

UNIDADE 1: FUNÇÃO DO 1º GRAU

Vamos estudar a função do 1º grau, definida no conjunto dos números reais. Ela é uma função que relaciona em uma expressão algébrica do 1º grau.

FUNÇÃO DO 1º GRAU

Chama-se função do 1º grau a função definida por:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax + b \}$$

Onde a e b são números reais dados.

Esta função também pode ser representada por

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = ax + b$$

Obs.: A função do tipo $y = ax + b$ também é chamada de função afim.

Ex:

$$a) F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = 2x + 1$$

$$a = 2$$

$$b = 1$$

$$b) F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 1 \}$$

$$a = 2$$

$$b = -1$$

$$c) F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = -2x$$

$$a = -2$$

$$b = 0$$

$$d) F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3 \}$$

$$a = 0$$

$$b = 3$$

Obs:

1) Quando $a = 0$, temos $F(x) = b$ que é chamada de função constante.

$$\text{Ex: } F(x) = 2$$

2) Quando $b = 0$, temos $F(x) = ax$, que é chamada também de função linear.

Ex: $y = 2x$

As principais características da função constante são:

* Domínio: $D = \mathbb{R}$

* Imagem: $Im = \{b\}$

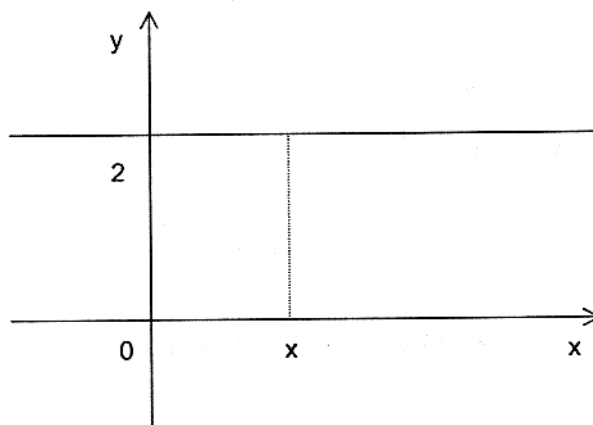
* Gráfico é uma reta paralela a Ox . $\leftrightarrow$

Ex.: Na função $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $F(x) = 2$, temos:

* Domínio: $D = \mathbb{R}$

* Imagem: $Im = \{2\}$

x	$F(x)$
0	2
1	2



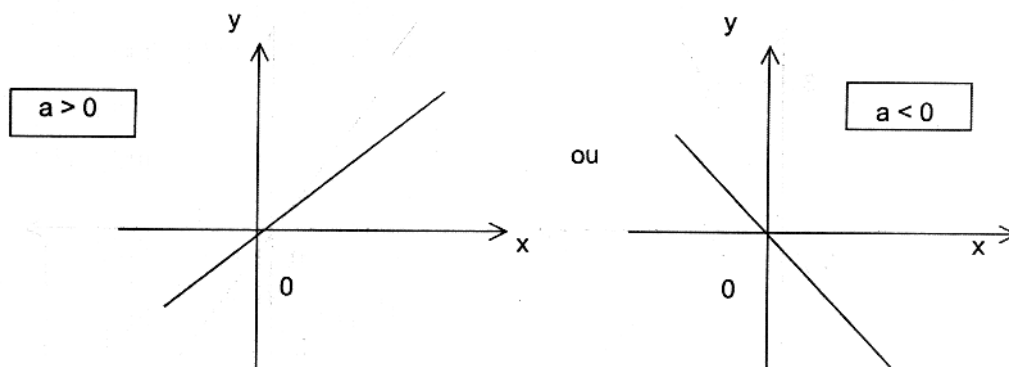
Note que o gráfico é uma reta paralela a Ox . $\leftrightarrow$

As principais características da função linear $F(x) = ax$, são:

* Domínio: $D = \mathbb{R}$

* Imagem: $Im = \mathbb{R}$

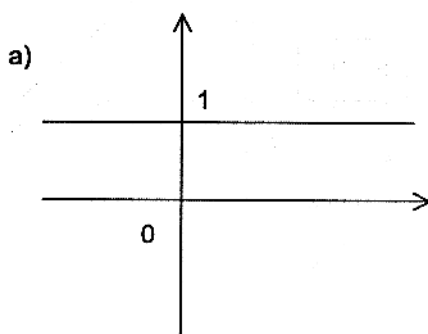
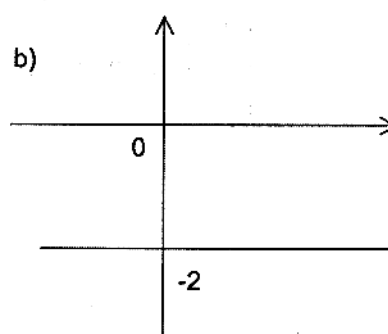
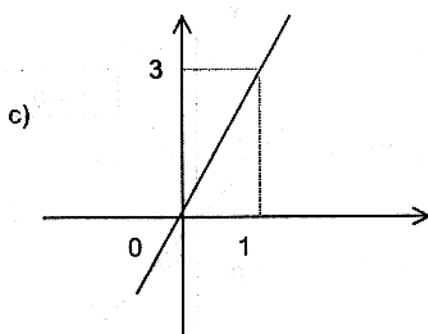
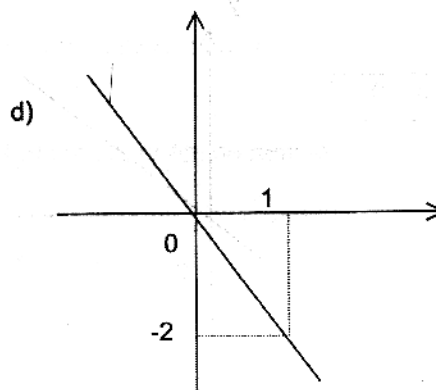
* O gráfico é uma reta que passa pela origem.



Se o coeficiente a for positivo, a função linear é crescente; se a for negativo, a função linear será decrescente.

EXERCÍCIOS:

- Construa os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:
 - $F(x) = 2x$
 - $F(x) = -3x$
 - $y = +2,5$
 - $y = -4$
- Determine o domínio e a imagem de cada função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:
 - $y = 2$
 - $y = 3x$
 - $y = -2$
 - $y = -3x$
- Indique o domínio, a imagem e a lei da função em cada um dos gráficos:



Significado Dos Coeficientes

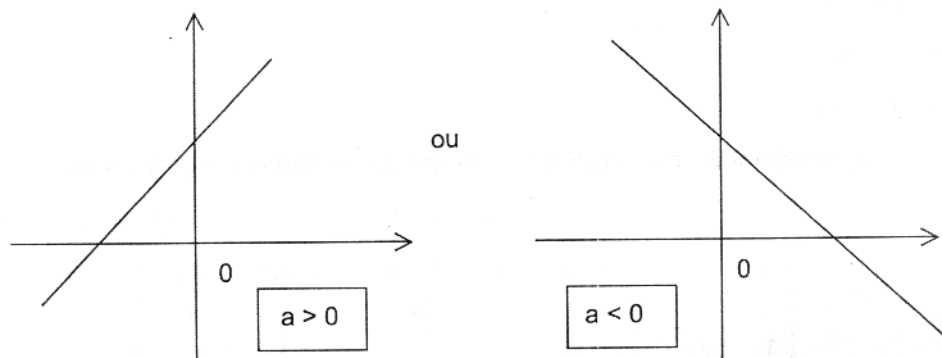
Quando $a \neq 0$ e $b \neq 0$, teremos a função completa do 1º grau ou função afim, definida pela lei $y = ax + b$.

As principais características da função afim, são:

* Domínio: $D = \mathbb{R}$

* Imagem: $Im = \mathbb{R}$

* O gráfico é uma reta.



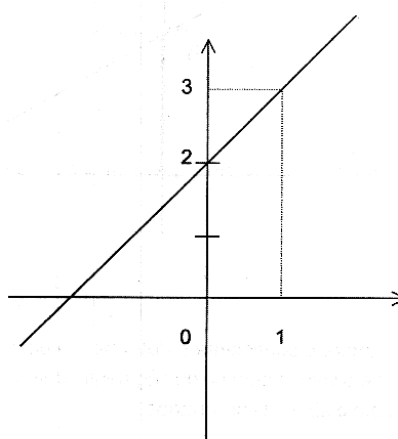
Ex:

1) Na função real $F(x) = x + 2$, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = \mathbb{R}$

x	F(x)
0	2
1	3

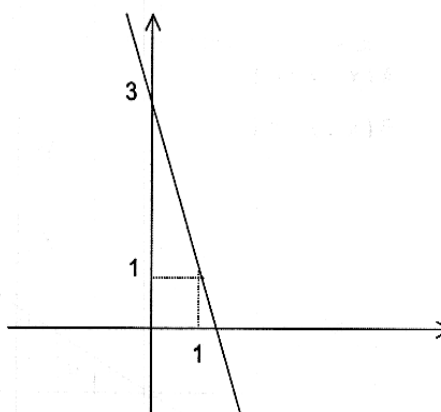


2) Na função $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = -2x + 3$, temos:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Imagem: $Im = \mathbb{R}$

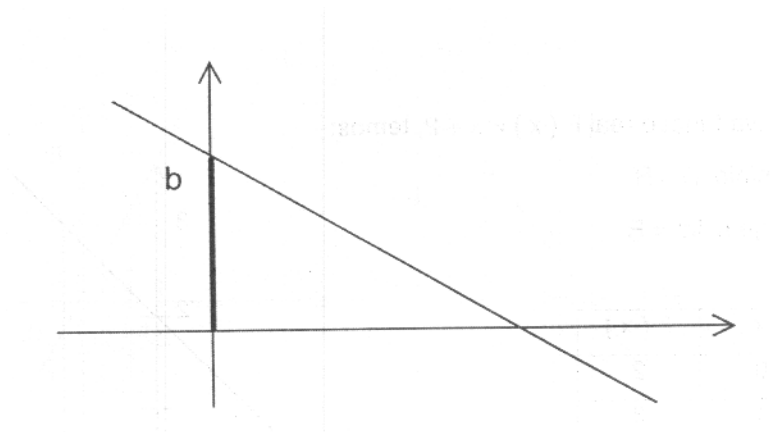
x	y
0	3
1	1



Consideremos a função do 1º grau:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax + b \}$$

Façamos $x = 0$. Temos então, $y = a \cdot 0 + b = b$, ou seja, quando $x = 0 \longrightarrow y = b$, que é um ponto do eixo das coordenadas.



Então, o coeficiente b determina o ponto em que a reta corta o eixo das ordenadas, ou seja, b é o valor algébrico do segmento, determinado pela origem e pelo ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas.

Chamaremos, este coeficiente de coeficiente linear.

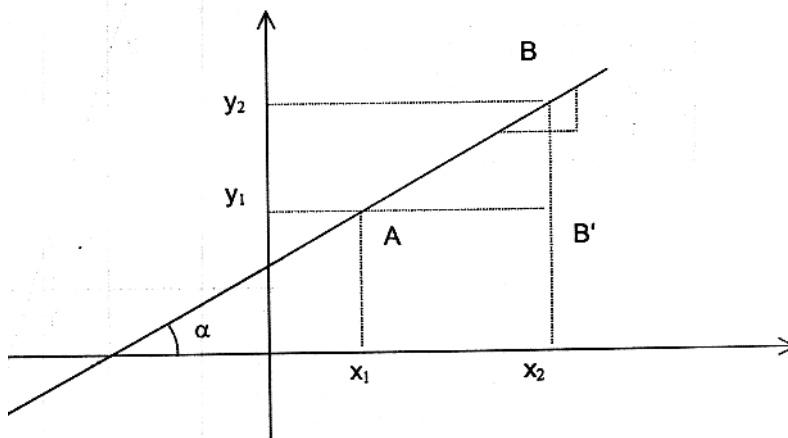
Vejamos agora o significado de a .

Dados dois pontos de F , como no gráfico abaixo, consideremos:

Sejam:

$$A (x_1, y_1) \in F$$

$$B (x_2, y_2) \in F$$



Então, a é a razão entre os catetos do triângulo retângulo ABB' da figura.

Observe que isto ocorre para quaisquer dois pontos escolhidos, uma vez que os triângulos formados são semelhantes.

Esta razão é constante para cada reta e depende só do ângulo a que a reta forma com o sentido do eixo das abcissas (inclinação da reta).

Esta razão, por ser proporcional ao ângulo a , foi chamada tangente do ângulo a .

Então, vimos que a caracteriza a inclinação da reta r . chamaremos coeficiente angular, o coeficiente a .

O Zero da Função

Considerando que o zero da função é o valor de x para o qual $y = 0$, na função:

$y = ax + b$, temos:

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

ou seja, o zero da função $y = ax + b$ é

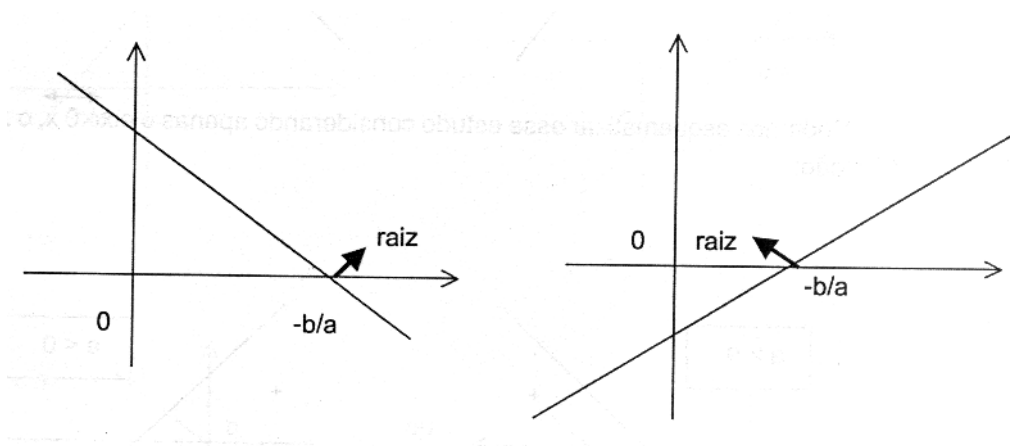
$$x = \frac{-b}{a}$$

Ex:

Na função real $F(x) = 2x + 4$, o zero é obtido igualando-se a função $F(x)$ a zero:

$$2x + 4 = 0 \longrightarrow 2x = -4 \longrightarrow x = -2$$

No gráfico da função acima, o zero identifica o ponto em que a reta intercepta o
 $\longleftrightarrow$
 eixo das abscissas (Ox).



Variação do Sinal de Y

Seja a função linear definida por $y = ax + b$ com $a \neq 0$.

Se a função for estritamente crescente, temos $x_1 > x_2 \longrightarrow y_1 > y_2$ e, como:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \longrightarrow a > 0$$

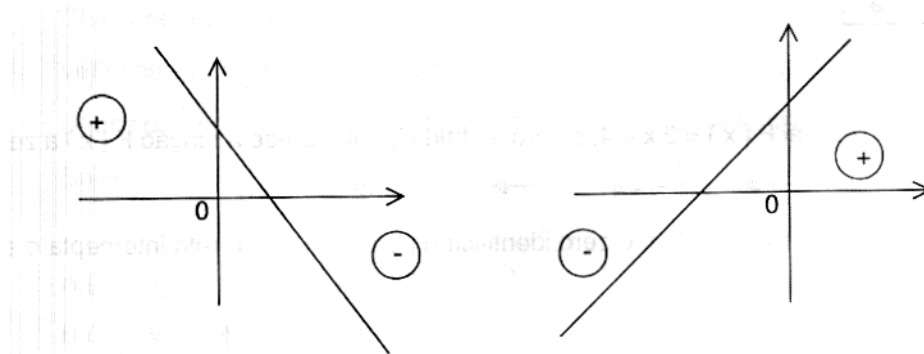
Se a função for estritamente decrescente, temos $x_1 > x_2 \longrightarrow y_1 < y_2$ e, como:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \longrightarrow a < 0$$

Resumindo:

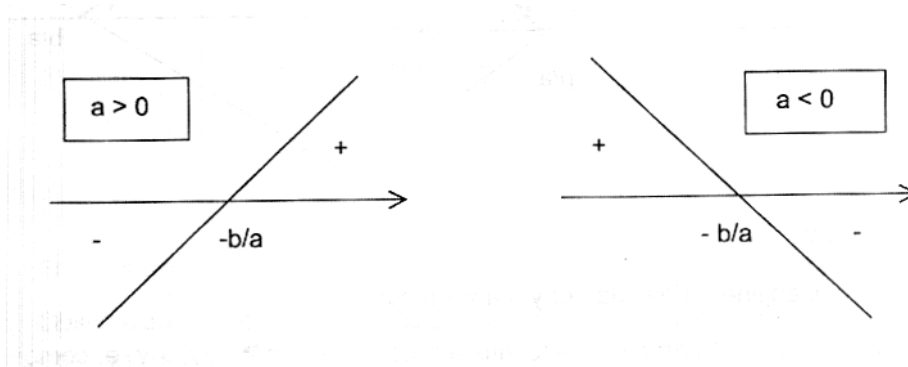
F crescente	$\longrightarrow$	$a > 0$
F decrescente	$\longrightarrow$	$a < 0$
F constante	$\longrightarrow$	$a = 0$

O estudo dos sinais da função afim, pode ser realizado diretamente no gráfico:



função:

Podemos esquematizar esse estudo considerando apenas o eixo $0x$, o zero e a variação da

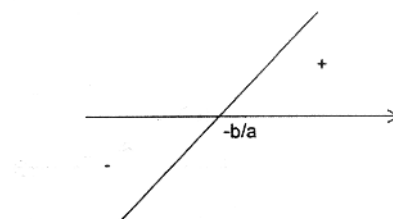


RESUMO DO ESTUDO DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

- Forma: $y = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax + b \}$
- Domínio: $\text{Dom} (F) = \mathbb{R}$ ou $x \in] -\infty, +\infty [$
- Imagem: $\text{Im} (F) = \mathbb{R}$ ou $y \in] -\infty, +\infty [$
- Zeros: $y = 0$ quando $x = -b/a$

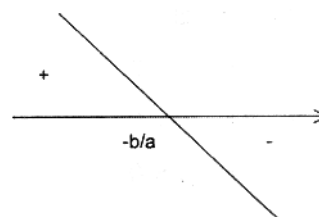
Variação: Se $a > 0$, y é crescente

e, $y < 0$ quando $x < -b/a$
 $y > 0$ quando $x > -b/a$

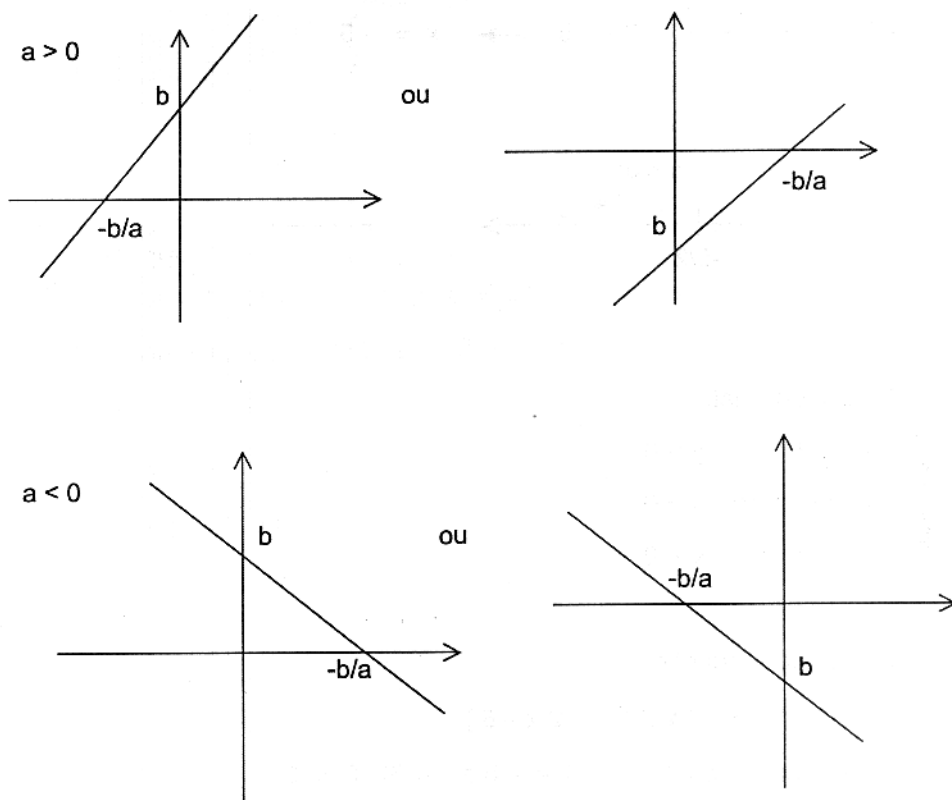


Se $a < 0$, y é decrescente

e $y > 0$ quando $x < -b/a$
 $y < 0$, quando $x > -b/a$



Gráfico

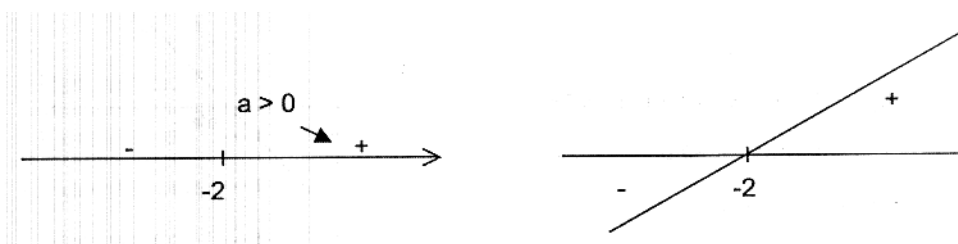


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS:

1) Vamos estudar o sinal da função real $y = 2x + 4$.

Cálculo da raiz:

$$2x + 4 = 0 \longrightarrow 2x = -4 \longrightarrow x = -2$$

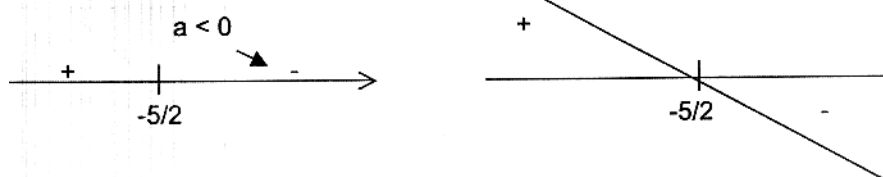


Estudo do sinal:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x < -2 & \longrightarrow y < 0 \\ x = -2 & \longrightarrow y = 0 \\ x > -2 & \longrightarrow y > 0 \end{array} \right.$$

2) Vamos estudar o sinal da função real $F(x) = -2x - 5$. Cálculo da raiz:

$$-2x - 5 = 0 \longrightarrow -2x = 5 \longrightarrow x = -\frac{5}{2}$$



Estudo do sinal:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x < -5/2 & \longrightarrow y > 0 \\ x = -5/2 & \longrightarrow y = 0 \\ x > -5/2 & \longrightarrow y < 0 \end{array} \right.$$

3) Estude a função:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x - 6 \}$$

Temos, então, $a = 2$, $b = -6$ e $-b/a = -(-6)/2 = 3$

Assim:

Domínio: $x \in]-\infty, +\infty[$

Imagem: $y \in]-\infty, +\infty[$

Zeros: $y = 0$, quando $x = 3$

Variação: y é crescente porque $a = 2 > 0$

$y < 0$ quando $x < 3$ / $y > 0$ quando $x > 3$

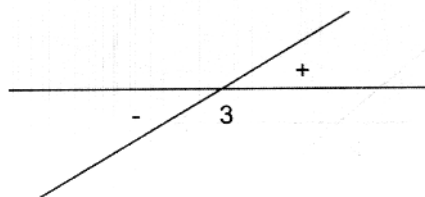
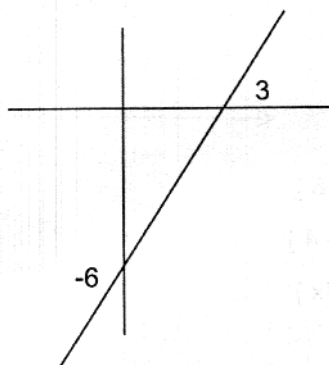


Gráfico:



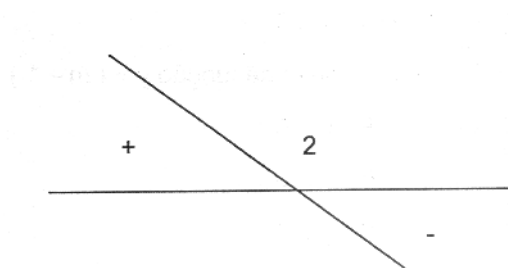
4) Estudar a função $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2 - x \}$

Temos, então: a) -1 e b) 2 e $-b/a = -2/-1 = 2$

Domínio: $x \in]-\infty, +\infty[$

Imagem: $y \in]-\infty, +\infty[$

Zeros: $y = 0$, quando $x = 2$



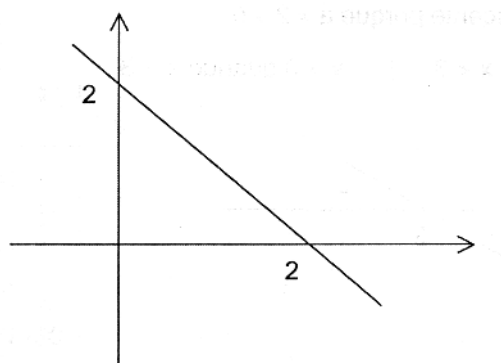
Variação:

y é decrescente

$y < 0$ quando $x > 2$

$y > 0$ quando $x < 2$

Gráfico:



EXERCÍCIOS:

4) Estude as funções:

a) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x + 6 \}$

b) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = -2x + 4 \}$

c) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 4 + 6x \}$

d) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3x \}$

5) Determine m na função $y = mx + 2$ para que se tenha:

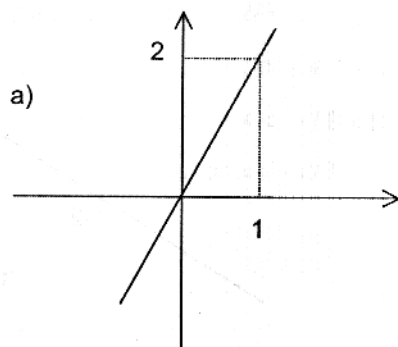
$$\begin{cases} x < 1 & \longrightarrow y > 0 \\ x = 1 & \longrightarrow y = 0 \\ x > 1 & \longrightarrow y < 0 \end{cases}$$

6) Determine m na função $y = (m - 1)x - 3$ para que se tenha:

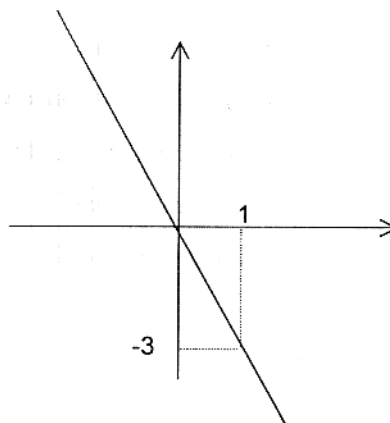
$$\begin{cases} x < 2 & \longrightarrow y < 0 \\ x = 2 & \longrightarrow y = 0 \\ x > 2 & \longrightarrow y > 0 \end{cases}$$

GABARITO:

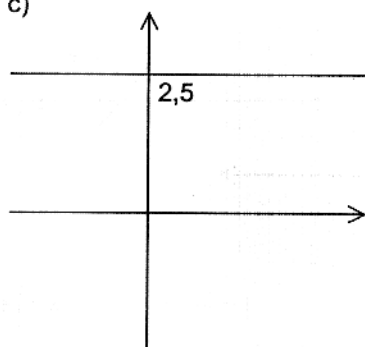
1)



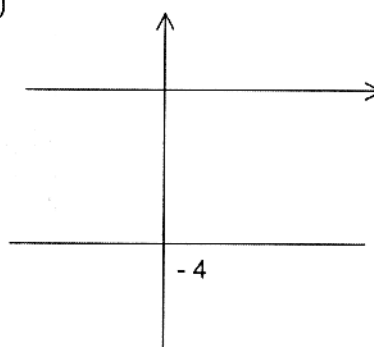
b)



c)



d)



2)

a) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\{2\}$

c) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\{-2\}$

b) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\mathbb{R}$

d) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\mathbb{R}$

3)

a) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\{1\}$
 $y = 1$

c) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\mathbb{R}$
 $y = 3x$

b) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\{-2\}$
 $y = -2$

d) Dom: $\mathbb{R}$
Im: $\mathbb{R}$
 $y = -2x$

4) a) Domínio: $x \in]-\infty, +\infty[$

Im: $y \in]-\infty, +\infty[$

Zeros: $y = 0$, quando $x = -2$

Variação: y é crescente porque $a = 3 > 0$

$y < 0$ quando $x < -2$

$y > 0$ quando $x > -2$

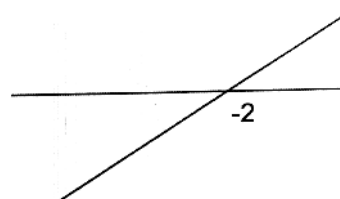
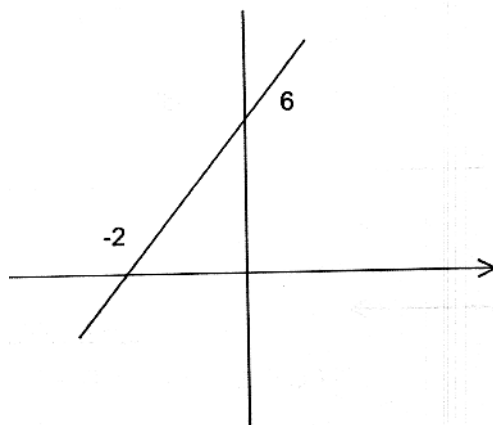


Gráfico:



b) Dom: $x \in] -\infty, +\infty [$

Im: $y \in] -\infty, +\infty [$

Zeros: $y = 0$, quando $x = 2$

Variação: y é decrescente

$y < 0$ quando $x > 2$

$y > 0$ quando $x < 2$

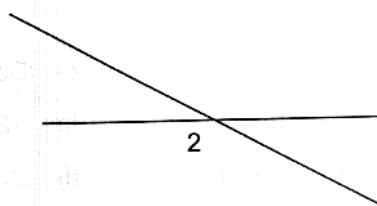
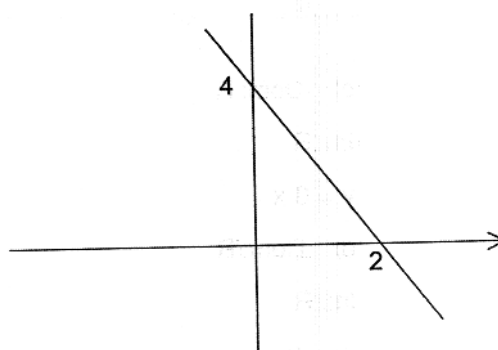


Gráfico:



c) Dom: $x \in] -\infty, +\infty [$

Im: $y \in] -\infty, +\infty [$

Zeros: $y = 0$, quando $x = -2/3$

Variação: y é crescente porque $a = 3 > 0$

$y < 0$ quando $x < -2/3$

$y > 0$ quando $x > -2/3$

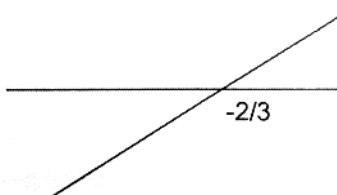
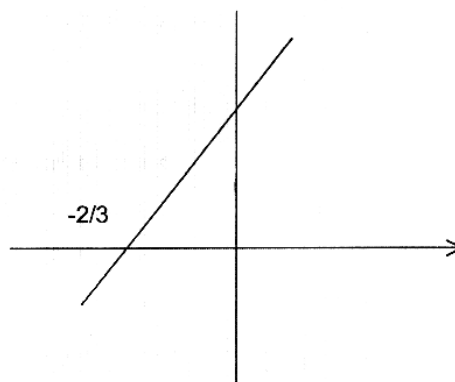


Gráfico:



d) Dom: $x \in]-\infty, +\infty [$

Im: $y \in]-\infty, +\infty [$

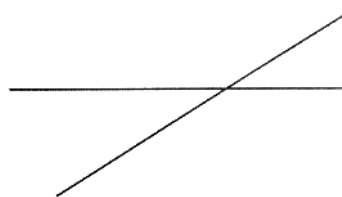
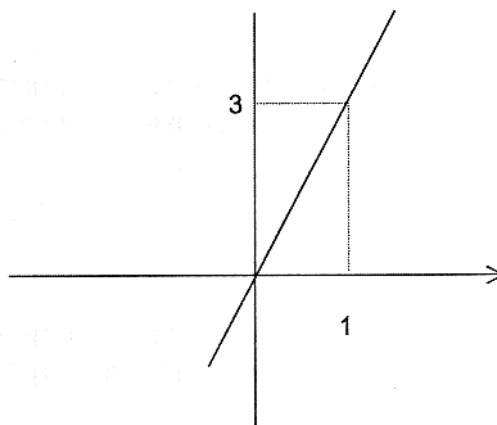
Zeros: $y = 0$, quando $x = 0$

Variação: y é crescente

$y < 0$ quando $x < 0$

$y > 0$ quando $x > 0$

Gráfico:



5) $m = -2$

6) $m = 5/2$

UNIDADE 2: FUNÇÃO QUADRÁTICA

Chama-se função quadrática a função definida por:

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = ax^2 + bx + c \}$$

Onde a , b e c são números reais dados e $a \neq 0$. Esta função também pode ser representada por:

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Ex:

$$1) y = x^2 + 2x + 4$$

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 4$$

$$2) y = 2x^2 + 3x - 6$$

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -6$$

$$3) F(x) = 3x^2 + 3$$

$$a = 3 \qquad b = 0 \qquad c = 3$$

$$4) y = x^2 - 2x$$

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 0$$

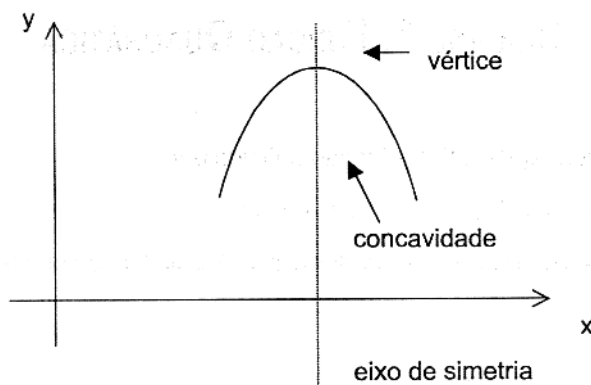
ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

* Domínio $\longrightarrow$ O Domínio da função quadrática é o conjunto $\mathbb{R}$, uma vez que na sua lei de formação não existe nenhuma restrição para x .

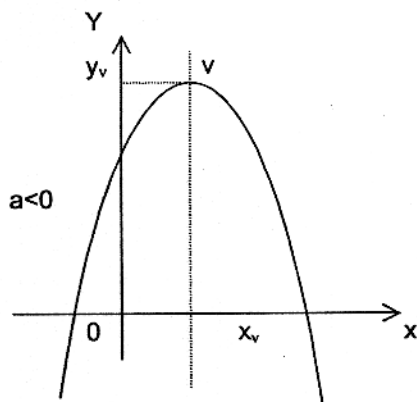
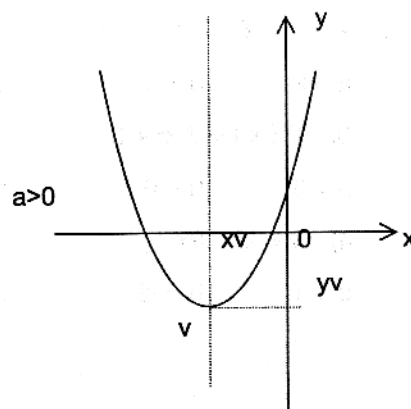
$$\text{Então: } \text{Dom}(F) = \mathbb{R}$$

* Imagem $\longrightarrow$ O Gráfico de uma função quadrática é sempre uma parábola

$\longleftrightarrow$
com eixo de simetria paralelo a Oy . O ponto de interseção entre a parábola e o eixo de simetria, denomina-se vértice.



De acordo com a lei da função quadrática, a parábola que a representa pode ter concavidade voltada para baixo, se $a < 0$, ou para cima, se $a > 0$.



As coordenadas do vértice são:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$V \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Note que, se $a < 0$, o ponto V é o ponto de máximo e, se $a > 0$, V é o ponto de mínimo.

Observando, então, um gráfico verificamos que na imagem sempre haverá um ponto extremo (de máximo ou de mínimo).

Se o extremo é máximo, significa que a imagem da F será constituída por todos os pontos maiores que $\frac{-\Delta}{4a}$. Ou seja, $\text{Im}(f) =]-\infty, -\Delta/4a]$

Se o extremo é mínimo, significa que a imagem da F será constituída por todos os pontos maiores que $\frac{-\Delta}{4a}$. Ou seja, $\text{Im}(f) =]-\Delta/4a, +\infty]$

Ex:

Seja determinada a imagem da função $y = x^2 - 5x + 6$. Temos, então:

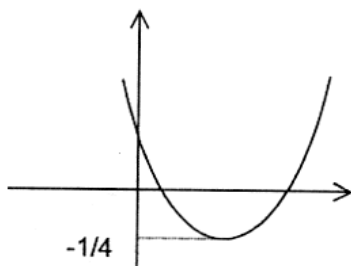
$$a = 1 \qquad b = -5 \qquad c = 6 \qquad \text{e}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

Assim:

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$$

Como $a = 1$ é positivo, temos que $-1/4$ é mínimo, ou seja:

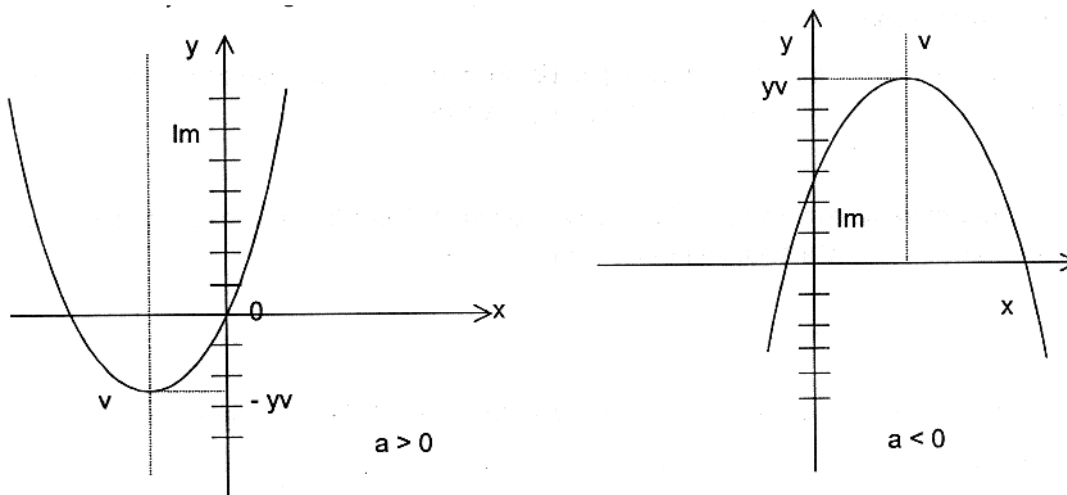


Então:

$$\text{Im}(f) = [-1/4, +\infty[$$

Observe:

O conjunto-imagem de uma função quadrática depende da ordenada do vértice:



Zeros Da Função Quadrática

Você sabe que o zero de uma função é o valor de x que torna $y = 0$ e significa graficamente os pontos onde a curva (função) corta o eixo dos x .

Então, fazendo $F(x) = 0$, temos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$2a$$

Ou seja, existem dois valores de x que anulam F .

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

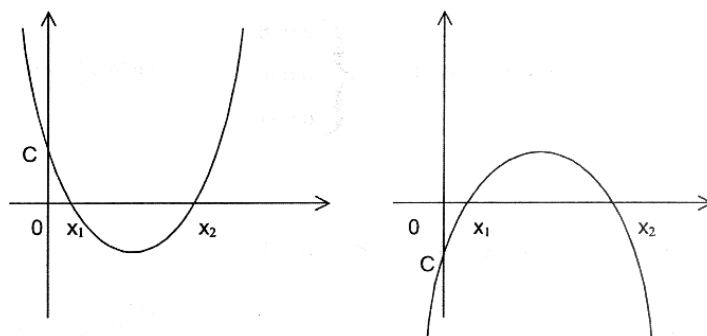
e

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$2a$$

$$2a$$

Veja no gráfico a seguir, que os zeros indicam os pontos em que a parábola intercepta o eixo Ox .



1) Determine os zeros da função $y = x^2 - 5x + 6$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

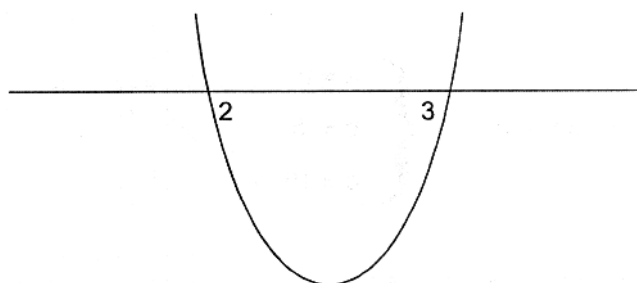
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 \quad \longrightarrow \quad \Delta = 1$$

Lembre-se

$$\Delta > 0 \quad \longrightarrow \quad 2 \text{ zeros diferentes}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$



Então, esta função tem dois zeros, cujas coordenadas são (2, 0) e (3, 0).

$$2) F(x) = -6x^2 + 5x - 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -6 \\ b = 5 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

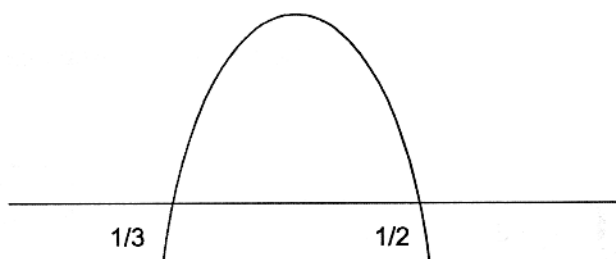
$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-1) \quad \longrightarrow \quad \Delta = 1$$

Lembre-se:

$$\Delta > 0 \quad 2 \text{ zeros diferentes}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-6)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{-12} \quad \left\{ \begin{array}{l} -6 / -12 = 1/2 \\ -4 / -12 = 1/3 \end{array} \right.$$



Esta função tem dois zeros, cujas funções são: $(1/3, 0)$ e $(1/2, 0)$.

$$3) F(x) = 2x^2 - 5x + 10 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 10 \end{cases}$$

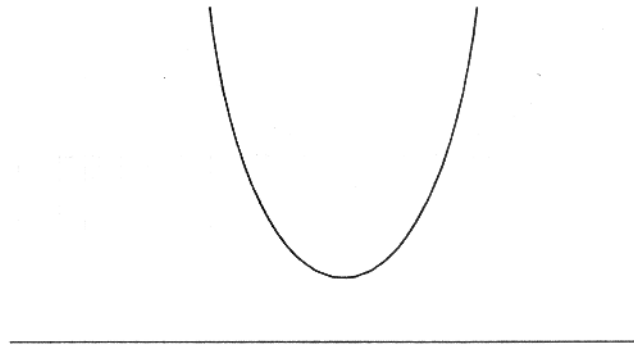
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10 \longrightarrow \Delta = -55$$

Lembre-se:

$$\Delta < 0 \longrightarrow \exists \text{ raízes reais}$$

$$S = 0$$



Variação Do Sinal

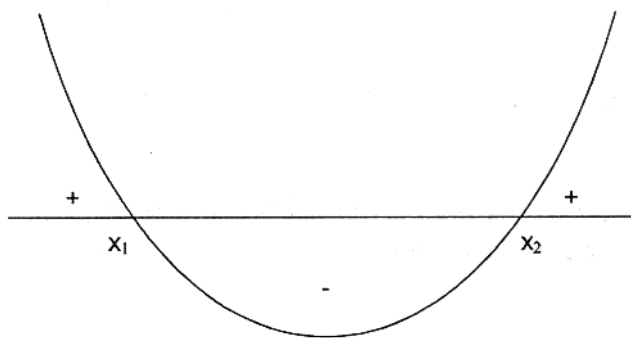
O estudo da variação da função quadrática pode ser realizado diretamente no gráfico.

Temos os seguintes casos:

1º $\longrightarrow a > 0$ Sabemos que se $a > 0$, a função possui mínimo (ou seja, tem o “bico” virado para baixo). Surgem, então, três hipóteses:

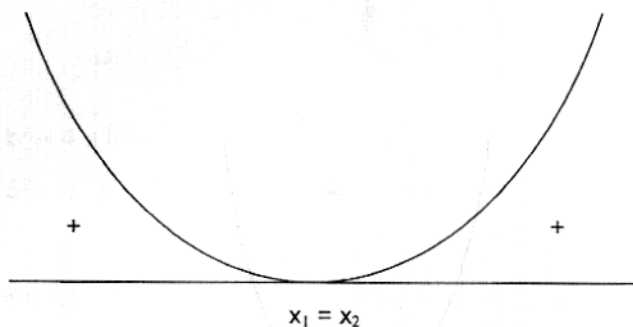
$$\Delta > 0 \text{ (duas raízes diferentes, } x_1 \neq x_2 \text{)}$$

e temos:



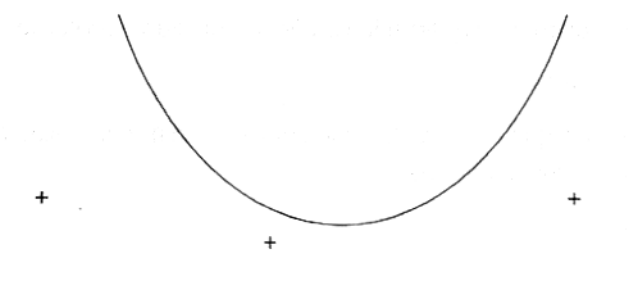
$$\text{Ou seja: } \begin{cases} y > 0, \text{ quando } x < x_1, \text{ ou } x > x_2 \\ y < 0, \text{ quando } x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow \text{duas raízes iguais (} x_1 = x_2 \text{), e temos:}$$



Ou seja, $y > 0 \quad \forall \quad x \neq x_1$

$\Delta < 0 \longrightarrow$ não possui raízes reais, e temos:

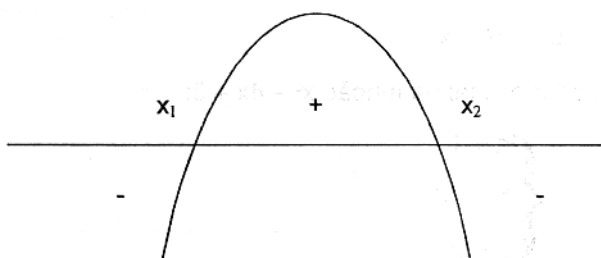


Ou seja, $y > 0 \quad \forall \quad x$

2º $\longrightarrow a < 0$ Sabemos que se $a < 0$, a função possui máximo (ou seja, tem o “bico” virado para cima). Surgem, então, três hipóteses:

$\Delta > 0$ (duas raízes diferentes, $x_1 \neq x_2$)

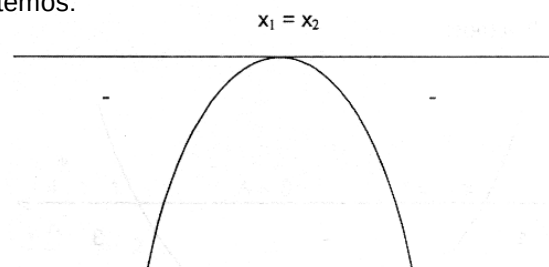
E temos:



Ou seja, $y > 0$, quando $x_1 < x < x_2$

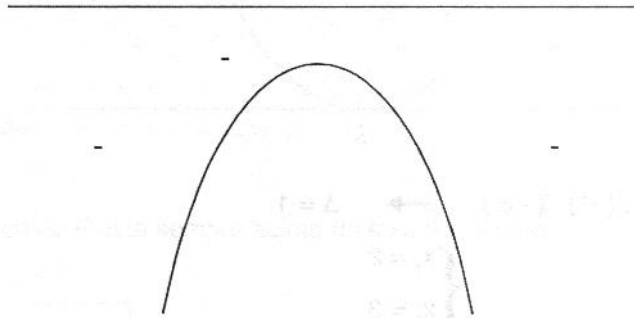
$y < 0$, quando $x < x_1$, ou $x > x_2$

$\Delta = 0 \longrightarrow$ duas raízes iguais ($x_1 = x_2$), e temos:



Ou seja, $y > 0 \quad \forall \quad x \neq x_1$

$\Delta < 0 \longrightarrow$ não possui raízes reais, e temos:



Ou seja, $y < 0 \quad \forall \quad x$

Ex: Vamos estudar o sinal da função $x^2 - 4x + 3$:

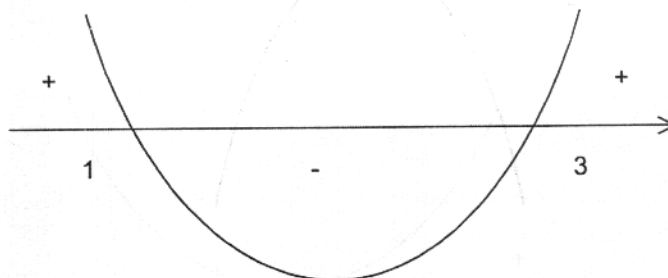
1) Temos $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \quad \Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Como $a = 1 > 0$, temos:



Então, $y > 0$ quando $x < 1$ ou $x > 3$ e, $y < 0$, quando $1 < x < 3$.

2) Vamos estudar o sinal da função $-x^2 + 5x - 6$:

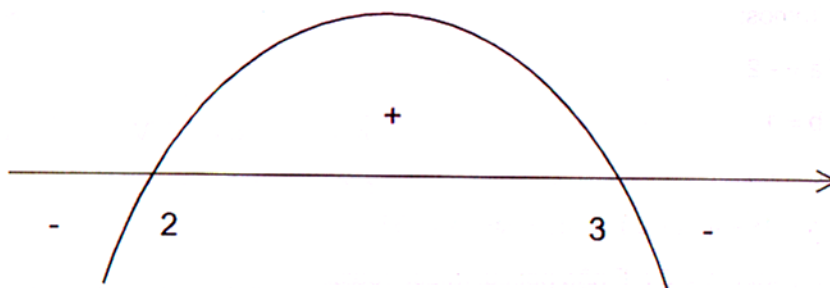
Temos:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) \longrightarrow \Delta = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Como $a = -1 < 0$, temos;



Então, $y < 0$ quando $x < 2$ ou $x > 3$ e $y > 0$, quando $2 < x < 3$.

3) Vamos estudar o sinal da função $x^2 - 2x + 1$:

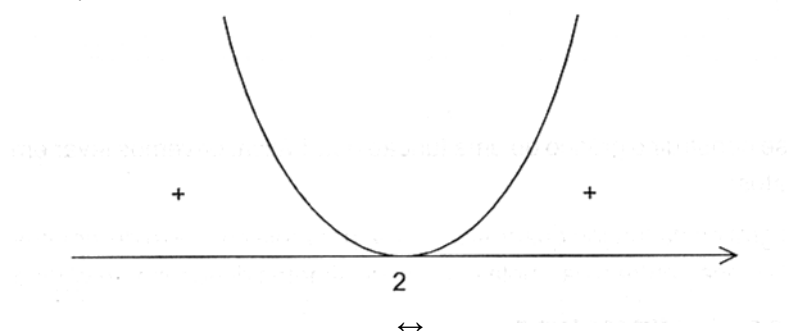
Temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \quad \Delta = 0 \quad (x_1 = x_2)$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

Como $a = 1 > 0$, temos:



Então, como F está sempre acima do eixo $0x$, temos;

$$y > 0 \quad \forall \quad x \neq 2$$

4) Vamos estudar o sinal da função $y = -2x^2 + x - 4$:

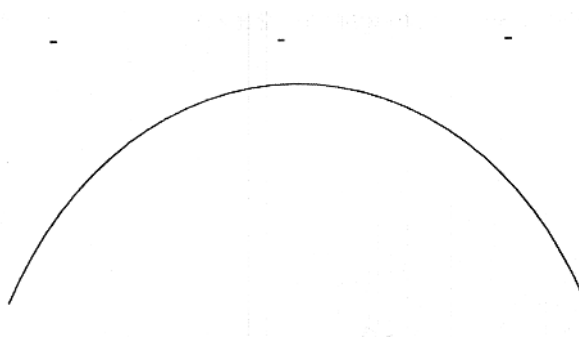
Temos:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) \longrightarrow \Delta = -31$$

Ou seja, $\Delta < 0$ e F não possui raízes reais.

Então, como $a = -2 < 0$, temos:



E, assim:

$$y < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Gráfico

Para se construir o gráfico de uma função quadrática, devemos levar em consideração os seguintes fatos:

a) O gráfico da função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo

↔

a Oy . O ponto de interseção entre a parábola e o eixo de simetria denomina-se vértice.

b) Se $a > 0$, a função tem mínimo.

Se $a < 0$, a função tem máximo.

c) As coordenadas do vértice (seja ele máximo ou mínimo) são:

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\text{Ou seja,} \quad V \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

↔

A função corta o eixo Oy no ponto C (o termo independente).

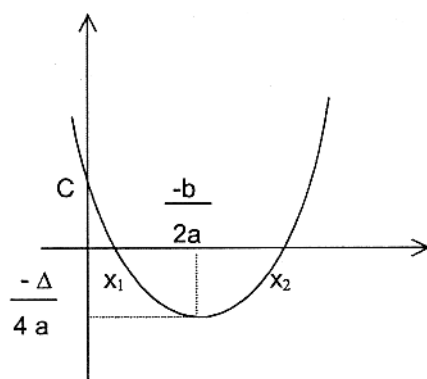
↔

Os zeros da função são os pontos em que ela corta o eixo Ox .

Com base nestes dados, podemos resumir:

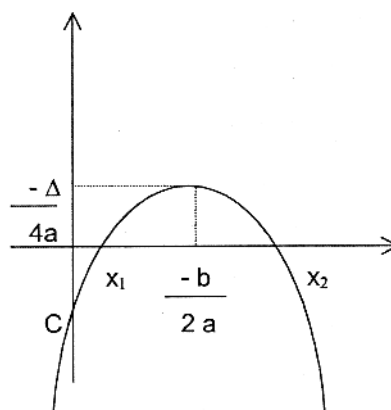
Se $\Delta > 0$

$a > 0$



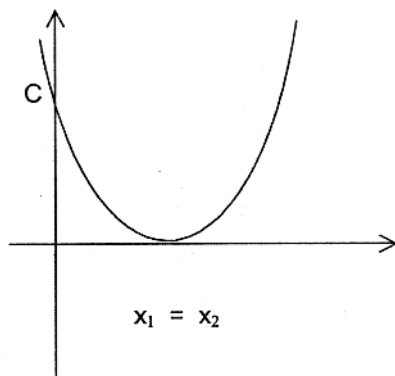
$\Delta > 0$

$a < 0$



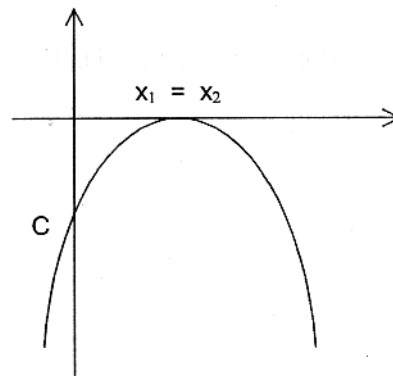
$$\Delta = 0$$

$$a > 0$$



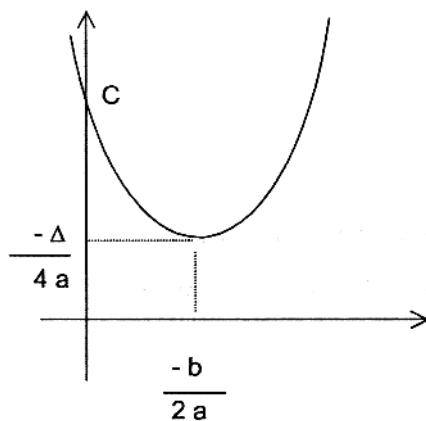
$$\Delta = 0$$

$$a < 0$$



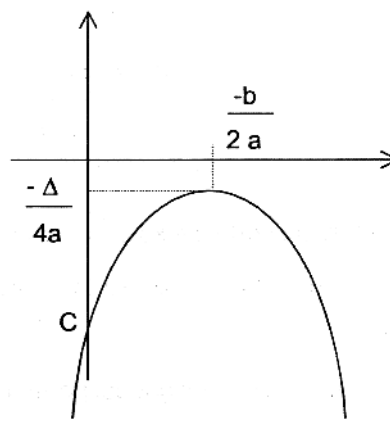
$$\text{Se } \Delta < 0$$

$$a > 0$$



$$\Delta < 0$$

$$a < 0$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Estude a função $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x^2 - 2x - 3 \}$

Temos, então:

$$a = 1 / b = -2 / c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

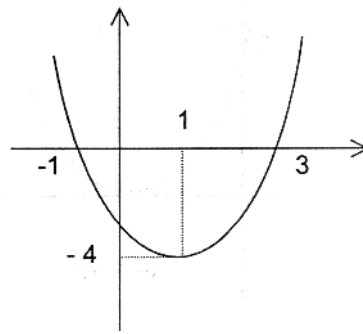
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2}$$

$$-b/2a = 2/2 = 1$$

$$\begin{cases} 6/2 = 3 \\ -2/2 = -1 \end{cases}$$

$$-\Delta/4a = 16/4 \cdot 1 = -4$$

Como $a = 1 > 0$, o gráfico ficaria assim:



Assim:

Dom: $x \in]-\infty, +\infty[$

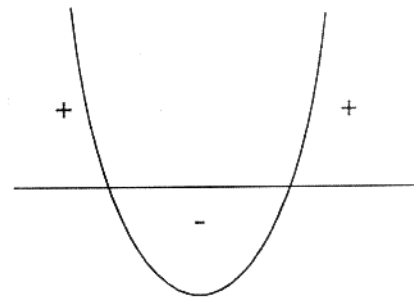
Im: $y \in]-4, +\infty[$

Zeros: $y = 0$, quando $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

máx. mín: y tem mínimo em (1, -4)

Variação: $y > 0$ quando $\begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$

$y < 0$ quando $-1 < x < 3$



1) Estude a função $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = -x^2 + 2x + 3 \}$

Temos, então:

$a = -1$ / $b = 2$ / $c = 3$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3$

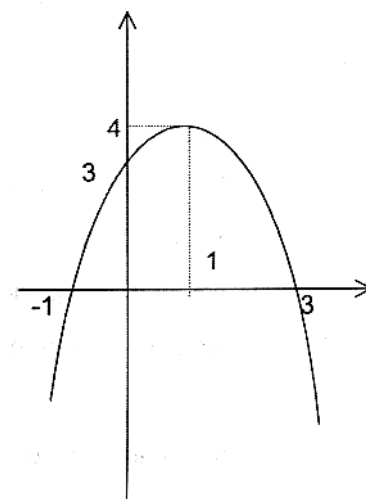
$\Delta = 4 + 12$

$\Delta = 16$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} \quad \begin{cases} -6 / -2 = 3 \\ +2 / -2 = -1 \end{cases}$$

$$-b / 2a = -2 / -2 = 1 \quad -\Delta / 4a = -16 / -4 = 4$$

Como $a = -1 < 0$, o gráfico ficaria assim:



Assim:

$$\text{Dom: } x \in] -\infty, +\infty [$$

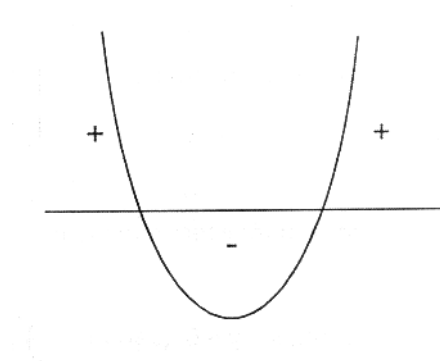
$$\text{Im: } y \in] -\infty, 4 [$$

$$\text{Zeros: } y = 0, \text{ quando } \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Máx. mín: y tem mínimo em (1, 4)

Variação: y > 0 quando $-1 < x < 3$

$$y < 0 \text{ quando } \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$



2) Estude a função $x^2 - 2x + 1$

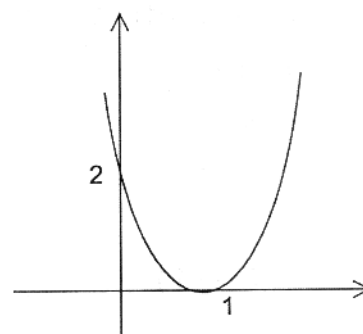
Temos, então:

$$a = 1 / b = -2 / c = 1$$

$$\Delta = 4 - 4 \longrightarrow \Delta = 0 \ (x_1 = x_2)$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Como $a = 1 > 0$, o gráfico ficará assim:



Assim:

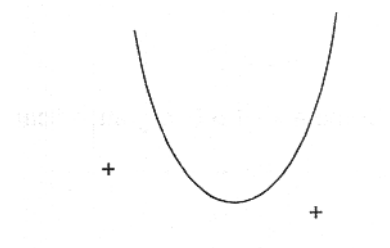
$$\text{Dom: } x \in] -\infty, +\infty [$$

$$\text{Im: } y \in] -0, +\infty [$$

$$\text{Zeros: } y = 0, \text{ quando } x = 1$$

Máx. mín: y tem mínimo em (1, 0)

$$\text{Variação: } y > 0 \ \forall \ x \neq 1$$



EXERCÍCIOS:

1) Estude as funções:

a) $y = 6x^2 - 5x + 1$

b) $y = 6 - x^2$

c) $y = x^2 + 7x + 10$

d) $y = x^2 - 9$

e) $y = x^2 + 2x + 5$

f) $y = -x^2 + 6x - 9$

GABARITO

a)

Dom: $x \in] -\infty, +\infty [$ Im: $y \in] -1/24, +\infty [$ Zeros: $y = 0$, quando

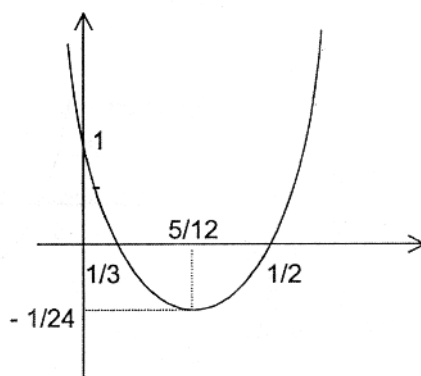
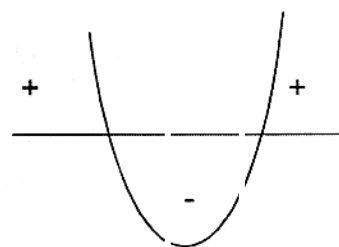
$$\begin{cases} x = 1/2 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

Máx. mín: y tem mínimo em $(5/12, -1/24)$ Variação: $y > 0$ quando

$$\begin{cases} x < 1/3 \\ \text{ou} \\ x > 1/2 \end{cases}$$

 $y < 0$ quando $1/3 < x < 1/2$

Gráfico:



b)

Dom: $x \in] -\infty, +\infty [$ Im: $y \in] -\infty, 4 [$ Zeros: $y = 0$, quando

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

máx. mín: y tem máximo em $(0, 4)$ Variação: $y < 0$ quando

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$$

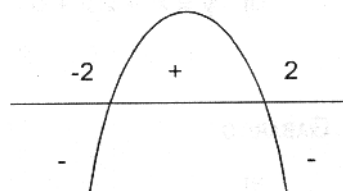
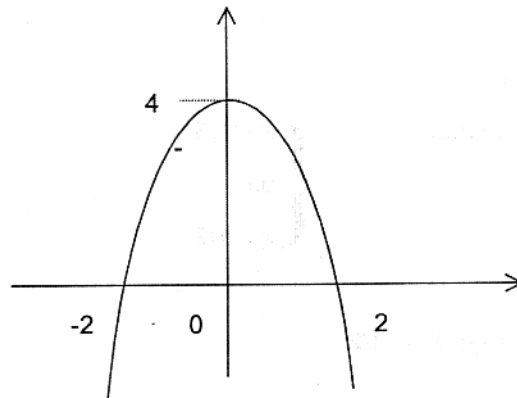
 $y > 0$ quando $-2 < x < 2$ 

Gráfico:



c)

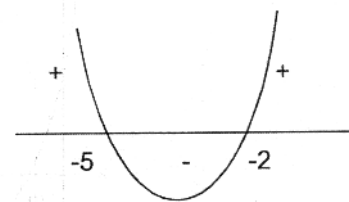
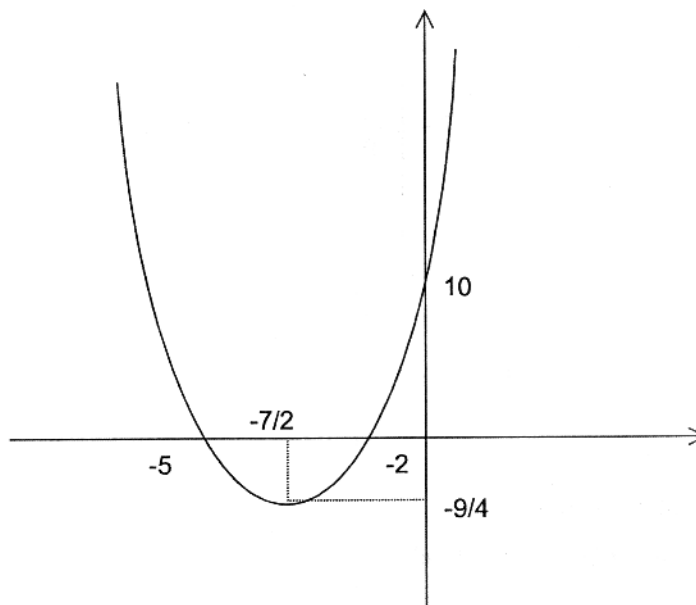
Dom: $x \in]-\infty, +\infty [$ Im: $y \in]-9/4, +\infty [$ Zeros: $y = 0$, quando $\begin{cases} x = -5 \\ x = -2 \end{cases}$ máx. mín: y tem mínimo em $(-7/2, -9/4)$ variação: $y > 0$ quando $\begin{cases} x < -5 \\ \text{ou} \\ x > -2 \end{cases}$ $y < 0$ quando $-5 < x < -2$

Gráfico:

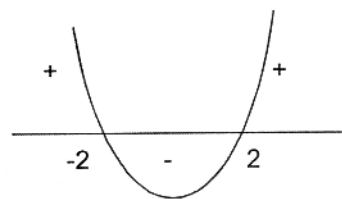


d)

Dom: $x \in]-\infty, +\infty [$ Im: $y \in]9, +\infty [$ Zeros: $y = 0$, quando $\begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

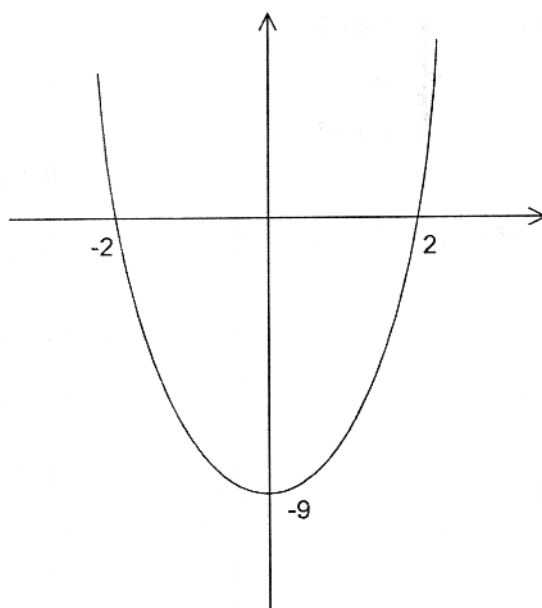
máx. mín: y tem mínimo em (0, 9)

Variação: $y > 0$ quando $\begin{cases} x < -2 \\ \text{ou} \\ x > 2 \end{cases}$



$y < 0$ quando $-2 < x < 2$

Gráfico:



e)

Dom: $x \in]-\infty, +\infty[$

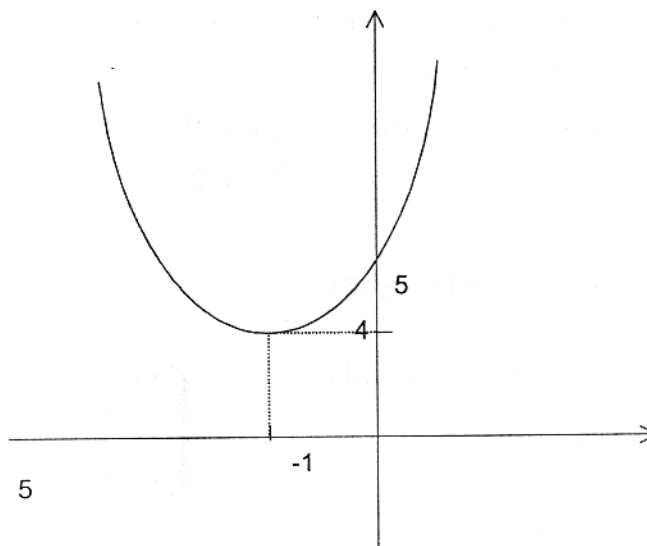
Im: $y \in]4, +\infty[$

Zeros: Não possui zeros

Máx. mín: u tem mínimo em (-1, 4)

Variação: $y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

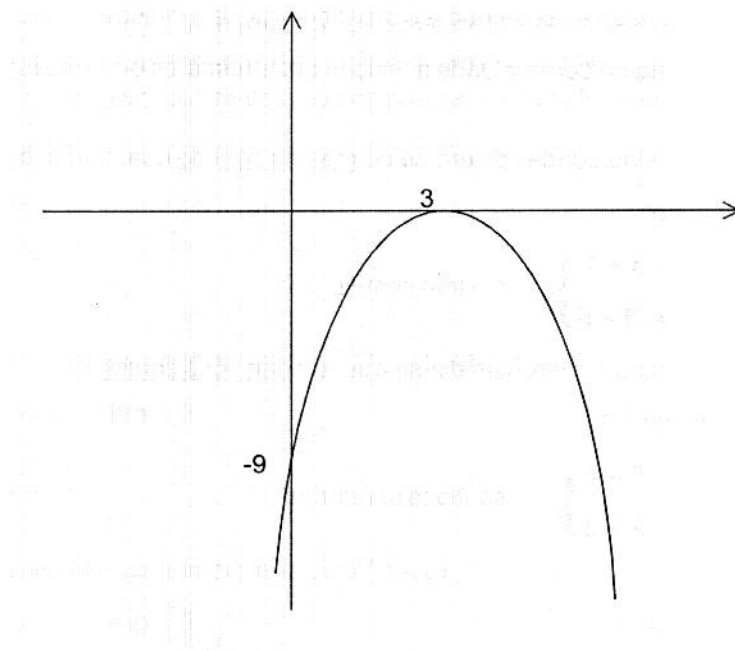
Gráfico:



f)

Dom: $x \in]-\infty, +\infty [$ Im: $y \in]-\infty, 0 [$ Zeros: $y = 0$, quando $x = 3$ Máx. mín: y tem máximo em $(3, 0)$ Variação: $y < 0 \quad \forall \quad x \neq 3$

Gráfico:



UNIDADE 3: INEQUAÇÕES (1º E 2º GRAU)

Dados dois números ou duas expressões a , e b , existem as seguintes possibilidades:

$$a = b \text{ ou } a \neq b$$

Se $a = b$, temos uma igualdade.

Se $a \neq b$, temos uma desigualdade.

Neste caso, também temos duas possibilidades:

- $a - b$ é positivo – diz-se que a é maior do que b e indica-se $a > b$.
- $a - b$ é negativo – diz-se que a é menor do que b e indica-se $a < b$.

Denomina-se desigualdades dizem-se do mesmo sentido quanto têm o mesmo sinal.

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 5 > 3 + 4 \\ 2 + 8 > 3 + 5 \end{array} \right\} \text{ mesmo sentido}$$

Se têm sinais diferentes diz-se que têm sentidos contrários.

Exemplo:

$$\left. \begin{array}{l} 2 + 3 < 5 + 4 \\ 1 + 9 > 2 + 3 \end{array} \right\} \text{ sentidos contrários}$$

Atenção:

- Dados dois números positivos, o maior é o que possui maior valor absoluto.
- Dados dois números negativos, o maior é o que possui menor valor absoluto.
- Todo número positivo é maior que qualquer número negativo.

PROPRIEDADE DAS DESIGUALDADES

1ª PROPRIEDADE: somando-se ou subtraindo-se uma mesma quantidade aos dois membros de uma desigualdade, ela não muda de sentido.

$$\text{Seja } a > b$$

$$\text{Logo a diferença } a - b > 0$$

$$\text{Somando } m - m = 0 \text{ temos; } a - b + m - m > 0$$

$$\text{Ou } (a + m) - (a + b) > 0$$

Logo

$$a + m > b + m$$

$$\text{Ou então } (a - m) - (b - m) > 0$$

Logo

$$a - m > b - m$$

2ª PROPRIEDADE: Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo, obtém-se uma desigualdade de mesmo sentido; por um número negativo, obtém-se uma desigualdade de sentido contrário.

Seja $a > b$ Então, $a - b > 0$

- Multiplicando por um número positivo ($m > 0$), temos: $m(a - b) > 0$.

Ou seja, $am - bm > 0$ $(+) \cdot (+)$

Logo:

$$am > bm$$

- Multiplicando por um número negativo ($m < 0$), temos: $m(a - b) < 0$

Ou seja, $ma - mb < 0$ $(-) \cdot (+)$

Logo:

$$ma < mb$$

Observação importante:

Você pode transformar uma desigualdade numa outra equivalente à primeira, utilizando todos os processos conhecidos em equação. Tenha, porém o cuidado de inverter o sentido da desigualdade, quando multiplicá-la por um número negativo.

Verifique as seguintes afirmações:

1ª) A soma de desigualdade do mesmo sentido é também uma desigualdade de mesmo sentido.

2ª) A diferença entre duas desigualdades de sentidos contrários é uma desigualdade de mesmo sentido da considerada como minuendo.

3ª) O produto de desigualdade de mesmo sentido e de membros positivos é uma desigualdade de mesmo sentido.

4ª) O quociente de duas desigualdades de sentidos contrários é uma desigualdade do mesmo sentido da considerada como dividendo.

INEQUAÇÕES

Inequações são desigualdades condicionais e os valores da incógnita que lhe satisfazem são as soluções.

Assim, a desigualdade $x - 1 > 3$ que só se verifica para valores de x maiores que 4, é uma inequação. Qualquer número maior que 4 é uma solução.

Duas inequações dizem-se equivalentes quando têm as mesmas soluções.

Assim:

$x + 2 > 8$ e $x - 1 > 5$, ambas satisfeitas para valores de x maiores que 6 são equivalentes.

Para se resolver uma inequação, utilizam-se os princípios anteriormente estudados, de maneira análoga ao processo de resolução de uma equação.

Exemplo:

$$\frac{3x + 2}{3} + \frac{4x - 2}{2} > \frac{12x + 7}{6}$$

Eliminando os denominadores: Multiplicando-se ambos os membros por 6 (que é o MMC entre 2, 3 e 6) temos:

$$6x + 4 + 12x - 6 > 12x + 7$$

transformando

$$6x + 12x - 12x > 7 + 6 - 4$$

reduzindo os termos semelhantes

$$6x > 9$$

dividindo ambos os membros por 6, temos:

$$x > \frac{9}{6} \quad \text{ou} \quad \boxed{x > \frac{3}{2}}$$

Conclusão:

Todo número maior que $\frac{3}{2}$ é solução da inequação.

Sistemas De Inequações Com Um Variável

Sejam as inequações
$$\begin{cases} 3x - 3 > 6 & \text{e} \\ 7 - 2x > 1 - x \end{cases}$$

resolvendo-os, obtém-se
$$\begin{cases} x > 3 & \text{e} \\ x < 6 \end{cases}$$

Existem, então, valores de x que lhes satisfazem simultaneamente.

Em caso contrário, essas equações seriam incompatíveis.

Duas ou mais inequações formam um sistema, assim, as inequações acima formam um sistema cuja solução, é:

$$\boxed{3 < x < 6}$$

A solução gráfica da primeira inequação era dada por todos os pontos à direita do número 3 e a da 2ª inequação, por todos os pontos da reta à esquerda do número 6.

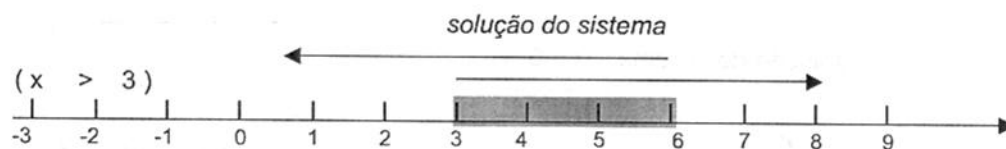
Assim:

solução da segunda

solução da primeira

inequação ($x < 6$)

inequação $x >$



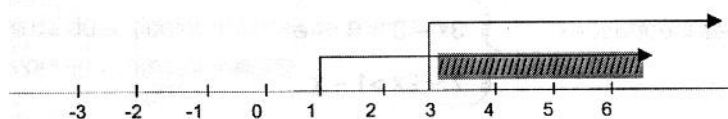
A solução do sistema era dada pelos pontos da reta que fossem solução das duas inequações.

Exemplos:

$$1) \begin{cases} 2x + 1 > 3 \\ 2x + 3 > 9 \end{cases}$$

resolvendo, temos:
$$\begin{cases} x > 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Solução do sistema $x > 3$

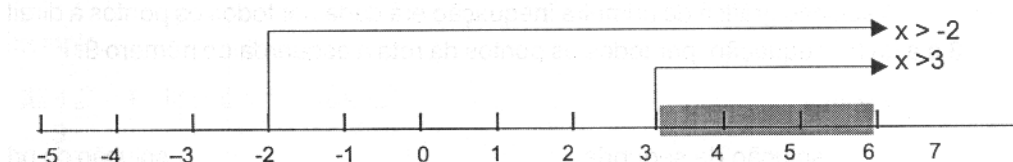


Solução $x > 3$

Solução do sistema: $x > 3$

$$2) \begin{cases} 3x - 5 > 4 \\ 5 - 2x > 9 \end{cases}$$

resolvendo
$$\begin{cases} x > 3 \\ x > -2 \end{cases}$$

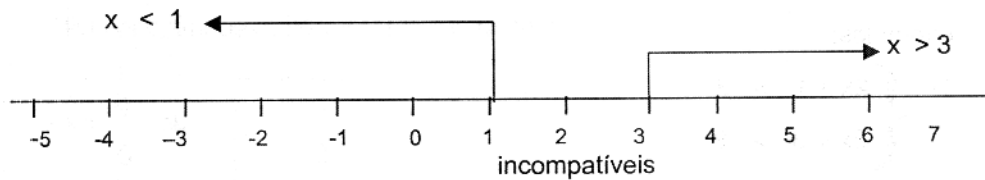


Solução $x > 3$

Solução do sistema: $x > 3$

$$3) \begin{cases} 3x - 5 > 4 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases}$$

resolvendo $\begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$



Solução: incompatíveis

Resolução:

A solução de uma inequação de 1º ou 2º grau pode ser obtida aplicando-se o estudo do sinal da função (afim ou quadrática) por meio dos seguintes passos:

- coloca-se a inequação na forma geral;
- representa-se graficamente o estudo do sinal de F;
- escolhe-se o intervalo que satisfaz a inequação;
- dá-se o conjunto – solução.

Exemplos: (inequação do 1º grau)

1) Resolva a inequação $2x - 3 > 5$

Passando para a forma geral, temos:

$$2x - 3 - 5 > 0$$

ou

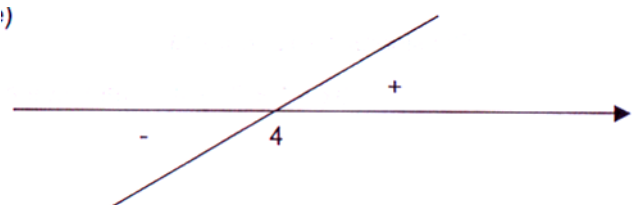
$$2x - 8 > 0$$

Pelo estudo de variação de sinal, temos:

$a = 2$ ($a > 0 \rightarrow$ crescente)

$b = -8$

$$-\frac{b}{a} = \frac{8}{2} = 4$$



Ou seja, os valores de x que tornam a função $2x - 8$ positiva, são os valores de x maiores que 4.

Assim, a solução é $S = \{ x \in \mathbb{R} / x > 4 \}$

2) Resolva a inequação $3x - 1 < 2x + 4$

Passando para a forma geral, temos:

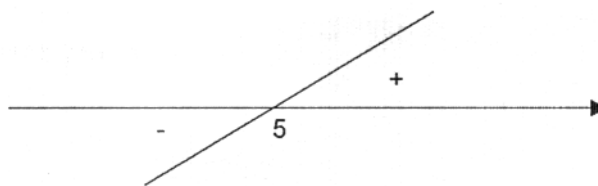
$$3x - 2x - 1 - 4 < 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 < 0$$

Pelo estudo da variação de sinal, temos:

$$a = 1 \quad (a > 0 \rightarrow \text{crescente})$$

$$b = -5$$

$$-\frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5$$



Ou seja, os valores de x que tornam a função $x - 5$ negativa, são os valores de x menores que

5.

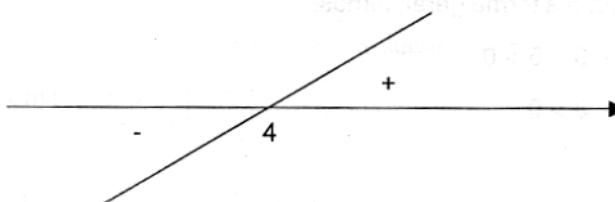
Assim, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 5\}$

3) Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3 > 5 \\ 3x - 1 < 2x + 4 \end{cases}$$

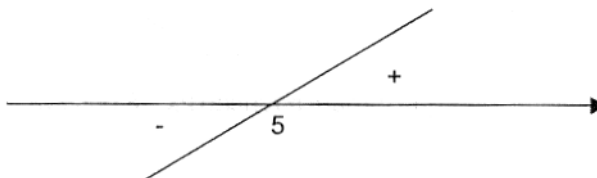
Considerando a 1ª equação:

$2x - 3 > 5$, vimos que a solução é:

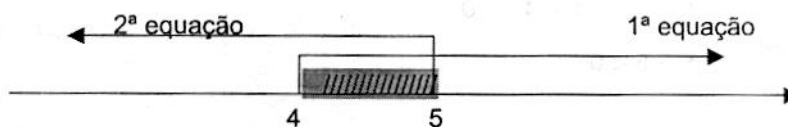


Considerando a 2ª equação:

$3x - 1 < 2x + 4$, vimos que a solução é:



Vamos, agora, montar o seguintes esquema:



Solução do sistema: $S = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x < 5\}$

Exemplos: (inequação do 2º grau)

1) $x^2 - 2x - 8 > 0$

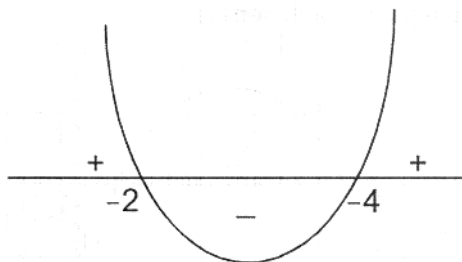
Temos, então:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= -8 \end{aligned}$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Pelo estudo da variação de sinal, temos:



Vimos, então, que os valores de x que tornam $x^2 - 2x - 8$ positivo, são $x < -2$ ou $x > 4$; logo, a resposta é:

$$\text{ou } \begin{cases} x < -2 \\ x > 4 \end{cases} \quad \text{ou } \{x \in \mathbb{R} / x < -2 \text{ ou } x > 4\}$$

$$2) \quad 2x^2 - 3x + 4 < 3x^2 + 2x$$

Colocando-se a inequação na forma normal, temos:

$$2x^2 - 3x + 4 - 3x^2 - 2x < 0$$

$$-x^2 - 5x + 4 < 0$$

Temos:

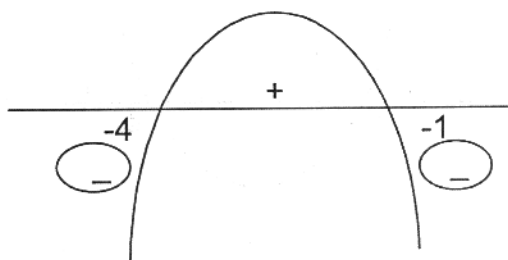
$$a = -1 \quad \Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)$$

$$b = -5 \quad \Delta = 25 - 16$$

$$c = 4 \quad \Delta = 9$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{5 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{8}{-2} = -4 \\ \frac{2}{-2} = -1 \end{cases}$$

Pelo estudo de variação de sinal, temos:



Vimos, então, que os valores de x que tornam $-x^2 - 5x + 4$ negativos, são $x < 4$ ou $x > -1$; logo, a resposta é:

$$x > -4$$

$$\text{ou } x > -1 \quad \text{ou } \{x \in \mathbb{R} / x < -4 \text{ ou } x > -1\}$$

$$3) \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 6x + 8} < 0$$

$$x^2 + 6x + 8$$

$$\text{No numerador, temos: } a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

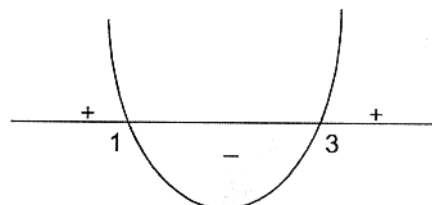
$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

Pelo estudo da variação de sinal, temos:



$$\text{No denominador, temos: } a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 8$$

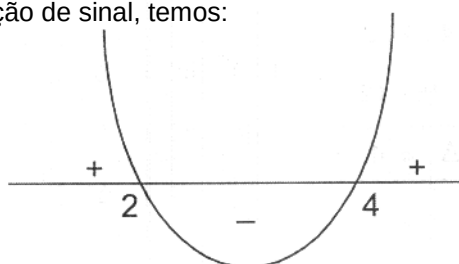
$$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Pelo estudo de variação de sinal, temos:



Vamos agora, montar o seguinte quadro:

		1	2	3	4
N	+	-	-	+	+
D	+	+	-	-	+
F	+	-	+	-	+

Como o exercício pede que a fração seja negativa (< 0), temos:

Resposta: $\left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ \text{ou} \\ 3 < x < 4 \end{array} \right.$



Pode ser assim:

$$\{x \in]1, 2[\cup]3, 4[\}$$

EXERCÍCIOS

1) Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $2x + 4 < x - 2$

b) $2x + 7 < 4x + 11$

c) $3x - 4 < 2x + 1$

d) $2x + 3 < 4x - 7$

e) $\frac{x-3}{x-2} > 0$

f) $(2-x)(x-3) < 0$

g) $\frac{x+1}{x-2} > 2$

h) $x^2 - 5x + 4 = 0$

i) $2x^2 - 4x + 5 > 0$

j) $8x^2 - 14x + 6 < 0$

k) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} = 0$

l) $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} < 1$

GABARITO

1)

a) $x < -6$

b) $x > -2$

c) $x < 5$

d) $x > 5$

e) $\left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ \text{ou} \\ x > 3 \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ \text{ou} \\ x > 3 \end{array} \right.$

g) $\{2 < x < 5\}$

h) $\{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq \sqrt{4}\}$

i) $\mathbb{R}$

j) $\{x \in \mathbb{R} / \frac{3}{4} < x < 1\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} /]-\infty, 1] \cup [2, 3[\cup]4, +\infty[\}$

l) $\{x \in \mathbb{R} /]-\infty, 0[\cup]1, 3[\}$