FUNÇÃO EXPONENCIAL

Uma função **F : R** $\longrightarrow$ **R*** + dada por F (x) = a^x, a constante positiva diferente de 1, denomina-se função exponencial.

$F(x) = a^x$ $\quad (a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1)$

Esta definição provoca muitas questões:

- o que significa o símbolo a^x ?
- por que $a \in R^{*+}$ e $a \neq 1$?
- por que não se pode ter $a < 0$?
- que tipo de variação e gráfico tem a^x ?

Tais perguntas estarão respondidas quando tivermos construído a função F, a partir de sucessivas ampliações dos campos numéricos a partir de **N**.

Atenção!!!! Lembre-se que:

(Potências da mesma base)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m:n}$

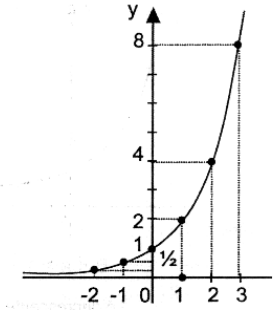
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot a^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

Exemplos:

1) Seja a função F = { (x, y) $\in$ R x R / $y = 2^x$ }

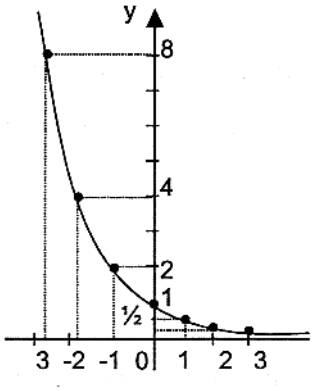
Vamos construir uma tabela e em seguida, o gráfico.



X	Y
-2	¼
-1	½
0	1
1	2
2	4
3	8

2) Seja a função F = (x, y) $\in$ R x R / y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Vamos construir uma tabela e, em seguida, o gráfico.



X	Y
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼
3	⅛

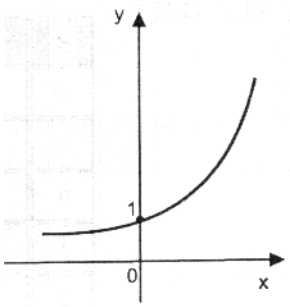
Quando a base for 2 (o mesmo acontecerá se ela for 3, 4 ou qualquer número maior que 1), quanto maior o expoente, maior será o valor de $y = a^x$.

Por exemplo, $2^3 < 2^4 > 2^5$ ...

Da mesma forma quando a base for $\frac{1}{2}$ (o mesmo acontecerá se ela for $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ Ou qualquer número menor que 1), quanto maior o expoente, menor será a valor de $y = a^x$.

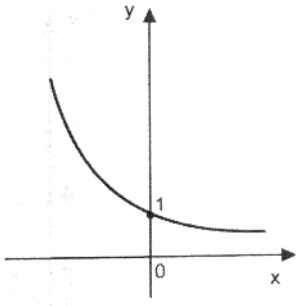
Por exemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^4$ .....

A função exponencial será crescente, quando a base *a* for maior que 1 e, decrescente, se *a* for positiva e menor que 1. Seu gráfico etrá sempre um dos dois aspectos.



a > 1

f é crescente



0 < a > 1

f é decrescente

Observe que, nos dois casos, o gráfico de F (x) = a^x não intercepta o eixo 0x, pois, para a $\in$ R* + , a $\neq$ 0 para qualquer x $\in$ R.

Todo gráfico de uma função F (x) = a^x (a $\in$ R* +, a $\neq$ 1) intercepta o eixo 0x no ponto (0, 1).

Como não há nenhuma restrição, x pode variar de -∞ a + ∞, ou seja, o seu domínio é R.

Observe, também, como a > 0 e a $\neq$ 1, as imagens de a^x serão sempre positivas. Assim, teremos:

D = R

Im = R* +

Mais uma vez, observe que, se a = 1, teremos $y = 1^x$ e que para qualquer valor de x, teríamos y = 1.

E se *a* fosse negativo, os valores de y = ax (por exemplo $y = (-2)^x$) iriam oscilar entre positivos e negativos (por exemplo, $y = (-2)^2 = 4$ e $y = (-2)^3 = -8$).

Então, estes são alguns dos motivos que determinam que *a* deve ser positivo e diferente de 1.

Resumindo:

Conceito: $F = \{ (x, y) / y = a^{F(x)} , a > 0 \}$

Exemplos:

$F_1 = \{ (x, y) / y = 2^x \}$

$F_2 = \{ (x, y) / y = 2^{x+1} \}$

Domínio: depende da função F (x).

Se for $y = a^x$, $x \in]-\infty, +\infty[$

Imagem: $y \in]0, +\infty[$

Se a > 1, y é crescente

Se a < 1, y é decrescente

Zeros: não possui

Variação: Se a > 1, y é crescente

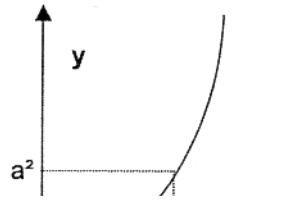
Se a < 1, y é decrescente

X	$-\infty$ ... –3 -2 -1 0 1 2 3 .....$+\infty$
Y	**0**..... $\frac{1}{a^3}$ $\frac{1}{a^2}$ $\frac{1}{a}$ **1 a** a^2 a^3 **.....** $+\infty$

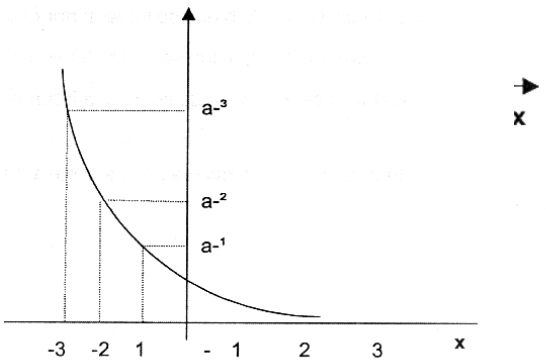
Gráfico:

a > 1

$y = a^x$

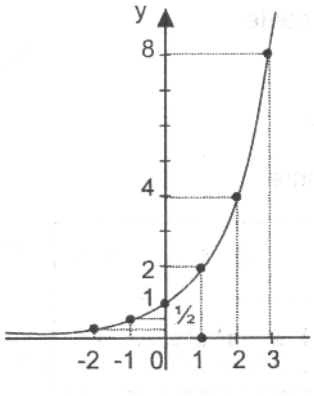


a < 1



EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Resolva graficamente a equação $2^x = 4$



Para y = 4 temos x ≅ 2. Portanto S = { 2 }

EXERCÍCIOS:

1) Esboce o gráfico das funções F = R ⟶ R* + :

a) y = 3

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $F(x) = 2^{-x}$

d) $y = 2^{x+1}$

e) $F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

2) Sendo x < 0 e sabendo-se que $a^x > 1$, o que se pode afirmar sobre o valor de *a*? justifique graficamente.

3) Se para x > 1 tem-se $a^x > 5$, o que se pode afirmar sobre o valor de *a*? justifique.

1) Se para x > 1 tem-se $a^x < 3$, o que se pode afirmar sobre o valor de *a*?

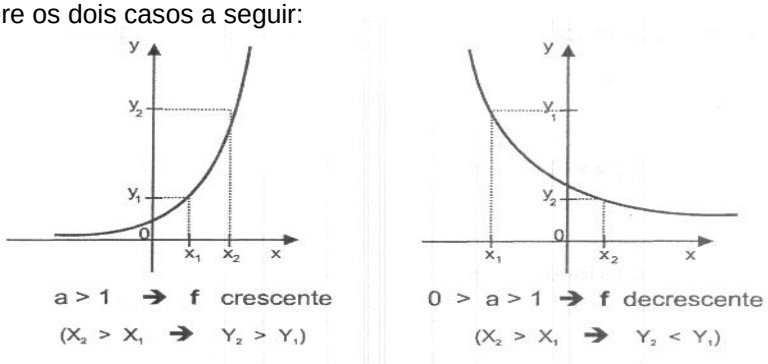
2) Se para x < -1 tem-se $a^x > 3$, o que se pode afirmar sobre o valor de *a*?

3) Se para x < -1 tem-se $a^x < \frac{1}{5}$, o que se pode afirmar sobre o valor de *a*?

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Podemos resolver inequações exponenciais pela análise gráfica da função exponencial $F(x) = a^x$.

Considere os dois casos a seguir:



Observe nos gráficos que:

- Para $a > 1$ e $x_2 > x^1$, temos $a^x_2 > a^x_1$
- Para $a < 1$ e $x_2 > x_1$, temos $a^x_2 < a^x_1$

Vamos então estabelecer um processo de resolução de inequações exponenciais:

- reduzem-se os dois membros da inequação a uma mesma base;
- monta-se uma nova inequação com os expoentes. Se $a > 1$, mantém-se o sinal da desigualdade original; se $0 < a < 1$, inverte-se o sinal da desigualdade.

Exemplos:

1) Resolva a inequação $2^{x+1} > 8$,

Então, temos: $2^{x+1} > 2^3$

Como a base (2) é maior que 1, F é crescente, ou seja, quanto maior o expoente, maior a potência, então:

$$x + 1 > 3 \text{ ou } x > 2$$

Solução: $S = \{ x \in R / x > 2 \}$

2) Resolver a inequação: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} < \frac{1}{8}$.

Então, temos: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Como a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ é menor que 1, F é decrescente, ou seja, quanto maior o expoente, menor a potência, então:

$$x - 1 > 3 \text{ ou } x > 4$$

Solução: $S \{ x \in R / x > 4 \}$

EXERCÍCIOS

4) Resolva as inequações:

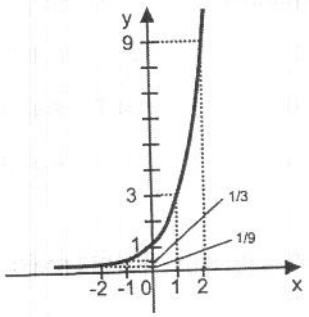
a) $3^x < 27$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2^{x+1}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

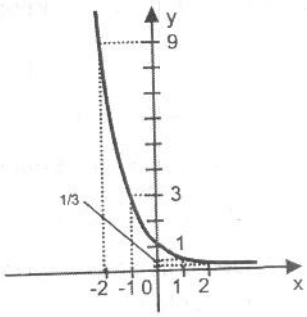
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$

GABARITO

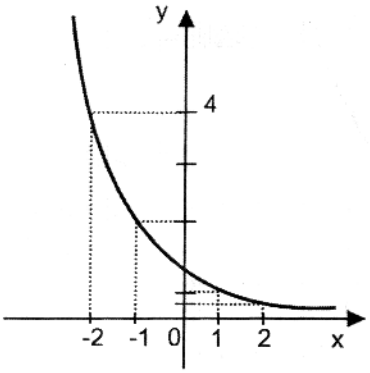
1.a)



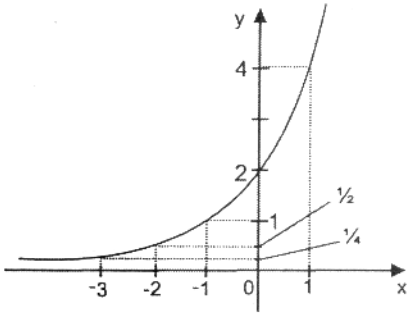
1.b)



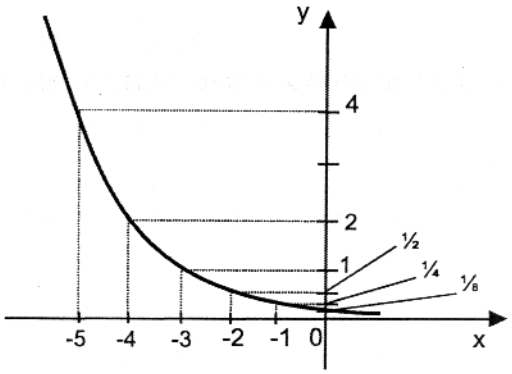
1.c)



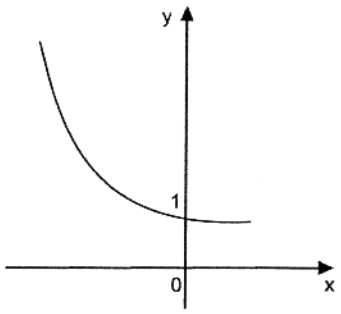
1.d)



1.e)



2)



Resposta: *a* é uma fração menor que 1 (< a < 1) porque quando x é negativo (x < 0) temos $y = a^x > 1$.

Por exemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4 > 1$

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equação exponencial é toda equação que possui a incógnita no expoente de uma potência.

Exemplos:

$3^x = 9$

$2^x - 1 = 16$

$2^{3x} = 512$

$5^{x-3} + 5^{x-4} + 5^{x-5} = 943$

A resolução de uma equação exponencial baseia-se, de uma maneira geral, na comparação de duas potências.

Para maior facilidade, vamos classificá-las em alguns tipos e subtipos.

1º tipo $\boxed{a^x = b}$

1º caso – *a* e *b* são potências de mesma base.

Neste caso teremos a comparação de duas potências de mesma base. E se duas potências são iguais e têm a mesma base, então os seus expoentes deverão ser iguais entre si.

Exemplos:

1) Considere a equação $2^x = 32$. Podemos resolvê-las reduzindo 32 para base 2:

$2^x = 32 \Longrightarrow 2x = 2^5 \Longrightarrow x = 5$

Logo, $S = \{ 5 \}$

2) Resolver a equação: $2^{x-1} = 16$

$2^{x-1} = 2^4$

$x - 1 = 4$

$\boxed{x = 5}$

Logo, $S = \{ 5 \}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO:

Para a equação $9^{x+1} = 27^{x-3}$, teremos:

$9^{x+1} = 27^{x-3}$

$(3^2)^{x+1} = (3^3)^{(x-3)}$

$3^{2x+2} = 3^{3x-9}$

$2x + 2 = 3x - 9$

$x = 11$

Logo, S = { 11 }

EXERCÍCIOS

1) Resolva as equações:

a) $2^x = 8$

b) $3^{x2+2x+1} = 1$

c) $4^{2x+3} = 8^{x-1}$

d) $\sqrt[x+1]{2} = 4^{2x-1}$

2º caso – *a* e *b* são quaisquer.

Para se resolver esse tipo de equação, necessitamos do emprego de logaritmos.

Exemplos:

1) $3^x = 5$

$\log 3^x = \log 5$

$x = \frac{\log 5}{\log 3}$

2) $2^x = 3$ Sabe-se que $\begin{cases} \log 2 = 0{,}30103 \\ \log 3 = 0{,}47712 \end{cases}$

$\log 2^x = \log 3$

$x \log 2 = \log 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 2} \Longrightarrow \frac{0{,}30103}{0{,}47712} \Longrightarrow x = 0{,}63109$

EXERCÍCIOS

2) Resolver as equações;

a) $3^{x+1} = 5$

b) $2^{x+1} . 3^{x-1} = 5^{x-2} . 7^{x+3}$

2º tipo

x

.

.

.

c

b

Equação do tipo a = N

x

.

.

.

c

Neste caso, costuma-se usar o seguinte artifício: b = y e, assim, sucessivamente.

Exemplos:

x

3

1) 2 = 512

artifício $3^x = y$

Então, $2y - 512 \Longrightarrow 2y = 2^9 \Longrightarrow y = 9$

Substituindo, temos:

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

Este exercício poderia também ser resolvido da seguinte maneira:

$$2^{3^x} = 512$$

$$2^{3^x} = 2^9$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

2)

$$3^{2^{2^x}} = 81$$

$$3^{2^{2^x}} = 3^4$$

$$2^{2^x} = 4$$

$$2^{2^x} = 2^2$$

$$2^x = 2$$

$$x = 1$$

EXERCÍCIOS

3) Resolva as equações:

a) $3^{2^x} = 81$

b) $2^{3^x} = 8$

c) $5^{3^x} = 125$

d) $2^{2^x} = 16$

3º tipo

Equações do tipo:

$$a \cdot \propto^{2x} + b \cdot \propto^{y} + c = 0$$

Neste caso, costuma-se usar o seguinte artifício:

$$\propto^{X} = y$$

Assim, teremos a equação:

$A \cdot y^2 + B \cdot y + c = 0 \longrightarrow$ equação do 2º grau

Exemplos:

1) $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

Fazendo $7^x = y$

Temos: $7^{2x} = y^2$

Substituindo, temos; $y^2 - 8y + 7 = 0$ e $\begin{cases} y = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

Mas $7^x = y$, temos $\begin{cases} 7^x = 7 & \boxed{x = 1} \\ 7^x = 1 & \boxed{x = 0} \end{cases}$

2) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

a) 1

b) -5

c) 4

$$y = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2/2 = 1 \\ 8/2 = 4 \end{cases}$$

Então:

$2^x = 1$ ou $2^x = 4$

$2^x = 2^0$ | $2^x = 2^2$

$x = 0$ | $x = 2$

EXERCÍCIOS

4) Resolva as equações:

a) $3^{2x} – 5 \cdot 3^x + 6 = 0$

b) $5^{2x} + 2 \cdot 5^x – 3 \cdot 5 = 0$

4º tipo

Equações onde aparecem soma de exponenciais de mesma base.

Costuma-se desmembrar as potências.

Exemplos:

1) $2^{x+2} + 2^{x+1} – 2^{x-1} = 44$

$2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^1 - \frac{2^x}{2^1} = 44$

$\frac{4y}{1} + \frac{2y}{1} - \frac{y}{2} = \frac{44}{1}$

$8y + 4y – y = 88$

$11y = 88$

$y = \frac{88}{11}$ $y = 8$ Então: $2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

2) $3^{x+1} + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 87$

$3^x \cdot 3^1 + \frac{3^x}{3^1} - \frac{3^x}{3^2} = 87$ $\boxed{3^x = y}$

$\frac{3y}{1} + \frac{y}{9} - \frac{y}{9} = \frac{87}{1}$

$27y + 3y - y = 783$

$29y = 783$

$y = \frac{783}{29}$

$y = 27$ Então: $3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$x = 3$

EXERCÍCIOS

5) Resolva as equações:

a) $5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} = 780$

b) $3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^{x-2} = 321$

GABARITO

1)

a) $x = 3$

b) $x = -1$

c) $x = -9$

d) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{8}$

2)

a) $x = \frac{0,69897 - 0,47712}{0,47712}$

b) $x = \frac{-2\log 5 + 3\log 7 - \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3 - \log 5 - \log 7}$

3)

a) $x = 2$

b) $x = 1$

c) $x = 1$

d) $x = 1$

4)

a) $x = 1$ e $x = \frac{\log 2}{\log 3}$

b) $x = 1$

5)

a) $x = 5$

b) $x = 3$

AUTO – AVALIAÇÃO

1- Considere um recipiente contendo, no instante t = 0, um número N^0 de bactérias, se reproduzindo normalmente. Suponhamos que, a cada instante, os nascimentos de novas bactérias sejam proporcionais ao número de bactérias existentes no recipiente naquele instante.

A partir desta suposição, pode-se demonstrar que o número de bactérias num certo instante t > 0 é dado por:

$$N(t) = N^0 . k^t$$

Onde: N (t) é o número de bactérias no instante t;

N_0 é o número de bactérias no instante t = 0

K é uma constante que depende do tipo de bactérias e que pode ser determinada experimentalmente.

Suponhamos, então, que, um determinado instante observou-se que havia 200 bactérias no recipiente, reproduzindo-se normalmente. Passadas 12 horas, já havia 600. Passadas mais 36 horas, quantas bactérias haverá?

a) 5400

b) 16200

c) 7200

d) 21600

e) 28800

2) Resolva a equação:

$\log_3 (2x - 1) - \log_3 (5x + 3) = -1$

a) 6

b) 7/4

c) –3/7

d) 4/7

e) 2

3) Dado o log 3 = 0,477, calcule log 9000.

a) 2,954

b) 3,954

c) 1,431

d) 3,431

e) 0,954

4) Resolva a equação: $\frac{3^{2x}}{4} - 3^x = -\frac{3}{4}$

a) x = 0 ou x = 1

b) $x = 1$ ou $x = 3$

c) $x = 0$ ou $x = 3$

d) $x = 1$ ou $x = 4$

e) $x = 2$

5) Simplificando a expressão:

$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$, obtemos:

a) 1

b) $\log_9 10$

c) $\log_3 2$

d) $\log_{10} 2$

e) $\log_2 10$

GABARITO DA AUTO – AVALIAÇÃO

1) b

2) a

3) b

4) a

5) d

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O CONCEITO DE LOGARITMO

Considere a potenciação $2^3 = 8$ e suponha agora dois problemas:

- Qual é o número que, elevado ao cubo dá 8?

  $x^3 = 8$

  cuja solução é $x = \sqrt[3]{8} = 2$

- Qual é o expoente a que devo elevar o número 2, para obter 8?

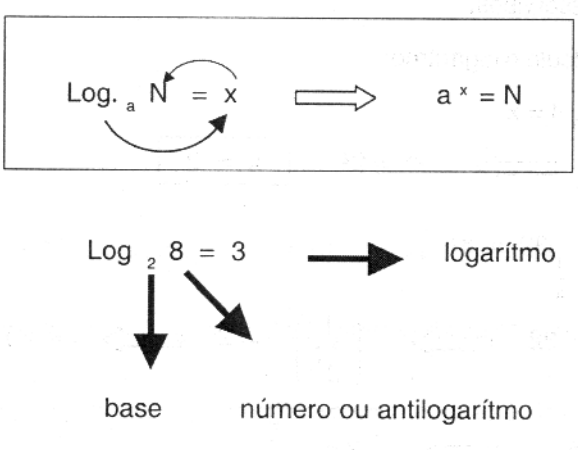
  $2^x = 8$

Esta é uma equação exponencial (a incógnita está no expoente), cuja solução é $x = \log_2 8$, que se lê **x é o logaritmo de 8 na base 2.**

Assim, achar o logaritmo significa achar o expoente, ou seja:

O **logaritmo** de um número **N** numa base **a** (deve ser positiva e diferente de 1) é o expoente a que se deve elevar a base **a**, para se obter o número **N**.

Observação:



Exemplos:

$\log_{.2} 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

$\log_{.5} 25 = 2$ porque $5^2 = 25$

$\log_{.3} 27 = 3$ porque $3^3 = 27$

$\log_{.7} 49 = 2$ porque $7^2 = 49$

$\log_{.3} \left(\frac{1}{9}\right) = -2$ porque $3^{-2} = \frac{1}{9}$

$\log_{.5} \left(\frac{1}{25}\right) = -2$ porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\text{Log.}_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$ porque $2^{-4} = \frac{1}{16}$

$\text{Log.}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\text{Log.}_5 5 = 1$ porque $5^1 = 5$

$\text{Log.}_2 \sqrt[5]{2^3} = \frac{3}{5}$ porque $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

$\text{Log.}_3 \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}$ porque $3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2) Calcule o logaritmo:

a) $\text{Log.}_2 4 = x$

$2^x = 4 \Longrightarrow 2^x = 2^2$ $\boxed{x = 2}$

b) $\text{Log.}_{\frac{1}{8}} 32 = x$

$\left(\frac{1}{8}\right)^x = 32 \Longrightarrow 1\left(\frac{x}{2^3}\right) = 2^5 \Longrightarrow (2^{-3})^x = 2^5$

$-3x = 5 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-5}{3}}$

c) $\text{Log.}_{\frac{1}{9}} \frac{1}{27} = x$

$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = \left(\frac{1}{3^3}\right) \Longrightarrow 3^{-2x} = 3^{-3} \Longrightarrow -2x = 3$

$+3x = +2 \Longrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

d) $\text{Log.}_{\sqrt{2}} \frac{1}{16} = x \; (\sqrt[2]{2})^x = \frac{1}{2^4} \Longrightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{-4} \Longrightarrow \frac{1}{2}x = -4$

$x = \frac{-4}{1/2} \Longrightarrow x = 4 \cdot \frac{2}{1} = 8$

EXERCÍCIOS

1) calcule o logaritmo:

a) $\text{Log.}_{\frac{1}{4}} 16 =$

b) $\text{Log.}_7 49 =$

c) $\text{Log.}_8 32 =$

d) $\text{Log.}_{\frac{1}{9}} 81 =$

Atenção!!

Observe que:

- $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a \Longrightarrow$ "o logaritmo de própria base é sempre 1".
- $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1 \Longrightarrow$ "o logaritmo de 1 em qualquer base é zero".
- Se $a > 0$, $a \neq 1 \Longrightarrow N > 0 \Longrightarrow$ "só existe logaritmo de número positivo".
- Só as potências da base têm logaritmo inteiro.

$\log_a a = 1$ $\log_a a^2 = 2$ $\log_a a^3 = 3$ $\log_a a^4 = 4$

.... $\log_{\frac{1}{a}} = -1$ $\log_{\frac{1}{a^2}} = -2$ .....

Chamamos de sistema de logaritmo o conjunto dos números positivos e seus respectivos logaritmos numa determinada base.

Assim, teremos os sistemas de logaritmos na base 2, na base 3, na base 10, na base $\frac{1}{10}$ etc.

As bases mais usadas, são:

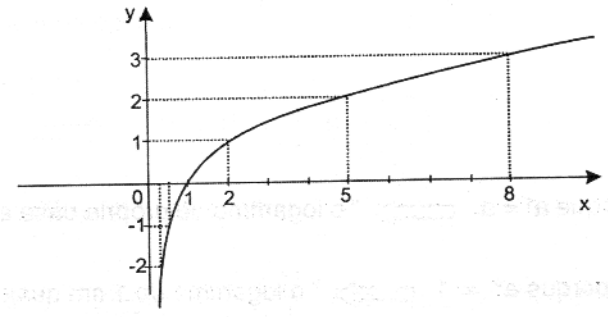
Base 10 $\Longrightarrow$ sistema decimal;

Base e $\Longrightarrow$ ($e \cong 2{,}7128 \ldots$) $\Longrightarrow$ sistema neperiano.

Exemplo: Sistema de logaritmos na base 2

Vamos construir o gráfico $F : R^*_+ \Longrightarrow R$, definida por $y = \log_2 x$:

número	0	....	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16 ....+∞
logaritmo	∄	..-∞	-3	-2	-1	0	1	2	3	4....+∞



FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Uma função $F : R^*_+ \longrightarrow R$ dada por $F(x) = \log_a x$, *a* constante e positiva e diferente de 1, denomina-se *função logarítmica.*

$$F(x) = \log_a x \ (0 < a \neq 1)$$

Observe que a definição da função nos impõe:

D = R* +

D = R* +
Im: R

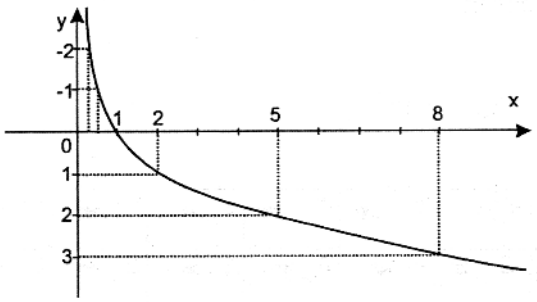
Você viu no exemplo anterior a representação gráfica da função:

$$F = \{ (x, y) \in R^{*}_{+} \times R / y = \log_2 x \}$$

Vamos agora construir o gráfico da função:

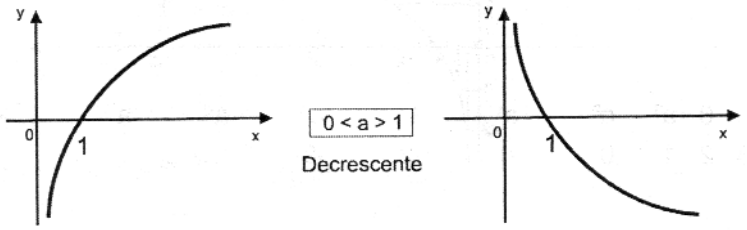
$$F = \{ (x, y) \in R^{*}_{+} \times R / y = \log_{\frac{1}{2}} x \}$$

X	0	.....	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	.....+∞
y	∄	+∞	... 3	2	1	0	-1	-2	-3	.....-∞



Repare, então, que o gráfico da função $F_x = \log_a x$ depende do valor de $\underline{a}$

Y = F (x) Y = F (x)



Todo o gráfico da função $F(x) = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ intercepta o eixo $\overleftrightarrow{0x}$ no ponto (1, 0) e não intercepta o eixo $\overleftrightarrow{0y}$.

Observe que em ambos os casos a imagem da função é: Im = R

Resumindo:

a) Forma: $y = \log_a x$, $a < 0$, $a \neq 1$

Estudo de $y = \log.^{a} x$

Domínio: $x > 0$

Dom (F) = $x \in]\, 0, +\infty\, [$

Imagem:

Im (F) = $y \in]\, -\infty\, [$

Zeros:

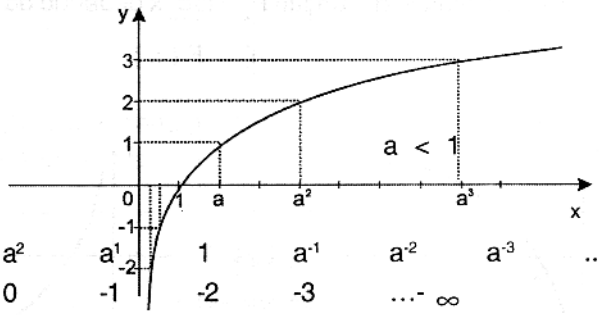
Y = 0 quando x = 1

Variação:
Se a > 1, y é crescente

Se a < a < 1, y é decrescente

Quadro de variação: a < 1

x	0	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	1	a	a^2	a^3	....+ ∞
Y=log.x	- ∞	-3	-2	-1	0	1	2	3	....+ ∞

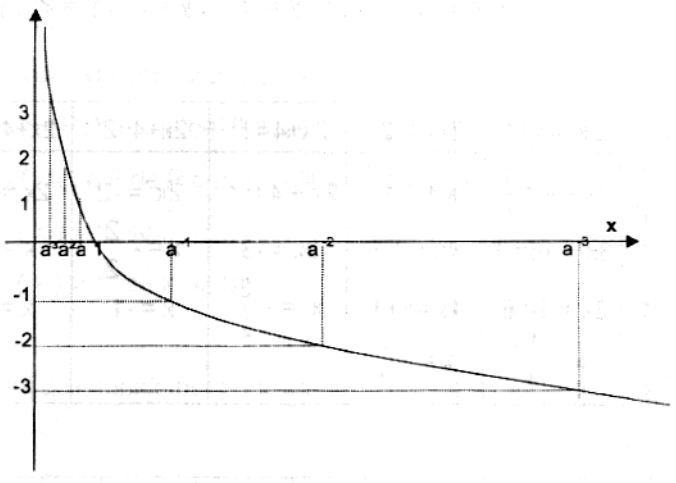


x 0 a^3 a^2 a^1 1 a^{-1} a^{-2} a^{-3} ....+ ∞ $Y=\log_a.x$

+ ∞ 3 2 1 0 -1 -2 -3 ...- ∞

a < 1

x	0	a^3	a^2	a^1	1	a^{-1}	a^{-2}	a^{-3}	....+ ∞
$Y=\log_a.x$	+ ∞	3	2	1	0	-1	-2	-3	...- ∞



LOGARÍTMOS

O CONCEITO DE LOGARITMO

A primeira operação que se aprende em matemática é a operação de adição: 3 + 2 = 5.

3 e 2 são parcelas e 5 é o resultado; a soma.

Agora, dados o resultado 5 e uma das parcelas 3 ou 2, chega-se à outra parcela através da operação de subtração, assim temos:

5 – 2 = 3 porque 3 + 2 = 5

5 – 3 = 2 porque 2 + 3 = 5

Lembre-se que a adição é comutativa.

Considerando, então, a operação de multiplicação 3 x 2 = 6.

Temos: 3 e 2 são fatores e 6 é o produto (resultado).

Novamente dados o resultado e um dos fatores, como chegar a outro?

A resposta é a divisão.

Então:

6 : 2 = 3 porque 3 x 2 = 6

6 : 3 = 2 porque 2 x 3 = 6

Lembre-se que a multiplicação é comutativa.

Vejamos agora a potenciação: $2^3 = 8$

2 é base

3 é o expoente

8 é a potência

Agora vejam: Dados 8 (potência) e 3 (expoente), como chegaremos ao 2(base)?

- através de radiciação: $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

- mas se forem dados 8 (potência) e 2 (base), qual é o expoente? Ou seja, a que expoente devemos elevar 2 (base) para obter 8 (potência)? Bem, a resposta virá através da operação de logaritmação.

Então: se $2^3 = 8$

Diremos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2 e escrevemos:

$\text{Log}_2\ 8 = 3$ onde
- 8 é o número ou antilogaritmo.
- 3 é a base
- 2 é o logaritmo

- quer dizer que calcular o logaritmo, é calcular o expoente?

- Isso! Dizemos que o **logaritmo de um número N, numa base *a*,** positiva e diferente de um, é **o expoente a que deve elevar a base *a*, para se obter o número N.**

Ou seja: $\boxed{\textbf{Se } \log_a N = x}$ **então** $\boxed{a^x = N}$

Exemplos:

$\text{Log}_2\ \ 8\ \ =\ \ 3 \longrightarrow$ logaritmo

base nº ou antilogaritmo

$\log_3 81 = 4$, porque $3^4 = 81$

$\log_4 64 = 3$, porque $4^3 = 64$

$\log_2 16 = 4$, porque $2^4 = 16$

$\log_3 \left(\sqrt[5]{3^2}\right) = \frac{2}{3}$, porque $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

$\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$, porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcular $\log_2 16$.

Ora, $\log_2 16 = x$

Então:

$2^x = 16$

ou $2^x = 2^4$

logo: $x = 4$

2) Calcule $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) =$

$\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = x$

$3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = \frac{1}{3^3}$

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3$

Lembrete:

Todo número elevado a expoente negativo é igual a uma fração, cujo numerados é 1 e o denominador é este número elevado ao oposto de seu expoente.

$$a^{-m} = \frac{1}{am}$$

3) Calcule $\log_8 16$

$8^x = 16$

ou

$(2^3)^x = 2^4$

$2^{3x} = 2^4$

$3x = 4 \therefore x = 4/3$

4) Qual é o $\log_{¼} (\sqrt[5]{8})$?

$\log_{¼} (\sqrt[5]{8}) = x$

$(¼)^x = (\sqrt[5]{8})$

$(2^{-2})^x = \sqrt[5]{2^3}$

Assim:

$2^{-2x} = 2^{3/5}$

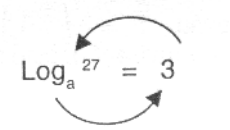
ou $-2x = 3/5$

$x = -3/10$ ou $x = - 0,3$

5) Agora responda:

Em que base o logaritmo de 27 é 3?

Sabemos então que:



Logo:

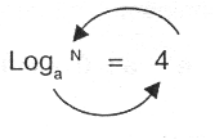
$a^3 = 27$

ou

$a = \sqrt[3]{27} \Longrightarrow \sqrt[3]{3^3}$ **a = 3**

6) Qual é o número, cujo logaritmo na base 3 é 4?

Temos então:



Ou seja,

$3^4 = N$

ou

$81 = N$

EXERCÍCIOS

- Calcule o logaritmo:

1) $\log_8 32 =$
2) $\log_7 49 =$
3) $\log_{1/4} 16 =$
4) $\log_{1/9} (1/27) =$
5) $\log_4 \sqrt[5]{8} =$
6) $\log_{1/9} 81 =$

- Calcule a base:

7) $\log_a 32 = 5$
8) $\log_a 4 = -2$
9) $\log_a 1/9 = -2$
10) $\log_a 8 = 3/2$
11) $\log_a \sqrt{2} = -2$

- calcule o número ou antilogarítmo:

12) $\log_2 {}^{N} = 4$

13) $\log_{1/2} {}^{N} = ½$

14) $\log_{1/4} {}^{N} = ½$

15) $\log_3 {}^{N} = 3$

CONSEQÜÊNCIAS:

Você viu que $\boxed{\text{Log}_a {}^{N} = x \Longrightarrow a^x = N}$ e $a > 0, a \neq 1$

Agora observe:

1) Se a base é positiva, o número também deverá ser positivo, pois número positivo elevado a qualquer expoente dará resultado também positivo.

- Quer dizer que **só existe logarítmo de número positivo.**

Se $a > 0, a \neq 1 \Longrightarrow N > 0 \Longrightarrow (+)^x = +$ Lembre-se que o domínio da função y = Logx é R+ .

2) $\log_a {}^{a} = 1$ porque $a^1 = a \Longrightarrow$ "O logaritmo da própria base é sempre 1."

Exemplo:

$\text{Log}_2 {}^{2} = 1$

$\text{Log}_5 {}^{5} = 1$

$\text{Log}_{10} {}^{10} = 1$

3) Se $\log_a {}^{1} = 0$ porque $a^0 = 1 \Longrightarrow$ "O logaritmo de 1 em qualquer base é zero".

Exemplo:

$\text{Log}_2 {}^{1} = 0$

$\text{Log}_5 {}^{1} = 0$

$\text{Log}_{10} {}^{1} = 0$

4) Só as potências da base têm logaritmo inteiro

$\log_a {}^{a} = 1$

$\log_a a^2 = 2$.....

$\log_a a^4 = 2$

$\log_a 1/a = -1$

$\log_a a^3 = 3$

$\log_a 1/a^2 = 2$.....

Observação:

Chamamos de **sistema de logaritmo** ao conjunto dos números positivos e seus respectivos logaritmos numa determinada base.

Exemplo:

Sistema de logaritmos na base 2

Número	0	....—	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16.....+∞
logaritmo	∃	....-∞	-3	-2	-1	0	1	2	3	4.....+∞

Assim teremos os sistemas de logaritmos na base 2, na base 3, na base $\frac{1}{10}$ etc.

As bases mais usadas são:

Base 10 ⟶ sistema decimal;

Base e ⟶ ($e \cong 2{,}7128...$) ⟶ sistema Neperiano

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Você já viu, quando a variação da função logarítmica que quando a *base é maior que 1, os logaritmicos variam no mesmo sentido do número,* ou seja, se a base é maior que 1, quanto maior o número, maior o logaritmo.

Assim:

Se $\boxed{a > 1}$ e $\begin{cases} \log_a A > \log_a B \Longrightarrow A > B \\ \text{Log}_a A < \log_a B \quad\quad A < B \end{cases}$

Exemplo:

Seja a base 2

Se $\log_2 A > \log_2 B$, então $A > B$

Da mesma forma, quando *a base é menor que 1 os logaritmos variam no sentido contrário dos números,* ou seja, se a base é menor que 1, quanto maior o número, menor será o logaritmo.

Assim:

Se $\boxed{a < 1}$ e $\log_a A > \log_a B \Longrightarrow A < B$

$\text{Log}_a A < \log_a B \Longrightarrow A > B$

Exemplo:

Seja a base ½

Se $\log_{½} A > \log_{½} B$, então $A < B$

EQUAÇÕES LOGARÍTICAS

Utilizando as propriedades operatórias, você pode resolver as equações que envolvam logaritmos. A resolução de equações logarítmicas se dá em três etapas básicas:

- Estabeleça as condições de existência dos logaritmos;
- Resolva a equação utilizando as propriedades operatórias;
- Faça a intersecção entre a solução encontrada e as condições de existência.

Exemplos:

1) $\log_{10} (2x + 1) = \log_{10} 2$

Condição de existência (lembre-se que só existe logaritmo de número positivo)

$2x + 1 > 0$

$2x > -1$

$\boxed{x > -1/2}$

Resolvendo a equação:

Temos: $\log_{10} (2x + 1) = \log_{10} 2$

Ora, sabemos que se $\log_{10} A = \log_{10} B$, então, $A = B$

Ou seja, $2x + 1 = 2$

E $2x = 2 – 1$

Ou $x = ½ \Longrightarrow$ como esta solução não interfere na condição de existência, temos

$S = \{ ½ \}$

2) $\text{Log}_{10} (2x + 1) = 2$

Condição de existência

$2x + 1 > 0$

$2x > -1$

$\boxed{x > -1/2}$

Resolvendo A Equação:

Temos, $\log_{10} (2x + 1) = 2$

Ou $\log. (2x + 1) = \log_{10} 10^2$

E $\log_{10}(2x + 1) = \log_{10}100$

Logo, $2x + 1 = 100$

$2x = 100 - 1$

$x = \frac{99}{2}$ $\Longrightarrow$ como esta solução não interfere na condição de existência, temos

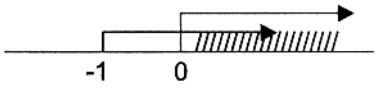
$S = \left\{\frac{99}{2}\right\}$

3) $\log_5(x + 1) - \log_5 x = \log_5 2$

Condição de existência

A) $x + 1 > 0$ B) $x > 0$

$x > -1$

Então,  ou seja $x > 0$

Resolvendo A Equação

Temos, $\log_5(x + 1) - \log_5 x = \log_5 2$ $\longrightarrow$ lembre-se:

$$\text{Log}_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ou $\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log 2$

$\frac{x+1}{x} = 2$ $\Longrightarrow$ $x + 1 = 2x$

$x - 2x = -1$

$-x = -1$

$x = 1$ $\Longrightarrow$ como esta solução não interfere na condição de existência, temos

$S = \{ 1 \}$

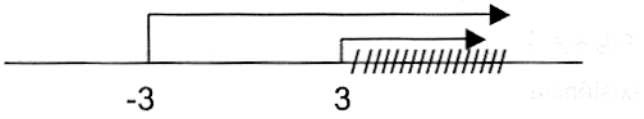
4) $\log_3(x + 3) + \log_3(x - 3) = \log_3 16$

Condição de existência:

$x + 3 > 0 \Longrightarrow x > -3$

$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3$

$\Longrightarrow x > 3$



Aplicando a propriedade, temos;

$\log_3 [(x + 3) (x – 3)] = \log_3 16$

$\log (x^2 – 9) = \log 16$

$x^2 – 9 = 16$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

Como x deve ser maior que 3, temos: S = { 5 }

5) $\log (x + 1) + \log (x – 1) = \log 15$

Condições de existência:

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$x – 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$\Rightarrow x > 1$

Resolvendo a equação e aplicando as propriedades operatórias, temos:

$\log [(x + 1) (x – 1)] = \log 15$

$x^2 – x + x – 1 = 15$

$x^2 – 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \sqrt{16}$

$x = \pm 4$

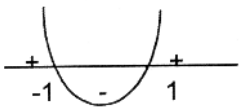
Comparando com as condições de existência, verificamos que a penas o valor +4 satisfaz.

Assim, S { +4 }

6) $\log_2 (x^2 – 1) – \log_2 x = 1$

Condições de existência;

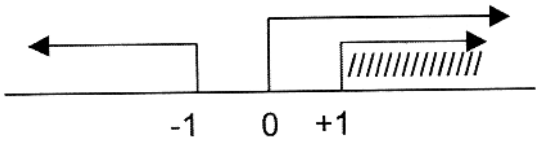
Devemos ter,

$x^2 – 1 > 0 \Rightarrow$ 

$\Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$

$x > 0 \Rightarrow x > 0$

Então,



Ou seja: $x > 1$

Resolvendo a equação:

$$\log_2 \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = \log_2 2$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 2$$

$$x^2 - 1 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

e $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \boxed{1 \pm \sqrt{2}}$$

Comparando com as condições de existência, verificamos que apenas o valor $1 \pm \sqrt{2}$ satisfaz.

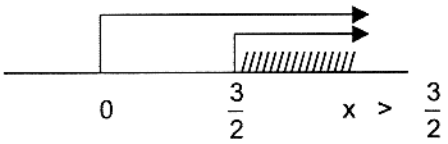
Assim: $S \{ 1 \pm \sqrt{2} \}$

7) $\log_3 (2x - 3) - \log_3 x = 2$

Condições de existência:

$2x - 3 > 0 \Longrightarrow x > \frac{3}{2}$

$x > 0 \Longrightarrow$



Resolvendo a equação:

$$\log_3 \left(\frac{2x - 3}{x} \right) \log_3 3^2$$

$2x - 3 = 9x$

$2x - 9x = 3$

$-7x = 3 \Longrightarrow x = \frac{-3}{7}$ Este valor <u>não</u> satisfaz as condições de existência, logo $S = \left\{ \frac{-3}{7} \right\}$

1) Resolva a inequação:

$\log_2 (x + 3) > \log_2 (2x + 2)$
Como a base (2) é maior que um, temos:

$x + 3 > 2x + 2$
ou $-x > -1$

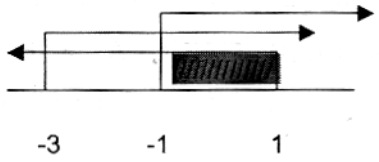
ou $x < +1$

Mas como só existe logaritmo de número positivo, temos:

$x + 3 > 0$ ou $x > -3$

e $2x + 2 > 0$ ou $x > -1$

logo, os valores que satisfazem a inequação e dão condição de existência aos logaritmos são:



Resposta: $-1 < x < 1$

2) Resolva a inequação:

$\log_{1/2}(x + 4) > \log_{1/2}(2x + 2)$

Como a base (1/2) é menor que um, temos:

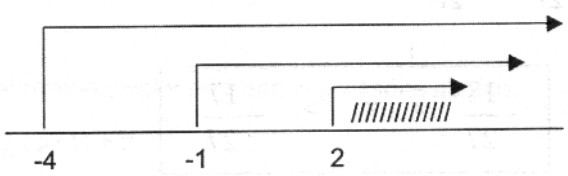
$x + 4 < 2x + 2$ (inverte o sentido)

e $-x < -2$ ou $\boxed{x > 2}$

as condições de existência os logaritmos são:

e $\begin{cases} x > -4 \\ x > -1 \end{cases}$

Então temos:



Resposta: $\boxed{x > 2}$

3) Resolva a inequação:

$\log_{1/3}(3x + 2) > 2$

Como $2 = \log_{1/3}(1/9)$ porque $(1/3)^2 = 1/9$

Temos: $\log_{1/3}(3x + 2) > \log_{1/3}{}^{(1/9)}$
e $3x + 2 < 1/9$ (base menor que um)

ou $27x + 18 < 1$

$27x < -17 \Longrightarrow \boxed{x < -\frac{17}{27}}$

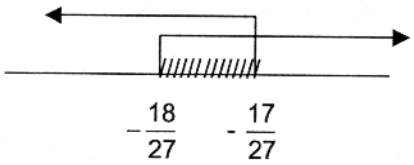
Mas, para que exista o logaritmo, é necessário que $3x + 2 > 0$

ou $\boxed{x > -\frac{2}{3}}$

então temos:

$x < -\frac{17}{27}$

$x > \frac{-2}{3}$ ou $x > -\frac{18}{3}$



$-\frac{18}{27}$ $-\frac{17}{27}$

logo, a resposta é $\boxed{-\frac{18}{27} > x > -\frac{17}{27}}$

4) Resolva a inequação:

$\log_{1/2}{}^{(2x-x)} > 3$

Temos que $3 = \log_{1/2}(1/8)$

Daí $\log 1/3\,(2 - x > \log_{1/2}(1/8)$

E $2 - x < 1/8$ (base menor que um)

$16 - 8x < 1$

$-8 < -15$

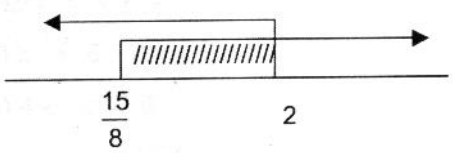
$\boxed{x > \frac{15}{8}}$

A condição de existência do logaritmo é $2 - x > 0$

ou $-x > -2$

$\boxed{x < 2}$

O que nos dá:



Resposta: $\frac{15}{8} < x < 2$

EXERCÍCIOS

16) Determine o valor de x nas expressões abaixo:

a) $\log_2 (x + 1) = 3$

b) $\log_{10} (x + 1) = 0$

c) $\log_{10} (x + 1) = 1$

d) $\log_3 (x – 1) = 4$

e) $\log_3 (x – 1) = 0$

f) $\log_5 (2x + 3) = 1$

g) $\log_2 (x + 1) = 4$

h) $\log_{1/2} (x + 1) = 0$

i) $\log_{1/2} (x + 1) = 1$

17) Resolva as inequações:

a) $\log_2 (2x + 2) > \log_2 (x + 4) =$

b) $\log_{1/2} (2x + 2) > \log_{1/2} (x + 4) =$

c) $\log_{10} (2x – 6) < \log_{10} (3x – 12) =$

d) $\log_{1/10} (2x – 6) < \log_{1/10} (3x – 12) =$

e) $\log_{1/2} (x – 4) > 2$

f) $\log_3 (x_2 – 1) < 2$

GABARITO

1) x = 5/3

2) x = 2

3) x = -2

4) x = 3/2

5) $x = \frac{-3}{\frac{5}{2}} = \frac{-3}{10}$

6) x = -2

7) a = 2

8) a = 1/2

9) a = 3

10) $a = \sqrt{512}$

11) $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

12) N = 16

13) N = 4

14) N = 1/2

15) N = 27

16)

a) x = 7

b) x = 0

c) x = 9

d) x = 83

e) x = 2

f) x = 1

g) x = 15

h) x = 0

i) x = -1/2

17)

a) $x > 2$

b) $-1 < x < 2$

c) $x > 6$

d) $4 < x < 6$

e) $4 < x < 17/4$

f) $-\sqrt{10} < x < -1$ ou $1 < x < \sqrt{10}$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARÍTMOS

Vamos lembrar algumas propriedades das potências.

1- Para multiplicar duas propriedades de mesma base, conserva-se a base, somam-se os expoentes.

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

2- Para se dividir duas potências de mesma base, conserva-se a base e subtrai-se os expoentes:

$A^m : A^n = A^{m-n}$

3- Para se elevar uma potência a um expoente, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

$(A^m)^n = A^{m.n}$

4- A potência de expoente fracionário é equivalente ao radical, cujo radicando é a base da potência, o índice é o denominador da fração e o expoente do radicando corresponde ao numerador da fração expoente.

$\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}$

Exemplos:

1) $2^5 : 2^3 = 2^6$

2) $2_5 : 2^3 = 2^2$

3) $(2_3)^2 = 2^6$

4) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$

Suponhamos agora, que soubéssemos:

$$\begin{cases} \text{Log}_a\, A = x \\ \text{Log}_a\, B = y \end{cases}$$

E quiséssemos calcular:

$\text{Log}_a\, (A \cdot B)$; $\log_a\, (A/B)$; $\log_a\, A^m$; $\log_a \sqrt[m]{A}$

Como $\begin{cases} \log_a A = x \\ \log_a B = y \end{cases}$ temos $\begin{cases} a^x = A \\ a^y = B \end{cases}$

Então:

$A \cdot B = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$A^m = (a^x)^m = a^{m \cdot x}$

$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a^x} = a^{\frac{x}{m}}$

Assim, $\log_a (A.B) = \log_a (a^{x+y}) = x + y$

$\log_a (A/B) = \log_a (a^{x-y}) = x - y$

$\log_a (A^m) = \log_a (a^{m.x}) = m \cdot x$

$\log_a \sqrt[m]{A} = \log_a (a^{\frac{x}{m}}) = \frac{x}{m}$

Logo:

1- $\log_a (A.B) = \log_a A + \log_a B$ — O logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

2- $\log_a (A/B) = \log_a A - \log_a B$ — O logaritmo do quociente é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

3- $\log_a (A^m) = m \cdot \log_a A$ — O logaritmo de uma potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base .

4- $\log_a \sqrt[m]{A} = \frac{\log_a A}{m}$ — O logaritmo de uma raiz é igual ao logaritmo do radicando dividido pelo índice do radical.

Exemplos:

Dados: $\begin{cases} \log_{10} 2 = 0,30103 \\ \log_{10} 3 = 0,47712 \end{cases}$

Temos

$\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0,30103 + 0,47712 = 0,77815$

$\log (3/2) = \log 3 - \log 2 = 0,47712 - 0,30103 = 0,17609$

$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 + 0,30103 = 0,90309$

$\log \sqrt[3]{3} = \frac{\log 3}{3} = \frac{0,47712}{3} = 0,15904$

$\log 16,2 = \log \frac{(162)}{10} = \log 162 - \log 10 = \log (2 \times 3^4) - \log 10$

como $\log 10 = 1$ ($\log_a a = 1$); temos

$\log 16{,}2 = \log 2 + 4 \log 3 - \log 10 = 0{,}30103 + 4 \times 0{,}4771 - 1 =$

$0{,}30103 + 1{,}90848 - 1 = 1{,}20951$

EXERCÍCIOS

1) Desenvolva as expressões usando as propriedades operatórias dos logaritmos:

a) (Resolvido) $\log \left(\frac{A \cdot B}{C} \right)$

$\log A + \log B - \log C$

b) (Resolvido) $\log A^2 = 2 \log A$

c) (Resolvido) $\log \left(\frac{A^2 \cdot B^3}{C^4} \right) = 2 \log A + 3 \log B - 4 \log C$

d) $\log B^3 =$

e) $\log \sqrt[3]{A} =$

f) $\log \frac{\sqrt{A \cdot B}}{C} =$

g) $\log \frac{\sqrt[5]{A^2 \cdot B^3}}{C^4} =$

h) $\log \left(\frac{\sqrt{A \cdot B}}{C} \times \frac{\sqrt[4]{A^3 \cdot B}}{C} \right) =$

2) Dados $\begin{cases} \log_{10} 2 = 0{,}3010 \\ \log_{10} 3 = 0{,}4771 \end{cases}$

Determine:

a) (resolvido) $\log_{10} 21 = \log_{10} (2^3 \times 3) = 3 \log 2 + \log 3 = 3 \times 3{,}3010 + 0{,}4771 = 1{,}3801$

b) $\log_{10} 72 =$

c) $10 \sqrt{72} =$

d) $\log_{10} (0{,}72) =$

e) $\log_{10} 36 =$

f) $\log 3{,}6 =$

g) $\log \sqrt{0{,}36} =$

MUDANÇA DE BASE:

Consideremos o problema que consiste em determinar os logaritmos dos números na base b, sendo conhecidos e tabelados os logaritmos dos mesmos números no sistema de base a.

Seja N um número qualquer, cujo logaritmo na base b queremos achar. Representemos por x, o logaritmo procurado.

Teremos:

$\text{Log}_b\ N = x \longleftrightarrow b^x = N$
Mas se $b^x = N$

Vem $\log a\ (b^x) = \log_a N$ (o sistema de base a é conhecido)

Ou $x \log_a b = \log_a N$

E $\boxed{x = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}}$

ou ainda: $\boxed{\log_b N = \log_a N \cdot \dfrac{1}{\log_a b}}$

A constante $\dfrac{1}{\log_a b}$ denomina-se *módulo relativo* do sistema de base b em relação ao de base a.

- quer dizer que, para se calcular $\log_2 3$, basta fazer:

$\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{0,47712}{0,30103} \cong 1,5$

Exemplos:

a) $\log_{16} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 16} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 x}{2}$ $(x > 0)$

c) $\log_{1/2} 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 ½} = -\log_2 5$

d) $\log_3 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 3} = \dfrac{1}{\log_5 3}$

EXERCÍCIOS

3) Mudar $x = \log_2 10$ para a base 10.

4) Calcular $y – \log_5 2$ em função de $x = \log_{10} 2$.

5) (Resolvido) Simplifique a expressão:

$E = \log_2 3 \cdot \log_9 2 + \log_9 8 \cdot \log_2 9$

Transformando para base 2

$E = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 9} + \dfrac{\log_2 8}{\log_2 9} \cdot \log_2 9$

Ou seja,

$E = \log_2 3 \cdot \dfrac{1}{\log_2 3^2} + \log_2 2^3 \qquad \log_2 3 \cdot \dfrac{1}{2 \log_2 3} + 3 \log_2 2 =$

$1/2 + 3 \cdot 1 \Longrightarrow 1/2 + 1/3 + 6/2 = 7/2$

6) Simplifique a expressão:

$\log_3 9 \cdot \log_9 3$ passando a base para3.

7) Calcule o valor de:

$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9$

8) Calcule o produto:

$\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3 =$

9) Calcule o valor de:

$N = \log_3 5 \cdot \log_2 3 \cdot \log_5 2$

GABARITO

3)

d) $3 \log B$

e) $\frac{\log A}{3}$

f) $\frac{\log A + \log B - \log C}{2}$

g) $\frac{2 \log A + 3 \log B}{5} - \log C$

h) $\frac{\log A + \log B - \log C}{2} + \frac{3 \log A + \log B}{4} - 2 \log C$

4)

a) 1,3801

b) 1,8572

c) 0,9286

d) –0,1428

e) 1,5562

f) 0,5562

g) –0,2219

3) $x = \frac{1}{\log_{10} 2}$

5) $y = \frac{\log_{10} 2}{1 - \log_{10} 2}$

6) 1

7) $\log_{10} 2$

8) 1

9) 1

LOGARITMOS DECIMAIS

O sistema de logaritmos decimais é o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns, ou vulgares, ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês: 1561 – 1630, foi quem primeiro destacou a vantagem do emprego dos logaritmos de base 10 para os cálculos).

CARACTERÍSTICA E MANTISSA:

Nós já vimos que num sistema de base qualquer a, vemos que só as potências inteiras da base têm logaritmos inteiros:

$$\text{Log}_a\, a^n = n$$

Qualquer número que não seja potência inteira da base, terá seu logaritmo constatando de uma parte inteira denominada CARACTERÍSTICA do logaritmo, mais uma parte fracionária ou decimal (menor que a unidade) chamada MANTISSA do logaritmo.

Assim, temos;

$\text{Log}20 = 1{,}30103 = 1 + 0{,}30103$

Onde 1 é a característica e

0,30103 é a mantissa.

No sistema de logaritmos de base 2 teremos;

$\text{Log}_2\, 32 = \log_2 5^2 = 5$

$\text{Log}_2\, 64 = 6$

Os números compreendidos entre 32 e 64 terão os logaritmos compreendidos entre 5 e 6. Para o número 48, por exemplo, teremos:

$\text{Log}_2\, 32 < \log_2 48 < \log_2 64$

e $5 < \log_2 48 < 6$

Assim, $\log_2 48 = 5 +$ fração

Onde 5 é a característica, e a parte fracionária decimal é a mantissa.

Vamos falar também de COLOGARITMO (não confunda com antilogaritmo). Ao logaritmo do inverso do número, dá-se o nome de cologaritmo do número.

Assim,

$$\text{Colog}_a N = \log_a \left(\frac{1}{N}\right)$$

Mas $\log_a \left(\frac{1}{N}\right) = \log_a 1 - \log_a N = 0 - \log_a N = -\log_a N$

Então $\text{colog}_n N = - \log_a N$

O cologaritmo corresponde, portanto, ao simétrico do logaritmo.

Usa-se o cologaritmo para substituir as subtrações de logaritmos por adição, como, por exemplo, no cálculo:

e $\log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = \log 3 + \text{colog } 2$

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS DECIMAIS

Nós já vimos que para se calcular a característica do logaritmo de um número numa base qualquer, a, basta encontrar a potência de a imediatamente inferior ao número, por exemplo, a característica de $\log_2 153$ é 7.

Porque $2^7 = 128 < 153 < 2^8 = 216$

E $\log^2 135 = 7 +$ fração

Ora, na base 10 temos:

a) $10^{-3} = 0{,}001$

b) $10^{-2} = 0{,}01$

c) $10^{-1} = 0{,}1$

d) $10^0 = 1$

e) $10^1 = 10$

f) $10^2 = 100$

g) $10^3 = 1000$, etc

O que nos permite concluir:

- O logaritmo decimal de qualquer potência de 10 é o seu próprio expoente.
- A característica do logaritmo decimal de um número maior que um é uma unidade menor que o número de algarismo de sua parte interna.
- A característica do logaritmo decimal de um número positivo menor que um é negativa, e tem tantas unidades quantos zeros precedem seu primeiro algarismo significativo.

Então, vemos que:

- A característica do log 123 é 2
- A característica do log 8457 é 3
- A característica do log 27,345 é 1
- A característica do log 7 é 0
- A característica do log 0,0003 é –3

- A característica do log 0,2 é –1
- A característica do log 0,0005 é –4
- A característica do log 0,0203 é –2
- A característica do log 0,0080054 é –3

Suponhamos agora que **C** é a característica de **M**, a mantissa do logaritmo decimal de um número A;

Então log A = C, M calculemos:

Log (A. 10^{p}) onde P é um número inteiro

Ora,

Log (A. 10^{p}) = log A + P. log10 = C, M + P = (C + P), o que nos permite concluir que

4) Quando se multiplica ou divide um número por uma potência de 10, a mantissa de seu logaritmo decimal não se altera

- Quer dizer que 2; 20; 200 e 2000 tem a mesma mantissa?
- Exato! Se log 2 = 0,30103, então:

Log20 = 1,30103

Log200 = 2,30103

Log2000 = 3,30103

Mas, suponhamos que quiséssemos calcular log 0,002 a característica é (-3) e a mantissa é a mesma que a de 2,20 ou 2000 e é positiva; nesse caso escrevemos log 0,002 = 3,30103.

Como a mantissa é positiva e a característica é negativa, a notação acima representa uma convenção. O logaritmo assim escrito é denominado LOGARITMO PREPARADO (característica negativa e mantissa positiva).

O logaritmo todo negativo (ex.: colog 20 = -1,30103) possui característica e mantissa negativas.

- E como é que se transforma o logaritmo preparado em logaritmo negativo, e vice-versa?

Veja:

Seja log 0,002 = 3,30103

Mas 3,30103 = -3 + 0,30103 = -2,69897

Então -3,30103 = -2,69897

Agora, de negativo para preparado:

Seja o logaritmo negativo: -3,98673

Podemos escrever: -3,98673 = -3 – 0,98673

Somando e subtraindo uma unidade, tem-se:

-3,98673 = -3 – 1 + 1 – 0,98673

ou ainda

-3,98673 = (-3 – 1) + (1 – 0,98673) = -4 + 0,01327

então:

-3,98673 = 4,01327

- E para que transformar?

- Suponhamos que, no desenvolvimento de um monômio, você encontrasse adições, subtrações, multiplicações e divisões com logaritmos preparados.

Neste caso, transforma-se o logaritmo preparado em logaritmo negativo e opera-se com números relativos.

Isso! Mas o resultado deverá vir sempre com a mantissa positiva.

Por exemplo, calcule:

$\log \left[\sqrt[5]{\frac{(0,002)^3}{0,3}} \right]$ sabendo $\begin{cases} \log^2 = 0,30103 \\ \text{Log}_3 = 0,47712 \end{cases}$

Bem, $\log \left[\sqrt[5]{\frac{(0,002)^3}{0,3}} \right] \quad \frac{3 \cdot \log 0,002 - \log 0,3}{5} =$

$= \frac{3 \times 3,30103 - 1,47712}{5} = \frac{3 \times (-2,69897) - (0,52288)}{5} =$

$= \frac{-8,09691 + 0,52288}{5} = \frac{-7,57403}{5} = -1,514806 = 2,485194$

Agora, repare neste exercício:

Calcule $\sqrt[3]{\frac{0,0345}{(2789)^2}}$

Sabendo $\begin{cases} \log 3,45 = 0,53782 \\ \log 27,89 = 1,44545 \\ \log 1,643 = 0,21564 \end{cases}$

Seja $E = \sqrt[3]{\frac{0,0345}{(2789)^2}}$

Então $\log E = \frac{\log 0,0345 - 2 \log 2789}{3} =$

$= \frac{2,53782 - 2 \times 3,44545}{3} =$

$= \frac{-1,46218 - 6,89090}{3} =$

$= \frac{-8,35308}{3} = -2,78436 = 3,21564$

E, pelo enunciado, sabemos que log 1,643 = 0,21564 e a mantissa é a mesma! Ou seja, o número cuja mantissa é 21564, é 1643.

Se log E = 3,21564

Temos E = 0,001643

Ou $\sqrt[3]{\frac{0,0345}{(2789)^2}}$ = 0,001643

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Calcular log 4391 sabendo-se que log 0,04391 = 2,64256.

- Neste caso, temos que a característica de log 43,91 é 1.

Pelo logaritmo dado, vemos que a todo número que possua (somente) os algarismos 4391, nesta ordem, corresponde à mantissa 64256.

Então podemos concluir que log 43,91 = 1,64256

2) Calcular o log 47285

Sabe-se que $\begin{cases} \log 4,728 = 0,67468 \\ \log 4729 = 3,67477 \end{cases}$

Como a mantissa independe da vírgula, temos:

Mantissa de 4728..... 6768

Mantissa de 4729..... 67477

Vamos procurar a mantissa de 4728,5 que deverá estar entre 67468 e 67477

Como a diferença entre 4728 e 4729 é 1

4728 e 4728,5 é 0,5

formamos a seguinte regra de três:

se o número aumenta 1, a mantissa aumenta 9

se o número aumenta 0,5, a mantissa aumentará x

e $x = 0,5 \times 9 = 4,5 \cong 5$

logo, a mantissa será 67468 + 5 = 67473 e log 47285 = 4,67473

Observação:

Para se calcular colog 47485 devemos lembrar que colog 47285 = -log 47285 = -4,67573 = 5,32527

3) calcular o antilogaritmo de 2,84046 (achar o número cujo log é 2,8404).

Sabendo-se $\begin{cases} \log 6925 = 3,84042 \\ \log 6926 = 3,84048 \end{cases}$

A mantissa 84046 está entre 84042 e 84048, temos então:

A mantissa 84047, corresponde o número 6925

A mantissa 84048, corresponde o número 6926

diferença = 6 diferença = 1

e a regra de três:

Na mantissa, quando aumenta 6, no número aumenta 1.

Na mantissa, quando aumenta 4, no número aumenta x.

$E \quad x = \frac{4}{6} = 0,66...$

logo, o número será 6925,66 ..... = 6925,67

Assim, se log N = 2,84046

N = 0,0692567

Observação:

Para se achar o número cujo colog é 1 15954, devemos lembrar que:

log N = -colog N

Então, log N = (-T, 15954) = - (-0,84046) = 0,84046

E se log N = 0,84046, temos N = 6,92567

EXERCÍCIOS

1) Dada a expressão:

$$N = \frac{1,25\sqrt[3]{\frac{62,5}{5}}}{(0,04)}$$

Calcular o logaritmo decimal de N, sabendo-se que log 0,5 = 0,69897

2) Dados a = 2,5: b = 0,025; e = 4,86;

log 2 = 0,30103 e log 7 = 0,84510,

calcular colog x, sendo:

$$x = \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{e + 2}$$

GABARITO

1) 7,68524

2) 1,52397

BIBLIOGRAFIA

____. Youssef, A.N, Fernandes, V.P. e Soares, E. – Matemática para o 2º grau – Curso completo, São Paulo, Scipione, 1998

____. Trotta, f, Jakubovic, J. e Imenes, L.M.P.; Matemática aplicada: 1ª. 2ª e 3ª séries, 2º Grau, São Paulo, Ed. Moderna, 1979

____. Aref Antas Neto (et alli), Noções de Matemática – 6 volumes – São Paulo, Ed. Moderna, 1980
Vol 1 – Conjuntos e funções
Vol 2 – Progressões e logaritmos
Vol 3 – Trigonometria
Vol 4 – Combinatória, Matrizes e Determinantes
Vol 5 – Geometria
Vol 6 – Geometria Analítica
Vol 7 – Números complexos, Polinômios e Equações Algébricas
Vol 8 – Introdução à análise matemática

____. Lima, Elen L. – A matemática do Ensino Médio – Rio de Janeiro, SOLGRF Publicações, 1998 – obra em 3 volumes.