-0.44294	0.091435	-1.39126
	0.132623	-0.04373	0.040975	-0.22901

A	2	3	1	2	A^{-1}	-3	1	-4E-16	3
	1	6	0	3		-0.25	0.25	-0.25	0.75
	5	2	2	4		4.75	-1.75	-0.25	-3.25
	2	1	1	1		1.5	-0.5	0.5	-2.5
B	4	0	1	2	B^{-1}	0.378016	0.042895	-0.04021	-0.17694
	1	6	0	3		-0.02681	0.174263	0.024129	-0.09383
	5	2	5	0		-0.36729	-0.1126	0.230563	0.214477
	2	1	1	5		-0.07239	-0.02949	-0.03485	0.246649
C	4	0	1	2	C^{-1}	0.378016	0.042895	-0.04021	-0.17694
	1	6	0	3		-0.02681	0.174263	0.024129	-0.09383
	5	2	5	0		-0.36729	-0.1126	0.230563	0.214477
	2	1	1	5		-0.07239	-0.02949	-0.03485	0.246649

B^{-1}	0.378	0.043	-0.040	-0.177	A^{-1}	-3	1	0	3
	-0.027	0.174	0.024	-0.094		-0.25	0.25	-0.25	0.75
	-0.367	-0.113	0.231	0.215		4.75	-1.75	-0.25	-3.25

						-0.072	-0.029	-0.035	0.247		1.5	-0.5	0.5	-2.5
C^{-1}	0.378	0.043	-0.040	-0.177	$C^{-1}B^{-1}$	0.169	0.0334	-0.017	-0.123	$C^{-1}B^{-1}A^{-1}$	-0.783	0.270	-0.066	0.897
	-0.027	0.174	0.024	-0.094		-0.017	0.0293	0.014	-0.030		0.066	-0.020	-0.026	-0.001
	-0.367	-0.113	0.231	0.215		-0.236	-0.068	0.058	0.178		1.266	-0.443	0.091	-1.391
	-0.072	-0.030	-0.035	0.247		-0.032	-0.012	-0.014	0.069		0.133	-0.044	0.041	-0.229

$[ABC]^{-1}=$	-0.78315	0.2695	-0.06563	0.897137
	0.066	-0.01947	-0.02563	-0.00061
	1.266129	-0.44294	0.091435	-1.39126
	0.132623	-0.04373	0.040975	-0.22901

BÖLÜM 5

5. LİNEER BAĞIMLILIK

VEKTÖR; 1. bir satırı [a, c, d, …n,]^{m} veya sütunu $\begin{bmatrix} h \\ c \\ s \\ : \\ n \end{bmatrix}_{n}$ olan

2. sütun [n] ve satırdaki [m] elaman sayısına boyutu
3. sütun ve satırdaki elemanlarına birleşeni denen
4. sütun vektörün transpozu satır, satır vektörünün transpozu da sütun vektör olan

bir matristir.

5.1. LİNEER BAĞIMLILIK VE BAĞIMSIZLIK

m boyutlu ve aynı tipteki satır veya kolon matrisler arasında,

$$z_1V_1 + z_2V_2 + z_3V_3 + z_4V_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z_nV_n = 0 \qquad 6.1$$

bağıntısını sağlayan $z_1, z_2, z_3, z_4, ..z_n$ $\qquad [z_1 = z_2 = z_3 = z_4 \neq 0]$

değerleri var ise **V** vektörleri **LİNEER BAĞIMLIDIR** denir. Buna karşı **V** vektörleri arasında $[z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = \ldots\ldots = z_n = 0]$ ise V vektörleri **LİNEER BAĞIMSIZDIR** denir.

Örnek: $\left[\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$ vektörlerinin lineer bağımlı olduklarının gösterilmesi.

$$\left[[1]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + [-2]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + [0]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

olduğundan verilen vektörlerin lineer **BAĞIMLI** oldukları görülmektedir.

Örnek: $v_1 = [2, 3, 4, 0]$
$v_2 = [3, 1, 2, 1]$ satır vektörlerinin lineer bağımlı olduklarının belirlenmesi.
$v_3 = [0, 1, 4, 4]$

1. Verilen satır elemanları kullanılarak bir matris oluşturulur.

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Satır vektörlerden oluşan V matrisinin rankı [mertebesi] belirlenir

Bir matrisin mertebesi (rankı); mxn boyutlu bir matriste bazı satır ve sütunların silinmesiyle elde edilebilecek matrislerin determinantlarının sıfırdan faklı olanlarının büyük kare boyutlusuna denir. Yani determinantı sıfırdan faklı olan en büyük boyutlu kare matristir. Bir matrisin mertebesi ilk yaklaşım olarak en büyük satır ve sütun sayısından küçük olanına eşit olabilir veya bundan daha da küçük olabilir. Yani nxn olan bir matriste ilk bakışta mertebe en büyük n, nxm olan bir matriste ise küçük olanına eşit olabilir. Örneğin 4x4 olan kare bir matrisin mertebesi en büyük 4, 6x3 olan bir matrisin ise en büyük 3 olabilir.

$$V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det V=-36$$ **V matrisinin rankı 3'dür.**

Özellik: Hesaplanan **RANK** verilen satır vektörü sayısından [v_1 v_2 v_3] küçük ise satır vektörleri lineer **BAĞIMLIDIR** denir. Diğer durumlarda **[Rank>=satır sayısı ise]**lineer bağımsızdır. Bu örnekte de 3 satır vektörü ve bu vektörlerin rankıda 3 olduğu için lineer bağımsızdır. Matrislerin rankını hesaplamak için aşağıda açıklanan matrislerin **eşelon** biçimlerinin bulunmasıyla daha kolay belirlemek mümkündür.

5.2. BİR MATRİSİN SATIRCA EŞELON OLMASI DURUMU

Sıfır satır: Tüm elemanları sıfır olan **[0, 0, 0, :::::::: 0]**

Sıfır olmayan satır: Satır elemanlarından en az biri sıfırdan farklı olan satır **[0, 2, 0]**

Sıfır matris: Tüm elemanları sıfır olan matris $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ::: & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ::: & 0 \\ : & : & : & ::::: & \\ 0 & 0 & 0 & ::: & 0 \end{bmatrix}$

Bir matrisin eşelon olması için;

1. Bir matriste sıfır olmayan satırlar sıfır olan satırlardan önce ise $V=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2. Sıfır olmayan satırın en solundaki sayı 1'dir. $V=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Matriste bir satırın ilk sıfır olmayan elemanın bulunduğu kolon değerinin [a_{22}] altındaki diğer satır elemanlarının [a_{32}] değeri sıfırdır veya [a_{11}] altındaki diğer satır elemanlarının[a_{21} a_{31}] sıfırdır.
4. $V=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

Örnek: Verilen matrisin satırca eşelon biçime dönüştürülmesi.

$$V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & 0\\ 6 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

1. $a_{11}=1$ olması için $\begin{bmatrix}2/a_{11} & 3/a_{11} & 4/a_{11} & 0/a_{11}\\ 6 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{bmatrix} a_{11}=2 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{bmatrix}$

2. a_{11} elemanın altındaki diğer satır elemanlarının [a_{21}=0 ve a_{21}=0] sıfır olması için $a_{21}-a_{11}a_{21}=0$ $a_{21}-1xa_{21}=0$ işlemi tüm satır elemanları için yapılır.

$$\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & -8 & -10 & 1\\ 0 & -5 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

3. Elde edilen $\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & -8 & -10 & 1\\ 0 & -5 & -4 & 4\end{bmatrix}$ matrisinin **2.** satırının diyagonal a_{22}**=1** olması sağlanır

$$\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & -8/[-8] & -10/[-8] & 1/[-8]\\ 0 & -5 & -4 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & -5 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

4. a_{22} elemanın altındaki diğer satır elemanlarının [a_{32}=0] sıfır olması için $a_{32}-a_{22}a_{32}=0$ $a_{32}-1xa_{32}=0$ işlemi tüm satır elemanları için yapılır.

$$\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & -5+[5x1] & -4+[5x5/4] & 4+[5x-1/8]\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & 0 & 2.25 & 27/8\end{bmatrix}$$

5. Elde edilen $\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & 0 & 2.25 & 27/8\end{bmatrix}$ matrisinin **3.** satırının diyagonal a_{33}**=1** olması sağlanır

$$\begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & 0 & 2.25 & 27/8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1.5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 5/4 & -1/8\\ 0 & 0 & 1 & 1.5\end{bmatrix}$$

SONUÇ: Bir matrisin eşelon biçime dönüştürülmesi sonucu elde edilen sıfır olmayan satır sayısına o matrisin **RANK'**ı denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$ matrisini eşelon biçime dönüştürülmesi

A matrisinde $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 2/2 & 4/2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ işlemi uygulanarak eşelon bime dönüştürülmüş olur.

Örnek: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ matrisini eşelon biçime dönüştürülmesi

A matrisinde a_{11}=0 olduğu için 1. satır ile 2. satır yer değiştirilerek $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ matrisi elde edilir. Bundan sonra 2. satır 1/5 ile çarpılarak $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ bulunur.

Örnek: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix}$ matrisini eşelon biçime dönüştürülmesi

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2-[1x2] & 4-[2x2] & 8-[2x4]\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ eşelon biçimi elde edilir. Buna göre A matrisinin rankı 1 dir ve lineer bağımlıdır.

5.3. LİNEER BİRLEŞİMLER

Aynı boyuttaki vektörlerin toplamları arasında,

$\mathbf{A=d_1V_1+d_2V_2+d_3V_3+:::d_nV_n}$ **veya** $\mathbf{d_{1234n}=1\Rightarrow\ A=V_1+V_2+V_3+::::V_n}$

bağıntısı mevcut ise A matrisine V vektörlerinin **LİNEER BİRLEŞENİ** denir.

Örnek: $\mathbf{V_1=d_1}\begin{bmatrix}2\\0\\1\\4\end{bmatrix}$ $\mathbf{V_2=d_2}\begin{bmatrix}2\\1\\3\\4\end{bmatrix}$ $\mathbf{V_3=d_3}\begin{bmatrix}4\\1\\2\\2\end{bmatrix}$ vektörlerin lineer birleşimi olan $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6\\3\\7\\8\end{bmatrix}$ matrisinin elde edilmesi için $\mathbf{d_1=?}$ $\mathbf{d_2=?}$ $\mathbf{d_3=?}$

çözüm: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6\\3\\7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2d_1 & 2d_2 & 4d_3\\ 0 & d_2 & d_3\\ d_1 & 3d_2 & 2d_3\\ 4d_1 & 4d_2 & 2d_3\end{bmatrix}$

denklem sistemi elde edilir. 2. satırdan d_2 d_3 cinsinden yazılarak veya denklem sistemi çözüm metotlarından (gauss, cholesky) birini kullanarak çözüm elde edilir. Burada yapılan çözümde $\mathbf{d_1=0}$ $\mathbf{d_2=2}$ $\mathbf{d_3=1}$ bulunur.

5.4. LİNEER BAĞIMLI VEKTÖRLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

1. Aynı boyutlu satır [m] veya sütun [n] vektörünün oluşturduğu m+1 veya n+1 tane vektörün oluşturduğu matris lineer bağımlıdır.

$\mathbf{v_1} = [2, 3, 4, 0]$
$\mathbf{v_2} = [3, 1, 2, 1]$
$\mathbf{v_3} = [0, 1, 4, 4]$
$\mathbf{v_4} = [0, 3, 4, 4]$
$\mathbf{v_5} = [0, 1, 5, 4]$

5 tane satır vektörleri her satır vektöründe 4 eleman bulunduğu için lineer bağımlıdır. Yani her satırın boyutu m=4 iken satır sayısı 5'dir.

Veya aynı boyuttaki satır vektörlerinin oluşturduğu matrislerde,

$$\underline{A}_{nxm} = \begin{array}{c} m \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots a_{3m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots a_{nm} \end{bmatrix} \\ n \end{array}$$

$n > m$ ise lineer bağımlıdır.

2. Sıfır olmayan vektörlerin oluşturduğu sıralı küme ancak ve ancak bir vektör kendisinden önceki vektörlerin lineer birleşimi ise lineer bağımlıdır.

3. Bir matris lineer bağımsız ise alt matrisleri de lineer bağımsızdır.

4. Bir matris lineer bağımlı ise alt matrisleri de lineer bağımlıdır.

5. Bir sıfır matrisin kendisi ve alt matrisleri lineer bağımlıdır.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Bir satırdan veya sütundan oluşan matris ancak elemanlarının tamamı sıfır ise lineer bağımlıdır.

$$\mathbf{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{veya} \quad \mathbf{V_2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

BÖLÜM 6

6. MATRİSLERİN ÖZ DEĞER VE ÖZ VEKTÖRLERİ

ÖZ DEĞER $[\omega_1 \;\; \omega_2 :::: \omega_N]$

VEKTÖR $\phi = [\phi_{11} \;\; \phi_{12} \;\; \phi_{13} \;\; .....]^T$

Verilen, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & : \\ v & c & : \\ : & : & x \end{bmatrix}$ kare matrisi ile $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} z \\ f \\ : \end{bmatrix}$ kolon matrisi arasında

$$\mathbf{A\,X} = \omega \mathbf{X}$$

eşitliğini sağlayan bir ω skalar değeri var ise,

1. **X** kolon matrisine A matrisinin **öz vektörü** $[\mathbf{X} \neq 0]$
2. ω skalar değerine de A matrisinin **öz değeri** $[\omega = 0 \;\; \textbf{veya} \;\; \omega \neq 0]$

denir. Bir matrisin ω **öz değerleri, [** I=birim matris olmak üzere $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & : \\ 0 & 1 & : \\ : & : & 1 \end{bmatrix}$]

$\det[\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}] = 0$ [öz denklem]

bağıntısıyla hesaplanır. Yani $\det[\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}] = 0$ bağıntısının determinantı sıfır yapan ω değerleri bulunur.

Örnek 6.1: Verilen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin

a. Öz değerlerinin
b. Öz vektörlerinin

bulunması.

Öz denklem olan $\det[\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}] = 0$ bağıntısı yazılarak öz değerler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\det[\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}] = \det\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} 2-\omega & 2 \\ 3 & -3-\omega \end{bmatrix} = 0$$

$$\det[\mathbf{A} - \omega \mathbf{I}] = [2-\omega][-3-\omega] - [2 \times 3] = [\omega^2 + \omega - 12] = 0 \qquad [\omega - 3][\omega + 4]$$

Öz değerler $\omega_1 = 3 \quad \omega_2 = -4$ **Matrisin izi** $A_{iz} = [2-3] = -1$

Özellik 1:[Kontrol] $\sum\omega = A_{iz}$ $\sum[3-4] = A_{iz}[2-3]$ $-1=-1$

$\omega_1 = 3$ için $\left[\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

homojen denklemi çözülerek $\omega_1 = 3$ öz değerine karşılık gelen öz vektör hesaplanır.

$\omega_1 = 3 \Rightarrow\Rightarrow$ **Öz vektör** $\phi = \begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\phi_{12}\\ \phi_{12}\end{bmatrix} = \phi_{12}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

VEYA

$\omega_1 = 3$ için $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\phi_{11} = 1$ alınırsa ϕ_{12}=**0.5** olur

$\omega_2 = -4$ için $\left[\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

homojen denklemi çözülerek $\omega_2 = -4$ öz değerine karşılık gelen öz vektör hesaplanır.

$\omega_2 = -4 \Rightarrow\Rightarrow$ **Öz vektör** $\phi = \begin{bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_{21}\\ -3\phi_{21}\end{bmatrix} = \phi_{22}\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix}$

VEYA

$\omega_2 = -4$ için $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\phi_{22} = 1$ alınırsa ϕ_{21}=**0.333** olur

KONTROL 2: Özellik 8: DetA=-12 $\omega_1 \text{ x } \omega_2 = [-4]\text{x}[3] = -12$

6.1. ÖZ DEĞER VE ÖZ VEKTÖRLERİN ÖZELLİKLERİ

1. Bir matrisin öz değerler toplamı matrisin izine eşittir.
2. Farklı öz değerlere karşılık gele öz vektörler lineer bağımsızdır.
3. Bir matris ancak ve ancak bir öz değeri sıfır ise tekildir. [Not: Bir kare matrisin tersi yoksa bu matrise **TEKİL** tersi var ise **TEKİL OLMAYAN** matris denir.]

A	=	1	2	3
		4	5	6
		7	8	9

Bu matrislerin tersi yoktur

B	=	2	3	4
		4	5	6
		6	7	8

4. Bir matrisin tersi var ise Y, A^{-1} matrisinin $\frac{1}{\omega}$ değerine karşılık gelen öz vektörüdür. Yani $\left[\mathbf{A \Rightarrow \omega \ \ ise \ \ A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\omega}}\right]$

5. Y, ω ye karşılık gelen bir öz vektör ise $\mathbf{[k \neq 0]}$ kY de aynı öz değere ω karşılık gelen öz vektördür.

6. $[\mathbf{A \Rightarrow \omega = A^T \Rightarrow \omega}]$ A matrisinin öz değeri ile A^T matrisinin öz değeri aynıdır.

7. Bir alt veya üst üçgen matrisin öz değerleri toplamı köşegen elemanlarının toplamına eşittir. Yani izine eşittir. $\mathbf{[\sum \omega = \sum diag]}$.

8. Bir matrisin öz değerlerinin çarpımı matrisin determinantına eşittir. $\mathbf{\det A = \omega_1.\omega_2.\omega_3 ....\omega_n}$

9. Bir A matrisinin öz vektörü Y ise Y herhangi bir c skaları için **[A-cI]** nın $\omega - \mathbf{c}$ öz değerine karşılık gelen öz vektörüdür.

6.2. CAYLEY-HAMİLTON TEOREMİ

Her kare matris kendi öz denklemini sağlar. Yani, **A:** verilen matris, **c:** determinant sonucu bulunan öz değerlerin önündeki sayılar ve I: birim matris olmak üzere,

$$\mathbf{det[A - \omega I] = c_n\omega^n + c_{n-1}\omega^{n-1} + c_{n-2}\omega^{n-2} + :::::::: + c_2\omega^2 + c_1\omega^1 + c_o \ \ ise}$$

$$\mathbf{c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + :::::::: + c_2A^2 + c_1A^1 + c_oI = 0}$$

Örnek 6.2: Verilen $\mathbf{A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}}$ matrisinin Cayley-Hamilton teoremini sağladığının belirlenmesi.

Öz denklem olan $\mathbf{det[A - \omega I] = 0}$ bağıntısı yazılarak öz denklem aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{det[A - \omega I] = det\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - \omega\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = det\begin{bmatrix} 2-\omega & 2 \\ 3 & -3-\omega \end{bmatrix} = 0}$$

$$\mathbf{det[A - \omega I] = [2 - \omega][-3 - \omega] - [2 \, x \, 3] = [\omega^2 + \omega - 12] = 0}$$

$$\mathbf{\text{Öz denklem } [\omega^2 + \omega - 12] = 0 \quad c_2 = 1 \quad c_1 = 1 \quad c_0 = -12}$$

$$\mathbf{c_2A^2 + c_1A^1 + c_oI = 0 \qquad A^2 + A - 12[I] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} - 12\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0}$$

A matrisinin Cayley-Hamilton teoremini sağladığı görülür.

Örnek 6.3: Verilen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin

a. Öz değerlerinin

b. Öz vektörlerinin bulunması.

Öz denklem olan $\mathbf{det[A-\omega I]=0}$ bağıntısı yazılarak öz değerler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\mathbf{det[A-\omega I]=det}\left[\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}-\omega\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2-\omega & 3 & 3\\ 3 & 2-\omega & 3\\ 4 & 4 & 3-\omega\end{bmatrix}=0$$

$$\mathbf{det[A-\omega I]=-\omega^3+7\omega^2+17\omega+9=0}$$

Öz değerler $\omega_1=\omega_2=-1 \qquad \omega_3=9$

Özellik 1:[Kontrol] $\sum\omega=A_{iz} \qquad \sum[-1-1+9]=A_{iz}[2+2+3] \qquad 7=7$

$$\omega_1=\omega_2=-1 \text{ için } \left[\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}-[-1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ denklemi homojen denklemdir.

$$\omega_1=\omega_2=-1\Rightarrow\Rightarrow \text{ Öz vektör } \quad \phi=\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}=\phi_{11}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \qquad \langle\phi_{11}=\phi_{12}=\phi_{13}\rangle$$

$$\omega_3=9 \text{ için } \left[\begin{bmatrix}2 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}-9\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-7 & 3 & 3\\ 3 & -7 & 3\\ 4 & 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\omega_3 = 9 \Rightarrow\Rightarrow \text{ Öz vektör } \phi_{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \Rightarrow \phi_{31} = [3/7[\phi_{12} + \phi_{13}]] \\ 3 & -7 & 3 \Rightarrow \phi_{31} = [7/3[\phi_{12} - \phi_{13}]] \\ 4 & 4 & -6 \Rightarrow \phi_{31} = [-\phi_{12} + 3/2\phi_{13}] \end{bmatrix}$$

$$\phi_{12} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \Rightarrow \phi_{32} = [-\phi_{13}] + [7/3[\phi_{11}]] \\ 3 & -7 & 3 \Rightarrow \phi_{32} = 3/7[\phi_{11} + \phi_{13}] \\ 4 & 4 & -6 \Rightarrow \phi_{32} = [-\phi_{11} + 3/2\phi_{13}] \end{bmatrix}$$

$$\phi_{13} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \Rightarrow \phi_{33} = [-\phi_{12}] + [7/3[\phi_{11}]] \\ 3 & -7 & 3 \Rightarrow \phi_{33} = [-\phi_{11}] + 7/3\phi_{12}] \\ 4 & 4 & -6 \Rightarrow \phi_{33} = 2/3[\phi_{11} + \phi_{12}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Öz vektörler } \phi = \begin{bmatrix} \phi_{31} = \phi_{32} \\ \phi_{32} = \phi_{31} \\ \phi_{33} = 2/3[\phi_{31} + \phi_{32}] \end{bmatrix}$$

$$\text{KONTROL 1: } \phi = \begin{bmatrix} \phi_{31} = 2 \\ \phi_{32} = 2 \\ \phi_{33} = 8/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

KONTROL 2: **Özellik 8:** **DetA=9** $\omega_1 \text{ x } \omega_2 \text{ x } \omega_3 = [-1]\text{x}[-1]\text{x}[9] = 9$

KONTROL 3: CAYLEY-HAMİLTON TEOREMİ:

$$c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A^1 + c_oI = 0$$

$$-\omega^3 + 7\omega^2 + 17\omega + 9 = 0$$

-218	-219	-219		175	168	168		34	51	51		9	0	0		**0**
-219	-218	-219	+	168	175	168	+	51	34	51	+	0	9	0	=	**0**
-292	-292	-291		224	224	231		68	68	51		0	0	9		**0**
A^3				$7A^2$				$17A$				$9I$				

Her 3 kontrolünde sağladığı görülür.

Örnek 6.4: Verilen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin

a: Öz değerlerinin

b: Öz vektörlerinin bulunması.

Öz denklem olan $\mathbf{det[A - \omega I] = 0}$ bağıntısı yazılarak öz değerler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\det[A-\omega I]=\det\left[\begin{bmatrix}2&0&1\\5&1&5\\5&5&3\end{bmatrix}-\omega\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}2-\omega&0&1\\5&1-\omega&5\\5&5&3-\omega\end{bmatrix}=0$$

$$\det[A-\omega I]=-\omega^3+6\omega^2+19\omega-24=0$$

Öz değerler $\omega_1=-3 \quad \omega_2=1 \quad \omega_3=8$

Özellik 1:[Kontrol] $\sum\omega=A_{iz} \qquad \sum[-3+1+8]=A_{iz}[2+1+3] \qquad 6=6$

$$\omega_1=-3 \text{ için } \left[\begin{bmatrix}2&0&1\\5&1&5\\5&5&3\end{bmatrix}-[-3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}5&0&1\\5&4&5\\5&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\omega_1=-3 \qquad \begin{bmatrix}5&0&1\\5&4&5\\5&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\phi_{11}=-1/3\phi_{13}\\\phi_{11}=1/3\phi_{12}\\\phi_{12}=-\phi_{13}\end{bmatrix}$$

$$\omega_2=1 \text{ için } \left[\begin{bmatrix}2&0&1\\5&1&5\\5&5&3\end{bmatrix}-[1]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1&0&1\\5&0&5\\5&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\5&0&5\\5&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\phi_{21}=-\phi_{23}\\\phi_{22}=5/3\phi_{23}\\\phi_{32}=-\phi_{21}\end{bmatrix}$$

$$\omega_3=8 \text{ için } \left[\begin{bmatrix}2&0&1\\5&1&5\\5&5&3\end{bmatrix}-[8]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}-6&0&1\\5&-7&5\\5&5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-6&0&1\\5&-7&5\\5&5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\phi_{31}=1/6\phi_{33}\\\phi_{32}=5\phi_{31}\\\phi_{33}=6\phi_{31}\end{bmatrix}$$

KONTROL 1: $\phi_{31}=2\Rightarrow\begin{bmatrix}\phi_{31}=2\\\phi_{32}=10\\\phi_{33}=12\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-6&0&1\\5&-7&5\\5&5&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{11}\\\phi_{12}\\\phi_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

KONTROL 2: Özellik 8: DetA=-24 $\omega_1 x\omega_2 x\omega_3=[1]x[3]x[8]=-24$

KONTROL 3: CAYLEY-HAMİLTON TEOREMİ:

$$c_3A^3 + c_2A^2 + c_1A^1 + c_oI = 0$$

$$\det[A - \omega I] = -\omega^3 + 6\omega^2 + 19\omega - 24 = 0$$

-218	-219	-219		54	30	30		38	0	19		-24	0	0		**0**
-219	-218	-219	+	240	156	150	+	95	19	95	+	0	-24	0	=	**0**
-292	-292	-291		300	120	234		95	95	57		0	0	-24		**0**
A^3				**$6A^2$**				**19A**				**-24I**				

Her iki kontrolünde sağladığı görülür.

Örnek 6.5: Verilen $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin

a: Öz değerlerinin

b: Öz vektörlerinin bulunması.

Öz denklem olan $\det[A - \omega I] = 0$ bağıntısı yazılarak öz değerler aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\det[A - \omega I] = \det\left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \omega\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 2-\omega & 2 & 1 \\ -1 & 1-\omega & -1 \\ 1 & 1 & 3-\omega \end{bmatrix} = 0$$

$$\det[A - \omega I] = -\omega^3 + 6\omega^2 - 13\omega + 10 = 0$$

Öz değerler $\omega_1 = 2 \quad \omega_2 = 2 - i \quad \omega_3 = 2 + i$

Özellik 1:[Kontrol] $\sum \omega = A_{iz} \qquad \sum[2+1+3] = A_{iz}[2+2+2] \qquad 6 = 6$

$$\omega_1 = 2 \text{ için } \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = 2 - i \text{ için } \left[\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} - [2-i]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} i & 2 & 1 \\ -1 & i-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \phi_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek 6.6: Verilen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&1&3&2\\0&1&5&0&3\\0&3&2&2&1\\0&3&0&2&1\\2&0&3&4&3\end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerinin bulunması.

Determinant ile bulunması aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\det[\mathbf{A}-\omega\mathbf{I}]=\det\left[\begin{bmatrix}2&0&1&3&2\\0&1&5&0&3\\0&3&2&2&1\\0&3&0&2&1\\2&0&3&4&3\end{bmatrix}-\omega\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}2-\omega&0&1&3&2\\0&1-\omega&5&0&3\\0&3&2-\omega&2&1\\0&3&0&2-\omega&1\\2&0&3&4&3-\omega\end{bmatrix}$$

Bu matrisin determinantının hesaplanması oldukça uzun işlemler gerektirir. Bu nedenle bu tür yani 3x3 boyutludan büyük matrislerin öz değerlerinin hesaplanması aşağıda açıklanan kuvvet yöntemiyle çözülmesi daha uygun olacaktır.

6.3. REEL ÖZ DEĞERLERİN KUVVET YÖNTEMİYLE

Matris boyutunun [n>>4] büyük olması durumunda yukarıdaki yol izlenerek matrislerin öz değer ve vektörlerinin hesaplanması oldukça uzun işlemler gerektirmektedir. Bu sebeplerden dolayı bu tür matrislerde öz değer ve vektörler bilgisayar programları ile hesaplanmaktadır. Burada bilgisayara uygulanması kolay olan nümerik **[REEL ÖZ DEĞERLERİN KUVVET YÖNTEMİYLE]** hesap yöntemiyle açıklanmaktadır. Verilen bir A matrisinin öz değer ve vektörünün bulunması durumunda bu yöntemde izlenen yol aşağıda maddeler halinde açıklanmaktadır.

$\mathbf{X}=[1,\ 1,\ ::::::\ \ 1,]^{T}$ olan bir sütun matris seçilir.

1. $\mathbf{Y_1}=\mathbf{A}\,\mathbf{X}$ bağıntısında Y_1 matrisi hesaplanır.

2. Y_1 kolon matrisinin elemanları bu kolon matrisinin en büyük değerine $[\omega_1]$ bölünerek $\mathbf{X_1}=\frac{1}{\omega_1}\mathbf{Y_1}$ matrisi elde edilir.

3. $\mathbf{Y_2}=\mathbf{A}\,\mathbf{X_1}$ bağıntısında Y_2 matrisi hesaplanır.

4. Y_2 kolon matrisinin elemanları bu kolon matrisinin en büyük değerine $[\omega_2]$ bölünerek $X_2 = \frac{1}{\omega_2} Y_2$ matrisi elde edilir.

5. Bu işlemlere değişimin minimum olduğu zaman son verilir. İşlemlere son verildiği zamanki $[\omega_n]$ öz değer ve $X_n = \frac{1}{\omega_n} Y_n$ de öz vektördür.

Bu işlemler aşağıdaki sayısal örneğin incelenmesiyle daha da iyi anlaşılır.

Örnek 6.7: Verilen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin Öz değerlerden birinin **REEL**

ÖZDEĞERİN KUVVET YÖNTEMİYLE bulunması.

$Y_i = [A\,X]^T \qquad X = [1,\ 1,\ 1]^T$

$$Y_1 = A\,X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = 13 \Rightarrow \qquad X_1 = \frac{1}{\omega} Y_1 = \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.846 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.846 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.462 \\ 7.001 \\ 8.385 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = A\,X_1 = [1.462 \quad 7.001 \quad 8.385] \quad \omega_2 = 8.385 \quad X_2 = \frac{1}{\omega} Y_2 = [0.174 \quad 0.835 \quad 1.0]^T$$

$$Y_3 = A\,X_2 = [1.348 \quad 6.705 \quad 8.045] \quad \omega_3 = 8.045 \quad X_3 = \frac{1}{\omega} Y_3 = [0.168 \quad 0.833 \quad 1.0]^T$$

$$Y_4 = A\,X_3 = [1.336 \quad 6.673 \quad 8.005] \quad \omega_4 = 8.005 \quad X_4 = \frac{1}{\omega} Y_4 = [0.167 \quad 0.834 \quad 1.0]^T$$

$$Y_5 = A\,X_4 = [1.334 \quad 6.669 \quad 8.005] \quad \omega_4 = 8.005 \quad X_5 = \frac{1}{\omega} Y_5 = [0.167 \quad 0.833 \quad 1.0]^T$$

$$Y_6 = A\,X_5 = [1.334 \quad 6.668 \quad 8.000] \quad \omega_4 = 8.000 \quad X_6 = \frac{1}{\omega} Y_6 = [0.167 \quad 0.833 \quad 1.0]^T$$

Değişim minimum olduğu için işleme son verilir. Buna göre öz değerlerden birisi $\omega = 8$ dir. Aynı örnek bundan önceki örnekte aynısı bulunmuştu.

Bu matrisin ikinci bir öz değerinin bulunması [Özellik 9]

$$\mathbf{B}=[\mathbf{A}-\omega\mathbf{I}]=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 5\\ 5 & 5 & 3\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 1\\ 5 & -7 & 5\\ 5 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}=[1,\ 1,\ 1]^{T}$$

$$\mathbf{Y}_1=[\mathbf{A}-\omega\mathbf{I}]\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 1\\ 5 & -7 & 5\\ 5 & 5 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\ 3\\ 5\end{bmatrix}\quad \omega_1=5\Rightarrow\quad \mathbf{X}_1=\frac{1}{\omega}\mathbf{Y}_1=\begin{bmatrix}-1.00\\ 0.60\\ 1.00\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_2=\mathbf{A}\,\mathbf{X}_1=[7.0\ \ -4.20\ \ -7.0]\ \omega_2=7.0\ \mathbf{X}_2=\frac{1}{\omega}\mathbf{Y}_2=[1.0\ \ -0.60\ \ -1.0]^{T}$$

$$\mathbf{Y}_3=\mathbf{A}\,\mathbf{X}_2=[-7.0\ \ 4.20\ \ 7.0]\ \omega_3=7.0\ \mathbf{X}_3=\frac{1}{\omega}\mathbf{Y}_3=[-1.0\ \ 0.60\ \ 1.0]^{T}$$

$$\mathbf{Y}_4=\mathbf{A}\,\mathbf{X}_3=[7.0\ \ -4.20\ \ -7.0]\ \omega_4=7.0\ \mathbf{X}_4=\frac{1}{\omega}\mathbf{Y}_4=[1.0\ \ -0.60\ \ -1.0]^{T}$$

Görüldüğü gibi aynı işlemler tekrar etmeye başladığı için burada işleme son verilir. Buna göre öz değer,

$$\omega_{2esas}=\omega_1-\omega_4=8-7=1$$

Üçüncü açısal hızın bulunması için aynı işlemlerin tekrar yapılmasına gerek yoktur. Çünkü,

[Kontrol]:**Özellik1:**

$$\sum\omega=\mathbf{A}_{iz}\quad\sum[1+8+\omega_3]=\mathbf{A}_{iz}[2+1+3]\ \Rightarrow\Rightarrow\omega_3=-3\ \rightarrow\ \sum\omega=\mathbf{A}_{iz}\quad 6=6$$

Yukarıdaki örnekte de aynısı bulunmuştu.

Örnek 6.9: Verilen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 5\\ 5 & 5 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin Öz değerleri $\begin{matrix}\omega_1=-3\\ \omega_2=8\\ \omega_3=1\end{matrix}$ olduğuna göre

$$\left[\mathbf{A}\Rightarrow\omega_3\ \ \text{ise}\ \ \mathbf{A}^{-1}\Rightarrow\frac{1}{\omega_3}\qquad\omega_3=1\ \text{ise}\ \ \mathbf{A}^{-1}\Rightarrow\frac{1}{\omega_3}=\frac{1}{1}=1.00\right]$$

özelliğin sağlanıp sağlanmadığının belirlenmesi.

A matrisinin tersi bilinen bir yöntemle hesaplanır. $\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0.92 & -0.21 & 0.04\\ -0.42 & -0.04 & 0.21\\ -0.83 & 0.42 & -0.08\end{bmatrix}$

$$\mathbf{X}=[1,\ 1,\ 1]^{T}$$

$$Y_1 = AX = \begin{bmatrix} 0.92 & -0.21 & 0.04 \\ -0.42 & -0.04 & 0.21 \\ -0.83 & 0.42 & -0.08 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.25 \\ -0.50 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = 0.75 \Rightarrow X_1 = \frac{1}{\omega} Y_1 = \begin{bmatrix} 1.000 \\ -0.333 \\ -0.667 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = AX_1 = [0.958 \quad -0.542 \quad -0.917] \quad \omega_2 = 0.958 \quad X_2 = \frac{1}{\omega} Y_2 = [1.0 \quad -0.565 \quad -0.956]^T$$

$$Y_3 = AX_2 = [0.995 \quad -0.592 \quad -0.989] \quad \omega_3 = 0.995 \quad X_3 = \frac{1}{\omega} Y_3 = [1.0 \quad -0.596 \quad -0.995]^T$$

$$Y_4 = AX_3 = [0.9994 \quad -0.599 \quad -0.998] \quad \omega_4 = 0.999 \quad X_4 = \frac{1}{\omega} Y_4 = [1.0 \quad -0.599 \quad -0.999]^T$$

$$Y_5 = AX_4 = [1.00 \quad -0.60 \quad -1.00] \quad \omega_4 = 1.0 \quad X_5 = \frac{1}{\omega} Y_5 = [1.0 \quad -0.60 \quad -1.0]^T$$

Değişim minimum olduğu için işleme son verilmiştir. Buna göre,

$$\left[A \Rightarrow \omega_3 \quad \text{ise} \quad A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\omega_3} \qquad\qquad \omega_3 = 1 \quad \text{ise} \quad A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{1} = 1.00 \right]$$

özelliğin sağlandığı görülmektedir.

Örnek 6.10: Verilen üst üçgen $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin Öz değerlerden birinin

REEL ÖZDEĞERİN KUVVET YÖNTEMİYLE bulunması.

$$X = [1, \quad 1, \quad 1]^T$$

$$Y_1 = AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = 6 \Rightarrow \qquad X_1 = \frac{1}{\omega} Y_1 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 1.00 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = AX_1 = [1.50 \quad 3.50 \quad 1.50] \quad \omega_2 = 3.50 \quad X_2 = \frac{1}{\omega} Y_2 = [0.43 \quad 1.00 \quad 0.43]^T$$

$$Y_3 = AX_2 = [1.29 \quad 3.15 \quad 1.29] \quad \omega_3 = 3.150 \quad X_3 = \frac{1}{\omega} Y_3 = [0.41 \quad 1.00 \quad 0.41]^T$$

$$Y_4 = AX_3 = [1.23 \quad 3.05 \quad 1.23] \quad \omega_4 = 3.05 \quad X_4 = \frac{1}{\omega} Y_4 = [0.403 \quad 1.00 \quad 0.403]^T$$

$$Y_5 = AX_4 = [1.209 \quad 3.015 \quad 1.209] \quad \omega_5 = 3.015 \quad X_5 = \frac{1}{\omega} Y_5 = [0.401 \quad 1.00 \quad 0.401]^T$$

$$Y_6 = AX_5 = [1.203 \quad 3.005 \quad 1.203] \quad \omega_6 = 3.005 \quad X_6 = \frac{1}{\omega} Y_6 = [0.40 \quad 1.00 \quad 0.40]^T$$

$$Y_7 = A X_6 = [1.200 \quad 3.000 \quad 1.200] \quad \omega_7 = 3.000 \quad X_7 = \frac{1}{\omega} Y_7 = [0.40 \quad 1.00 \quad 0.40]^T$$

Değişim minimum olduğu için işleme son verilir. Buna göre öz değerlerden birisi $\omega_3 = 3$ dür. Özellik 7'de açıklandığı gibi üst veya alt üçgen matrislerin öz değerleri köşegen veya diyagonal elemanlara eşit olmaktadır. Buna göre $\omega_1 = 2 \quad \omega_2 = 1$ olması gerekir.

Örnek 6.11: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerinin bulunması.

Determinant ile bulunması aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\det[A - \omega I] = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\omega & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1-\omega & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2-\omega & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2-\omega & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3-\omega \end{bmatrix}$$

Bu sistemi determinant kullanarak çözmek oldukça fazla işlem gerektirir. Bunun için öz değerlerden birinin **REEL ÖZDEĞERİN KUVVET YÖNTEMİYLE** bulunması.

$$X = [1, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1]^T$$

$$Y_1 = A X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 8 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \omega_1 = 12 \quad X_1 = \frac{1}{\omega_1} Y_1 = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.75 \\ 0.67 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = 8.35 \begin{cases} Y_2 = A X_1 = [5.51 \quad 7.10 \quad 5.59 \quad 4.25 \quad 8.35] \\ X_2 = \frac{1}{\omega} Y_2 = [0.66 \quad 0.85 \quad 0.67 \quad 0.51 \quad 1.00]^T \end{cases}$$

$$\omega_3 = 8.37 \left\langle \begin{array}{l} Y_3 = A X_2 = [5.52 \quad 7.20 \quad 5.91 \quad 4.57 \quad 8.37] \\ X_3 = \frac{1}{\omega} Y_3 = [0.66 \quad 0.86 \quad 0.71 \quad 0.55 \quad 1.00]^T \end{array} \right.$$

$$\omega_4 = 8.62 \left\langle \begin{array}{l} Y_4 = A X_3 = [5.66 \quad 7.39 \quad 6.08 \quad 4.67 \quad 8.62] \\ X_4 = \frac{1}{\omega} Y_4 = [0.66 \quad 0.86 \quad 0.71 \quad 0.54 \quad 1.00]^T \end{array} \right.$$

$$\omega_4 = 8.60 \left\langle \begin{array}{l} Y_5 = A X_4 = [5.65 \quad 7.39 \quad 6.07 \quad 4.66 \quad 8.60] \\ X_5 = \frac{1}{\omega} Y_5 = [0.66 \quad 0.86 \quad 0.71 \quad 0.54 \quad 1.00]^T \end{array} \right.$$

Değişim minimum olduğu için işleme son verilir. Buna göre öz değerlerden birisi $\omega = 8.60$ dır. Bu değer kullanılarak determinantın sıfır olması gerekir.

$$\omega = 8.6 \Rightarrow\Rightarrow \det[A - \omega I] = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} - 8.6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -6.6 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7.6 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6.6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -6.6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & -5.6 \end{bmatrix} \cong 0$$

olduğu görülür.

6.4. BENZERLİK

Verilen $A_{nxn} = \begin{bmatrix} a & b & : \\ v & c & : \\ : & : & x \end{bmatrix}$ ve $B_{nxn} = \begin{bmatrix} c & k & : \\ v & ı & : \\ : & : & z \end{bmatrix}$ matrisleri arasında,

A S = B S

eşitliğini sağlayan bir **S** matrisi var ise **A** ve **B** birbirine benzer matristir denir. Buna göre A ve B matrisleri kare ve eşit boyutta olmalıdır.

1. Bu matrislerin birbirinin benzeri olması için izlerinin $\left[\sum_{n=1}^{N}\mathbf{diag}\right]$ toplamlarının eşit olması gerekir.
2. X, A matrisinin ω öz değerine karşılık gelen öz vektörleri sağlıyor ise Y=SX' de B'nin aynı öz değerine karşı gelen ve aşağıda açıklandığı üzere öz vektörüdür.

$$[\mathbf{A}-\omega\mathbf{I}]=[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}-\omega\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}]=[\mathbf{S}^{-1}[\mathbf{B}-\omega\mathbf{I}]\mathbf{S}]$$

$$[\mathbf{S}^{-1}][\mathbf{B}-\omega\mathbf{I}][\mathbf{S}]=\left[\left[\frac{\mathbf{1}}{[\mathbf{S}]}\right][\mathbf{B}-\omega\mathbf{I}][\mathbf{S}]\right]=[\mathbf{B}-\omega\mathbf{I}]$$

A ve B matrislerinin verilmesi halinde S matrisinin hesaplanması pratikte büyük boyutlu matrislerde kolay olmaması nedeniyle bu işlemler bilgisayar ortamında yapılır.

Örnek 6.12: Verilen matrislerin benzer olup olmadıklarının belirlenmesi.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

İlk olarak matrislerin izlerinin eşit olup olmadığına bakılır. $\mathbf{A_{iz}}=[-1+4+2+2]=7\quad \mathbf{B_{iz}}=[1+2+2+1]=6\quad \mathbf{A_{iz}}\neq\mathbf{B_{iz}}$ olduğu için **A** ve **B** matrislerinin benzer olduğu söylenemez.

Örnek 6.13: Verilen A ve S matrislerinin kullanılarak A'nın benzeri olan B matrisinin bulunması

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \underline{\mathbf{S}}\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$\mathbf{AS}=\mathbf{BS}$ bağıntısından $\mathbf{B}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$ olarak elde edilir. S matrisinin tersi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\underline{S}=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+2}\begin{bmatrix}4&3\\2&2\end{bmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}\\(-1)^{2+1}\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}+(-1)^{2+2}\begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix}+(-1)^{2+3}\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix}\\(-1)^{3+1}\begin{bmatrix}2&3\\2&3\end{bmatrix}+(-1)^{3+2}\begin{bmatrix}2&3\\4&3\end{bmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\underline{S}^{c}=\begin{bmatrix}-5&-2&8\\5&-2&-2\\0&6&4\end{bmatrix}\qquad\left[\underline{S}^{c}\right]^{T}=\begin{bmatrix}-5&5&0\\-2&-2&6\\8&-2&-4\end{bmatrix}\qquad \det\underline{S}=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=10$$

$$S^{-1}=\frac{[S^{c}]^{T}}{\det S}=\frac{\begin{bmatrix}-5&5&0\\-2&-2&6\\8&-2&-4\end{bmatrix}}{[10]}=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\-0.2&-0.2&0.6\\0.8&-0.2&-0.4\end{bmatrix}$$

KONTROL: $\underline{S}\,\underline{S}^{-1}=I\qquad \underline{S}\,\underline{S}^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\-0.2&-0.2&0.6\\0.8&-0.2&-0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Bundan sonra $B=S^{-1}AS$ bağıntısından B matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}-0.5&0.5&0\\-0.2&-0.2&0.6\\0.8&-0.2&-0.4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&4&1\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\4&2&3\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&4.5\\-0.2&3.6&3.4\\-2.4&-3.4&-4.6\end{bmatrix}$$

$A_{iz}=[-1+4+2]=5\qquad B_{iz}=[6+3.6-4.6]=5$ $A_{iz}=B_{iz}$ olduğu için **A** benzer **B** dir.

Örnek 6.14: Verilen B ve S matrislerinin kullanılarak B'nin benzeri olan A matrisinin bulunması

$$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\2&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}\qquad \underline{S}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$ S matrisinin tersi $$\underline{S}=\begin{bmatrix}1&1&-3\\-1&0&2\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

Buna göre $A=S^{-1}BS$ bağıntısı kullanılarak A matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

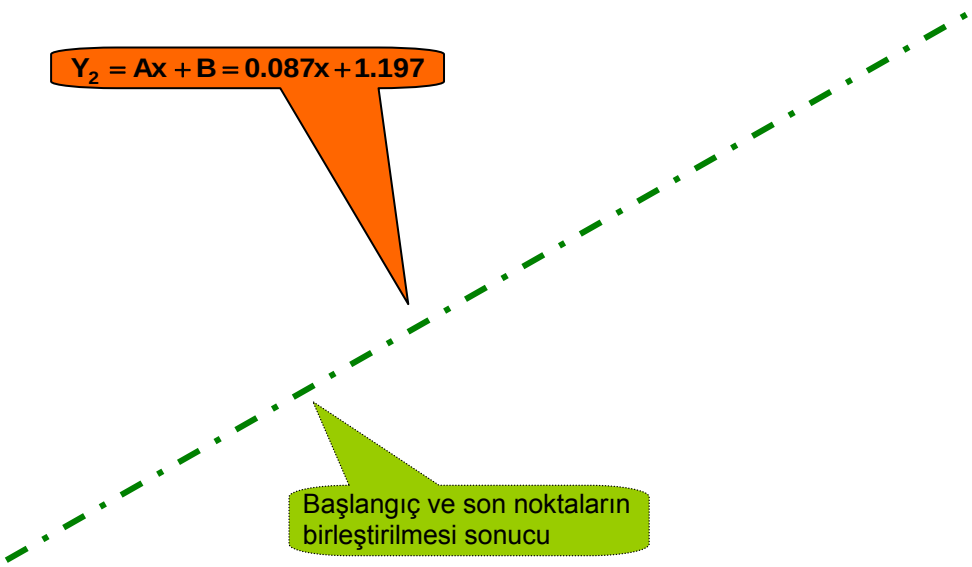
$$A=S^{-1}BS=\begin{bmatrix}1&1&-3\\-1&0&2\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\2&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&2\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&2&3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

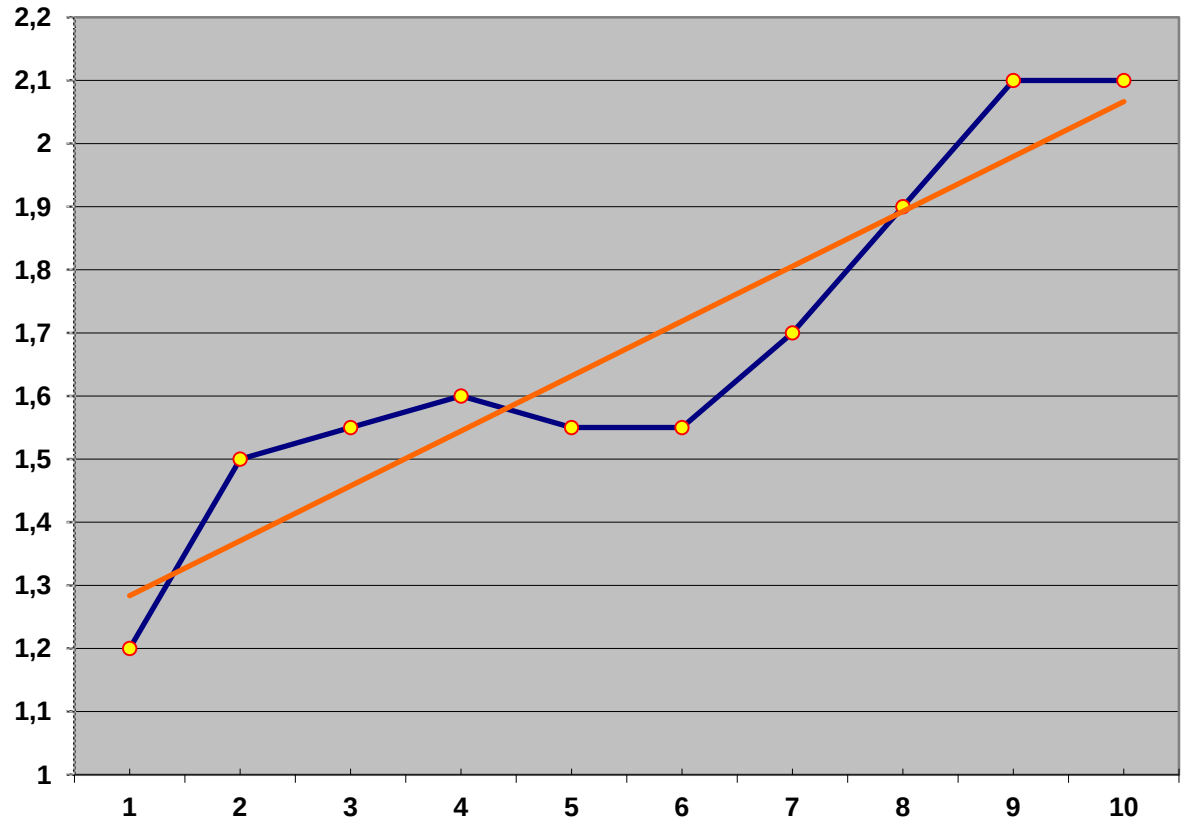
Kontrol: $A_{iz}=[3+2+1]=6\qquad B_{iz}=[2+2+2]=6$ $A_{iz}=B_{iz}$ olduğundan doğrudur.

BÖLÜM 7

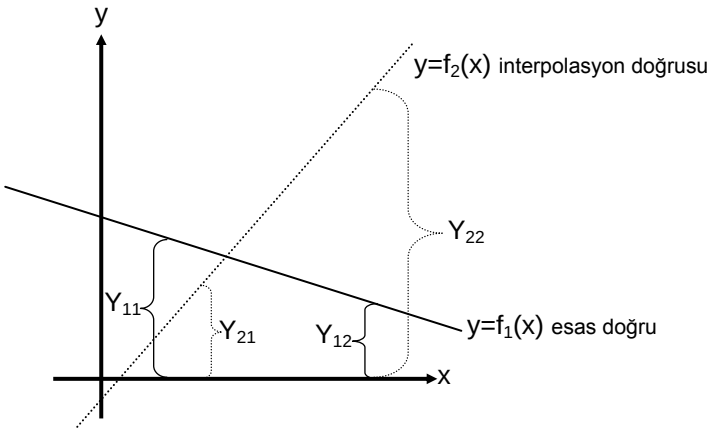
7. EN KÜÇÜK KARELER METODU

Bir faaliyetin gerçek değerleri kullanılarak elde edilen eğrilerin matematiksel olarak incelenmesi için fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Aksi halde inceleme sadece iki nokta arasında olur. Bunun için verilen değerler arasında interpolasyon yapılarak elde edilen eğrilerin fonksiyonu belirlenmelidir. Aşağıdaki grafikte yıllara göre bor üretiminin dağılımı verilmektedir. Bu eğri kullanılarak başlangıç yılı ile son yıl arasındaki üretimin fonksiyonu belirlenmelidir. Bunun için uygun olan başlangıç noktası ile bitiş noktası birleştirilerek bir fonksiyon elde edilir





Bu birleştirme sonucu bulunan doğrunun denklemi kolayca bulunurken verilen noktaları tam olarak yansıtmaz. Çünkü bu doğru ile eğri arasında kalan alanlar eşit olmaz bunun için verilen eğri değerleri arasında interpolasyon yapılarak en uygun doğru denklemi **EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ** kullanılarak bulunur.



Bunun için aşağıda verilen esas fonksiyon ile interpolasyon fonksiyonları arasında farkları en küçük olan,

$$D = Y_2 - Y_1 \quad \text{.....1}$$

bağıntısı yazılır. Bu bağıntı bütün noktalar [n] için yazılacak olursa,

$$D = \sum_{i=1}^{n} [Y_2 - Y_1] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

bağıntısı elde edilir. Verilen esas ve interpolasyon fonksiyon değerleri arasındaki farkların bütün noktalar için karesi toplamı,

$$D = \sum_{i=1}^{n} [Y_2 - Y_1]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

olarak yazılır. Bu noktalar arasında geçen en uygun doğrunun denklemi ilk olarak,

$$Y_2 = Ax + B$$

olarak ele alınır. Bu fonksiyon 3 bağıntısında yerine yazılırsa,

$$D = \sum_{i=1}^{n} [Ax + B - Y_1]^2$$

elde edilir. Bu fonksiyonun minimum olması için aşağıdaki türev bağıntılarının sağlaması gerekir.

Y_1 **için türev** $\dfrac{\partial D}{\partial Y_1} = \sum_{i=1}^{n} 2\,[Ax + B - Y_1].1 = 0$ $\qquad nB + \left[\left[\sum_{i=1}^{n} x\right] A\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} Y_1\right]$

A için türev $\dfrac{\partial D}{\partial A} = \sum_{i=1}^{n} 2\,[Ax + B - Y_1]\,x = 0$ $\qquad \left[\sum_{i=1}^{n} x\right] B + \left[\left[\sum_{i=1}^{n} x^2\right] A\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} xY_1\right]$

Bu bağıntılar kabul edilen $Y_2 = Ax + B$ denkleminde yerine yazılarak en uygun doğru denklemi elde edilir.

n	YILLAR (x)	ÜRETİM (Y_1)	xY_1	x^2	Y_2	Y_2-Y_1
1	1	1,20	1,20	1		
2	2	1,50	3,00	4		
3	3	1,55	4,65	9		
4	4	1,60	6,40	16		
5	5	1,55	7,75	25		
6	6	1,55	9,30	36		
7	7	1,70	11,90	49		
8	8	1,90	15,20	64		
9	9	2,10	18,90	81		
10	10	2,10	21,00	100		
Σ10	**Σ55**	**Σ16.75**	**Σ99.30**	**Σ385**		

$$nB+\left[\left[\sum_{i=1}^{n}x\right]A\right]=\left[\sum_{i=1}^{n}Y_1\right]\rightarrow\rightarrow \qquad 10B+55A=16.75$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}x\right]B+\left[\left[\sum_{i=1}^{n}x^2\right]A\right]=\left[\sum_{i=1}^{n}xY_1\right]\rightarrow\rightarrow \quad 55B+385A=99.30$$

Bu iki denklemin ortak çözümünden B=1.197 A=0.087 bulunur. Bu değerler fonksiyonda yerine yazılacak olursa,

$$Y_2=Ax+B=0.087x+1.197$$

olarak bulunur.

BÖLÜM 8

8. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Mühendislikte problemlerinin ve kullanılan bilgisayar programlarının matris tabanlı olmaları denklem sistemlerini incelemeye değer yapmaktadır. Bunun için lineer denklem sistemlerinin çözümünde aşağıdaki metodlar kullanılmaktadır;

1. **DOLAYSIZ**

b. **GAUSS eliminasyon**

c. **KRAMER**

d. **DOOLITTLE, CROUT ve CHOLESKY** (üçgen çarpanlara ayırma)

3. **DOLAYLI**

a. **JACOBI**
b. **GAUSS-SEIDEL**

n ≤ 3 olan denklemlerin çözümü,

a. Grafik
b. Cramer
c. Bilinmeyenlerin elenmesi

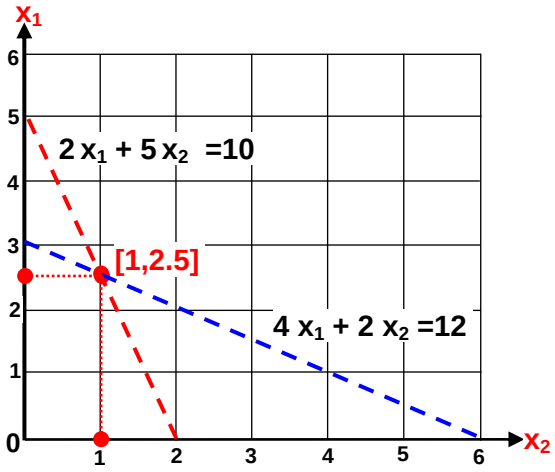
yöntemleri ile yapmak mümkündür.

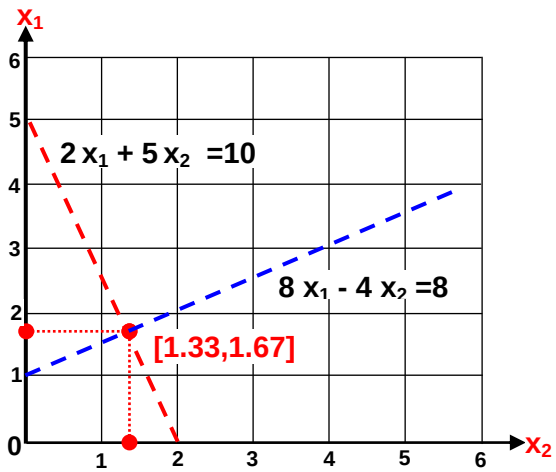
GRAFİK YÖNTEM

$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1$
$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2$

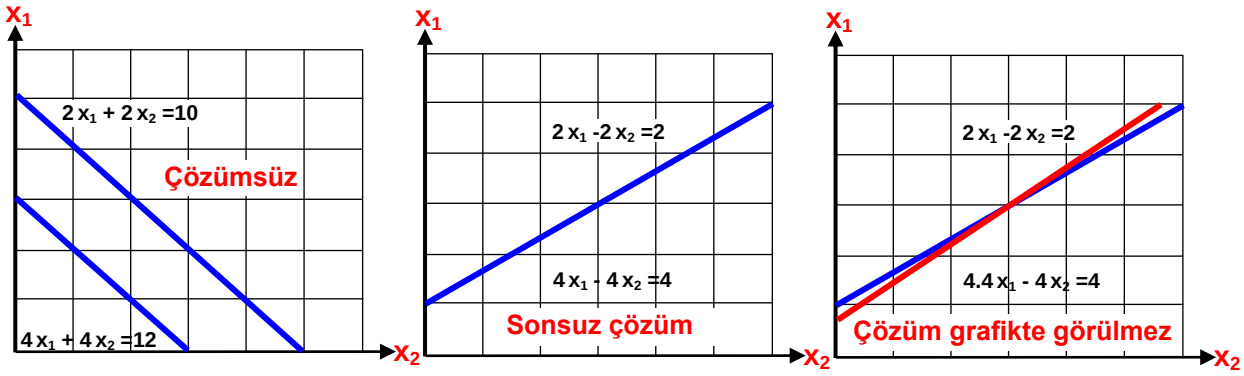
gibi doğrusal denklemlerin her biri bir doğruyu ifade ettiği için bu doğrular eksenlerden biri x_1 ve biri x_2 olan koordinat sistemi kullanılarak çizilen doğruların kesişim noktası bulunur. Bu kesişim noktasının koordinatları denklem sisteminin köklerini $[x_1\ x_2]$ verir.

$4\,x_1 + 2\,x_2 = 6$
$2\,x_1 - 6\,x_2 = 4$





Grafik çözümde bazı denklem sistemlerinin çözümleri aşağıdaki şekilde daha açık olur.

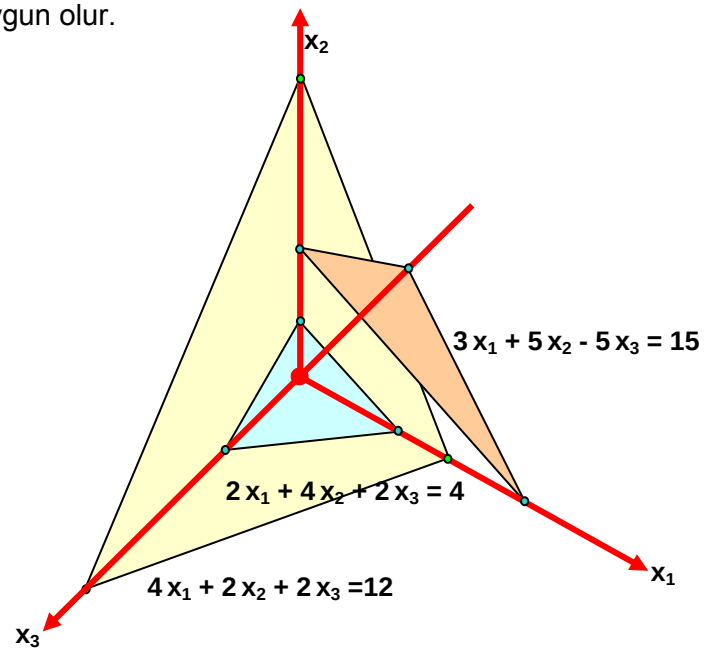


Aşağıda verilen,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

üç bilinmeyenli doğrusal denklemlerin çözümünde grafik yöntem her bir denklemin bir düzlem oluşturması bakımından düzlemlerin arakesiti olduğu için çok uygun bir yöntem değildir. Diğer yöntemler bunun için daha uygun olur.

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4$$
$$5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5$$



CRAMER yöntemi ile denklem sisteminin köklerinin bulunması determinant hesaplanması konusunda anlatılıştı. Bu yöntemde,

1. Katsayıların $[a_{ij}]$ determinantı **[D]** hesaplanır

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$[D] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \det[D] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

2. Aranan kökün olduğu kolona [sütuna] katsayılar matrisi [b] yazılarak determinant $[D_1]$ hesaplanır.

$$\det[D_1]=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \det[D_2]=\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \det[D_3]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

3. $x_i = \dfrac{[D_i]}{[D]}$

bağıntısından kökler hesaplanır.

Örnek: Aşağıda verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin bulunması.

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$

$1x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$

$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$

$$[D]=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det[D]=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$x_1 = \frac{\det[D_1]}{[D]} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \qquad x_2 = \frac{\det[D_2]}{[D]} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-56}{-2} = -8$$

BİLİNMEYENLERİN ELENMESİ yöntemi,

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

olarak verilen denklem sisteminde,

$-a_{21}\,[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1]\,[-a_{21}]$

$a_{11}\,[a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -b_2]\,a_{11}$

çarpımını yaparak elde edilen denklemleri,
İşlemlerine tabi tutularak kökler bulunur.

$-a_{21}\,[a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1]\,[-a_{21}]$

$+\;a_{11}\,[a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2]\,a_{11}$

$-a_{21}a_{12}x_2 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

$x_2[a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}] = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Örnek: Aşağıda verilen

$4x_1 + 2x_2 = 5$

$3x_1 - 3x_2 = 4$

denkleminin köklerinin bulunması.

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_1 = \frac{5x[-3] - 4x2}{4x[-3] - 2x3} = 1.28$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad x_2 = \frac{4x4 - 5x3}{4x[-3] - 2x3} = -0.056$$

8.1. DENKLEM SİSTEMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

1. HOMOJEN DENKLEM SİSTEMİ								
a_{11}	A_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}		X_1		0
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		x_2		0
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	x	x_3	=	0
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}		x_4		0
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}		X_5		0
A					x	X	=	0

Homojen denklem sisteminin mutlak çözümü,

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0 \qquad x = 0$

dır. Ancak bilinmeyenlerin sıfır olması durumunun bir anlamı yoktur. Bunun için bilinmeyenlerden en az birinin sıfırdan farklı ($x \neq 0$) olmasının bir anlamı olur. Burada aranan çözüm bilinmeyenlerin sıfırdan faklı olması durumudur. Verilen homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantına bakılır. Eğer katsayılar matrisinin determinantı **(det =0)** sıfır ise bu denklem sisteminin çözümü tek olmayıp bilinmeyenlerden birine bağlı olarak değişik çözümler bulmak mümkündür. Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan **(det≠0)** faklı ise denklem sisteminin sıfırdan başka çözümü yoktur.

$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{A} \cdot d \cdot \underline{x} = d \cdot \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{x}}_{0} = \underline{0}$

$$\underline{A} \cdot (\underline{x_1} + \underline{x_2} + \underline{x_3} + \underline{x_n}) = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{x_1}}_{0} + \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{x_2}}_{0} + \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{x_3}}_{0} + \underbrace{\underline{A}\ \underline{x_n}}_{0} = \underline{0}$$

Satırların düzenli ve **n < m** olması durumunda sıfırdan farklı ve **n-m** tanesi lineer bağımsız olan temel çözümleri mevcuttur.

Örnek 8.1: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz.

2 x_1	**3 x_2**	**-7 x_3**	**-6 x_4**	**=**	**0**
4 x_1	**5 x_2**	**-2 x_3**	**9 x_4**		**0**
2 x_1	**1 x_2**	17 x_3	36 x_4		**0**
1 x_1	-1 x_2	1 x_3	2 x_4		**0**

Bu denklem sisteminin her zaman var olan çözümü $x_1= x_2= x_3= x_4= 0$ ancak bunun bir anlamı yoktur. Bu durumda kat sayılar matrisinin determinantı hesaplanır.

det A	**=**	**2 x_1**	**3 x_2**	**-7 x_3**	**-6 x_4**	**=**	**0**
		4 x_1	**5 x_2**	**-2 x_3**	**9 x_4**		
		2 x_1	**1 x_2**	**17 x_3**	**36 x_4**		
		1 x_1	**-1 x_2**	**1 x_3**	**2 x_4**		

Determinant sıfır olduğu için bu denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü mevcuttur. Bu matrisin mertebesi **r<4** olur. Bu katsayılar matrisinden bir düşük mertebe olan bir matris seçilerek determinantı hesaplanır.

det A	**2 x_1**	**3 x_2**	**-7 x_3**	**= 0**	**det A**	**2 x_1**	**3 x_2**	**-7 x_3**	**= 51**
	4 x_1	**5 x_2**	**-2 x_3**			**4 x_1**	**5 x_2**	**-2 x_3**	
	2 x_1	**1 x_2**	**17 x_3**			**1 x_1**	**-1 x_2**	**1 x_3**	

Determinantı **51** olan katsayılar matrisi alınarak matrisindeki x_1, x_2 ve x_3 asıl x_4 de keyfi alınarak bu denklem sistemi aşağıdaki duruma getirilir.

2 x_1	**3 x_2**	**-7 x_3**	**=**	**6 x_4**
4 x_1	**5 x_2**	**-2 x_3**		**-9 x_4**
1 x_1	**-1 x_2**	**1 x_3**		**-2 x_4**

Bu denklem sistemi herhangi bir yöntemle çözülerek x_1, x_2 ve x_3 asıl değerler x_4 bağlı olarak bulunur.

Katsayılar Matrisi (K)			***Sabitler***
2	**3**	**-7**	***6***
4	**5**	**-2**	***-9***
1	**-1**	**1**	***-2***
0.058824	*0.078431*	*0.568627*	**X_1=-1.4902 X_4**

-0.11765	*0.176471*	*-0.47059*	**X_2=-1.3529 X_4**
-0.17647	*0.098039*	*-0.03922*	**X_3=-1.8627 X_4**
Katsayılar Matrisi Tersi(K^{-1})			Asıl bilinmeyenler

2. HOMOJEN OLMAYAN LİNEER DENKLEM SİSTEMİ							
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	X_1		b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	x_2		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	x_3	=	b_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	x_4		b_4
a_{51}	a_{52}	A_{53}	a_{54}	a_{55}	X_5		b_5
A					X	=	b

8.3. GAUSS ELİNİMASYON METODU

$\underline{A}\ \underline{x_i} = \underline{b}$

$\underline{b} = 0$ Homojen denklem sistemi
$\underline{b} \neq 0$ Homojen olmayan denklem sistemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0$$
$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = 0$$

Homojen denklem sistemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4$$
$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5$$

Homojen olmayan denklem sistemi

8.4. HOMOJEN OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ [GAUSS elinimasyon]

1. Denklem sistemindeki katsayılar matrisinin determinantı sıfır **[det$\underline{A} \neq 0$]** olmamalıdır.
2. Diyagonal elemanlar sıfırdan farklı **[$a_{ii} \neq 0$]**olmalıdır.
3. Adım sayını **n-1** tane olur
4. Bu çözüm yönteminde elde edilmek istenen,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1$$
$$0 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = c_2$$
$$0 + c_{23}x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + c_{35}x_5 = c_3$$
$$0 + c_{24}x_2 + c_{34}x_3 + c_{44}x_4 + c_{45}x_5 = c_4$$
$$0 + c_{25}x_2 + c_{35}x_3 + c_{54}x_4 + c_{55}x_5 = c_5$$

1. adım $\left[L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \right]$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1$$
$$0 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = c_2$$
$$0 + 0 + d_{33}x_3 + d_{34}x_4 + d_{35}x_5 = d_3$$
$$0 + 0 + d_{34}x_3 + d_{44}x_4 + d_{45}x_5 = d_4$$
$$0 + 0 + d_{35}x_3 + d_{54}x_4 + d_{55}x_5 = d_5$$

2. adım $\left[L_{23} = \frac{c_{23}}{c_{22}} \right]$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1$$
$$0 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = c_2$$
$$0 + 0 + d_{33}x_3 + d_{34}x_4 + d_{35}x_5 = d_3$$
$$0 + 0 + 0 + e_{44}x_4 + e_{45}x_5 = e_4$$
$$0 + 0 + 0 + e_{54}x_4 + e_{55}x_5 = e_5$$

3. adım $\left[L_{34} = \frac{d_{34}}{d_{33}} \right]$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1$$
$$0 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25}x_5 = c_2$$
$$0 + 0 + d_{33}x_3 + d_{34}x_4 + d_{35}x_5 = d_3$$
$$0 + 0 + 0 + e_{44}x_4 + e_{45}x_5 = e_4$$
$$0 + 0 + 0 + 0 + f_{55}x_5 = f_5$$

4. adım $\left[L_{45} = \frac{e_{45}}{e_{44}} \right]$

Buradan $x_5 = \frac{f_5}{f_{55}}$ $x_4 = \frac{\left[e_4 - e_{45} \frac{f_5}{f_{55}} \right]}{e_{44}}$ ve benzer şekilde diğer bilinmeyenler bulunur.

Yani **Gauss** elinimasyon yöntemi, sistemi önce üst üçgen matris şekline dönüştürerek bilinmeyenlerin bulunmasını sağlar.

a_{ij} : değişmeyen katsayılar

c_{ij} : 1.adımda yapılan değişiklik sonucu bulunan katsayılar $L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$

d_{ij} : 2.adımda yapılan değişiklik sonucu bulunan katsayılar $L_{32} = \frac{c_{32}}{c_{22}}$

e_{ij} : 3.adımda yapılan değişiklik sonucu bulunan katsayılar $L_{43} = \frac{d_{43}}{d_{33}}$

f_{ij} : 4.adımda yapılan değişiklik sonucu bulunan katsayılar $L_{54} = \frac{e_{54}}{e_{44}}$

ÇÖZÜM:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

1. Satır: Verilen denklem sisteminde **1. satır** denklemi aynı alınır.

$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1$

2.Satır : **2.** satırdaki a_{21} katsayısı 1. satırdaki a_{11} katsayısına bölünerek $L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ sabiti bulunur. Bu sabit ile 1. satırdaki a_{11} katsayıları çarpılır ve a_{21} katsayılarından çıkartılır.

$$[a_{21} - a_{11}\,L_{i1}]x_1 + [a_{22} - a_{12}\,L_{i1}]x_2 + [a_{23} - a_{13}\,L_{i1}]x_3 = [b_2 - b_1\,L_{i1}]$$

$$[a_{21} - a_{11}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_1 + [a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_2 + [a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_3 = [b_2 - b_1\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]$$

$$[0]x_1 + [a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_2 + [a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_3 = [b_2 - b_1\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]$$

3.Satır : **3.** satırdaki a_{31} katsayısı 1. satırdaki a_{11} katsayısına bölünerek $L_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$ sabiti bulunur. Bu sabit ile 1. satırdaki a_{11} katsayıları çarpılır ve a_{31} katsayılarından çıkartılır.

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1$$

$$[0]x_1 + [a_{22} - a_{12}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_2 + [a_{23} - a_{13}\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]x_3 = [b_2 - b_1\left[\frac{a_{21}}{a_{11}}\right]]$$

$$[a_{31} - a_{11}\,L_{i1}]x_1 + [a_{32} - a_{12}\,L_{i1}]x_2 + [a_{33} - a_{13}\,L_{i1}]x_3 = [b_3 - b_1\,L_{i1}]$$

$$[a_{31} - a_{11}\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]x_1 + [a_{32} - a_{12}\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]x_2 + [a_{33} - a_{13}\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]x_3 = [b_3 - b_1\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]$$

$$[0]x_1 + [a_{32} - a_{12}\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]x_2 + [a_{33} - a_{13}\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]]x_3 = \left[b_3 - b_1\left[\frac{a_{31}}{a_{11}}\right]\right]$$

Örnek 8.3: Verilen denklem sisteminde binmeyenlerin bulunması **[Gauss]**

$2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 2$

$1\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 4$

$6x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 5$

Çözüm: **1.** Verilen denklem sisteminde **1. satır** denklemi aynı alınır.

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 = 2$$

$\left[L_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2} = 0.5\right]$ 1-(2 x **0.5**) x_1+3 - (3 x **0.5**) x_2 + 4 - (4 x **0.5**) x_3 = 4- (2 x **0.5**)

$\left[L_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{6}{2}=3\right]$ 6-(2 x **3**)x_1 + 2-(3 x **3**) x_2 + 2-(4 x **3**) x_3 = 5-(2 x **3**)

Gerekli sadeleştirme yapılırsa, $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$

$0 + 1.5x_2 + 2x_3 = 3$

$0 - 7x_2 - 10x_3 = -1$

2. Bu adımda **1.** ve **2.** satır denklemi aynı alınır.

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$

$0 + 1.5x_2 + 2x_3 = 3$

$\left[L_{32}=\frac{a_{32}}{a_{22}}=-\frac{7}{1.5}=-4.667\right]$ 0-7 –(- **4.667**x1.5)x_2 –10-(- **4.667**x2) x_3 = -1-(- **4.667**x3)

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$

$0 + 1.5x_2 + 2x_3 = 3$

$0 + 0 - 0.666x_3 = 13.00$

Bu şekilde elde edilen üst üçgen matris yardımıyla bilinmeyenler,

$x_3=\frac{13}{-0.666}=-19.52$ x_2=28.00 x_1=-2.00

Örnek 8.5: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin bulunması

A	**2 x_1**	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_5**	**=**	**4**
		2 x_2	**1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_5**		**24**
			1 x_3	2 x_4	1 x_5		**36**
				-5 x_4	1 x_5		**7**
					6 x_5		**30**

Üst ve alt üçgen denklem sistemlerinde **(det A≠0 det A= -120)** bilinmeyenlerin bulunması alt ve üst üçgen olmayan denklem sistemlerinin çözümüne göre oldukça kolaydır.

$$x_5 = \frac{30}{6} = 5 \qquad x_4 = \frac{[7 - 1x\,5]}{-5} = -0.20 \qquad x_3 = \frac{[36 - 2x(-0.2) - 1x\,5]}{1} = 31.40$$

$$x_2 = \frac{[24 - 31.4x1 - 1x(-0.2) - 1x\,5]}{2} = -6.10$$

$$x_1 = \frac{[4 - 31.4x2 - 1x(-0.2) - 2x\,5 - (-4x(-6.1))]}{2} = -46.50$$

Örnek 8.6: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz.

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_5**		**4**
2 x_1	**2 x_2**	**1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_5**		**24**
4 x_1	2 x_2	1 x_3	2 x_4	1 x_5	=	**36**
1 x_1	2 x_2	1 x_3	-5 x_4	1 x_5		**7**
2 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_5**		**26**

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
L_{21}=1	2-(2x**1**) x_1	2-(-4x**1**) x_2	1-(2x**1**) x_3	1-(1x**1**) x_4	1-(2x**1**) x_3	**24**-(4x**1**)
L_{31}=2	4-(2x**2**) x_1	2-(-4x**2**) x_2	1-(2x**2**) x_3	2-(1x**2**) x_4	1-(2x**2**) x_3	**36**-(4x**2**)
L_{41}=0.5	1-(2x**0.5**) x_1	2-(-4x**0.5**) x_2	1-(2x**0.5**) x_3	-5-(1x**0.5**) x_4	1-(2x**0.5**) x_3	**7**-(4x**0.5**)
L_{51}=1	2-(2x**1**) x_1	3-(-4x**1**) x_2	2-(2x**1**) x_3	-4-(1x**1**) x_4	6-(2x**1**) x_3	**26**-(4x**1**)

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	**20**
	0	10 x_2	-3 x_3	0 x_4	-3 x_3	**28**
	0	4 x_2	0 x_3	-5.5 x_4	0 x_3	**5**
	0	7 x_2	0 x_3	-5 x_4	4 x_3	**22**

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	**20**
L_{32}=1.67	**0**	10-(6x**1.67**) x_2	-3-(-1x**1.67**) x_3	0-(0x**1.67**) x_4	-3-(-1x**1.67**) x_3	**28**-(20x**1.67**)
L_{42}=0.67	**0**	4-(6x**0.67**) x_2	0-(-1x**0.67**) x_3	-5.5-(0x**0.67**) x_4	0-(-1x**0.67**) x_3	**5**-(20x**0.67**)
L_{52}=1.17	**0**	7-(6x**1.17**) x_2	0-(-1x**1.17**) x_3	-5-(0x**1.17**) x_4	4-(-1x**1.17**) x_3	**22**-(20x**1.17**)

	$2\ x_1$	$-4\ x_2$	$2\ x_3$	$1\ x_4$	$2\ x_3$	4
	0	$6\ x_2$	$-1\ x_3$	$0\ x_4$	$-1\ x_3$	20
	0	**0**	$-1.33\ x_3$	$0\ x_4$	$-1.33\ x_3$	-5.40
	0	**0**	$0.67\ x_3$	$-5.5\ x_4$	$0.67\ x_3$	-8.40
	0	**0**	$1.17\ x_3$	$-5\ x_4$	$5.17\ x_3$	-1.40

	$2\ x_1$	$-4\ x_2$	$2\ x_3$	$1\ x_4$	$2\ x_3$	4
	0	$6\ x_2$	$-1\ x_3$	$0\ x_4$	$-1\ x_3$	20
	0	**0**	$-1.33\ x_3$	$0\ x_4$	$-1.33\ x_3$	-5.40
$L_{43}=-0.504$	**0**	**0**	$0.67-(-1.33x-0.504)\ x_3$	$-5.5-(0x-0.504)\ x_4$	$0.67-(-1.33x-0.504)\ x_3$	$-8.4-(-5.4x-0.504)$
$L_{53}=-0.88$	**0**	**0**	$1.17-(-1.33x-0.88)\ x_3$	$-5-(0x-0.88)\ x_4$	$5.17-(-1.33x-0.88)\ x_3$	$-1.40-(-5.4x-0.88)$

	$2\ x_1$	$-4\ x_2$	$2\ x_3$	$1\ x_4$	$2\ x_3$	4
	0	$6\ x_2$	$-1\ x_3$	$0\ x_4$	$-1\ x_5$	**20**
	0	**0**	$-1.33\ x_3$	$0\ x_4$	$-1.33\ x_5$	**-5.40**
	0	**0**	**0**	$-5.5\ x_4$	$0\ x_5$	**-11.12**
	0	**0**	**0**	$-5\ x_4$	$4.0\ x_5$	**-6.15**

	$2\ x_1$	$-4\ x_2$	$2\ x_3$	$1\ x_4$	$2\ x_3$	4
	0	$6\ x_2$	$-1\ x_3$	$0\ x_4$	$-1\ x_5$	**20**
	0	**0**	$-1.33\ x_3$	$0\ x_4$	$-1.33\ x_5$	**-5.40**
	0	**0**	**0**	$-5.5\ x_4$	$0\ x_5$	**-11.12**
$L_{54}=0.91$	**0**	**0**	**0**	$-5-(-5.5x0.91)\ x_4$	$4.0-(0x0.91)\ x_5$	**-6.15**-(-11.12x0.91)

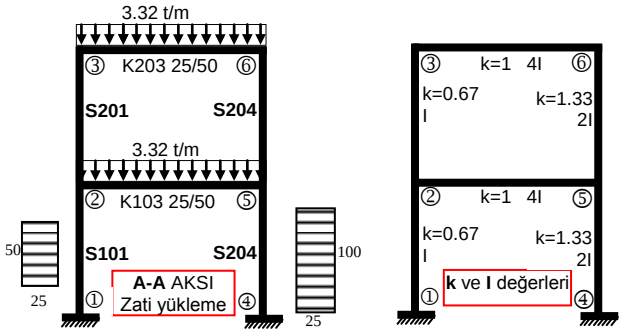
$2\ x_1$	$-4\ x_2$	$2\ x_3$	$1\ x_4$	$2\ x_3$	4
0	$6\ x_2$	$-1\ x_3$	$0\ x_4$	$-1\ x_5$	**20**
0	**0**	$-1.33\ x_3$	$0\ x_4$	$-1.33\ x_5$	**-5.40**
0	**0**	**0**	$-5.5\ x_4$	0	**-11.12**
0	**0**	**0**	0	$4.0\ x_5$	**4**
$x_1=5$	**$x_2=4$**	**$x_3=3$**	**$x_4=2$**	**$x_5=1$**	

det $\underline{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} = 2 \times 6 \times (-1.33) \times (-5.5) \times 4 = 351.12$

Örnek 8.7: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz.

ZATİ YÜKLER İÇİN ÇÖZÜM: Ankastrelik momentleri

Zati yük $\mathbf{M=\frac{qL^2}{12}=\frac{3.321x8^2}{12}=17.71tm}$ Hareketli yük $\mathbf{M=\frac{qL^2}{12}=\frac{0.93x8^2}{12}=4.96tm}$



2 düğümünde $\mathbf{2\,(0.67+0.67+1)\,\varphi_2+0.67\,\varphi_3+1.0\,\varphi_5-(3\times 0.67)/3)\,(\delta_1+\delta_2)=17.71}$

$4.68\,\varphi_2+0.67\varphi_3+\varphi_5-0.67\delta_1-0.67\,\delta_2=17.71$

3 düğümünde $\mathbf{2\,(0.67+1)\,\varphi_3+0.67\,\varphi_2+1.0\,\varphi_6-(3\times(0.67)/3)\,\delta_2=}\,17.71$

$0.67\varphi_2+3.34\,\varphi_3+\varphi_6-0.67\delta_2=17.71$

5 düğümünde $\mathbf{2\,(1.33+1.33+1)\,\varphi_5+1.33\,\varphi_6+1.0\,\varphi_2-(3\times(1.33)/3)\,(\delta_1+\delta_2)=}\,-17.71$

$7.32\,\varphi_5+\varphi_2+1.33\,\varphi_6-1.33\delta_1-1.33\delta_2=-17.71$

6 düğümünde $\mathbf{2\,(1.33+1)\,\varphi_6+\varphi_3+1.33\,\varphi_5-(3\times(1.33)/3)\,\delta_2=-17.71}$

$4.66\,\varphi_6+\varphi_3+1.33\varphi_5-1.33\delta_2=-17.71$

1. katta yatay denge $\mathbf{(-3\times 0.67/3)\,\varphi_2+(-3\times 1.33/3)\,\varphi_5+(6\times(0.67+1.33)/3^2)\,\delta_1=0}$

$-0.67\varphi_2-1.33\,\varphi_5+1.33\delta_1=0$

2. katta yatay denge $\mathbf{(-3x0.67/3)[\varphi_2+\varphi_3]+(-3x1.33/3)[\varphi_5+\varphi_6]+(6x(0.67+1.33)/3^2)\,\delta_2=0}$

$-0.67\varphi_2-0.67\varphi_3-1.33\,\varphi_5-1.33\,\varphi_6+1.33\delta_2=0$

Zati yükler için açı metodu denklem takımları									Sabit
4.68	0.67	1	0	-0.67	-0.67		φ_2		17.71
0.67	3.34	0	1	0	-0.67		φ_3		17.71
1	0	7.32	1.33	-1.33	-1.33	x	φ_5	=	-17.71
0	1	1.33	4.66	0	-1.33		φ_6		-17.71
-0.67	0	-1.33	0	1.33	0		δ_1		0
-0.67	-0.67	-1.33	-1.33	0	1.33		δ_2		0

	4.68	0.67	1	0	-0.67	-0.67	**17.71**
L_{21}=0.143	0.67-[4.68x0.143]	3.34-[0.67x0.143]	0-[1x0.143]	1	0-[-0.67x0.143]	-0.67-[-0.67x0.143]	**17.71**-[**17.71**x0.143]
L_{31}=0.2137	1-[4.68x0.2137]	0-[0.67x0.2137]	7.32-[1x0.2137]	1.33-[0x0.2137]	-1.33-[-0.67x0.2137]	-1.33-1.33-[-0.67x0.2137]	**-17.71**
L_{41}=0	0	1	1.33	4.66	0	-1.33	**-17.71**
L_{51}=-0.143	-0.67-[-4.68x0.143]	0-[-0.67x0.143]	-1.33-[-1x0.143]	0-[-0x0.143]	1.33-[0.67x0.143]	0-[0.67x0.143]	**0**-[-17.71x0.143]
L_{61}=-0.143	-0.67-[-4.68x0.143]	-0.67-[-0.67x0.143]	-1.33-[-1x0.143]	-1.33-[-0x0.143]	0	1.33-[0.671x0.143]	**0**-[-17.71x0.143]

	4.68	0.67	1	0	-0.67	-0.67	**17.71**
L_{21}=0.143	0	3.244	0-[1x0.143]	1	0-[-0.67x0.143]	-0.67-[-0.67x0.143]	**17.71**-[**17.71**x0.143]
L_{31}=0.2137	0	-0.143	7.32-[1x0.2137]	1.33-[0x0.2137]	-1.33-[-0.67x0.2137]	-1.33-1.33-[-0.67x0.2137]	**-17.71**
L_{41}=0	0	1	1.33	4.66	0	-1.33	**-17.71**
L_{51}=-0.143	0	0-[-0.67x0.143]	-1.33-[-1x0.143]	0-[-0x0.143]	1.33-[0.67x0.143]	0-[0.67x0.143]	**0**-[-17.71x0.143]
L_{61}=-0.143	0	-0.67-[-0.67x0.143]	-1.33-[-1x0.143]	-1.33-[-0x0.143]	0	1.33-[0.671x0.143]	**0**-[-17.71x0.143]

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
L_{21}=1	2-(2x**1**) x_1	2-(-4x**1**) x_2	1-(2x**1**) x_3	1-(1x**1**) x_4	1-(2x**1**) x_3	**24**-(4x**1**)
L_{31}=2	4-(2x**2**) x_1	2-(-4x**2**) x_2	1-(2x**2**) x_3	2-(1x**2**) x_4	1-(2x**2**) x_3	**36**-(4x**2**)
L_{41}=0.5	1-(2x**0.5**) x_1	2-(-4x**0.5**) x_2	1-(2x**0.5**) x_3	-5-(1x**0.5**) x_4	1-(2x**0.5**) x_3	**7**-(4x**0.5**)
L_{51}=1	2-(2x**1**) x_1	3-(-4x**1**) x_2	2-(2x**1**) x_3	-4-(1x**1**) x_4	6-(2x**1**) x_3	**26**-(4x**1**)

8.4. GAUSS DOUTTLES (ÜÇGEN ÇARPANLARA AYIRMA METODU)

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}		X_1		b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		x_2		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	X	x_3	=	b_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}		x_4		b_4
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}		X_5		b_5

A	x	X	=	b

A=R.L **R**=Üst üçgen matris **L**=Alt üçgen matris

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	x	X_1	=	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		x_2		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}		x_3		b_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}		x_4		b_4
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}		X_5		b_5

L R

Örnek 6.2: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin (X) bulunması

2 x_1	**-3 x_2**	**4 x_3**	**1**
4 x_1	**-4 x_2**	**3 x_3**	**1**
-6 x_1	-1 x_2	5 x_3	**1**

1. ADIM 1. satır aynı kalırken 1. sütun a_{11} elemanına bölünür.

2 x_1	**-3 x_2**	**4 x_3**		2 x_1	-3 x_2	4 x_3
4/2 x_1	**-4 x_2**	**3 x_3**		2 x_1	**-4 x_2**	**3 x_3**
-6/2 x_1	-1 x_2	5 x_3		-3 x_1	-1 x_2	5 x_3

2. ADIM

L_{21} r_{21} + 1 r_{22} = a_{22} r_{22} = a_{22} - L_{21} r_{21} = -4 – (2 x (-3)) = 2

r_{23} = a_{23} - L_{21} r_{31} = 3 – (2 x 4) = -5

2 x_1	-3 x_2	4 x_3		2 x_1	-3 x_2	4 x_3
2 x_1	**-4 x_2**	**3 x_3**		2 x_1	**2 x_2**	**-5 x_3**
-3 x_1	-1 x_2	5 x_3		-3 x_1	-1 x_2	5 x_3

3. ADIM

L_{21} r_{21} + 1 r_{22} = a_{22} L_{32} = [a_{32} - L_{31} r_{21}]/r_{22} = [-1– (-3 x (-3))]/2 = -5

r_{33} = [a_{33} - L_{31} r_{31}] – L_{32} r_{23}= [5 – (-3 x 4)] – [-5x(-5)] = -8

2 x_1	-3 x_2	4 x_3		2 x_1	-3 x_2	4 x_3
2 x_1	**2 x_2**	**-5 x_3**		2 x_1	**2 x_2**	**-5 x_3**
-3 x_1	-1 x_2	5 x_3		-3 x_1	-5 x_2	-8 x_3

L . Y = b den Y değerleri bulunur.

1 x_1			Y_1	1		Y_1=1
2 x_1	**1 x_2**		Y_2	1		Y_2=-1
-3 x_1	-5 x_2	1 x_3	Y_3	1		Y_3=-1

R . X = Y den X değerleri bulunur.

2 x_1	-3 x_2	4 x_3	X_1	1		$X_1=\frac{1}{8}$
	2 x_2	**-5 x_3**	X_2	-1		$X_2=-\frac{3}{16}$
		-8 x_3	X_3	-1		$X_3=\frac{1}{8}=0.125$

Örnek 8.6: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin (X) bulunması

1 x_1	-3 x_2	5 x_3	=	2
-4 x_1	4 x_2	2 x_3	=	3
5 x_1	-1 x_2	6 x_3	=	4

1. ADIM 1. satır aynı kalırken 1. sütun a_{11} elemanına bölünür.

2 x_1	-3 x_2	5 x_3		2 x_1	-3 x_2	5 x_3
-4 x_1	4 x_2	2 x_3		-4 x_1	4 x_2	2 x_3
5 x_1	-1 x_2	6 x_3		5 x_1	-1 x_2	6 x_3

2. ADIM

L_{21} r_{21} + 1 r_{22} = a_{22} r_{22} = a_{22} - L_{21} r_{21} = 4 – (-4 x (-3)) = -8

r_{23} = a_{23} - L_{21} r_{31} = 2 – (-4 x 5) = 22

2 x_1	-3 x_2	5 x_3		2 x_1	-3 x_2	5 x_3
-4 x_1	4 x_2	2 x_3		-4 x_1	**-8 x_2**	**22 x_3**
5 x_1	-1 x_2	6 x_3		5 x_1	-1 x_2	6 x_3

3. ADIM

$L_{21}\, r_{21} + 1\, r_{22} = a_{22}$

$L_{32} = [a_{32} - L_{31}\, r_{21}\,]/r_{22} = [-1 - (5 \times (-3))]/(-8) = -14/8 = -7/4$

$r_{33} = [a_{33} - L_{31}\, r_{31}\,] - L_{32}\, r_{23} = [6 - (5 \times 5)] - [22 \times (-7/4)] = -19 + 77/2 = -39/2$

$2\,x_1$	$-3\,x_2$	$5\,x_3$		$2\,x_1$	$-3\,x_2$	$5\,x_3$
$-4\,x_1$	$-8\,x_2$	$22\,x_3$		$-4\,x_1$	$-8\,x_2$	$22\,x_3$
$5\,x_1$	$-1\,x_2$	$6\,x_3$		$5\,x_1$	$-7/4\,x_2$	$-39/2\,x_3$

L . Y = b den Y değerleri bulunur.

$1\,x_1$			Y_1	2		$Y_1=2$
$-4\,x_1$	$1\,x_2$		Y_2	3		$Y_2=11$
$5\,x_1$	$-7/4\,x_2$	$-39/2\,x_3$	Y_3	4		$Y_3=\frac{53}{4}$

R . X = Y den X değerleri bulunur.

$2\,x_1$	$-3\,x_2$	$5\,x_3$	X_1	2		$X_1=-2.165$
	$-8\,x_2$	$22\,x_3$	X_2	11		$X_2=-3.24$
		$-39/2\,x_3$	X_3	$\frac{53}{4}$		$X_3=-\frac{53}{78}=-0.68$

Örnek 6.4: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin (X) bulunması

$2\,x_1$	$-4\,x_2$	$2\,x_3$	$1\,x_4$	$2\,x_3$	4
$2\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$	$1\,x_4$	$1\,x_3$	24
$4\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$	$2\,x_4$	$1\,x_3$	36
$1\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$	$-5\,x_4$	$1\,x_3$	7
$2\,x_1$	$3\,x_2$	$2\,x_3$	$-4\,x_4$	$6\,x_3$	26

$2\,x_1$	$-4\,x_2$	$2\,x_3$	$1\,x_4$	$2\,x_3$
$2\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$		$1\,x_3$
$4\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$		$1\,x_3$
$1\,x_1$	$2\,x_2$	$1\,x_3$	$-5\,x_4$	$1\,x_3$
$2\,x_1$	$3\,x_2$	$2\,x_3$	$-4\,x_4$	$6\,x_3$

1. ADIM 1. satır aynı kalırken 1. sütun a_{11} elemanına bölünür.

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	
1 x_1	**2 x_2**	**1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_3**	
2 x_1	2 x_2	1 x_3	2 x_4	1 x_3	
0.5 x_1	2 x_2	1 x_3	-5 x_4	1 x_3	
1 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_3**	

2. ADIM

$L_{21}\ r_{21} + 1\ r_{22} = a_{22}$ $r_{22} = a_{22} - L_{21}\ r_{21} = 2 – (1 \times (-4)) = 6$

$r_{23} = a_{23} - L_{21}\ r_{31} = 1 – (1 \times 2) = -1$

$r_{24} = a_{24} - L_{21}\ r_{41} = 1 – (1 \times 1) = 0$

$r_{25} = a_{25} - L_{21}\ r_{51} = 1 – (1 \times 2) = -1$

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	
1 x_1	**6 x_2**	**-1 x_3**	**1 x_4**	**-1 x_3**	
2 x_1	2 x_2	1 x_3	2 x_4	1 x_3	
0.5 x_1	2 x_2	1 x_3	-5 x_4	1 x_3	
1 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_3**	

3. ADIM

$L_{21}\ r_{21} + 1\ r_{22} = a_{22}$

$L_{32} = [a_{32} - L_{31}\ r_{21}\ ]/r_{22} = [2– (2 \times (-4))]/6 = 5/3$

$r_{33} = [a_{33} - L_{31}\ r_{31}\ ] – L_{32}\ r_{23} = [1 – (2 \times 2)] – [5/3 \times (-1)] = -4/3$

$r_{34} = [a_{34} - L_{31}\ r_{41}\ ] – L_{33}\ r_{24} = [2 – (2 \times 1)] - [-4/3 \times 1] = 4/3$

$r_{35} = [a_{35} - L_{31}\ r_{51}\ ] – r_{34}\ r_{25} = [1 – (2 \times 2)] - [4/3 \times 1] = -13/3$

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	
1 x_1	**6 x_2**	**-1 x_3**	**1 x_4**	**-1 x_3**	
2 x_1	5/3 x_2	-4/3 x_3	4/3x_4	-13/3 x_3	
0.5 x_1	2 x_2	1 x_3	-5 x_4	1 x_3	
1 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_3**	

4. ADIM

$L_{21}\ r_{21} + 1\ r_{22} = a_{22}$

$L_{42} = a_{42} - L_{41}\ r_{21} = 2 - (0.5 \times (-4)) = 4$

$L_{33} = a_{43} - L_{41}\ r_{31} = 1 - (0.5 \times 2) = 0$

$r_{34} = a_{44} - L_{41}\ r_{41} = -5 - (0.5 \times 1) = -5.5$

$r_{35} = a_{45} - L_{41}\ r_{51} = 1 - (0.5 \times 2) = 0$

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	
1 x_1	**6 x_2**	**-1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_3**	
2 x_1	10 x_2	-3 x_3	0 x_4	-3 x_3	
0.5 x_1	4 x_2	0 x_3	-5.5 x_4	0 x_3	
1 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_3**	

5. ADIM

L21 r21 + 1 r22 = a22

L52 =a52 - L51 r21 = 3– (1 x (-4)) = 7

L53 = a53 - L51 r31 = 2 – (1 x 2) = 0

L54 = a54 - L51 r41 = -4 – (1 x 1) =-5

r55 = a55 - L51 r51 = 6 – (1 x 2) = 4

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	
1 x_1	**6 x_2**	**-1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_3**	
2 x_1	10 x_2	-3 x_3	0 x_4	-3 x_3	
0.5 x_1	4 x_2	0 x_3	-5.5 x_4	0 x_3	
1 x_1	7 x_2	0 x_3	-5 x_4	4 x_3	

1 x_1					**4**	**Y_1**	**4**
1 x_1	**1 x_2**				**24**	**Y_2**	**20**
2 x_1	10 x_2	1 x_3			**36**	**Y_3**	**-172**
0.5 x_1	4 x_2	0 x_3	1 x_4		**7**	**Y_4**	**-75**
1 x_1	7 x_2	0 x_3	-5 x_4	1 x_3	**26**	**Y_5**	**343**

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**	**Y_1**	**4**

	6 x_2	-1 x_3	1 x_4	1 x_3	20	Y_2	20
		-3 x_3	0 x_4	-3 x_3	-172	Y_3	-172
			-5.5 x_4	0 x_3	-75	Y_4	-75
				4 x_3	343	Y_5	107

8.6. CHOLESKY (KARAKÖK) METODU

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}		X_1		b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		x_2		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	x	x_3	=	b_3
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}		x_4		b_4
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}		X_5		b_5
A					x	X	=	b

Verilen matristen alt ve üst üçgen matrisler elde edilir. Alt üçgen matristen **"y"** değerleri bulunur ve bu **"y"** değerleri kullanılarak üst üçgen matristen **"x"** değerleri elde edilir. Alt üçgen matrisin transpozu üst üçgen matrise eşittir **(a_{ij}= a_{ji})**.

L_{11}				
L_{21}	L_{22}			
L_{31}	L_{32}	L_{33}		
L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{44}	
L_{51}	L_{52}	L_{53}	L_{54}	L_{55}

L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}
	L_{22}	L_{23}	L_{24}	L_{25}
		L_{33}	L_{34}	L_{35}
			L_{44}	L_{45}
				L_{55}

A X = B **L L^T =A** **L L^T X=B** (her zaman a_{11} a_{22} a_{33}.... a_{nn} >0)

1. Adım

$$\begin{cases} L_{11}^2 = a_{11} & L_{11} = a_{11}^{1/2} \\ L_{21}.L_{11} = a_{21} & L_{21} = a_{21}/L_{11} \\ L_{31}.L_{11} = a_{31} & L_{31} = a_{31}/L_{11} \end{cases}$$

2. adım

$$\begin{cases} L_{21}^2 + L_{22}^2 = a_{22} & L_{22} = (a_{22} - L_{21}^2)^{1/2} \\ L_{31}.L_{21} + L_{32}.L_{22} = a_{32} & L_{32} = (a_{32} - L_{21}.L_{31})/L_{32} \end{cases}$$

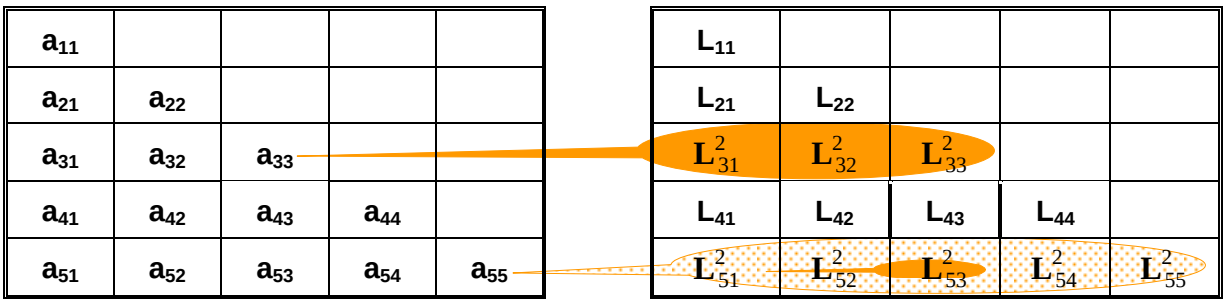
3. adım

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = a_{33} \qquad L_{33} = (a_{22} - L_{31}^2 + L_{32}^2)^{1/2}$$

Bu çözüm yönteminde her bir adımda bir kolondaki L_{ij} değerleri bulunur. Kolon sayısı kadar işlem yapılır. Yani;

i. a_{ii} elemanına gelene kadar L_{ij} 'lerin kareleri alınır ve a_{ii} 'ye eşitlenir ve buradan aranan L_{ii} değeri bulunur.

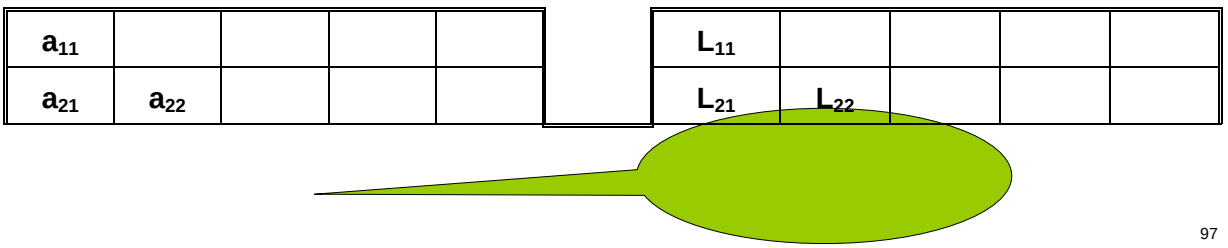
$$L_{11}^2 = a_{11} \qquad L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2 + L_{44}^2 = a_{44} \qquad L_{44} = (a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2)^{1/2}$$



ii. Daha sonra L_{ii}'altında kalan L_{ij} değerleri L_{ii} satırındaki L_{ij} değerleri ile aranan L_{ij} satırındaki değerlerle çarpılarak a_{ij} ye eşitlenerek L_{ij} değerleri bulunur.

$$L_{41}.L_{31} + L_{32}.L_{42} + L_{33}.L_{43} = a_{43}$$

$$L_{43} = (a_{43} - L_{31}.L_{41} - L_{32}.L_{42})/L_{33}$$



a_{31}	a_{32}	a_{33}		
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

L_{31}	L_{32}	L_{33}		
L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{44}	
L_{51}	L_{52}	L_{53}	L_{54}	L_{55}

iii. Bu işlemler bir örnek üzerinde yapılarak daha da iyi anlaşılacaktır.

L_{11}				
L_{21}	L_{22}			
L_{31}	L_{32}	L_{33}		
L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{44}	
L_{51}	L_{52}	L_{53}	L_{54}	L_{55}

L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}
	L_{22}	L_{23}	L_{24}	L_{25}
		L_{33}	L_{34}	L_{35}
			L_{44}	L_{45}
				L_{55}

Örnek 8.7: Aşağıda verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri **CHOLEYSK METODU** ile bulunuz.

4 x_1	**1 x_2**	**2 x_3**	**1**
1 x_1	**7 x_2**	**3 x_3**	**1**
2 x_1	3 x_2	10 x_3	**1**

1.adım

$L_{11}^2 = a_{11}$

$L_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$

$L_{11}=(a_{11})^{1/2} \quad =4^{1/2}=2$

$L_{12}=(a_{11})/ L_{11} =1/2=0.5$

$L_{13}=(a_{11})/ L_{11} =2/2=1$

4 x_1			**1**
0.50 x_1	**7 x_2**		**1**
1 x_1	3 x_2	10 x_3	**1**

2.adım

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & \sqrt{(7-0.5^2)} = 2.6 & (3-1x0.5)/2.6 = 0.96 \\ 1 & (3-1x0.5)/2.6 = 0.96 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. adım
$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 2.6 & 0.96 \\ 1 & 0.96 & (10-1^2+0.96^2)^{1/2}=2.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 2.6 & 0.96 \\ 1 & 0.96 & 2.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & & \\ 0.5 & 2.6 & \\ 1 & 0.96 & 2.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.289 \\ 0.078 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ & 2.6 & 0.96 \\ & & 2.84 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.289 \\ 0.078 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.1858 \\ 0.1010 \\ 0.0276 \end{bmatrix}$$

Denklem sisteminin sağlaması			
4 (0.1858)	**1(0.1010)**	**2 (0.0276)**	**1**
1 x_1	**7 x_2**	**3 x_3**	**1**
2 x_1	3 x_2	10 x_3	**1**

Örnek 8.5: Denklem sisteminde bilinmeyenleri **CHOLEYSK METODU** ile bulunması.

4 x_1	**1 x_2**	**2 x_3**	**2 x_4**	**2**
1 x_1	**4 x_2**	**2 x_3**	**4 x_4**	**4**
2 x_1	4 x_2	9 x_3	3 x_4	**6**
2 x_1	2 x_2	3 x_3	25 x_4	**8**

1.adım $L_{11}=(a_{11})^{1/2}=4^{1/2}=2$

$L_{12}=(a_{11})/\ L_{11}=1/2=0.5$

$L_{13}=(a_{11})/\ L_{11}=2/2=1$

$L_{14}=(a_{11})/\ L_{11}=2/2=1$

2 x_1				**2**
0.5 x_1	**4 x_2**			**4**

1 x_1	4 x_2	9 x_3		**6**
1 x_1	2 x_2	3 x_3	25 x_4	**8**

2.adım

$$L_{21}^2 + L_{22}^2 = a_{22} \qquad L_{22} = (a_{22} - L_{21}^2)^{1/2} = (4 - 0.5^2)^{1/2} = 1.936$$

$$L_{31}.L_{21} + L_{32}.L_{22} = a_{32} \qquad L_{32} = (a_{32} - L_{21}.L_{31}) / L_{22} = (4 - 1x0.5) / 1.936 = 1.808$$

$$L_{41}.L_{21} + L_{42}.L_{22} = a_{32} \qquad L_{42} = (a_{42} - L_{21}.L_{41}) / L_{22} = (2 - 1x0.5) / 1.936 = 0.775$$

2 x_1				**2**
0.5 x_1	**1.936 x_2**			**4**
1 x_1	1.808 x_2	9 x_3		**6**
1 x_1	0.775 x_2	3 x_3	25 x_4	**8**

3. Adım

$$L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 = a_{33} \qquad L_{33} = (a_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2)^{1/2} = (9 - 1^2 - 1.808^2)^{1/2} = 2.175$$

$$L_{41}.L_{31} + L_{32}.L_{42} + L_{33}.L_{43} = a_{43} \qquad L_{43} = (3 - (1x1) - (0.775x1.808)) / 2.175 = 0.275$$

2 x_1				**2**
0.5 x_1	**1.94 x_2**			**4**
1 x_1	1.808 x_2	2.175 x_3		**6**
1 x_1	0.775 x_2	0.275 x_3	25 x_4	**8**

4.adım

$$L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2 + L_{44}^2 = a_{44}$$

$$L_{44} = (a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2 - L_{43}^2)^{1/2} = (25 - 1^2 - 0.775^2 - 0.275^2)^{1/2} = 4.830$$

2 x_1				**2**
0.5 x_1	**1.94 x_2**			**4**
1 x_1	1.808 x_2	2.175 x_3		**6**
1 x_1	0.775 x_2	0.275 x_3	4.830 x_4	**8**

Bundan sonra alt üçgen matris oluşturulur,

L_{alt} **Y = b** uygulanarak **Y** değerleri bulunur.

L_{alt}				**Y**	**b**		
2				**Y_1**	**2**		**Y_1=1**
0.5	**1.936**			**Y_2**	**4**		**Y_2=1.808**
1	1.808	2.175		**Y_3**	**6**		**Y_3=0.796**
1	0.775	0.275	4.830	**Y_4**	**8**		**Y_4=1.114**

$L_{üst}$ **X = Y** uygulanarak bilinmeyenler olan **X** değerleri bulunur.

$L_{üst}$				**X**	**Y**		
2	**0.50**	**1**	**1**	**X_1**	**1**		**X_1=0.084**
	1.936	**1.808**	**0.775**	**X_2**	**1.808**		**X_2=0.527**
		2.175	0.275	**X_3**	**0.796**		**X_3=0.337**
			4.830	**X_4**	**1.114**		**X_4=0.231**

Kontrol	**4 x_1**	**1 x_2**	**2 x_3**	**2 x_4**	**2**
	1 x_1	**4 x_2**	**2 x_3**	**4 x_4**	**4**
	2 **(0.084)**	4(0.527)	9 **(0.337)**	3(0.231)	**6**
	2 x_1	2 x_2	3 x_3	25 x_4	**8**

Örnek 6.6: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri **CHOLEYSK METODU** ile bulunması.

4 x_1	**1 x_2**	**2 x_3**	**2 x_4**	**2 x_3**	**2**
1 x_1	**4 x_2**	**2 x_3**	**4 x_4**	**1 x_3**	**4**
2 x_1	2 x_2	9 x_3	3 x_4	3 x_3	**6**
2 x_1	4 x_2	3 x_3	25 x_4	2 x_3	**8**

$2\,x_1$	$1\,x_2$	$3\,x_3$	$2\,x_4$	$2\,x_3$	10

1.Adım $L_{11}=(a_{11})^{1/2} \quad =4^{1/2}=2$

$L_{12}=(a_{11})/\,L_{11}=1/2=0.5$

$L_{13}=(a_{11})/\,L_{11}=2/2=1$

$L_{14}=(a_{11})/\,L_{11}=2/2=1$

$L_{15}=(a_{11})/\,L_{11}=2/2=1$

$2\,x_1$					=	2
$0.5\,x_1$	$4\,x_2$					4
$1\,x_1$	$2\,x_2$	$9\,x_3$				6
$1\,x_1$	$4\,x_2$	$3\,x_3$	$25\,x_4$			8
$1\,x_1$	$1\,x_2$	$3\,x_3$	$2\,x_4$	$2\,x_3$		10

2.adım

$L_{21}^2+L_{22}^2=a_{22} \qquad L_{22}=(a_{22}-L_{21}^2)^{1/2}=(4-0.5^2)^{1/2}=1.936$

$L_{31}.L_{21}+L_{32}.L_{22}=a_{32} \qquad L_{32}=(a_{32}-L_{21}.L_{31})/L_{22}=(2-1x0.5)/1.936=0.775$

$L_{41}.L_{21}+L_{42}.L_{22}=a_{32} \qquad L_{42}=(a_{42}-L_{21}.L_{41})/L_{22}=(4-1x0.5)/1.936=1.808$

$L_{51}.L_{21}+L_{52}.L_{22}=a_{52} \qquad L_{42}=(a_{52}-L_{21}.L_{51})/L_{22}=(1-1x0.5)/1.936=0.258$

$2\,x_1$					=	2
$0.5\,x_1$	$1.936\,x_2$					4
$1\,x_1$	$0.775\,x_2$	$9\,x_3$				6
$1\,x_1$	$1.808\,x_2$	$3\,x_3$	$25\,x_4$			8
$1\,x_1$	$0.258\,x_2$	$3\,x_3$	$2\,x_4$	$2\,x_3$		10

3. Adım

$L_{31}^2+L_{32}^2+L_{33}^2=a_{33} \qquad L_{33}=(a_{33}-L_{31}^2-L_{32}^2)^{1/2}=(9-1^2-0.775^2)^{1/2}=2.72$

$L_{41}.L_{31}+L_{32}.L_{42}+L_{33}.L_{43}=a_{43} \qquad L_{43}=(3-(1x1)-(0.775x1.808))/2.72=0.220$

$L_{51}.L_{31}+L_{32}.L_{52}+L_{33}.L_{53}=a_{53} \qquad L_{53}=(3-(1x1)-(0.775x0.258))/2.72=0.662$

2 x_1						**2**
0.5 x_1	**1.936 x_2**					**4**
1 x_1	0.775 x_2	2.720 x_3			**=**	**6**
1 x_1	1.808 x_2	0.220 x_3	25 x_4			**8**
1 x_1	**0.258 x_2**	**0.662 x_3**	**2 x_4**	**2 x_3**		**10**

4.adım

$$L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{44}^2 = a_{44}$$

$$L_{44} = (a_{44} - L_{41}^2 - L_{42}^2)^{1/2} = (25 - 1^2 - 1.808^2 - 0.220^2)^{1/2} = 4.883$$

$$L_{51}.L_{41} + L_{42}.L_{52} + L_{44}.L_{53} = a_{53}$$

$$L_{43} = (2 - (1x1) - (0.258x1.808) - (0.662x0.220) / 4.883 = 0.079$$

2 x_1						**2**
0.5 x_1	**1.936 x_2**					**4**
1 x_1	0.775 x_2	2.720 x_3			**=**	**6**
1 x_1	1.808 x_2	0.220 x_3	4.883 x_4			**8**
1 x_1	**0.258 x_2**	**0.662 x_3**	**0.079 x_4**	**2 x_3**		**10**

5.adım

$$L_{51}^2 + L_{52}^2 + L_{53}^2 + L_{54}^2 + L_{55}^2 = a_{55} \qquad L_{55} = (a_{44} - L_{51}^2 - L_{52}^2 - L_{53}^2 + L_{54}^2)^{1/2}$$

$$L_{55} = (2 - 1^2 - 0.258^2 - 0.662^2 - 0.079^2)^{1/2} \quad L_{55} = 0.699$$

2 x_1					**2**
0.5 x_1	**1.936 x_2**				**4**
1 x_1	0.775 x_2	2.720 x_3			**6**
1 x_1	1.808 x_2	0.220 x_3	4.883 x_4		**8**
1 x_1	**0.258 x_2**	**0.662 x_3**	**0.079 x_4**	**0.699 x_3**	**10**

L_{alt} **Y = b** uygulanarak **Y** değerleri bulunur.

L_{alt}						Y		b		
2						Y_1		2		Y_1=1
0.5	1.936					Y_2		4		Y_2=1.808
1	0.775	2.720			x	Y_3	=	6		Y_3=1.323
1	1.808	0.220	4.883			Y_4		8		Y_4=0.705
1	0.258	0.662	0.079	0.699		Y_5		10		Y_5=10.876

$L_{üst}$ **X = Y** uygulanarak aranan bilinmeyenler olan **X** değerleri bulunur.

$L_{üst}$					X		Y		
2	0.5	1	1	1	X_1		1		X_1=-5.650
	1.936	0.775	1.808	0.258	X_2		1.808		X_2=0.278
		2.720	0.220	0.662	x X_3	=	1.323		X_3=-3.292
			4.883	0.079	X_4		0.705		X_4=-0.107
				0.699	X_5		10.876		X_5=15.559

Örnek 6.7: Denklem sisteminde bilinmeyenleri **[X]** ters matrisi yöntemini kullanarak bulunması.

$$x_1 + 2x_2 + 00 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$2x_1 + 00 + 00 + 1x_4 = 6$$
$$2x_1 + 00 + 2x_3 + 00 = 8$$

A=						T_1=				
	1	2	0	1			1	0	0	0
	2	2	1	2			-2/1	1	0	0
	2	0	0	1			-2/1	0	1	0
	2	0	2	0			-2/1	0	0	1

				A=				
					1	2	0	1
					2	2	1	2
					2	0	0	1
					2	0	2	0
T_1=	1	0	0	0	**1**	**2**	**0**	**1**
	-2/1	1	0	0	**0**	**-2**	**1**	**0**
	-2/1	0	1	0	**0**	**-4**	**0**	**-1**
	-2/1	0	0	1	**0**	**-4**	**2**	**-4**
					B=T_1A			

	B=			
	1	2	0	1
	0	-2	1	0

					0	-4	0	-1
					0	-4	2	-4
$\underline{T}_2$=	1	0	0	0	**1**	**0**	**1**	**1**
	0	-1/2	0	0	**0**	**1**	**-1/2**	**0**
	0	-4/2	1	0	**0**	**0**	**-2**	**-1**
	0	-4/2	0	1	**0**	**0**	**0**	**-2**
					$\underline{C}=\underline{T}_1\underline{B}$			

				$\underline{C}$=	1	0	1	1
					0	1	-1/2	0
					0	0	-2	-1
					0	0	0	-2
$\underline{T}_3$=	1	0	1/2	0	**1**	**0**	**1**	**1**
	0	1	-1/4	0	**0**	**1**	**-1/2**	**0**
	0	0	-1/2	0	**0**	**0**	**-2**	**-1**
	0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**-2**
					$\underline{D}=\underline{T}_3\underline{C}$			

$\underline{T}_4$=	1	0	0	1/4
	0	1	0	1/8
	0	0	1	1/4
	0	0	0	-1/2

				$\mathbf{T_3}$				$\mathbf{T_2}$				$\mathbf{T_1}$			
				1	**0**	**1/2**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
				0	**1**	**-1/4**	**0**	**0**	**-1/2**	**0**	**0**	**-2/1**	**1**	**0**	**0**
				0	**0**	**-1/2**	**0**	**0**	**-2**	**1**	**0**	**-2/1**	**0**	**1**	**0**
				0	**0**	**0**	**1**	**0**	**-2**	**0**	**1**	**-2/1**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1/4**	1	0	1/2	1/4	1	-1/2	1/2	1/4	1/2	-1/2	1/2	1/4
0	**1**	**0**	**1/8**	0	1	-1/4	1/8	0	-1/4	-1/4	1/8	3/4	-1/4	-1/4	1/8
0	**0**	**1**	**1/4**	0	0	-1/2	1/4	0	1/2	-1/2	1/4	-1/2	1/2	-1/2	1/4
0	**0**	**0**	**-1/2**	0	0	0	-1/2	0	1	0	-1/2	-1	1	0	-1/2
T_4				$T_4\ T_3$				$T_4\ T_3\ T_2$				**$A^{-1} = T_4\ T_3\ T_2\ T_1$**			

Kontrol: A^{-1} A=I

				A			
				1	**2**	**0**	**1**
				2	**2**	**1**	**2**
				2	**0**	**0**	**1**
				2	**0**	**2**	**0**
1/2	-1/2	1/2	1/4	**1**	0	0	0
3/4	-1/4	-1/4	1/8	0	**1**	0	0
-1/2	1/2	-1/2	1/4	0	0	**1**	0
-1	1	0	-1/2	0	0	0	**1**

$A^{-1} = T_4\,T_3\,T_2\,T_1$	$T_4\,T_3\,T_2\,T_1 \times A = I$

Buradan **x** değerleri $A^{-1}.b=[x]$ bağıntısıyla aşağıdaki şekilde bulunur

Kontrol: A^{-1} b=[x]				**b**
				2
				4
				6
				8
1/2	-1/2	1/2	1/4	$x_1=4$
3/4	-1/4	-1/4	1/8	$x_2=0$
-1/2	1/2	-1/2	1/4	$x_3=0$
-1	1	0	-1/2	$x_4=-2$
A^{-1}				

Örnek 6.8: Denklem sisteminde x_4 bilinmeyeni determinantı (Cramer) kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 &= 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 + 3x_5 &= 10 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 6x_5 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabitler ile 4. sütun yer değiştirir

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & \underline{12} & 3 \\ 4 & 2 & 6 & \underline{10} & 3 \\ 6 & 2 & 3 & \underline{8} & 1 \\ 2 & 3 & 5 & \underline{20} & 6 \\ 1 & 3 & 4 & \underline{16} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & \underline{12} & 3 \\ 4 & 2 & 6 & \underline{10} & 3 \\ 6 & 2 & 3 & \underline{8} & 1 \\ 2 & 3 & 5 & \underline{20} & 6 \\ 1 & 3 & 4 & \underline{10} & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -12 & -8 & -28 & -6 \\ -20 & -24 & -56 & -16 \\ -2 & 0 & 16 & 6 \\ 2 & 3 & 20 & -1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -12 & -8 & -2 & -6 \\ -20 & -24 & -2 & -16 \\ -2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{1}{(-12)^2}\begin{bmatrix} 128 & 112 & 72 \\ -16 & -248 & -84 \\ -20 & -184 & 24 \end{bmatrix}}{\frac{1}{(-12)^2}\begin{bmatrix} 128 & -16 & 72 \\ -16 & -4 & -84 \\ -20 & -32 & 24 \end{bmatrix}} = \frac{2654208}{358272} = 7.408$$

NOT: Hangi bilinmeyen istenir ise o sutün ile sabitler (b) yer değiştirerek $X_i = \frac{det[B]}{det[A]}$ bağıntısından istenilen bilinmeyen bulunur.

GAUSS-SIEDEL

Gauss-siedel yöntemi en çok kullanılan iteratif bir yöntemdir. Aşağıdaki şekilde verilen denklem sisteminde,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$A\,X = b$$

denklem **AX=b** şeklinde kısaca yazılabilir. Bu çözüm yönteminde tek şart diyagonal elemanların sıfırdan farklı **[$a_{ii} \neq 0$]** olmasıdır.

2 bilinmeyenli	**3** bilinmeyenli	**n** bilinmeyenli
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots a_{3n}x_n = b_3$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots a_{nn}x_n = b_n$
$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}$	$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$	$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$
$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$	$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$	$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$
	$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$	$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \ldots\ldots - a_{n3}x_3}{a_{nn}}$
$x_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}\left[\frac{b_1}{a_{11}}\right]}{a_{22}} \end{cases}$		

Bilinmeyenler tahmin edilerek bulunur. İşlemlerin kolaylığı için x_1 harici diğer bilinmeyenler sıfır "0" seçilir.

2 bilinmeyenli bir denklemde $x_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - a_{21}\left[\dfrac{b_1}{a_{11}}\right]}{a_{22}} \end{cases}$ olur. Daha sonra tekrar aynı tahminler yapılarak sonuç değişmez duruma gelene kadar devam edilir. Devam ederken hatanın yüzdesine,

$$|\varepsilon| = \left|\frac{x_i - x_{i+1}}{x_i}\right| \%100$$

bağıntısı ile kontrol edilir.

Örnek: Aşağıda verilen denklem sisteminde bilinmeyenlerin **Gauss-siedel** yöntemi ile hesaplanması.

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$
$$6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$$

Çözüm: Bilinmeyenler her bir eşitlik kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$x_1 = \frac{2 - 3x_2 - 4x_3}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 - x_1 - 4x_3}{3} \qquad 1$$

$$x_3 = \frac{5 - 6x_1 - 2x_2}{2}$$

$$x_2 = 0 \quad x_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - 4x_3}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{4 - x_1 - 4x_3}{3} = 1 \\ x_3 = \dfrac{5 - 6x_1 - 2x_2}{2} = -1.5 \end{cases}$$

1 bağıntısında bulunan değerler yerine yazılarak bilinmeyenler tekrar bulunur.

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 \; x_3 = 1.5 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - 4x_3}{2} = \dfrac{2 - 3[1] - 4[-1.5]}{2} = 2.5 \\ x_2 = \dfrac{4 - x_1 - 4x_3}{3} = \dfrac{4 - [2.5] - 4[-1.5]}{3} = 2.5 \\ x_3 = \dfrac{5 - 6x_1 - 2x_2}{2} = \dfrac{5 - 6[2.5] - 2[2.5]}{2} = -7.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - 4x_3}{2} = \dfrac{2 - 3[2.5] - 4[-7.5]}{2} = 12.25 \\ x_2 = \dfrac{4 - x_1 - 4x_3}{3} = \dfrac{4 - [12.25] - 4[-7.5]}{3} = 7.25 \\ x_3 = \dfrac{5 - 6x_1 - 2x_2}{2} = \dfrac{5 - 6[12.25] - 2[7.25]}{2} = -41.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - 3x_2 - 4x_3}{2} = \dfrac{2 - 3[7.25] - 4[-41.50]}{2} = 12.25 \\ x_2 = \dfrac{4 - x_1 - 4x_3}{3} = \dfrac{4 - [12.25] - 4[-7.5]}{3} = 7.25 \\ x_3 = \dfrac{5 - 6x_1 - 2x_2}{2} = \dfrac{5 - 6[12.25] - 2[7.25]}{2} = -41.25 \end{cases}$$

BÖLÜM 9: BİLİNMEYEN SAYISI DENKLEM SAYISINDAN FARKLI OLAN DENKLEM

Lineer denklem sistemlerinin çözümleri

1. Anlamsız (çözüm yok)

2. Anlamlı a. Tek çözüm
b. Birden fazla çözüm

olarak karşımıza çıkmaktadır. Denklem sistemlerinin çözüm aşamasında ilk önce bunların belirlenmesinde fayda vardır. Bu durumlar aşağıda örnekler üzerinde incelenmektedir.

ÖRNEK Aşağıda verilen denklem sisteminde çözümün olup olmadığını ve çözümü var ise bilinmeyenleri bulunuz.

2x - y – 2z + 3v =1

3x + 2y - z + 2v =4

3x + 3y +3z - 3v =5

Yok etme metodu ile denklem sistemi üst üçgen matris haline getirilir.

4. adım

2x - y – 2z + 3v =1

y + 4z - 5v =5 **L21=3/2**

3y +12z-15v =7 **L31=3/2**

2x - y – 2z + 3v =1

y + 4z - 5v =5 **L21=3/1**

0 = -8

0=-8 anlamsız bir değer olduğundan dolayı denklemin hiçbir çözümü bulunmamaktadır.

Örnek 6.8: Aşağıda 3 bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü olup olmadığını ve çözümü var ise bilinmeyenleri bulunuz.

2x - y – 2z =1
4x + 2y - z =4
2x + 3y +3z =5
4x - 4y – 2z =3/4

2x - y – 2z =1
4y +3z =2
4y +5z =4
-2y – 2z =-5/4

2x - y – 2z =1
4y +3z =2
+4z =2
-0.5z =-1/4

2x - y – 2z =1
4y +3z =2
+4z =2
0=0

verilen denklem sisteminde **a = 0** (a bir sabit) gibi herhangi bir anlamsız eşitlik olmadığından denklem sisteminin anlamlı ve çözümü olduğu görülür. Buradan bilinmeyenler,

x=2 **y=-1** **z=2** sistemin tek çözümüdür.

Örnek 6.9: **x - 3y + 6z + 2v – 5w =10**
y – 4z +v =1
v –3w =2

Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz. Denklem sisteminde z ve w bilinmeyenleri serbest olarak bulunmaktadır. Yani bu bilinmeyenler her denklemde bulunmamaktadır. Bu bilinmeyenlere serbest olarak bazı değerler verilir ise;

z = a **w = b**

bu değerleri 3. Denklemde yerine yazılır ise, **v = 2 + 3b** olur.

Bu değeri 2. Denklemde yerine yazar isek, **y = 4a – 3b – 1** elde edilir.

Bu değeri 1. Denklemde yerine yazar isek, **x = 3a – 5b – 10** elde edilir.

Sistemin genel çözümü yazılır ise,

x = 3a – 5b – 10
y = 4a – 3b – 1
z = a
v = 2 + 3b
w = b

veya **(3z – 5w-2, 4z –3w – 1, z, 2 + 3w, w)**

Özel çözüm, a=2 ve b=1 ise **x= -12, y= 4, z=2, v= 5, w= 1**

Özel çözüm a=5 ve b= -3 ise **x= 20, y= 28, z=5, v= -7, w= -3**

Değişkenlere bağlı olmak üzere sistemim **BİRDEN ÇOK ÇÖZÜMÜ** bulunmaktadır.

Örnek 6.9: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz.

2x + 2y – 4z + 2v =10
2x + 4y + 2z + 4v =20
4x + 2y – 2z + v =30

2x + 2y – 4z + 2v =10
2y + 6z + 2v =10
-2y + 2z - 3v =10

2x + 2y – 4z + 2v =10
6z + 2v =10
8z - v =0
2x + 2y – 4z + 2v =10
6z + 2v =10
(11/3)v =40/3 **v =40/11** **z =15/33**

y ise **x** bağımsız değişkenine bağlı olarak çeşitli değerler alabilir.

Örneğin **x = 2** ise **y = 12/11**
x = 4 ise **y = 228/33**

Bazı değişkenlere bağlı olmak üzere sistemim **BİRDEN ÇOK ÇÖZÜMÜ** bulunmaktadır.

BÖLÜM 4: HOMOJEN DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Örnek 6.10: Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunuz.

x + 2y – 3z + v =0
x - 3y + z - 2v =0
2x + y – 3z + 5v =0

x + 2y – 3z + v =0
- 5y + 4z - 3v =0
-3y + 3z + 3v =0

x + 2y – 3z + v =0
- 5y + 4z - 3v =0
27/5z + 6/5v =0

burada **v=-5** olur ise **z=10/9 y=35/9 x=5/9** olarak bulunur. Bu denklem sisteminde **4** bilinmeyen üç denklem olduğu için **z** ve **v** bağlı olarak çözümler bulunabilir.

Örnek : Verilen denklem sisteminde bilinmeyenleri bulunması.

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**		**4**
2 x_1	**2 x_2**	**1 x_3**	**1 x_4**	**1 x_3**		**24**
4 **x_1**	2 **x_2**	1 **x_3**	2 **x_4**	1 **x_3**	**=**	**36**
1 **x_1**	2 **x_2**	1 **x_3**	-5 **x_4**	1 **x_3**		**7**
2 x_1	**3 x_2**	**2 x_3**	**-4 x_4**	**6 x_3**		**26**

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
L_{21}=1	2-(2x**1**) x_1	2-(-4x**1**) x_2	1-(2x**1**) x_3	1-(1x**1**) x_4	1-(2x**1**) x_3	**24**-(4x**1**)
L_{31}=2	4-(2x**2**) x_1	2-(-4x**2**) x_2	1-(2x**2**) x_3	2-(1x**2**) x_4	1-(2x**2**) x_3	**36**-(4x**2**)
L_{41}=0.5	1-(2x**0.5**) x_1	2-(-4x**0.5**) x_2	1-(2x**0.5**) x_3	-5-(1x**0.5**) x_4	1-(2x**0.5**) x_3	**7**-(4x**0.5**)
L_{51}=1	2-(2x**1**) x_1	3-(-4x**1**) x_2	2-(2x**1**) x_3	-4-(1x**1**) x_4	6-(2x**1**) x_3	**26**-(4x**1**)

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	**20**
	0	10 x_2	-3 x_3	0 x_4	-3 x_3	**28**
	0	4 x_2	0 x_3	-5.5 x_4	0 x_3	**5**
	0	7 x_2	0 x_3	-5 x_4	4 x_3	**22**

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	**20**

L_{32}=1.67	**0**	10-(6x**1.67**) x_2	-3-(-1x**1.67**) x_3	0-(0x**1.67**) x_4	-3-(-1x**1.67**) x_3	**28**-(20x**1.67**)
L_{42}=0.67	**0**	4-(6x**0.67**) x_2	0-(-1x**0.67**) x_3	-5.5-(0x**0.67**) x_4	0-(-1x**0.67**) x_3	**5**-(20x**0.67**)
L_{52}=1.17	**0**	7-(6x**1.17**) x_2	0-(-1x**1.17**) x_3	-5-(0x**1.17**) x_4	4-(-1x**1.17**) x_3	**22**-(20x**1.17**)

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	20
	0	**0**	-1.33 x_3	0 x_4	-1.33 x_3	-5.40
	0	**0**	0.67 x_3	-5.5 x_4	0.67 x_3	-8.40
	0	**0**	1.17 x_3	-5 x_4	5.17 x_3	-1.40

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_3	20
	0	**0**	-1.33 x_3	0 x_4	-1.33 x_3	-5.40
L_{43}=-0.504	**0**	**0**	0.67-(-1.33x-0.504) x_3	-5.5-(0x-0.504) x_4	0.67-(-1.33x-0.504) x_3	-8.4-(-5.4x-0.504)
L_{53}=-0.88	**0**	**0**	1.17-(-1.33x-0.88) x_3	-5-(0x-0.88) x_4	5.17-(-1.33x-0.88) x_3	-1.40-(-5.4x-0.88)

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_5	**20**
	0	**0**	-1.33 x_3	0 x_4	-1.33 x_5	**-5.40**
	0	**0**	**0**	-5.5 x_4	0 x_5	**-11.12**
	0	**0**	**0**	-5 x_4	4.0 x_5	**-6.15**

	2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
	0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_5	**20**
	0	**0**	-1.33 x_3	0 x_4	-1.33 x_5	**-5.40**
	0	**0**	**0**	-5.5 x_4	0 x_5	**-11.12**
L_{54}=0.91	**0**	**0**	**0**	-5-(-5.5x0.91) x_4	4.0-(0x0.91) x_5	**-6.15**-(-11.12x0.91)

2 x_1	**-4 x_2**	**2 x_3**	**1 x_4**	**2 x_3**	**4**
0	6 x_2	-1 x_3	0 x_4	-1 x_5	**20**
0	**0**	-1.33 x_3	0 x_4	-1.33 x_5	**-5.40**
0	**0**	**0**	-5.5 x_4	0	**-11.12**

0	**0**	**0**	0	4.0 x_5	**4**
x_1=5	**x_2=4**	**x_3=3**	**x_4=2**	**x_5=1**	