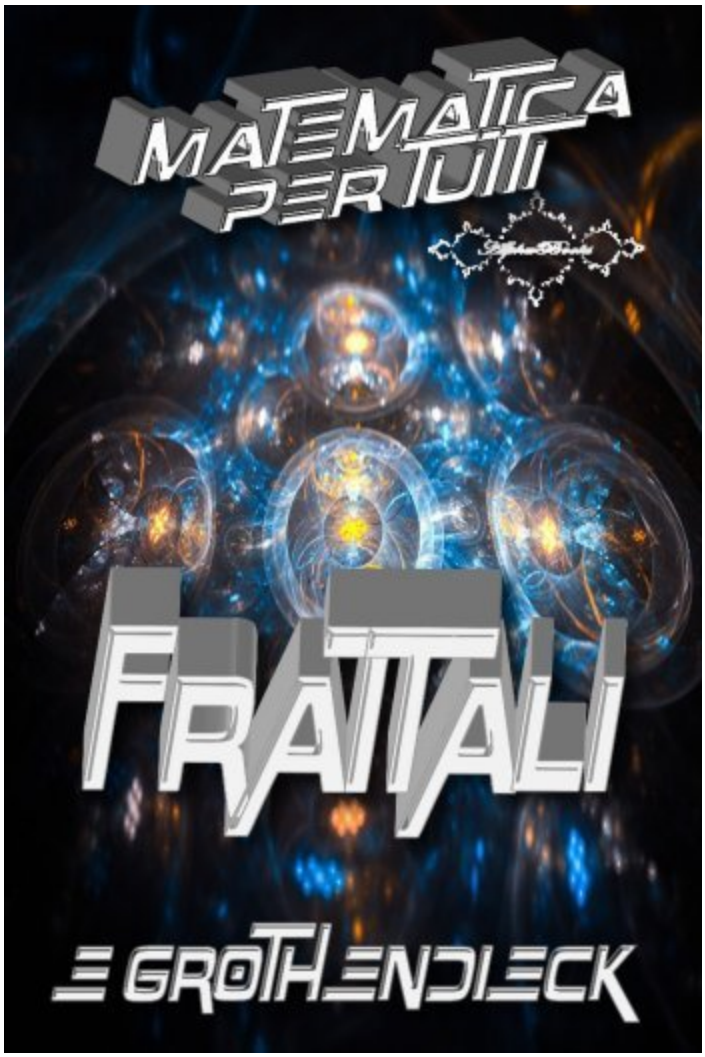


Matematica per tutti:

FRATTALI

E. Grothendieck

Alpha Books

2020

Contenuto

Introduzione

Capitolo 1. Una nuova geometria

Capitolo 2. Autosimilarità e frattali classici

Capitolo 3. Dimensione frattale

Capitolo 4. Automi cellulari e sistemi a L

Capitolo 5. Numeri complessi e funzioni

Capitolo 6. Iterazione

Capitolo 7. Applicazioni

Capitolo 8. Galleria frattale

Bibliografia

È una strada senza fine,

continuo a camminare, girando e girando,

finendo sempre nello stesso posto.

Per la mia amata famiglia.

Introduzione

Questo testo introduce vagamente il concetto matematico di Frattale. Non è possibile insegnare la teoria dei frattali nel livello medio superiore, poiché i contenuti sono ben oltre, tuttavia è possibile per lo studente acquisire una leggera nozione che gli permette di conoscere intuitivamente cosa sia questo bellissimo oggetto matematico.

Nei primi due capitoli viene introdotta l'idea dei frattali, prima in natura e poi come oggetto geometrico, viene addirittura mostrato come anche nelle malattie compaiono. Una prima approssimazione viene data usando l'idea di autosimilarità, che si riferisce ad una caratteristica geometrica di una parte che è come l'insieme.

Nel terzo capitolo viene introdotta l'idea di dimensione e viene calcolata la dimensione di alcuni frattali classici, permettendo una seconda approssimazione alla loro definizione. Il capitolo 4 è un modo diverso di affrontare i frattali, utilizzando la crescita delle piante per capire il comportamento frattale.

I capitoli 5 e 6 introducono il linguaggio delle funzioni tra numeri complessi, che serve a descrivere due esempi molto importanti di frattali: l’insieme di Julia e l’insieme di Mandelbrot.

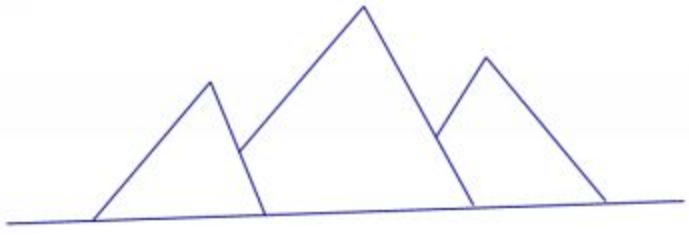
Concludiamo il libro con una galleria di frattali, in modo che il lettore possa godere della bellezza di tali oggetti matematici.

E. Grothendieck

Città del Messico, gennaio 2020.

Capitolo 1. Una nuova geometria

La geometria che ci viene insegnata nell'educazione di base non è sufficiente a rappresentare l'ambiente che ci circonda. Per esempio, se volessimo rappresentare una montagna, potremmo farlo così:



Ma è evidente che la precedente rappresentazione astratta è molto lontana da ciò che è realmente una montagna, come si può vedere nella seguente

immagine del monte Éverest:



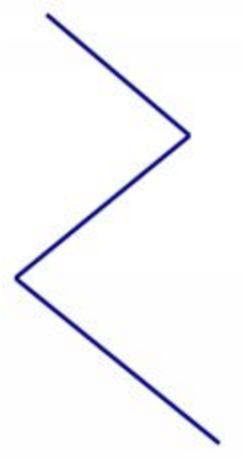
Oppure che ne dite di un uccello, potremmo anche usare alcune linee per disegnarlo:



Ma ancora una volta, questa rappresentazione è molto, molto lontana dalla realtà:



Comunque, un fulmine potrebbe rappresentare qualcosa del genere:



Ma la realtà è di nuovo lontana:



Le nostre rappresentazioni con linee rette possono essere utilizzate per rappresentare con simboli per esprimerci in astratto. Non ci vuole un genio per capire che le montagne o un uccello sono strutture più complesse e poche righe non le rappresentano nella loro interezza.



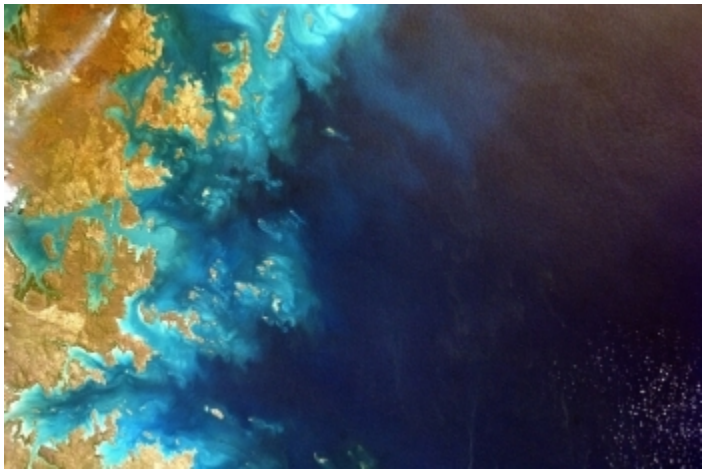
Sebbene la geometria sia nata come strumento che ci permette di capire lo spazio in cui viviamo, le linee rette, i cerchi, i quadrati e i triangoli, sono lontani dal modo in cui la natura crea le cose.

Un problema classico che la maggior parte degli oggetti sono più complicati di quanto la geometria classica ci permetta di fare è quello di misurare la lunghezza di una costa.

Consideriamo la seguente immagine di una costa:



Oppure, la prossima costa:



Pensate un po', come potreste misurare la lunghezza di quelle coste? Per esempio, se la costa fosse qualcosa di più semplice, come qualcosa fatto di poche righe:



Allora misurare la costa sarebbe molto facile, sarebbe sufficiente misurare la lunghezza di ogni linea e poi sommare ogni misurazione. Ma come si può facilmente vedere dalle immagini, le coste non sono così semplici.

Ci sono diversi esperimenti per determinare la sua lunghezza. Per esempio, possiamo prendere una bussola con un'apertura fissa, diciamo che misura ε. Ora, usiamo la bussola e la collochiamo lungo la costa. Il numero di volte in cui lo mettiamo moltiplicato per ε ci darà un'approssimazione della lunghezza della costa.

$$L(\varepsilon) = linea\ di\ costa \\ = ddi\ volte\ abbiamo\ messo \\ la\ bussola\ moltiplicata\ per\ \varepsilon$$

Ora, il calcolo di cui sopra sarà un'approssimazione del valore della lunghezza, che possiamo affinare prendendo misure di apertura della bussola sempre più piccole. I calcoli per comprendere questa funzione sono abbastanza sofisticati e non è nostra intenzione studiarli, invece, quello che vogliamo mostrare è un esempio interessante che ci aiuterà a comprendere le idee generali. Lewis Fry Richardson ha scoperto che la nostra funzione è simile alla seguente:

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}$$

Dove il valore α dipende dalla costa che scegliamo. La cosa interessante è che quest'ultimo valore ci dà una prima approssimazione per capire la complessità delle nostre figure geometriche, come se questo valore misurasse quanto sono ruvide, in alcuni testi hanno definito una tale esponente della dimensione frattale di un oggetto, ma lo studieremo con un po' più di dettaglio.

Come dicevo, gli oggetti in natura sono difficili da descrivere usando solo linee o cerchi, perché hanno troppa "rugosità". Ad esempio, l'immagine seguente corrisponde ad un broccolo:



E come si può chiaramente vedere la parte superiore è molto ruvida, anche se mostra una caratteristica interessante. Se dovessimo dividere quel broccolo in due, entrambe le parti sarebbero molto simili. Quando studieremo con un po' più di formalità vedremo che questa caratteristica (quella che una parte assomiglia all'insieme) è molto importante e si chiama **autosimilarità** .

Anche le nuvole sono molto ruvide:



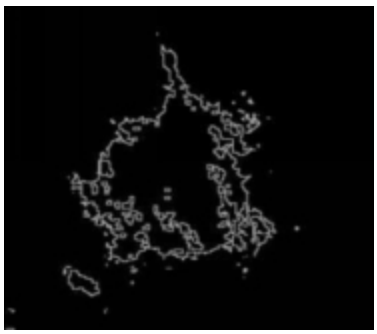
E come i broccoli, se prendiamo una parte della nuvola, sembra l'intera nuvola. Vediamo altri esempi di questo:





Come si può vedere, se si dovesse ingrandire una parte dell'immagine della pianta, essa assomiglierebbe all'intera immagine.

E questa forma è continuamente presente in natura, anche nelle malattie, qui abbiamo l'immagine evidenziata del confine del cancro al seno:

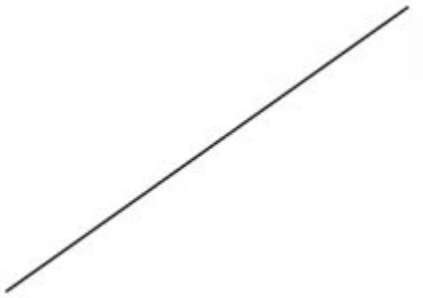


Un'immagine che sembra il confine di un'isola. O in quello successivo, abbiamo i vasi sanguigni:

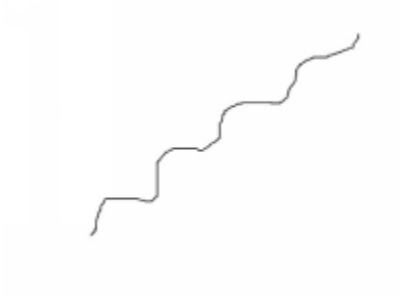


Come dimostra l'esempio della spiaggia, la comprensione di questi oggetti con maggiore precisione richiede una geometria più sofisticata di quella fornita dalla geometria euclidea. In questo libro si parlerà di un modo di comprendere questi oggetti, che è conosciuto matematicamente come frattali e che ci permette di modellare vari fenomeni in natura e che, quindi, hanno avuto grandi applicazioni. La creazione di effetti speciali nei film è uno di questi, le grandi battaglie, i pianeti, lo spazio, tutti questi sono esempi di frattali che si possono vedere nei film grazie alla matematica.

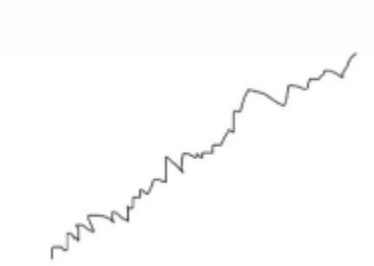
Ma non solo negli effetti speciali i frattali hanno applicazioni, anche in medicina. Il cancro al seno è una malattia comune nelle donne, statisticamente il rischio di sviluppare tale patologia è di 1/8, che è una cifra molto alta. Detto questo, la mammografia è lo strumento più efficace per l'individuazione e la diagnosi tempestiva di lesioni al seno. Negli ultimi anni ha avuto luogo un movimento scientifico per sviluppare la Diagnosi Computerizzata della Mammografia (CADM). Uno dei componenti più importanti in un CADM è la possibilità di classificare la lesione, e studi recenti hanno dimostrato che la dimensione frattale (un modo di misurare la rugosità degli oggetti) può essere utile per una tale situazione. Intuitivamente, la dimensione frattale misura la complessità di un oggetto, per esempio, una linea ha una dimensione frattale pari a 1:



La seguente curva ha una dimensione frattale pari a 1,27:

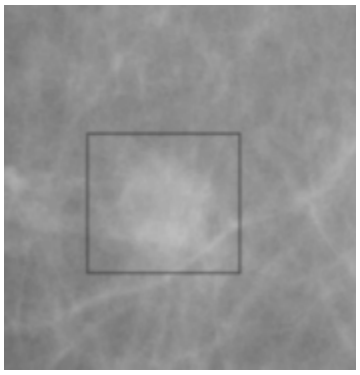


E il successivo ha una dimensione frattale pari a 1,46:



Inoltre, è stato trovato un modo per simulare un'immagine del tessuto del seno usando i frattali, così con l'immagine tomografica possiamo ottenere una dimensione frattale associata a quell'immagine. Inoltre, è stato scoperto che il radiologo quando osserva le anomalie mammografiche vede che il contorno è molto importante perché un contorno regolare è associato ad un caso benigno, mentre la forma irregolare caratterizza una lesione maligna. La procedura del radiologo sarà la seguente:

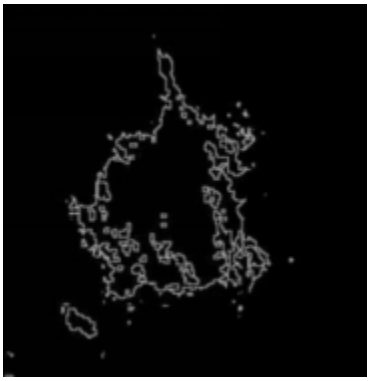
1. Prima con la TAC si individua un'anomalia:



2. L'immagine viene scansionata alla soglia di 1-255 livelli di grigio; i pixel il cui livello di grigio è maggiore o uguale alla soglia vengono trasformati in pixel bianchi, gli altri in neri:



3. Il contorno viene tracciato automaticamente. Una volta che l'immagine è binaria, viene tracciato uno schizzo delle aree bianche:



4. Si calcola la dimensione frattale del contorno.

La ricerca ha dimostrato che le lesioni benigne hanno dimensioni frattali inferiori, tra 1-1,50 e quelle maligne sono tra le dimensioni 1,5-2. L'obiettivo è quindi quello di progettare macchine in grado di misurare efficacemente la dimensione frattale del cancro e quindi di determinare la gravità della lesione.

Le aziende utilizzano anche i frattali. Alcune caratteristiche che questi oggetti hanno è l'autosimilarità, cioè che una parte assomiglia all'insieme. Nel 1992, il Professor Warnecke, presidente del Fraunhofer-Institute for Manufacturing Engineering and Automation (Germania), ha sviluppato il concetto di "fabbrica frattale", come idea filosofica di come dovrebbe essere la gestione di un'azienda.

La fabbrica frattale è definita come un insieme di entità autonome che condividono conoscenze, risorse e collaborano tra loro, se pensiamo al broccolo che è un chiaro esempio di autosimilarità, ogni parte del broccolo rappresenterebbe un'entità autonoma, che insieme alle altre forma il mio broccolo completo. In questo modo la collaborazione tra queste entità autonome massimizza le capacità e permette ad ogni entità di comprendere i propri obiettivi specifici contribuendo agli obiettivi generali.

Come possiamo vedere, in natura ci sono oggetti la cui forma è ruvida e complicata, non sono triangoli o quadrati o cerchi. E tra tutti gli oggetti in natura, ce ne sono alcuni che hanno una qualità interessante, autosimilarità. Vedremo nei capitoli seguenti come è questa proprietà e come sono gli oggetti che vi si conformano.

Capitolo 2. Autosimilarità e frattali classici

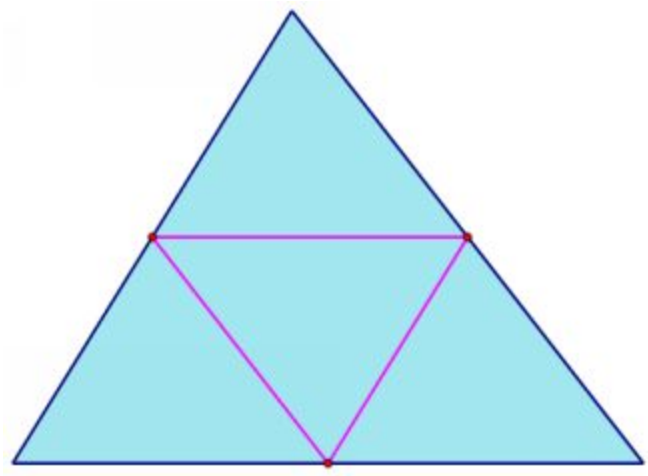
Gli oggetti che studieremo sono noti come **frattali** . Non è nostra intenzione dare una definizione precisa di ciò che sono, poiché per ottenerlo avremmo bisogno di un linguaggio più sofisticato, ma studieremo due idee che li caratterizzano: l'autosimilarità e la dimensione frattale.

L' **autosimilarità** si riferisce a una caratteristica geometrica di "una parte che è come l'insieme". Nel capitolo precedente abbiamo visto alcuni oggetti che presentano questa caratteristica, come i broccoli. Studieremo diversi esempi per dare al lettore un'idea di cosa sia l'autosimilarità. Inizieremo con la costruzione di alcuni esempi classici di frattali.

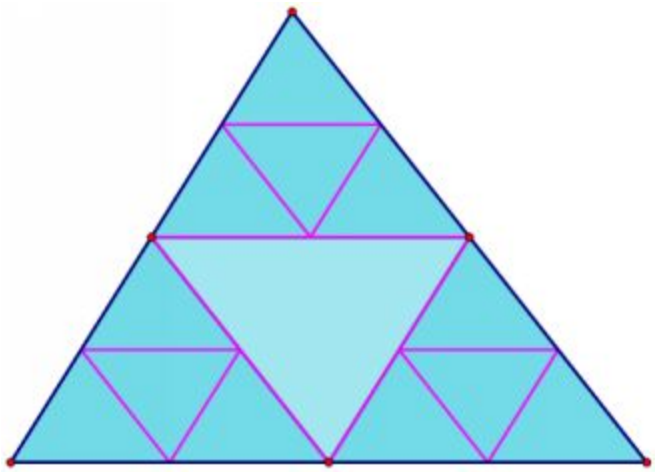
Il triangolo di Sierpinski

Questo frattale prende il nome dal matematico polacco Waclaw Sierpiński (1882-1969).

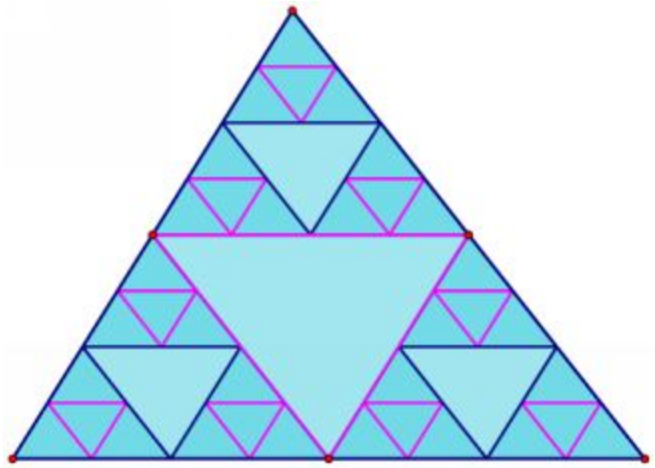
Prendere un triangolo qualsiasi e fare la seguente costruzione: prendere il punto medio di ogni lato e unire i punti con segmenti di linea, formando così quattro triangoli congruenti all'interno del triangolo originale, rimuovere il triangolo medio:



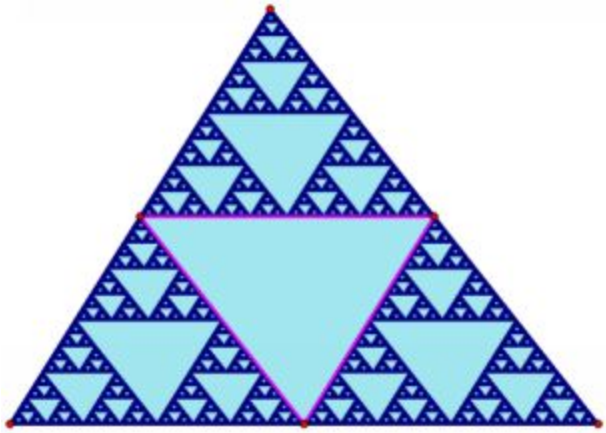
Poi ripetiamo il processo, cioè eseguiamo la costruzione precedente con ciascuno dei tre triangoli congruenti all'interno del triangolo originale; abbiamo la seguente figura:



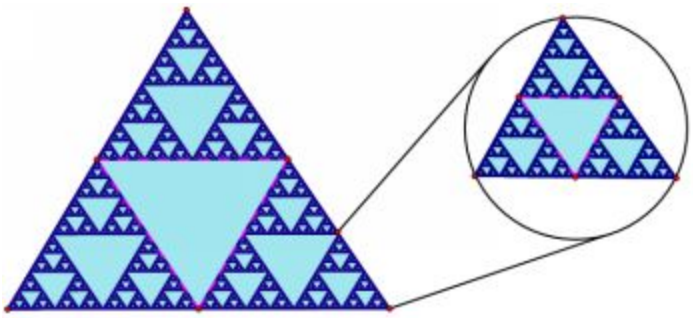
L' **iterazione** (ripetere i passi) è una parte importante di un frattale, infatti, in un frattale pensiamo che l'iterazione sia ancora eseguita all'infinito. Nella prossima tappa del triangolo di Sierpinski avremo:



Se continuiamo ad iterare avremo una figura simile alla seguente:



L' **autosimilarità** si riferisce alla proprietà che alcune figure hanno nel ripetersi in ciascuna delle loro parti, ad esempio nel triangolo di Sierpinski, se " **ingrandiamo** " un triangolo più piccolo vedremo che ha la "stessa forma" dell'originale.



Un altro modo per costruire il Triangolo di Sierpinski è il Triangolo di Pascal.

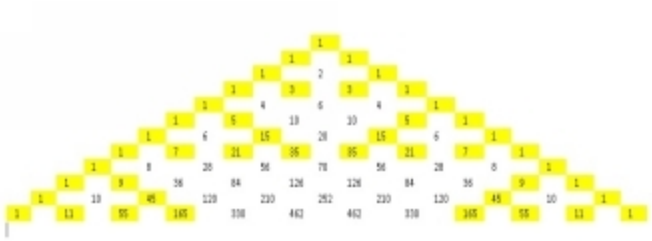
Ricordiamoci della costruzione di questo triangolo: Prima si prende un numero 1, poi nella riga successiva se ne mettono due lasciando uno spazio tra di loro, nella riga successiva se ne mettono di nuovo due lasciando ora tre spazi tra di loro e nello spazio centrale si mette la somma dei numeri della riga precedente che in questo caso è 1+1=2, Per la riga successiva, il processo si ripete, se ne collocano due, passando ora per altri due posti e sotto i numeri della riga precedente si mette al centro la somma dei numeri, in questo caso abbiamo le somme 1+2=3 e 2+1=3, vediamo la procedura qui sotto:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

Questo processo può essere seguito a tempo indeterminato. Ora daremo colore alle caselle dove ci sono i numeri pari e un colore diverso dove ci sono i numeri dispari:



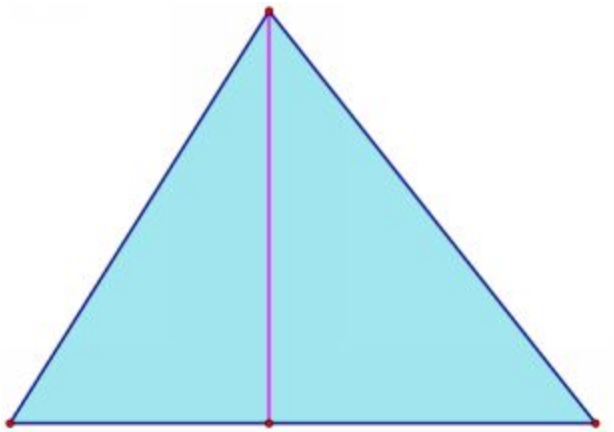
D'altra parte, aggiungendo due numeri pari si ottiene un numero pari, aggiungendo due numeri dispari si ottiene un numero pari e infine aggiungendo un pari con un numero dispari si ottiene un numero dispari, in modo da poter colorare senza scrivere i numeri, quindi avremo la seguente figura:



Osservazione. I frattali hanno caratteristiche particolari che le normali figure non hanno. Guardiamo a qualcosa che sembrerebbe impossibile.

Diamo un'occhiata all'area e al perimetro del triangolo di Sierpinski. Indichiamo il triangolo originale come S_0 e per semplificare un po' i calcoli,

diciamo che il triangolo è equilatero e ogni lato misura 1. Poi l'area di S_0 è base per altezza divisa per 2; usando il teorema di Pitagora si può vedere che l'altezza misura $\sqrt{3}/2$ (lasciato al lettore come esercizio), quindi, bisogna farlo:

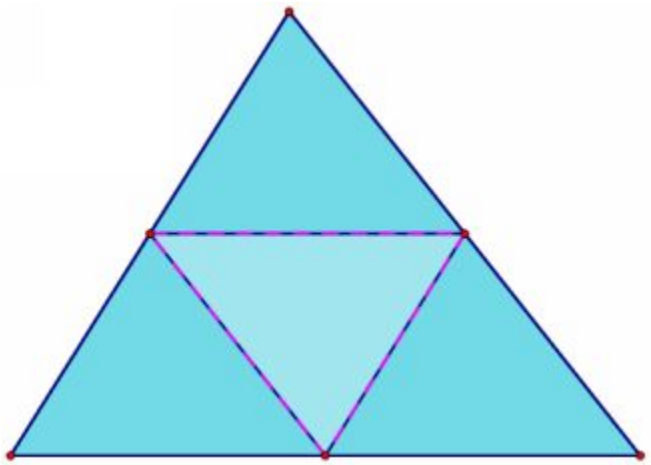


$$a(S_0) = \frac{base\ x\ altezza}{2} = \frac{\frac{1 \times \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ricordate per il calcolo di cui sopra che:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Allo stesso modo si può calcolare l'area della figura seguente, che indichiamo con S_1 :



Osserviamo che questa nuova figura è composta da tre triangoli equilateri congruenti di lato 1/2, l'area di ogni figura è

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Così l'area di S_1 sarà:

$$a(S_1)=\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{16}=3\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Seguendo questa procedura, $S_2,S_3,\ldots,S_n$ può essere calcolato, che viene lasciato al lettore come esercizio.

Allo stesso modo, il perimetro può essere calcolato. Per S_0 è ovvio che il perimetro è:

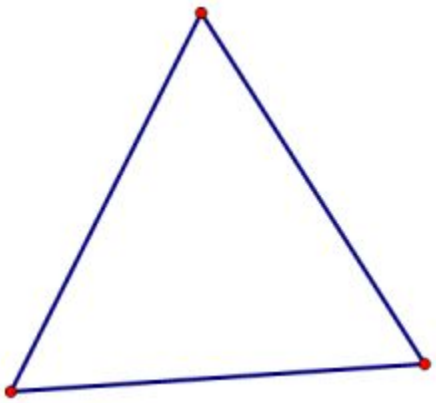
$$p(S_0)=1+1+1=3.$$

Per S_1 ci sono tre triangoli laterali equilateri $(1/2)$, quindi il perimetro di ognuno di essi è di $3\cdot(1/2)$ da dove:

$$p(S_1)=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=9\left(\frac{1}{2}\right)$$

È possibile continuare il processo di calcolo del perimetro di $S_2, S_3, \ldots, S_n$, che viene lasciato come esercizio.

Osservazione. Gli esercizi mostrano che il triangolo di Sierpinski ha un'area zero e un perimetro infinito. Avevate mai immaginato che esistesse una cosa del genere? Qualcosa senza area, ma con un perimetro sempre più ampio? Per capire quanto sia raro, immaginate un triangolo:



Ha ovviamente superficie, lo spazio che occupa all'interno delle linee, e il suo perimetro è la somma dei lati. Quindi, chiedo di nuovo, come sarebbe non avere un'area? Forse la prima cosa che viene in mente è pensare a un triangolo che diventa sempre più piccolo, in modo che anche la sua area diventi sempre più piccola, ma il triangolo di Sierpinski non diventa più piccolo, e la sua area sì. Ecco quanto è interessante questo oggetto geometrico.

Esercizio. Utilizzando il teorema di Pitagora trovare l'altezza di un triangolo equilatero del lato 1.

Esercizio. Calcolare l'altezza dei triangoli che appaiono in ogni fase della costruzione del triangolo di Sierpinski.

Esercizio. Con l'esercizio precedente calcolare l'area di ogni fase della costruzione del triangolo di Sierpinski.

Esercizio. Calcolare il perimetro di ogni fase della costruzione del triangolo di Sierpinski

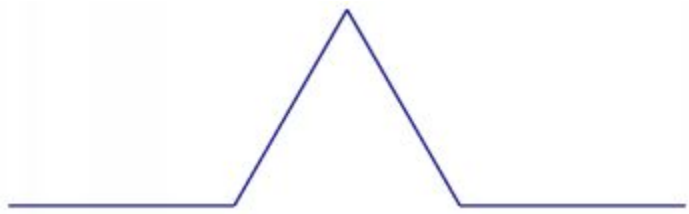
Esercizio. Se il lettore è a conoscenza del calcolo dei limiti e delle serie, con gli esercizi di cui sopra può dimostrare che il triangolo di Sierpinski ha un'area zero e un perimetro infinito!

Continuiamo a vedere altri esempi di Frattali:

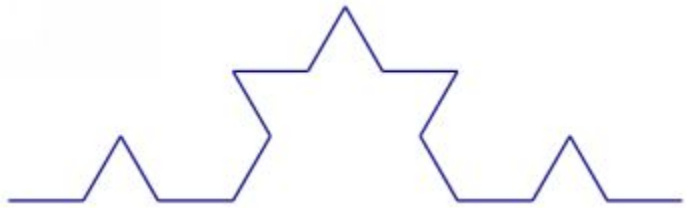
Curva di Koch

Prendiamo un segmento rettilineo e dividiamolo in tre parti uguali:

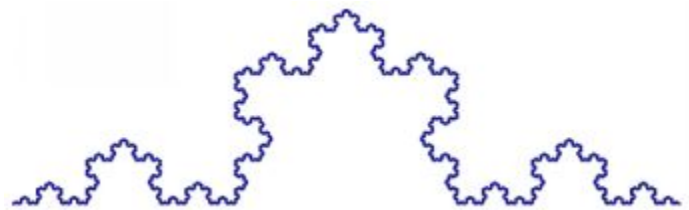
Poi, nella sezione centrale costruiamo un triangolo equilatero con quella parte come base e cancelliamo la base:



L'iterazione in questo caso è quella di ripetere la procedura in ciascuno dei quattro nuovi segmenti:



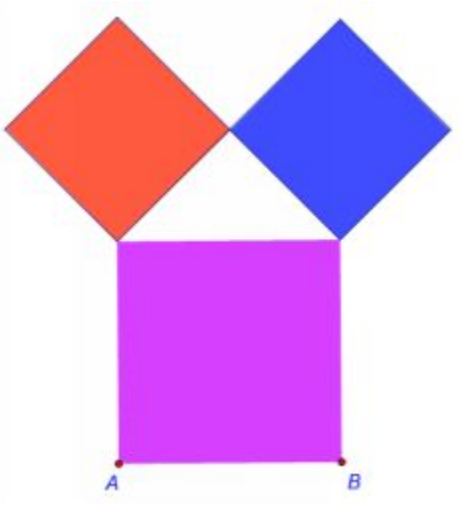
Proseguendo con la procedura avrete una figura come quella qui sotto:



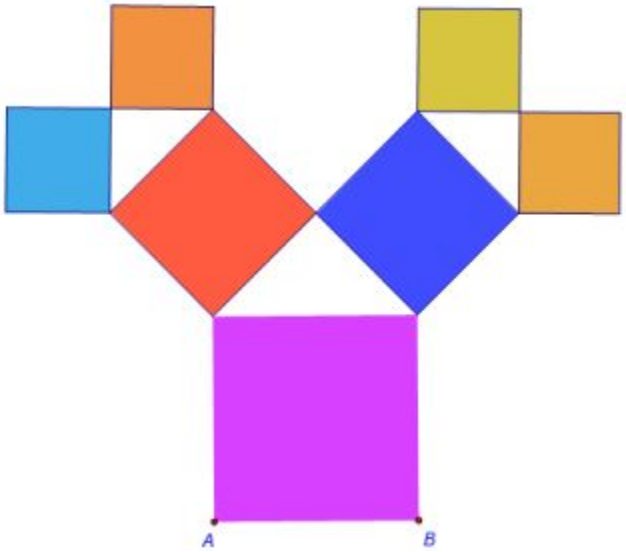
Anche in questo caso se guardiamo una delle parti della curva di Koch è simile alla figura originale, cioè ha la proprietà di auto-similarità.

Albero Pitagorico

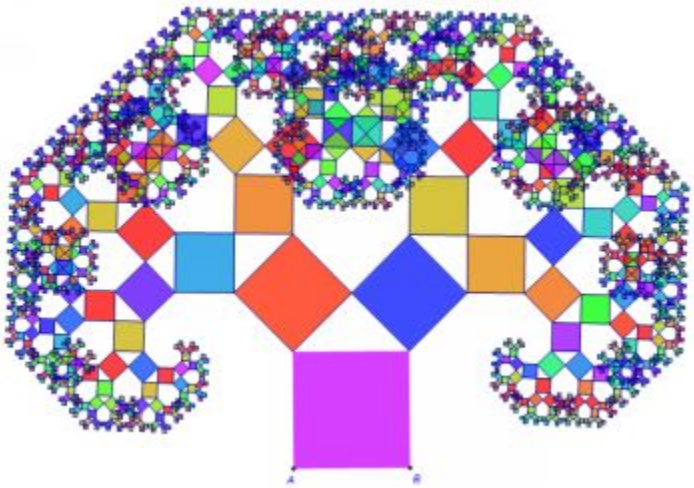
Continuiamo con un altro esempio di frattale che può essere costruito con geometria elementare, questo frattale è chiamato albero pitagorico e segue un modello simile alla crescita delle piante. Si parte da un quadrato in cima al quale si disegna un triangolo destro con un lato come ipotenusa; ci sono due varianti una può essere che il triangolo destro sia equilatero e l'altra è che non lo sia, in ogni caso si ottengono frattali che hanno un aspetto diverso, ma entrambi simulano la crescita di una pianta. Poi in ogni lato del triangolo di destra si disegnano dei quadrati, nella figura seguente viene mostrata la procedura:



L'iterazione ora è di eseguire di nuovo la costruzione in ciascuna delle nuove piazze:



Continuiamo in questo modo con l'iterazione, ottenendo una figura come la seguente:



Insieme di Cantor

Forse non è un esempio molto appariscente, ma ha molte applicazioni importanti. Per la sua costruzione iniziamo con un segmento rettilineo, diciamo di lunghezza 1:



Dividiamo quindi il segmento in tre parti uguali e rimuoviamo la parte centrale:



Continuiamo a fare questa procedura a tempo indeterminato, nella figura seguente mostriamo il terzo passo:



Come dicevo, questo frattale non è così appariscente, tuttavia, ha applicazioni e proprietà interessanti, ad esempio, il set cantore ha lunghezza zero, indichiamo da $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ ognuno dei passi della costruzione dell'insieme di Cantor, quindi abbiamo le seguenti lunghezze (ricordiamo che è diviso in tre parti uguali e quello al centro viene rimosso):

C_n	Lunghezza di C_n
C_0	1
C_1	$\frac{2}{3}$
C_2	$\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$
...	
C_n	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

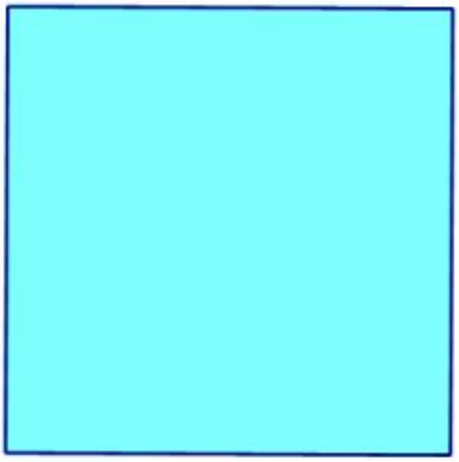
Quindi più grande è n, più piccolo è il valore della lunghezza di C_n , e al limite dovrebbe essere zero.

Un problema che affliggeva le compagnie telefoniche era il rumore. Potevano attenuarlo amplificando il segnale, ma apparivano sempre delle

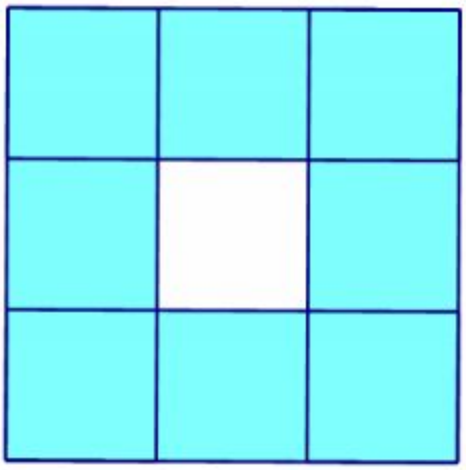
interferenze. Così Mandelbrot ha ideato un metodo che descriveva la cattiva distribuzione del flusso di informazioni. Ha capito che esiste una relazione tra i periodi di errore e i periodi di trasmissione pulita, data proprio da insiemi di Cantor.

Cartella di Sierpinski

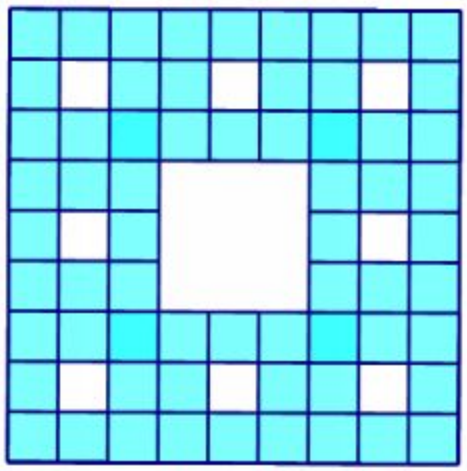
Iniziamo con un quadrato, che indicheremo con C_0 :



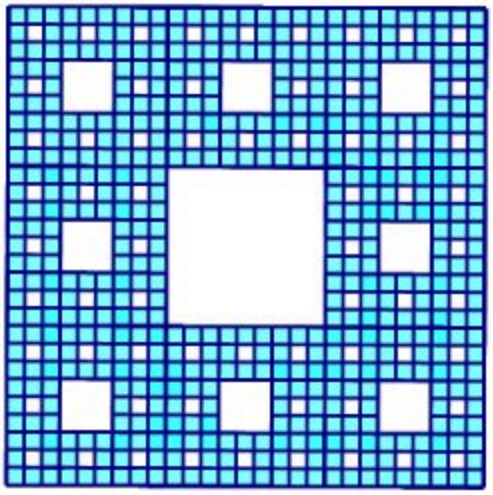
Ora dividiamo ogni lato del quadrato in tre parti uguali, uniamo le linee per formare nove quadrati congruenti e togliamo quello centrale, questo che indichiamo con C_1 :



Rha ripetuto la costruzione precedente in ciascuno degli otto riquadri rimanenti, ottenendo la figura C_2 :



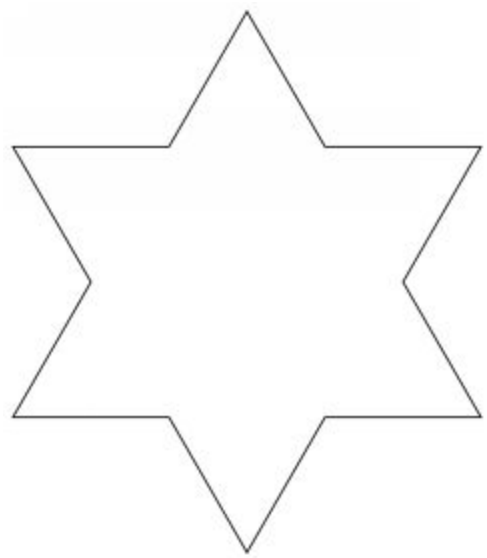
Continuiamo questa procedura a tempo indeterminato, ottenendo il frattale noto come cartella di Sierpinski:



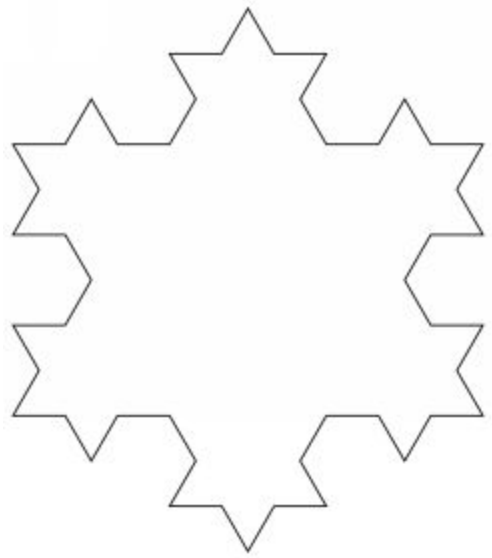
Isola di Koch

Il frattale successivo è una variante della curva di Koch.

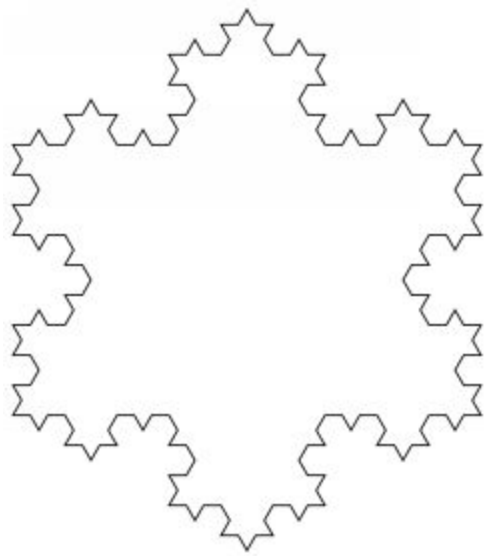
Iniziamo con un triangolo equilatero. Ora facciamo la stessa costruzione della curva di Koch su ogni lato del triangolo. Cioè, dividiamo ogni lato in 3, togliamo la parte centrale e costruiamo un triangolo equilatero, senza la base, nella parte centrale e con una misura di un terzo del lato:



Ora abbiamo nove segmenti, applichiamo di nuovo la costruzione in questi e otteniamo:

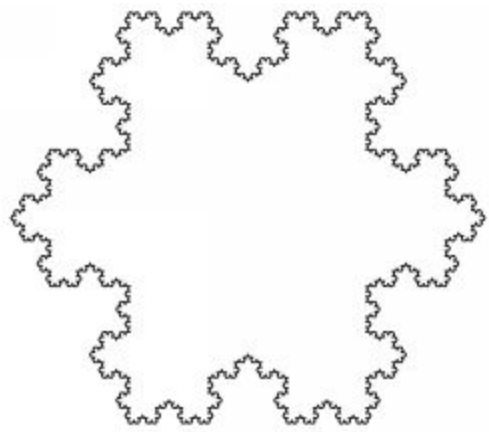


Ora abbiamo 27 segmenti e ripetiamo il processo:



Il processo continuerà all'infinito, la curva che si ottiene alla fine è conosciuta come l'isola di Koch per la sua grande somiglianza con un'isola, anche se è conosciuta anche come fiocco di neve di Koch.

Vediamo la costruzione dopo sei passi:



Frattale di Lévy

Come avrete notato, si inizia con una regola, poi si ripete il processo più e più volte. La ripetizione è nota come iterazione, più tardi spiegheremo l'idea in modo più preciso usando il linguaggio delle funzioni, mentre, quando parleremo di iterazione penseremo a ripetere la procedura.

In questo caso, la nostra regola è quella di prendere un segmento di linea e il centro, quindi sostituirlo con due segmenti, ognuno dei quali è grande la metà dell'originale, collocarli al centro a 45 gradi dal primo e a 90 gradi l'uno dall'altro:

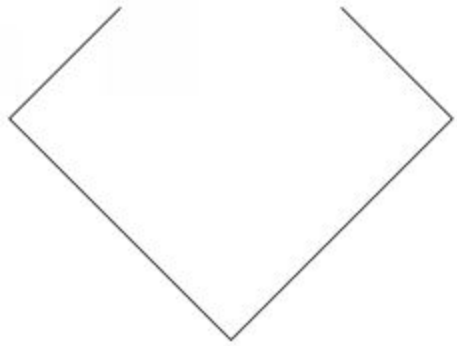


Nella figura sopra, a sinistra si trova il segmento originale e a destra la regola con cui viene sostituito.

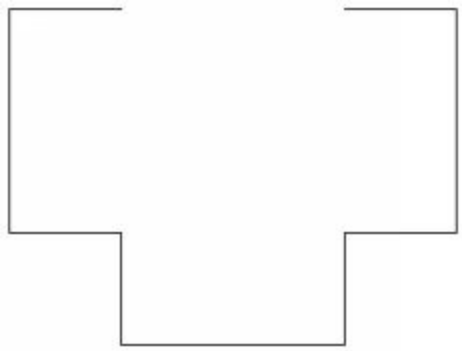
Ora andiamo avanti con la costruzione. Iniziamo con un segmento di linea, lo prendiamo come ipotenusa di un triangolo isoscele destro e lo sostituiamo con le due gambe del triangolo. E' così che l'abbiamo:



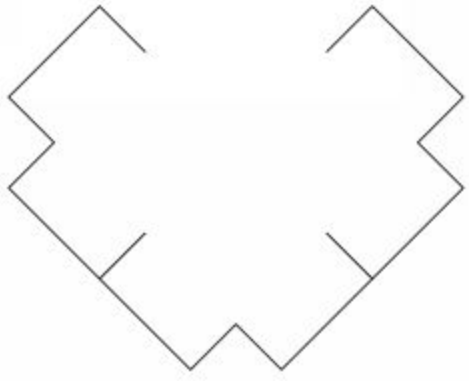
Nella fase successiva ripetiamo la regola e abbiamo



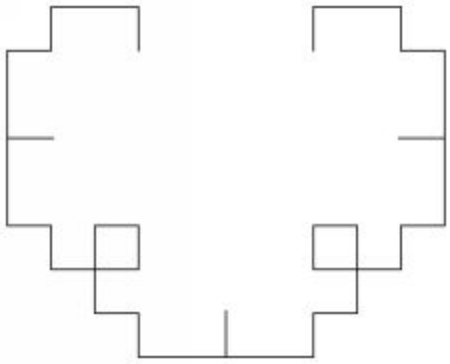
Nella fase successiva abbiamo:



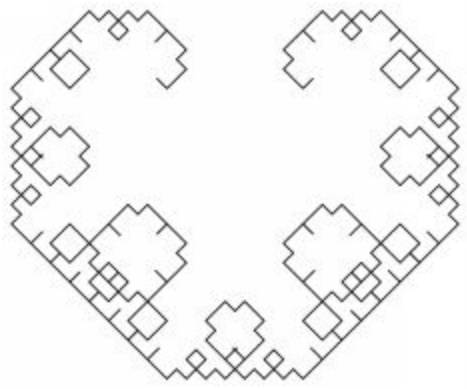
Allora l'abbiamo fatto:



Il prossimo passo è questo:



E così continueremo all'infinito. Nella foto seguente mostriamo la costruzione dopo sette passi:

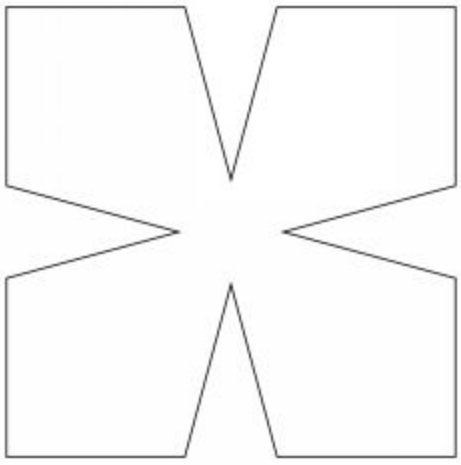


Frattale di Cesáro

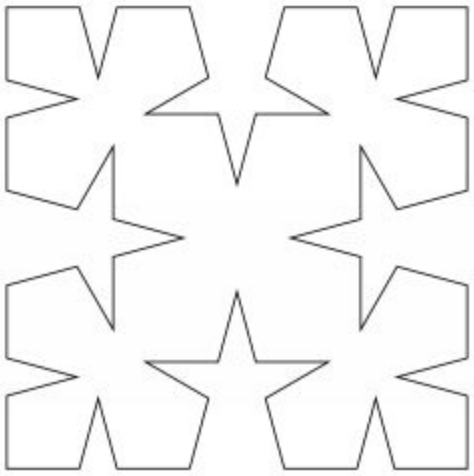
In questo caso si tratta di una costruzione simile alla curva di Koch. Prendiamo un segmento e rimuoviamo una parte al centro, poi costruiamo un triangolo isoscele nella parte che abbiamo rimosso, senza prendere la base. Di seguito è riportato un esempio della regola da seguire:



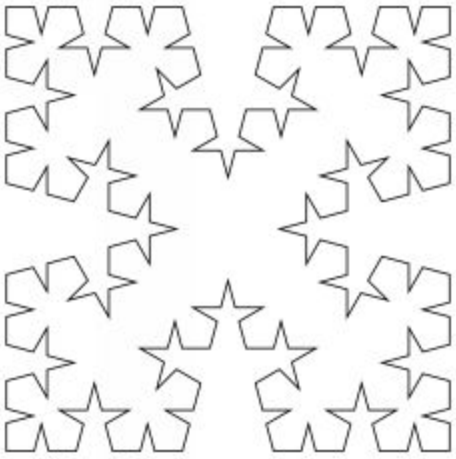
Nella figura sopra, il primo è il segmento originale e il secondo è il segmento su cui costruiamo un triangolo isoscele. Per costruire il nostro frattale iniziamo con un quadrato e su ogni lato applichiamo il righello, così abbiamo nel primo passo



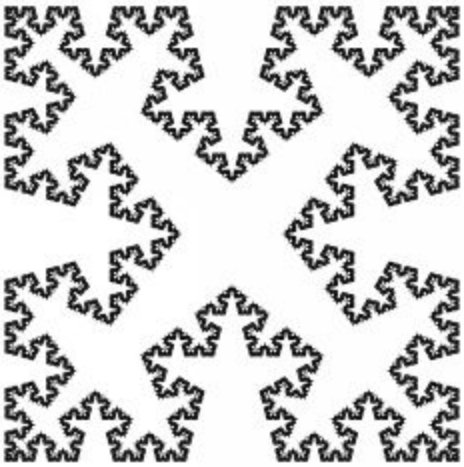
Ripetiamo il processo su ciascuno dei 16 nuovi segmenti:



Torniamo ad applicare la regola:

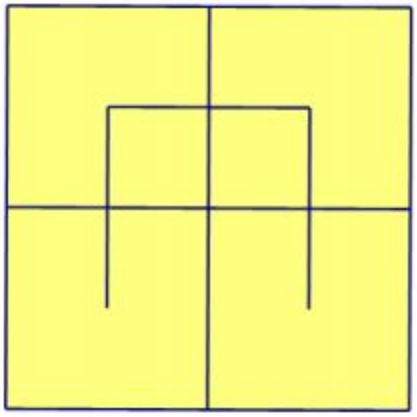


Il frattale di Cesáro sarà la figura che si ottiene seguendo questa regola all'infinito. Qui ho la costruzione dopo sei passi:

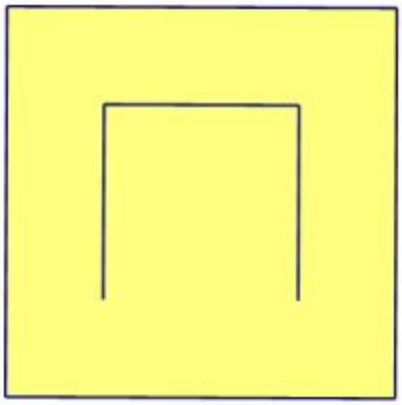


La curva di Hilbert

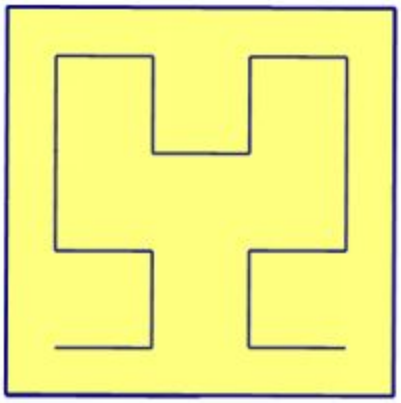
Per la costruzione di questo frattale si parte da un quadrato diviso in quattro quadrati uguali e si prende quello poligonale che unisce i centri nel modo seguente:



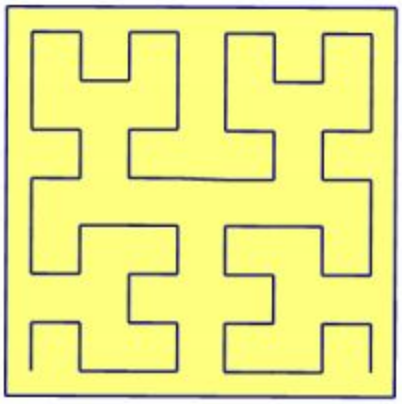
Anche se abbiamo mantenuto solo la poligonale, abbiamo rimosso i lati dei quattro quadrati uguali:



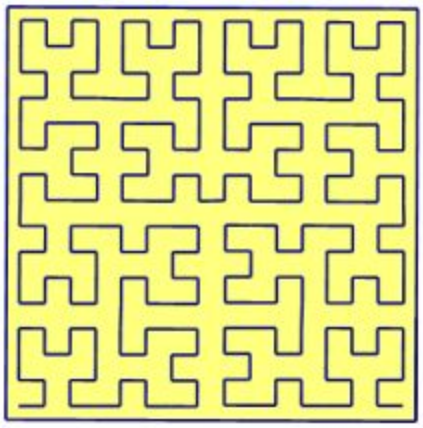
Poi, prendiamo quattro copie a metà, le mettiamo insieme per formare di nuovo il quadrato originale, ma ruotando quelle inferiori di 90 gradi, una a sinistra e l'altra a destra e uniamo i poligoni risultanti ottenendo la seguente figura:



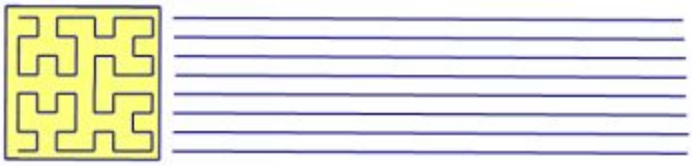
Ripetiamo il processo e otteniamo:



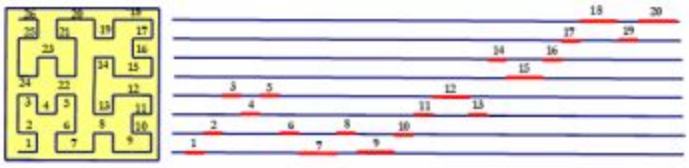
E continua in questo modo a tempo indeterminato. La curva finale ha la proprietà di passare attraverso tutti i punti di quadrato. Ora, per i nostri scopi, prendiamo il primo quadrante nella parte successiva della curva di Hilbert:



Questa curva ha un'applicazione nella musica. Prendiamo le linee parallele secondo la figura seguente:



Ora "srotoliamo" i segmenti verticali della curva su queste linee, proprio come si può vedere nell'immagine qui sotto:



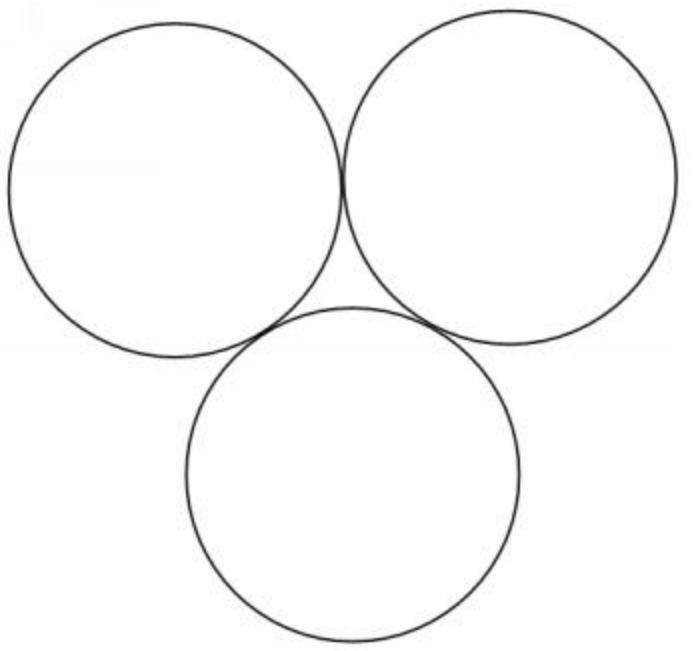
Infine, associamo a ciascuna di queste righe una delle note C, D, E, E, F, G, A, B, e i segmenti brevi con note di durata (1/4), così i segmenti lunghi avranno durata di (2/4) e poi otteniamo il prossimo pentagramma:



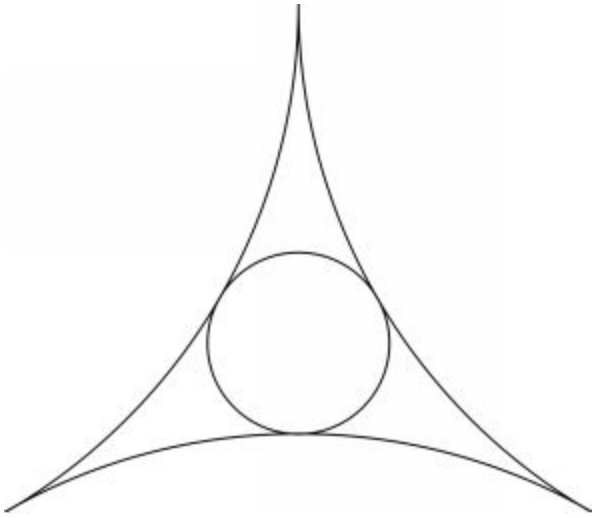
La stessa procedura viene proseguita nel blocco successivo della curva di Hilbert e si ottiene un bel pezzo di musica.

Cerchi di Apollonio

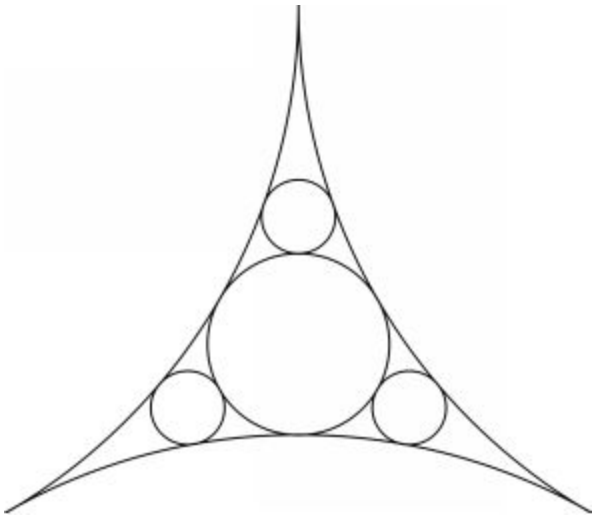
Per costruire questo frattale iniziamo con tre cerchi che toccano tangenzialmente e hanno lo stesso raggio:



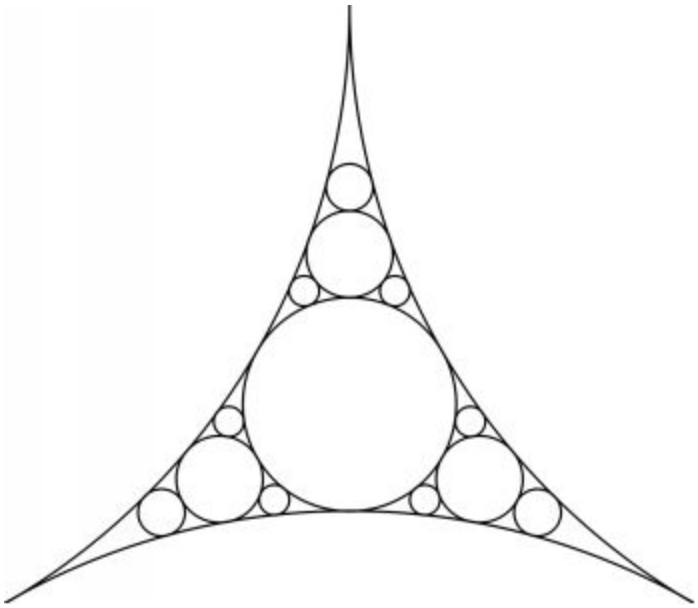
Osserveremo la parte dell'aereo che si trova al di fuori dei cerchi, proprio dove si intersecano. Lì si costruisce un nuovo cerchio che tocca tangenzialmente gli altri tre:



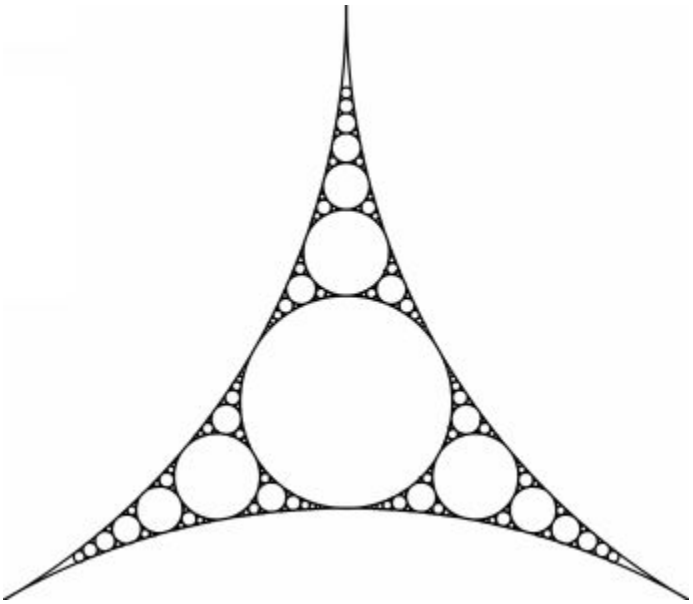
Ripetiamo il processo nelle tre nuove parti del piano che si formano:



Il passo successivo è il seguente:

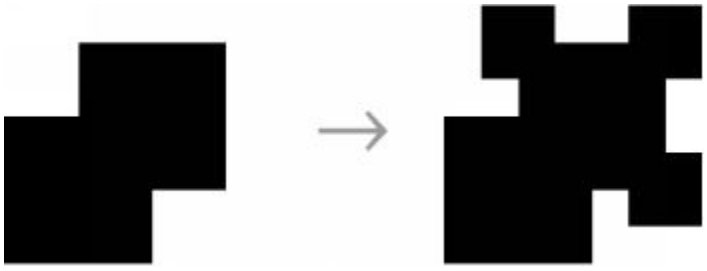


Qui abbiamo la figura dopo sette passi:

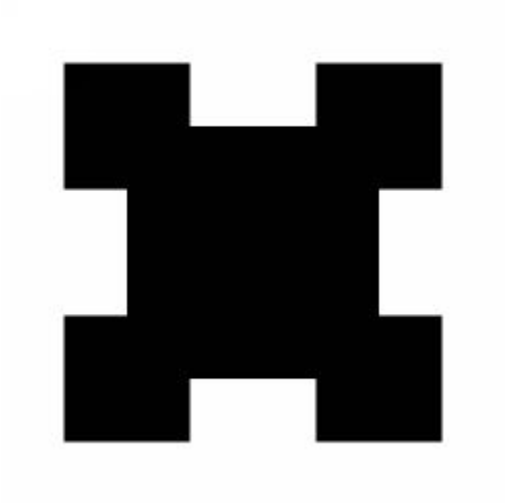


T-quadrato

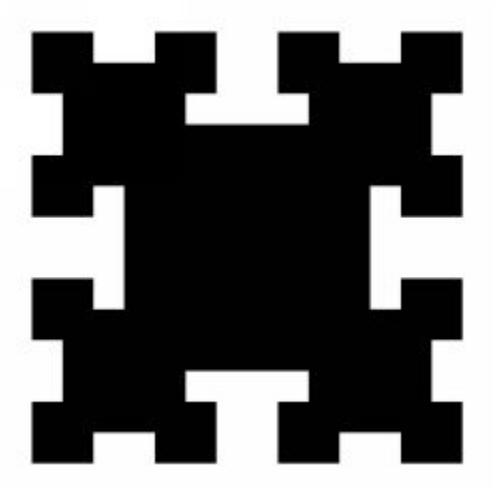
Cominciamo con la nostra regola:



Quindi il nostro primo passo è:



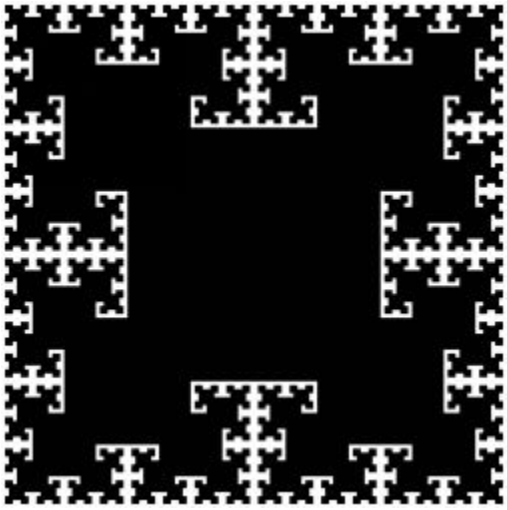
Applichiamo di nuovo la regola e abbiamo:



Il prossimo sarà:

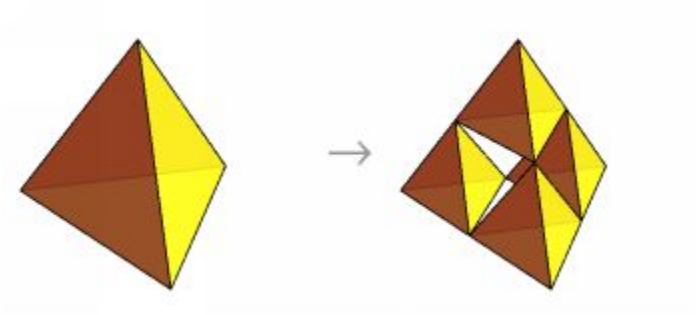


E poi:

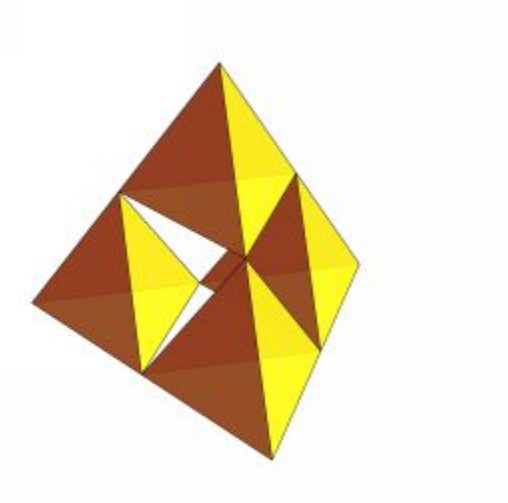


Tetraedro di Sierpinski

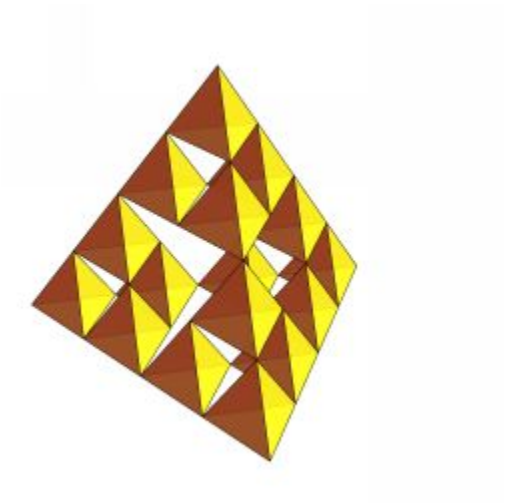
Questa costruzione è simile a quella del triangolo di Sierpinski, tranne che in questo caso si utilizza un tetraedro come punto di partenza, i lati sono divisi in due e un tetraedro viene rimosso dal centro della figura. Quindi la regola ricorrente è:



Il primo passo sarà:



Il passo successivo:



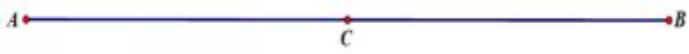
Il prossimo sarà:



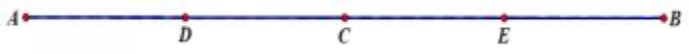
E così va avanti all'infinito.

Capitolo 3. Dimensione frattale

Osservazione. Come si può vedere nei precedenti esempi di frattali, l'autosimilarità è una parte essenziale, tuttavia non è l'unica che distingue i frattali, infatti, ci sono elementi della geometria euclidea che hanno autosimilarità, ad esempio, un segmento di linea può essere visto come due segmenti congruenti, ma più piccoli:



Nella figura sopra, il segmento AB è diviso in due segmenti più piccoli AC e DC, dove C è il punto medio di AB. La procedura può essere eseguita di nuovo e noi l'avremmo fatto:

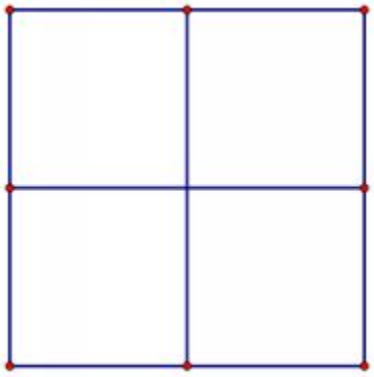


Ora D ed E sono i punti medi dei segmenti AC ed EF. Se continueremo la procedura a tempo indeterminato avremo anche una figura con autosimilarità, ma, di fatto, avremo la stessa figura con cui abbiamo iniziato; il segmento di linea AB. Lo stesso può essere fatto per un quadrato o un cubo.

Osservazione. Vediamo come si può "misurare" l'autosimilarità.

1. Nel caso di un segmento di linea, si inizia dividendolo in due parti uguali, in modo che ogni nuovo segmento sia in rapporto 1:2, cioè che ognuno di essi sia grande la metà dell'originale o che l'originale sia grande il doppio di quelli piccoli. Allo stesso modo, il numero di "ingrandimenti" deve essere uguale al numero di copie. Nella fase successiva, dividendo ogni segmento di nuovo in due, si ottengono quattro segmenti e ora l'originale è quattro volte più grande dei segmenti piccoli, così si ha di nuovo che il numero di ingrandimento è uguale al numero di copie. In generale, se si continua con la procedura il numero di ingrandimenti (diciamo n) è pari al numero di copie (diciamo N).

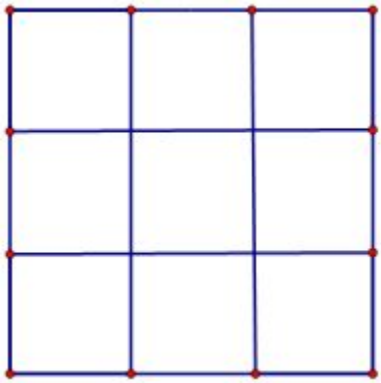
2. Nel caso di un quadrato, possiamo iniziare dividendolo in quattro quadrati:



In questo caso il numero di ingrandimenti è di 2 (perché se ingrandiamo un quadrato piccolo fino al doppio della dimensione otteniamo il quadrato grande) e il numero di copie è di 4. Quindi, il numero di estensioni al quadrato dà il numero di copie:

$$2^2 = 4$$

Nel prossimo passo avremo:



Ora il numero dell'allargamento è 3 e il numero di copie è 9. Anche in questo caso, il numero di ingrandimenti al quadrato è pari al numero di copie:

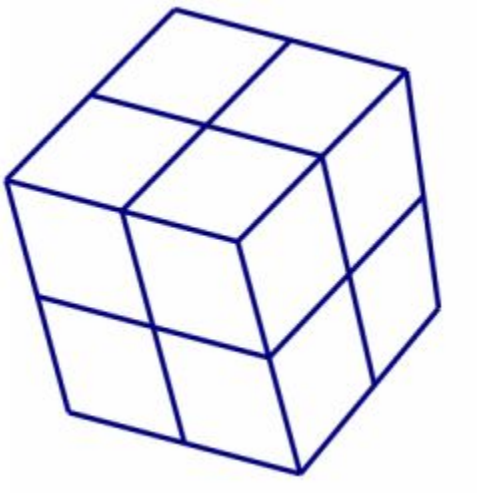
$$3^2 = 9$$

In generale, possiamo dividere il quadrato in un numero di estensione n e il numero di copie sarà n^2, cioè si debe:

$$n^2 = N,$$

Dove N è il numero di copie.

3. Nel caso di un cubo avremo un calcolo simile, possiamo prima dividerlo in 8 cubi con il numero di ingrandimento 2.



Poi possiamo dividerlo in 64 cubi con estensione numero 4, così avrete in questo caso:

$$n^3 = N$$

■

Quanto sopra ci porta a formulare quanto segue:

Definizione. Nella formula:

$$n^D = N$$

Dove n è il numero di ingrandimento e N il numero di copie, chiamiamo D la **dimensione dell'autosimilarità** .

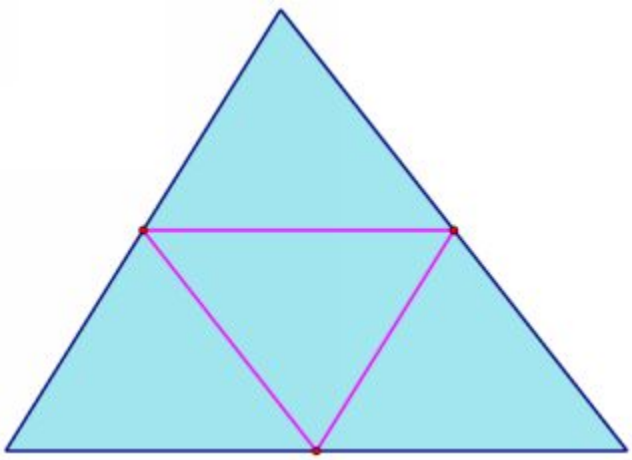
Osservazione. Dalla definizione si evince che il segmento di linea ha una dimensione di autosimilarità pari a 1, il quadrato è uguale a 2 e il cubo è uguale a 3.

Osservazione. È possibile cancellare la formula di cui sopra utilizzando i logaritmi e avere:

$$D = \frac{ln(N)}{ln(n)}$$

Dove N è il numero di copie e n è il numero di ingrandimento.

Osservazione. Applicando la formula di cui sopra al triangolo di Sierpinski abbiamo che il numero di copie è N=3 e il numero di ingrandimenti è n=2:



Allora:

$$D = \frac{ln(3)}{ln(2)} \approx 1.584$$

In altre parole, la dimensione dell'autosimilarità è razionale!

Osservazione. Sulla curva di Koch, il numero di copie è N=4 e il numero di estensione è n=3:



Poi:

$$D = \frac{ln(4)}{ln(3)} \approx 1.2619.$$

Osservazione. Nell'albero pitagorico, se consideriamo che i due quadrati sono uguali, allora secondo il teorema pitagorico il numero di ingrandimento è $n = \sqrt{2}$, perché se c è il lato del quadrato grande e a è il lato del quadrato piccolo, allora

$$c^2 = a^2 + a^2 ,$$

Da dove:

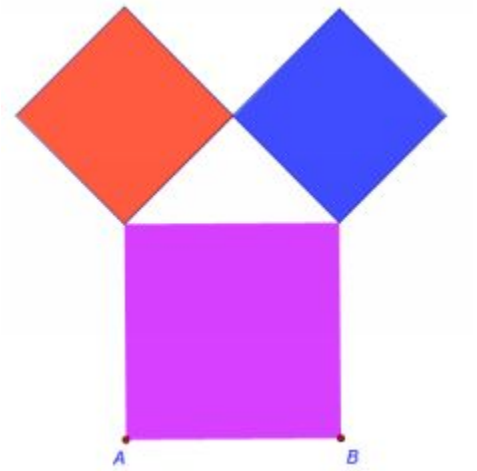
$$c^2 = 2a^2$$

Da qui dobbiamo:

$$\frac{c}{a} = \sqrt{2},$$

Inoltre:

$$N = 2 :$$



Quindi avremo:

$$D = \frac{ln(2)}{ln(\sqrt{2})} \approx 0.49999.$$

Osservazione. I calcoli sopra riportati mostrano che i frattali hanno una **dimensione di autosimilarità frazionaria** . Questo non basta per definire un frattale, cioè non si può dire che un oggetto sia frattale se ha dimensione frazionaria. Tuttavia, ci dà una prima idea di come sono questi bellissimi oggetti.

Capitolo 4. Automi cellulari e sistemi a L

La modellazione della vita non viene lasciata indietro e ci sono diverse teorie che cercano di capire il concetto attraverso il linguaggio matematico. La vita artificiale è un tentativo dell'uomo di modellare e cercare di spiegare la vita creando sistemi artificiali che mostrano il comportamento degli esseri viventi secondo un insieme di regole ottenute per simulazione. Diverse persone hanno studiato queste idee, per esempio Christopher Langtong:

"La vita artificiale è la disciplina che mira a studiare i sistemi creati dall'uomo, sia in un computer che in altri ambienti artificiali, che presentano comportamenti caratteristici degli esseri viventi.

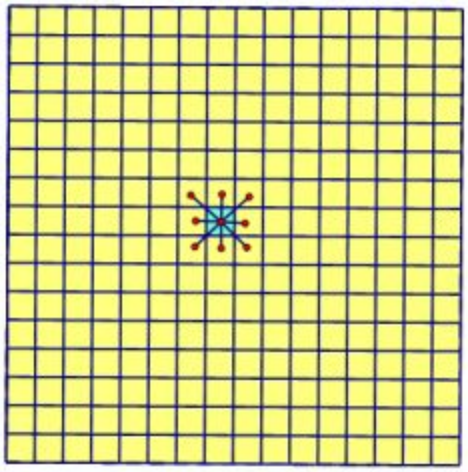
Non cercheremo di trattare temi così profondi, ma come negli altri casi, cercheremo di studiarne alcune idee. Inizieremo con l'idea di un automa cellulare.

Il pioniere dell'informatica, John Von Neummann ha indagato sull'origine della vita e ha cercato di progettare una macchina in grado di riprodursi. Questa idea di riproduzione ha portato Neummann a studiare un sistema chiamato **Cellular Automaton** .

Gli automi cellulari sono sistemi dinamici estesi che consistono in un numero considerevole di componenti semplici e identici con connettività locale, cioè è inteso come un sistema che si evolve nel tempo e nello spazio discreto; composto da un insieme di celle discrete e deterministiche, disposte in fila sia in forma di matrice che in tre dimensioni, che aggiornano i loro stati nel tempo in base agli stati che le celle vicine avevano nell'immediato momento precedente.

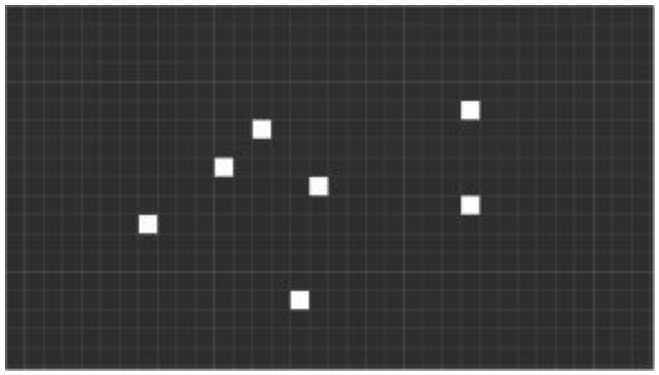
Definizione. La **vicinanza di una cella** coinvolge tutte le celle che la circondano, cioè quelle orizzontali, verticali e diagonali.

Imagen de una vecindad:

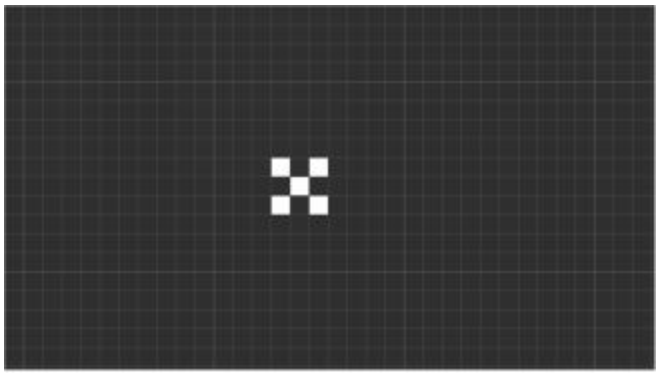


Esempio. Il gioco della vita di Conway . L'automa cellulare più studiato è stato progettato da John Horton Conway nel 1970 ed è conosciuto come il gioco della vita. Si tratta di un automa cellulare bidimensionale in cui ogni cellula può trovarsi in uno dei possibili stati: viva o morta. Si parte da uno stato iniziale e la simulazione fa evolvere l'automa in base alle funzioni di transizione. Le regole sono le seguenti:

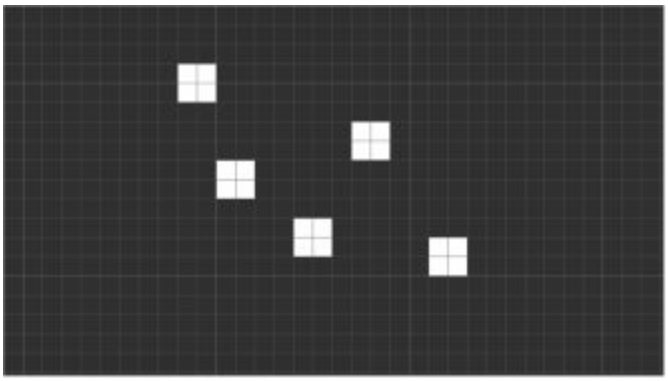
1. La solitudine. Se una cellula vivente è sola o ha un solo vicino, muore. Ad esempio, nella seguente configurazione le cellule vivono in solitudine, e quindi nello stato successivo moriranno:



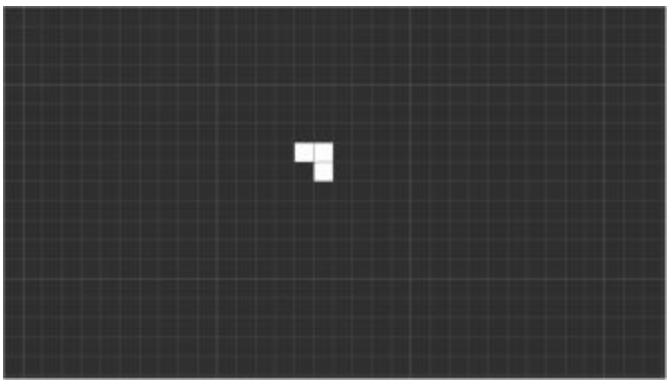
2. Sovrappopolazione. Se una cellula vivente ha più di tre vicini, muore. Prendiamo la configurazione:



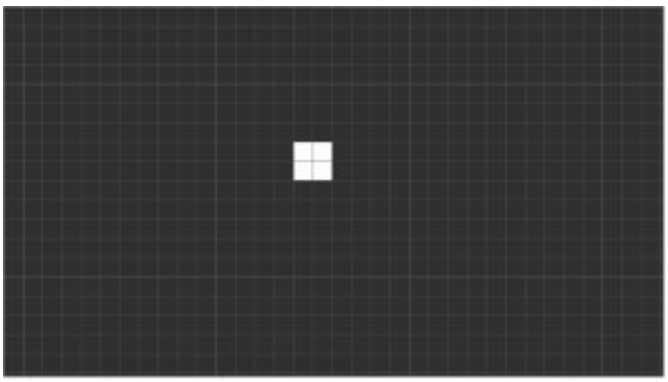
3. La stabilità. Se una cellula vivente ha due o tre vicini, sopravvive alla generazione successiva. Nell'immagine sopra, le celle hanno al massimo tre vicini e almeno due, quindi sopravviveranno nel seguente stato.



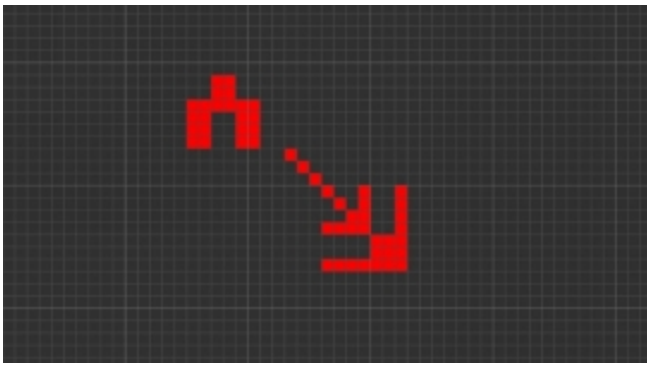
4. Rinascimento. Ogni cellula morta con tre cellule vicine viene resuscitata nella prossima generazione. Nella seguente configurazione:



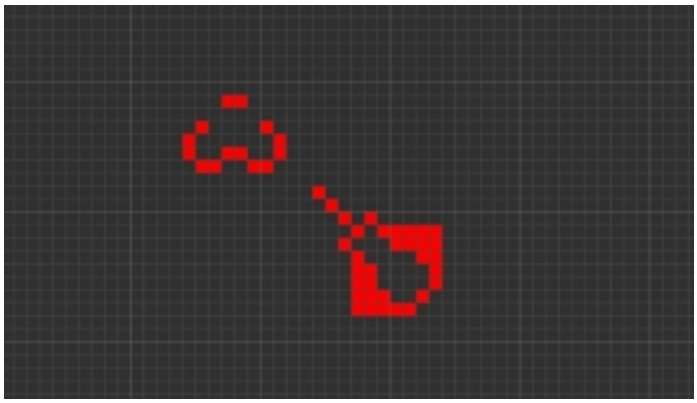
La cellula nera che manca per completare un quadrato bianco rinascerà nello stato seguente, quindi:



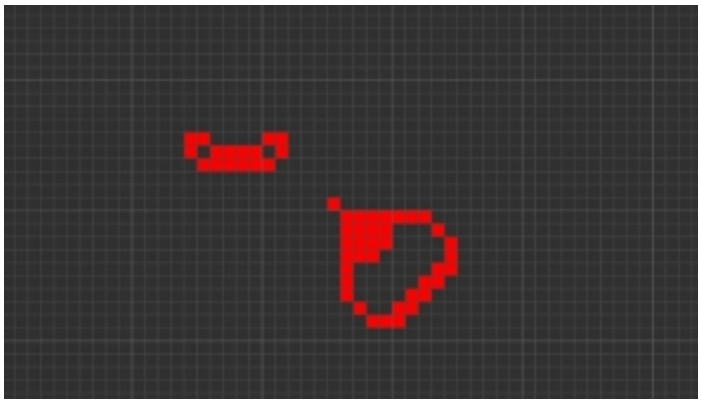
Per visualizzare le regole di cui sopra, vediamo un esempio. Iniziamo con la seguente configurazione:



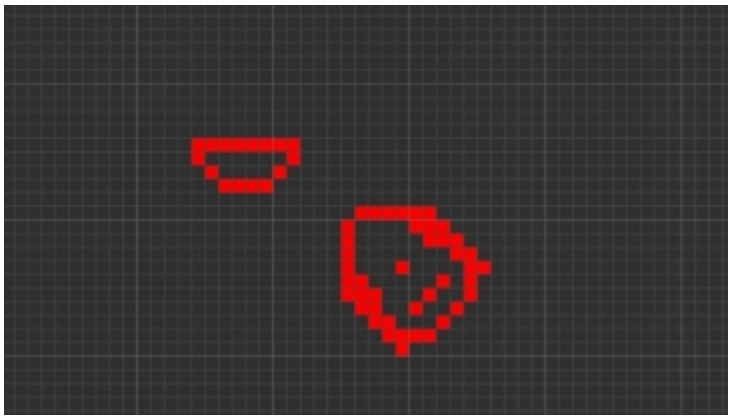
Il seguente stato sarà:



E il prossimo:



Continuiamo con il seguente stato:



■

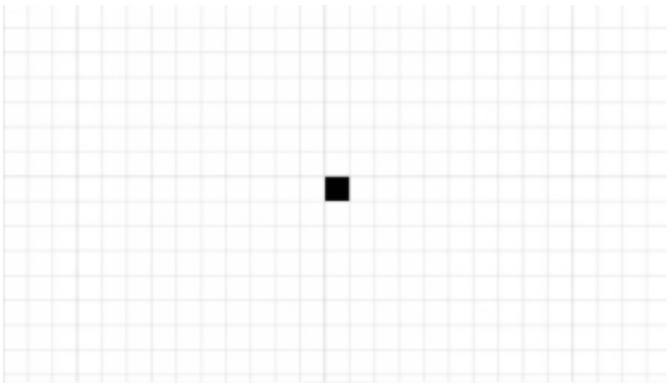
Esempio. La formica di Langton . Anche in questo caso useremo una griglia bidimensionale, partendo da una cella (la formica) che si muove secondo le seguenti regole:

1. La formica fa un passo avanti;

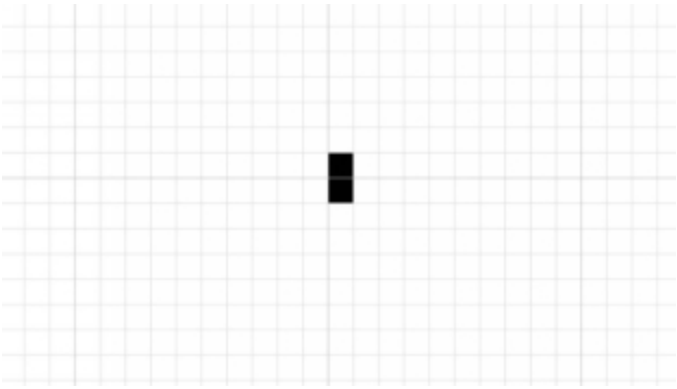
2. Se la formica si trova su un quadrato bianco, la dipinge di nero, fa un giro di 90° verso destra e fa avanzare un'unità;

3. Se la formica si trova in un quadrato nero, la dipinge di bianco, si gira di 90° a sinistra e avanza di un'unità;

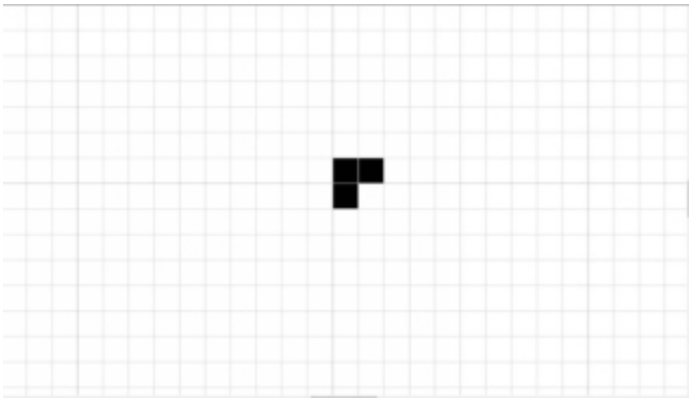
Cominciamo dal seguente punto:



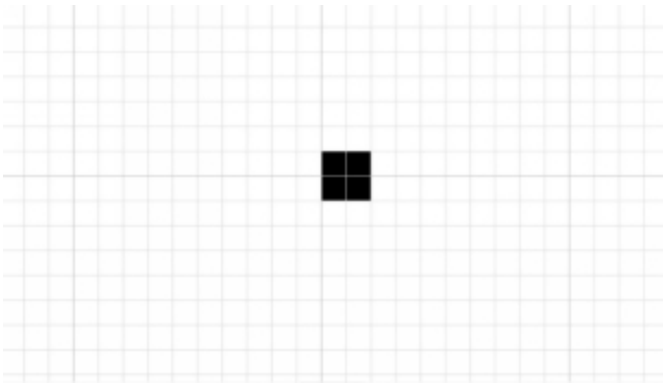
Poi la formica fa un passo avanti:



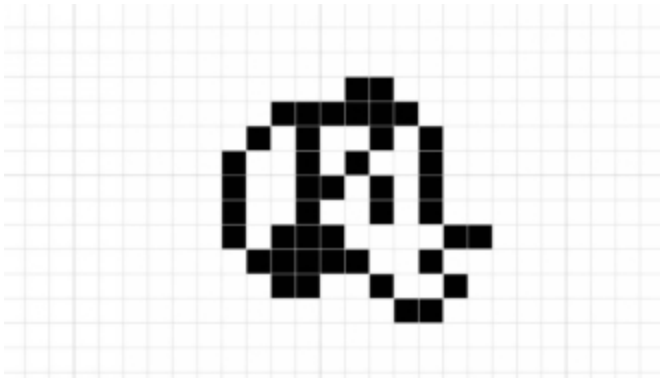
Da dove, nello stato successivo, si gira a sinistra:



Nel prossimo stato girare a destra:



Se continuiamo così nello stato 224 avremo:



Osservazione. Naturalmente, una migliore comprensione degli automi cellulari darà al lettore un grande piacere. Tuttavia, gran parte della loro bellezza sta nella loro rappresentazione. Per questo motivo, si raccomanda di utilizzare un software per visualizzare tali oggetti, in particolare, vi consiglio il programma di distribuzione gratuita chiamato **Golly** . Ecco un link: http://golly.sourceforge.net/ ■

Il concetto di **sistema Lindemayer** o **sistema L** è stato creato dal biologo Aristid Lindemayer nel 1968. È una grammatica formale di derivazione parallela, cioè un insieme di regole e simboli che sono stati utilizzati per modellare la crescita delle piante e di una grande varietà di organismi. Per comprendere meglio l'idea del sistema a L iniziamo con il seguente esempio:

Esempio. (Chomsky) Per generare il sistema L si parte da un assioma e dalle regole per gli stati successivi:

Assioma: B

Regole: $B \rightarrow F[-B]+B, F \rightarrow FF$

Possiamo vedere come sono gli stati:

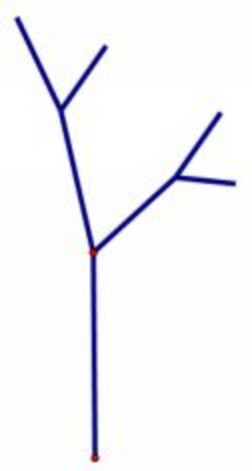
0	B
1	$F[-B]+B$
2	$FF[-[F[-B]+B]]+F[-B]+B$
3	$FFFF[-[FF[-[F[-B]+B]]+[F[-B]+B]]] + FF[-[F[-B]+B]]+[F[-B] + B]$

Nella tabella precedente, la prima colonna è costituita dagli stati e la seconda colonna è la catena, inoltre ogni stato è ottenuto dalla sostituzione delle regole in ogni momento. Vediamo che il terzo stato è già complicato e gli altri continueranno ad aumentare la grammatica.

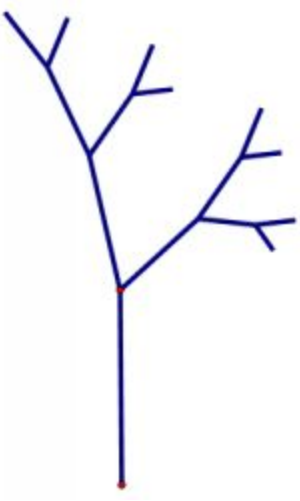
Esempio. (Crescita delle piante) Un sistema L non ha una rappresentazione grafica a sé stante, ma è possibile ottenere un'interpretazione al computer basata su comandi grafici a tartaruga, non ci dilunghiamo su questo argomento, tuttavia, vedremo alcuni esempi grafici di sistemi L. Iniziamo prendendo un segmento di linea dove alla fine piazziamo due nuovi segmenti più piccoli:



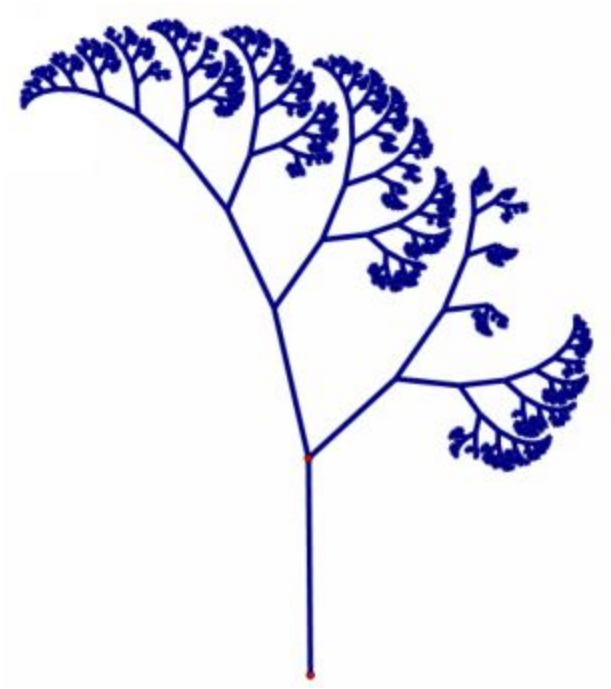
Ora ripetiamo la costruzione sulla stessa scala nei due segmenti:



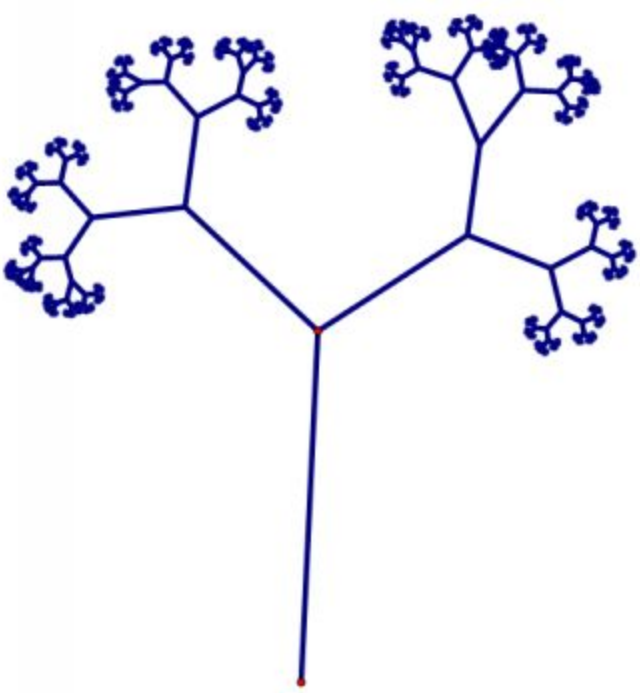
Ripetiamo lo stesso processo con i quattro nuovi segmenti:



Dopo 12 iterazioni si ottiene quanto segue:



Come si può vedere con questa regola possiamo simulare la crescita di una pianta. Il risultato finale dipende dalle dimensioni e dall'orientamento delle divisioni del segmento originale, ad esempio, se ne cambiamo la lunghezza e l'orientamento possiamo ottenere il successivo:



■

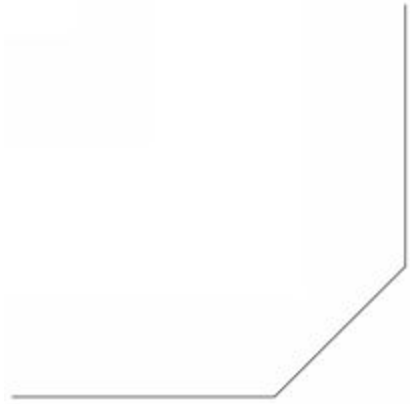
Altri frattali interessanti possono essere costruiti con sistemi a L, vediamo alcuni esempi.

Curva del Drago

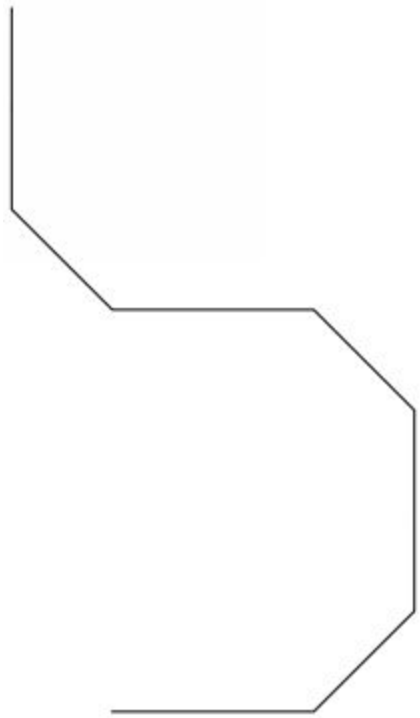
La regola del sistema a L della rappresentazione grammaticale è la seguente:

Assioma	FX
Regola	$\{X \rightarrow X + FX + , Y \rightarrow - FX - Y\}$
Angolo di rotazione	90°

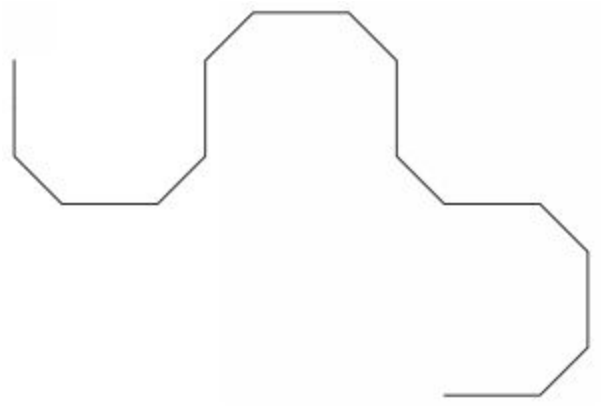
Abbiamo per la prima iterazione:



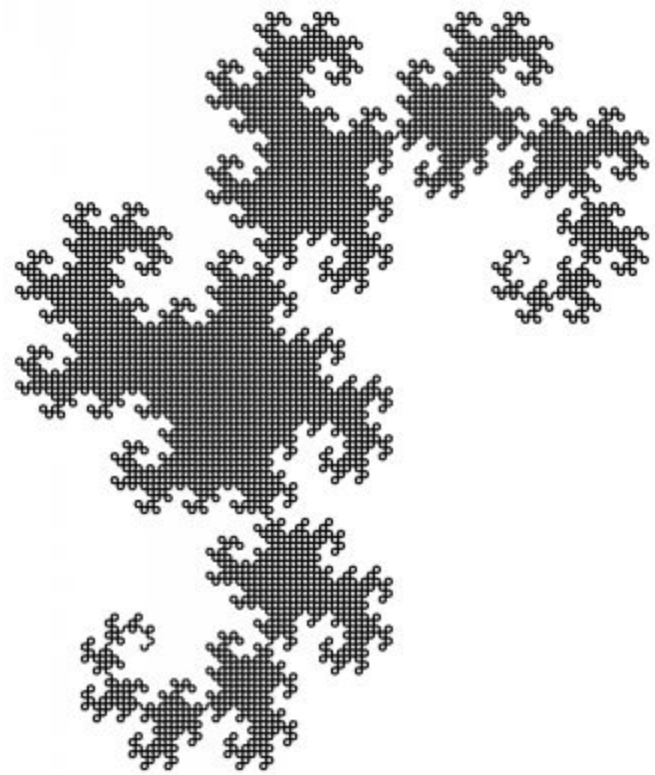
Per la seconda iterazione:



Per la terza iterazione:

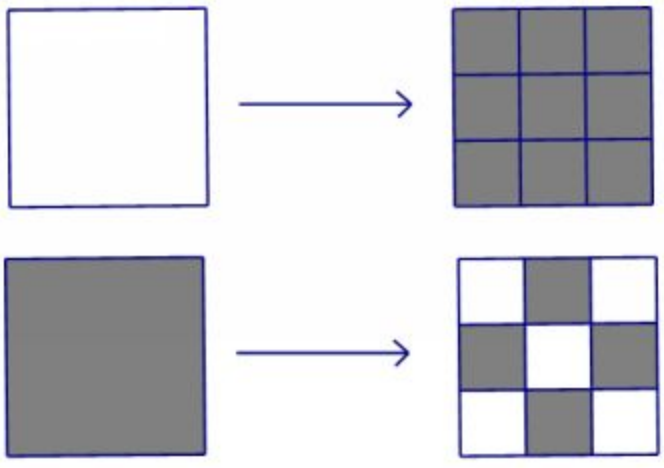


E continuerà a farlo, all'infinito. Nel seguente disegno abbiamo l'iterazione numero 13:

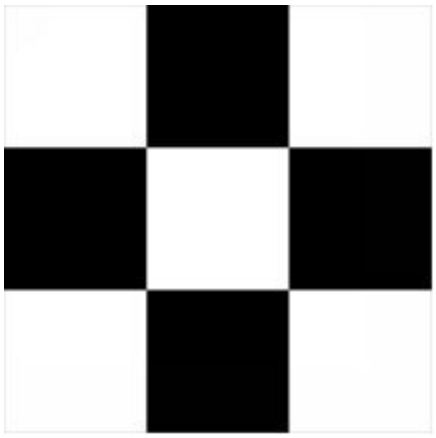


Cartella di Haferman

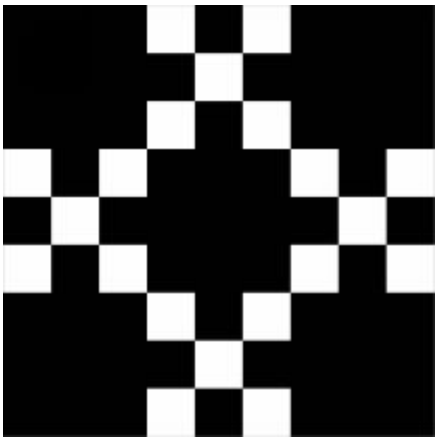
In questo caso abbiamo la regola dell'iterazione:



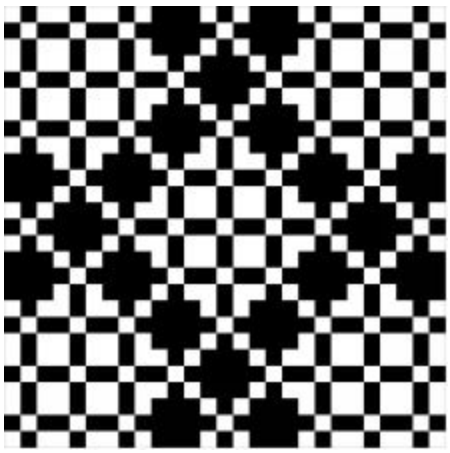
Abbiamo quindi nella prima iterazione:



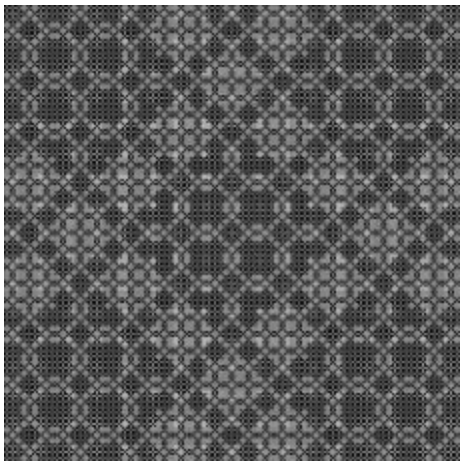
Per la seconda iterazione si ottiene:



Per la terza iterazione:



Anche in questo caso, si continuerà in questo modo all'infinito. Il seguente disegno è fino alla sesta iterazione:

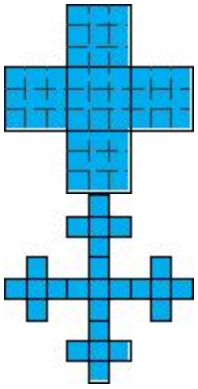


Esercizio. Encuentra la dimensión de autosimilitud de la carpeta de Sierpinski.

Esercizio. Dalla seguente sequenza di figure si disegnano le due fasi successive della costruzione e si trova la dimensione di auto-similarità dell'oggetto. Iniziamo con un quadrato diviso in nove quadrati più piccoli, tutti congruenti:



Poi, togliamo gli angoli, il processo viene fatto di nuovo sui quadrati rimanenti. Qui vediamo i seguenti due passi:



Trovare i due passi successivi e calcolare la dimensione dell'autosimilarità.

Esercizio. La **Spugna Menger** è costruita da un cubo, che è diviso in 27 cubi più piccoli, proprio come il cubo di Rubick 3x3x3. Nella fase successiva si rimuovono i cubi centrali su ogni faccia e quello esattamente

al centro del cubo più grande (in totale si rimuovono 7 cubi più piccoli). Il processo continua così a tempo indeterminato, su ogni nuovo cubo. Trova la tua dimensione di auto-similarità.

Capitolo 5. Numeri complessi e funzioni

Costruiremo nuovi esempi di frattali, ma abbiamo bisogno di un linguaggio per esprimere le idee. Prima di tutto, l'insieme dei numeri di cui abbiamo bisogno per i nostri oggetti sono i cosiddetti numeri complessi.

Osservazione. Una delle cose che hanno portato all'espansione dell'insieme dei numeri sono le equazioni. Storicamente, la prima serie di numeri che l'uomo ha descritto è stata quella dei numeri naturali. In parole povere, i numeri naturali sono le espressioni che usiamo per rappresentare le quantità, poi ad ogni quantità viene assegnato un simbolo, chiamato numero. È comune rappresentare l'insieme dei numeri naturali con il simbolo $\mathbb{N}$, così abbiamo:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\ldots\}$$

In seguito, l'uomo si è trovato nella necessità di risolvere problemi in cui il numero che dà la soluzione è un'incognita, quindi ha dovuto rappresentare tali situazioni usando le lettere, a tali espressioni che io chiamo **polinomi** e ad una uguaglianza tra questi ha chiamato **equazione** . Se il lettore dispone di studi di livello base, saprà già come le cosiddette equazioni di primo grado sono risolte con un'incognita, e saprà che la seguente equazione non ha soluzione nell'insieme dei numeri naturali:

$$x + 2 = 1$$

Perché non c'è un numero naturale che aggiunto a 2 porti al numero 1. Quindi i numeri naturali non sono in grado di spiegare questa situazione. Da questo sono venuti i numeri interi, che servono a rappresentare il processo di avere e di togliere. L'avere è ancora rappresentato da numeri naturali, per rappresentare il togliere aggiungiamo un nuovo simbolo prima del numero naturale:

$$-n$$

Quindi il simbolo precedente rappresenta il togliere n. A proposito, è stato richiesto un nuovo numero per rappresentare l'avere una quantità e farla togliere, il cosiddetto zero. Poi, l'insieme dei numeri interi, indicati dal simbolo $\mathbb{Z}$ è:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4,\ldots\}$$

Anche in questo caso, questo set non è in grado di spiegare equazioni del tipo:

$$2x = 1$$

Perché tra questi numeri, nessuno, se moltiplicato per 2, mi dà 1. Quindi è stato necessario espandere questa serie di numeri a quelli che conosciamo come numeri razionali. Queste esprimono il processo di dividere qualcosa in più parti e poi prendere, o togliere da quelle parti. Quindi erano necessari due simboli per rappresentare questo processo:

$$\frac{a}{b}$$

Il numero inferiore, b, è chiamato il denominatore, il numero superiore, a, è chiamato il numeratore, e la rappresentazione completa è nota come frazione, il che significa, dividere in parti b e prendere parti di quella divisione. Per esempio, la frazione:

$$\frac{1}{2}$$

Significa che lo dividiamo in due parti e prendiamo una di quelle parti. Ora, in quanto tale, la frazione non è un numero razionale, anche se fa parte di un numero. Il problema è che ci sono un numero infinito di modi per rappresentare un numero razionale, per esempio, la frazione di cui sopra è la stessa della frazione:

$$\frac{2}{4}$$

Infatti, il primo è dividere in due e prendere uno, cioè prendiamo la metà, il secondo è dividere in quattro e prendere due, anche in questo caso prendiamo la metà. E non solo queste frazioni rappresentano la stessa quantità, ma devono anche farlo:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\dots$$

In questo caso diciamo che tutte queste frazioni sono equivalenti e la quantità che rappresentano è il numero razionale. Noi indichiamo l'insieme dei numeri razionali come $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}|a,b\in\mathbb{Z}\}$$

E ancora una volta (sembra una storia infinita), non tutte le equazioni hanno una soluzione in questo insieme di numeri, per esempio, la seguente equazione non è risolta in questo insieme:

$$x^2=2$$

Anche in questo caso l'insieme dei numeri razionali doveva essere esteso ad uno più grande, che chiamiamo come insieme di numeri reali $\mathbb{R}$, che associamo alle magnitudini di una linea. E ancora una volta, non tutte le equazioni hanno una soluzione in questo insieme, per esempio, c'è la seguente:

$$x^2=-1$$

Per nessun numero reale quando al quadrato dà un numero negativo, infatti, le leggi dei segni impongono che ogni numero reale al quadrato dia un numero positivo. Sembrerebbe che non ci sia fine a tutto questo, che troveremo sempre un'equazione che non ha soluzione, ma non è così. L'ultima equazione che abbiamo scritto ha lasciato il posto a una nuova serie di numeri chiamati numeri complessi e lì ogni equazione ha già una soluzione. ■

Abbiamo quanto segue:

Definizione. Il campo **numerico complesso** è costituito dal insieme:

$$\mathbb{C} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$$

Oltre alle operazioni binarie:

Se $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$ sono due numeri complessi, allora definiamo

Somma di numeri complessi:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

Moltiplicazione di numeri complessi :

$$z_1 \times z_2 = (a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + cb) .$$

Cioè, il complesso set di numeri è formato da due copie dei numeri reali. Vediamo alcuni esempi:

Esempio. Prendiamo i numeri complessi:

$$z_1 = (2,3) \text{ e } z_2 = (5,4)$$

Poi l'aggiunta e la moltiplicazione dà:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$
$$= (2,3) + (5,4) = (2 + 5, 3 + 4) = (7,7)$$
$$z_1 \times z_2 = (a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + cb)$$
$$= (2,3)(5,4) = (10 - 12, 8 + 15) = (-2,23)$$

■

Esempio. Prendiamo i numeri complessi:

$$z_1 = (\tfrac{2}{3}, -3) \text{ y } z_2 = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{4}{3})$$

Poi l'aggiunta e la moltiplicazione dà:

$$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, -3\right) + \left(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}, -3 + \frac{4}{3}\right)$$
$$= \left(\frac{19}{6}, \frac{-5}{3}\right)$$



Nel caso di moltiplicazione abbiamo:

$$z_1 \times z_2 = (a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + cb)$$
$$= \left(\frac{2}{3}, -3\right)\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$$
$$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{2}\right) - (-3)\left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)(-3)\right)$$
$$= \left(\frac{10}{6} + \frac{12}{3}, \frac{8}{9} - \frac{15}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{34}{6}, \frac{-119}{18}\right)$$

■

Notazione. In letteratura è normale trovare modi diversi di rappresentare la stessa idea. In questo senso, in molti libri il lettore troverà che il numero complesso (a,b) può essere rappresentato anche come:

$$(a,b) = a + ib$$

Dove il numero i è il numero complesso che la proprietà ha: $i^2 = -1$. Andiamo, sono la stessa idea:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b)$$
$$= (a,0) + (0,1)(b,0)$$

In questo senso, $(a,0)$ rappresenta lo stesso numero reale a , il numero $(b,0)$ rappresenta lo stesso numero reale $b.$ D'altra parte:

$$(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
$$= (-1, 0)$$

Quest'ultimo rappresenta lo stesso numero reale -1 . Quindi il simbolo $(0,1)$ è il numero i , e ha la proprietà che $i^2 = -1$.

Definizione. Il numero i nella definizione di cui sopra è chiamato un **numero immaginario** e ha la proprietà che $i^2 = -1$. Inoltre, ogni numero complesso può essere scritto come:

$$z = a + ib.$$

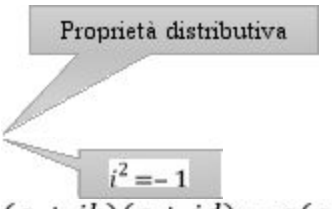
Osservazione. Con la notazione di cui sopra, l'aggiunta e la moltiplicazione vengono riscritte come segue. Che $a + ib$ e $c + id$ siano due numeri complessi, allora:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

In alcuni libri, dal numero complesso $a + ib$, chiamano il numero reale a la "parte reale" e il numero b la "parte immaginaria", quindi la somma è la somma della parte reale con la parte reale e la parte immaginaria con la parte immaginaria dell'altro numero complesso. Allo stesso modo:

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Quest'ultima uguaglianza può essere compresa dalle proprietà aritmetiche dei numeri reali, se facciamo la moltiplicazione che abbiamo:



$$(a + ib)(c + id) = a(c + id) + ib(c + id)$$
$$= ac + iad + ibc + i^2bd$$
$$= ac + iad + ibc - bd$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc)$$



■

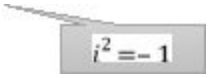
Vediamo qualche altro esempio per capire come è l'addizione e la moltiplicazione di numeri complessi, con la nuova notazione.

Esempio. Consideriamo i numeri:

$$z_1 = 2 + 3i; z_2 = 5 - 2i$$

Poi:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (5 - 2i) \\ &= (2 + 5) + i(3 - 2) \\ &= 7 + i \\ z_1 \times z_2 &= (2 + 3i)(5 - 2i) \\ &= 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2i + 3i \cdot 5 - 3i \cdot 2i \\ &= 10 - 4i + 15i - 6i^2 \\ &= 10 + 11i + 6 \\ &= 16 + 11i \end{aligned}$$



■

Per costruire nuovi frattali abbiamo bisogno di funzioni tra numeri complessi. Ricordiamo innanzitutto il concetto di funzione, che è, intuitivamente, un modo di mettere in relazione due insiemi. Per questo dobbiamo introdurre qualche notazione:

Definizione . Sean X e Y due set. Definiamo il prodotto cross X e Y come l’insieme:

$$X \times Y := \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$$

Cioè, il prodotto croce è l'insieme delle coppie ordinate di elementi X e Y.

Cioè, il prodotto incrociato di due set è quello di mettere in relazione tutti gli elementi di un set X con tutti gli elementi di un set Y. La maggior parte delle volte prendiamo solo una parte del cross-set, cioè mettiamo in relazione solo elementi di X con elementi di Y. Daremo un nome a questo caso:

Definizione. Un relazione R di un set X ad un set Y è un sottoinsieme della croce del prodotto:

$R \subseteq X \times Y$

Osservazione. Ci sono molti tipi di relazioni tra i set, per esempio:

1. Il rapporto che associa ad ogni piatto di un ristorante il rispettivo prezzo.

2. Il rapporto che associa ogni persona ai suoi vicini.

3. Il rapporto che lega ogni autore alle sue opere letterarie.

4. La relazione che associa ad ogni numero reale il suo valore al quadrato.

5. Il rapporto che lega ogni stato della Repubblica Messicana alla sua capitale.

6. Il rapporto che associa ogni persona allo stato in cui vive.

In breve, questi sono solo alcuni esempi di relazioni tra i set. Ma, ci concentreremo sullo studio di un particolare tipo di relazione, quelle che associano un elemento di un set con uno singolo di un altro set. Con maggiore precisione abbiamo la seguente definizione.

Definizione. Una funzione di un insieme A in un insieme B è una relazione:

$f \subseteq A \times B$

Con la proprietà: sì $(x,y) \in f$ e $(x,y') \in f$ poi $y = y'$.

Notazione. Una funzione di un set A in un set B è indicata come:

$f: A \to B$

E si legge " f di A in B ". E la relazione tra l'elemento a e l'elemento b è scritta come:

$f: a \mapsto b$

O anche come:

$f(a) = b$

Quest'ultima uguaglianza è letta come " f di a un uguale b »

Esempi: Vediamo alcuni esempi di funzioni:

1. La funzione che ogni Stato associa al proprio capitale.
2. La funzione a cui ogni persona è associata dalla propria madre biologica.
3. La funzione che ogni persona è associata al suo peso.
4. La funzione che ogni numero reale è associato al suo valore quadratico.
5. La funzione a cui è associato il comune in cui ogni persona è nata.
6. La funzione che ogni paese è associato al suo capitale.
7. Il ruolo che ogni persona è associato al proprio gruppo sanguigno. ■

Ci sono un numero infinito di esempi di funzioni e alcune hanno proprietà molto interessanti, ma ci concentreremo sullo studio delle funzioni nel complesso numero impostato.

Esempio. La funzione della quadratura. Vediamo come si presenta la funzione:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$: z \longmapsto z^2$$

Cioè, questa funzione associa il suo valore al quadrato ad ogni numero complesso. Per esempio:



$$f(2-3i) = (2-3i)^2$$
$$= 2^2 - 2(2)(3i) + (3i)^2$$
$$= 4 - 12i - 9$$
$$= -5 - 12i$$
$$f(6i) = (6i)^2$$
$$= -36$$
$$f(1-i) = (1-i)^2$$
$$= 1 - 2i + i^2$$
$$= 1 - 2i - 1$$
$$= -2i$$

Esempio. Prendiamo a seguente funzione:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$: z \mapsto 2z + 1$$

Vediamo cosa succede in alcuni $\mathbb{C}$:

$$f(3-5i) = 2(3-5i) + 1$$
$$= 6 - 10i + 1$$
$$= 7 - 10i$$
$$f(3i) = 2(3i) + 1$$
$$= 6i + 1$$
$$f(2-i) = 2(2-i) + 1$$
$$= 4 - 2i + 1$$
$$= 5 - 2i$$

■

Nel prossimo capitolo vedremo che questo linguaggio funzionale ci permette di trovare nuovi tipi di frattali.

Capitolo 6. Iterazione

Come ricorderete dal capitolo sui frattali classici, questi sono stati costruiti a partire da un processo che si è ripetuto all'infinito. Faremo la stessa cosa, ma invece delle regole per la costruzione dei frattali, useremo le funzioni. Per prima cosa introduciamo una piccola notazione.

Definizione. Essere $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ una funzione e z un numero complesso. Iterare la funzione f nell'elemento z significa applicare la funzione all'elemento z , quindi applicare la funzione al suo risultato, cioè a $f(z)$, e continuare in questo modo, applicando la funzione ad ogni nuovo risultato.

Non esiste un esempio, per capire un concetto apparentemente astratto.

Esempio. Consideriamo la funzione:

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$:z\mapsto z^2$$

Cioè, prendiamo la funzione che quadra ogni numero complesso. Prendiamo il numero complesso:

$$z=3-2i$$

Quindi, iterare la funzione è applicare la funzione a questo elemento:

$$f(3-2i)=(3-2i)^2$$
$$=9-12i+4i^2$$
$$=5-12i$$

Poi applichiamo di nuovo la funzione, cioè abbiamo:

$$f(f(3-2i))=f(5-12i)=(5-12i)^2$$
$$=25-120i+144i^2$$
$$=-119-120i$$

E continuiamo in questo modo iterando lo spettacolo:

$$f(f(f(3-2i)))=f(-119-120i)$$
$$=-239+28560i$$

In questo modo, otteniamo una successione di numeri complessi:

$3-2i, 5-12i, -119-120i,...$

Questi numeri hanno un ruolo molto importante, quindi gli daremo un nome.

Definizione. Se z è un numero complesso e $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ è una funzione, quindi alla successione dei numeri:

$z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))),...$

Si chiama **l'orbita dell'iterazione** , il numero z è chiamato il **punto di partenza** .

Esempio. Sì $z=2$ e noi prendiamo la funzione $f(z)=z^2$, allora l'orbita dell'iterazione è:

$2, f(2)=4, f(f(2))=16, f(f(f(2)))=256,...$

Se $z=0.5$, con la stessa funzione abbiamo la prossima orbita:

$0.5, 0.25, 0.0625, 0.0039,...$

Se $z=1$, con la stessa funzione abbiamo l'orbita:

$1, 1, 1, 1, 1,...$

Si noti che, nel primo caso, l'orbita diventa sempre più grande, cioè tende all'infinito (∞), nel secondo caso, il valore diventa sempre più piccolo, cioè tende a zero e nell'ultimo caso il valore è sempre lo stesso, cioè tende allo stesso 1.

Definizione. Ai margini di un'orbita la chiameremo " **attrattore** ". Se l'orbita consiste di un singolo punto, lo chiameremo **punto fisso.**

Esempio. Nell'esempio precedente, le orbite dell'iterazione della $f(z)=z^2$:

$2, 4, 16, 256,...$

0.5, 0.25, 0.0625, 0.0039,...

Hanno attrattori ∞ e 0 rispettivamente. In orbita:

1, 1, 1, 1, 1,...

Il numero 1 è un punto fisso. ■

L’insieme di Julia

Uno dei primi frattali che emergono da questo processo di iterazione delle funzioni sono i cosiddetti insieme Julia. Per questo, consideriamo le funzioni che risultano dalla quadratura e dall'aggiunta di un numero complesso fisso:

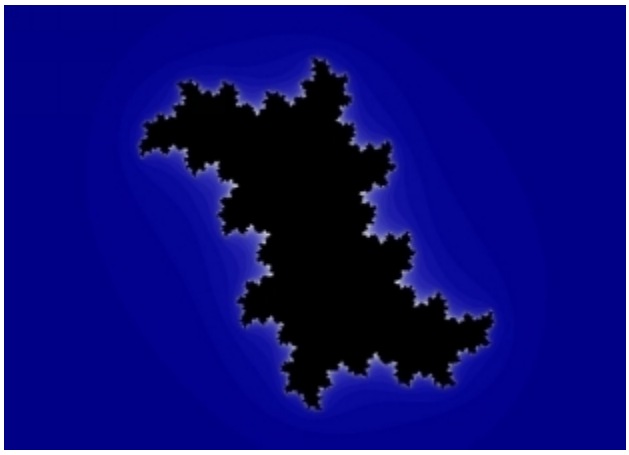
$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$:z\mapsto z^2+c$$

Dove c è un numero fisso complesso. Ora esamineremo i punti iniziali delle orbite che generano queste funzioni. Abbiamo la seguente definizione.

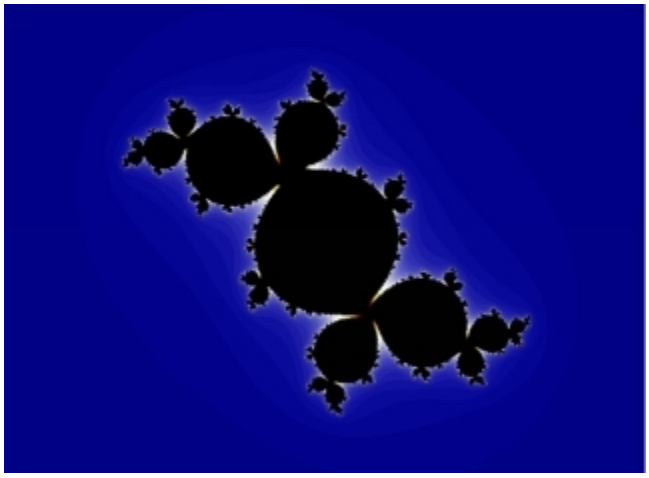
Definizione. Nelle orbite generate dalla funzione $f(z)=z^2+c$, dove c è un numero complesso fisso, i punti iniziali il cui attrattore non è infinito saranno chiamati **punti prigioniero** . Il resto lo chiameremo **punti di fuga** . Il set formato da punti prigionieri che chiamiamo l’insieme di Julia, dalla funzione.

Forse la definizione di cui sopra non dice nulla al lettore, poiché la sua grandezza si vede al momento di vedere geometricamente chi sono i punti che formano l'insieme di Julia. Andiamo con alcuni esempi che sono stati fatti con il software Ultra Fractal:

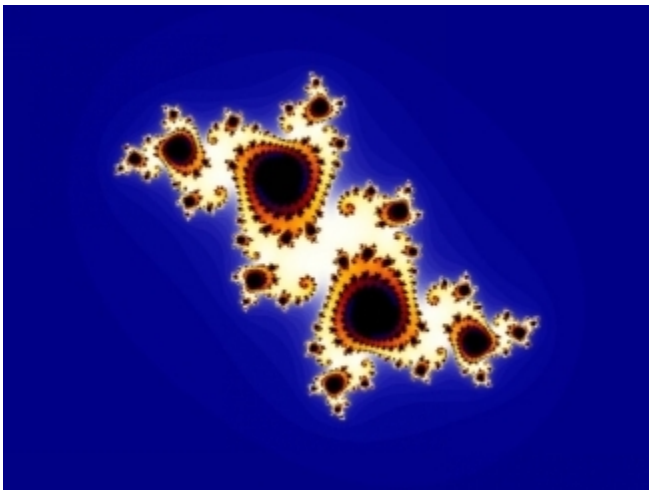
Esempio. Se il numero fisso è $c = 0{,}12 + 0{,}57i$, allora l’insieme di Julia è:



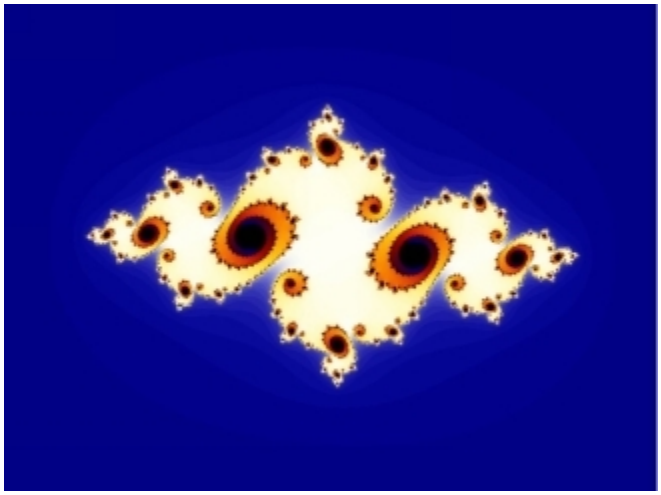
Esempio. Se il numero fisso è $c = -0{,}12 + 0{,}77i$, allora l'insieme di Julia lo è:



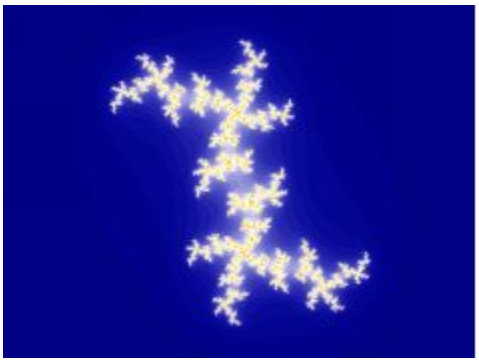
Esempio. Se il numero fisso è $c = -0{,}194 + 0{,}6550i$ allora l'insieme di Julia è:



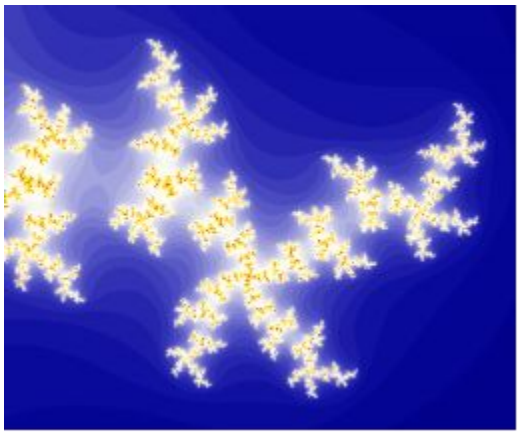
Esempio. Se il numero fisso è $c = -0{,}756 + 0{,}112i$, allora l'insieme di Julia lo è:



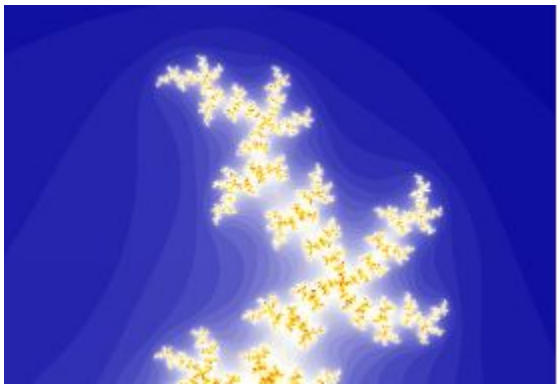
Observación. Cominciamo con l'insieme di Julia:



Possiamo espanderne una parte e l'abbiamo fatto:



Posso andare a una delle estremità e zoomare di nuovo:



Come si vede, la figura originale si ripete all'infinito, cioè ha la proprietà dell'autosimilarità.

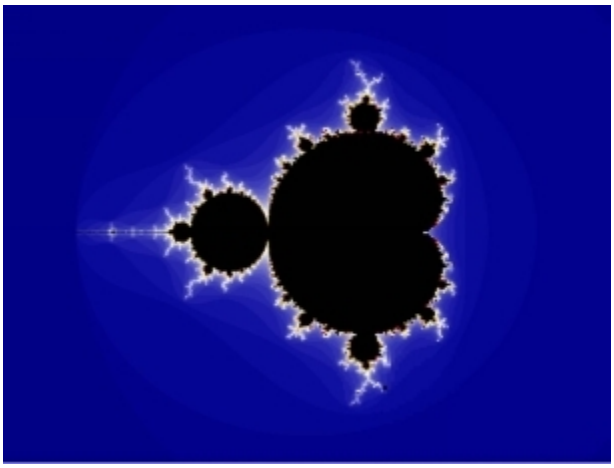
l’insieme di Mandelbrot

Dal insieme di Julia si ottiene un bel frattale. Come si può capire, negli esempi precedenti ci ha dato due tipi di Julia Set: quelli collegati, cioè quelli formati da un unico pezzo, e quelli non collegati, quelli che sono separati in più parti.

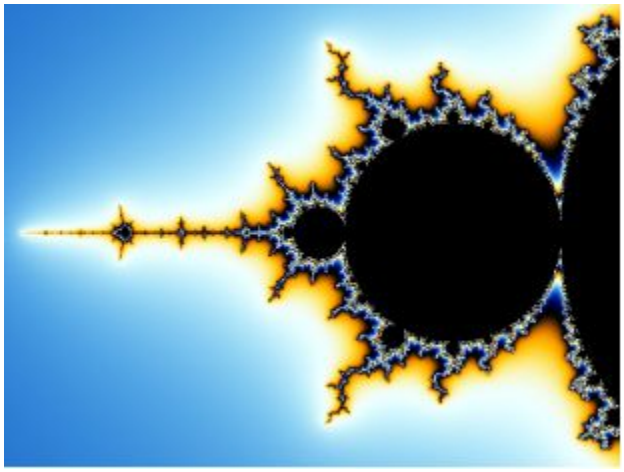
Quali sono collegati e quali sono scollegati dipende dal valore fisso c che prendiamo. Abbiamo il seguente:

Definizione. Tutti i numeri complessi per i quali si ottiene un insieme di Julia correlato formano un frattale, forse il più famoso di tutti, noto come insieme di Mandelbrot.

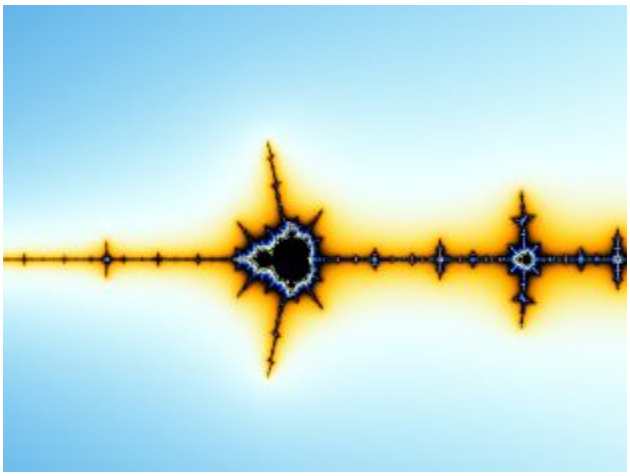
Anche in questo caso, il lettore potrebbe non essere sorpreso da ciò che la definizione di cui sopra afferma, ma tutto cambia se si guarda geometricamente a quali punti danno i insieme di Julia correlati:



Come i frattali classici, l’insieme di Mandelbrot mantiene la proprietà di auto-similarità. L'immagine seguente è stata ottenuta ingrandendo una parte del insieme di Mandelbrot:



Ecco un'altra estensione:

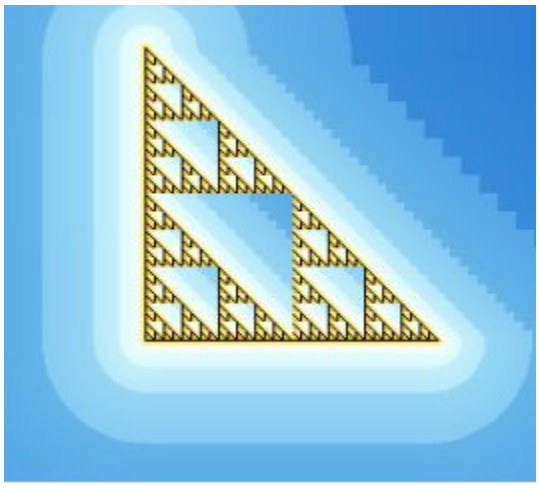


Il triangolo di Sierpinski

Il triangolo di Sierpinski si trova anche come i frattali precedenti, ma richiede tre funzioni:

$$f_1(z) = \frac{1}{2}z$$
$$f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$$
$$f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

Qui mostriamo l'immagine dopo 100 iterazioni:



Capitolo 7. Applicazioni

Abbiamo già studiato un po' cosa sono i frattali e ci siamo resi conto che questi oggetti appaiono naturalmente in natura. Vediamo ora alcuni esempi di come influiscono sulla nostra realtà.

Modelli di popolazione .

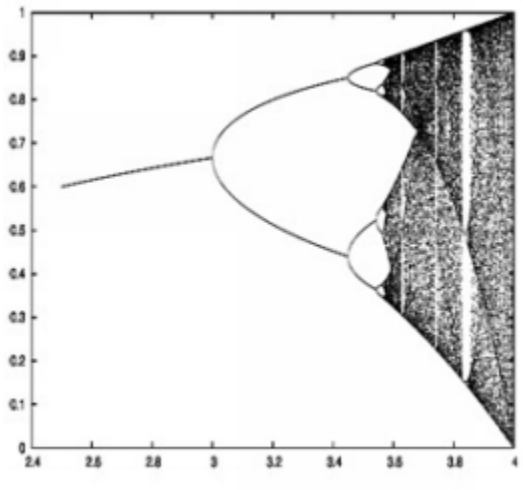
Le equazioni sono state utilizzate per anni per modellare la crescita della popolazione e come alcuni fattori potrebbero alterare questa crescita, come la fornitura di cibo, l'approvvigionamento idrico o anche le malattie.

Robert May ha usato una cosa chiamata mappatura logistica del processo Verhulst, che è un'equazione ricorsiva, cioè misura la crescita della popolazione nel tempo, secondo il tempo precedente.:

$$y_{n+1} = k y_n (1 - y_n)$$

Dove il letterale y rappresenta la popolazione (tra 0 e 1), quindi il simbolo y_n è la popolazione al momento n e il simbolo y_{n+1} è la popolazione al momento successivo. La k letterale rappresenta la costante di crescita.

In un esempio particolare, R. May ha scoperto che alcuni crostacei avevano un tasso di riproduzione inferiore a 0,6, per cui la popolazione scompare in pochi anni. Quando il tasso è superiore a 0,6 e fino a 2,7, la popolazione aumenta progressivamente fino ad un certo punto. Ma se il tasso di crescita è stato maggiore di 3, allora il modello lineare si biforca in due cifre alternate ogni anno, se il tasso è maggiore di 3,45 la popolazione si biforca in 4 cifre alternate; ad un tasso di 3,69 il tasso si biforca in otto cifre e così via. A questo punto, ha capito che le dinamiche erano così instabili che ogni piccolo cambiamento avrebbe causato un salto di stato, che è noto come "effetto farfalla". Nell'immagine seguente vediamo una rappresentazione geometrica di questo fatto:



Se si guarda il grafico in dettaglio si vede che la struttura iniziale, quella della forchetta, si ripete microscopicamente, cioè si vede l'autosimilarità.

Medicina

Abbiamo già discusso che nello studio delle mastografie il contorno delle immagini può aiutarci a determinare se siamo in presenza di un cancro. Ma attualmente sono utilizzati in vari campi, come ad esempio:

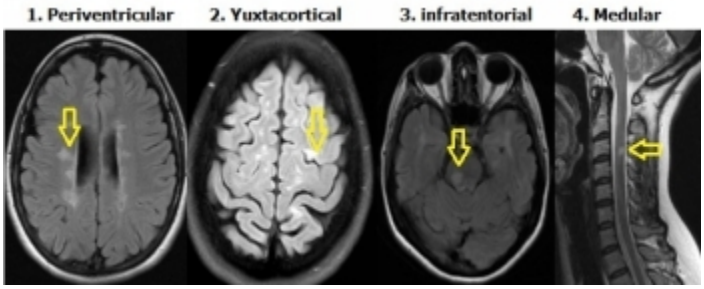
1. La distribuzione del flusso sanguigno polmonare.
2. La struttura alveolare dei polmoni.
3. Le superfici delle proteine.
4. Lo studio del cancro al seno e alla prostata
5. Analisi delle fratture ossee.
6. La rigenerazione dei tessuti
7. Allo studio delle malattie cerebrali degenerative.

Nel 2003, un gruppo di scienziati della Harvard Medical School e del Ma ha presentato un metodo per ottenere un organo vivo da un paziente dalle sue cellule, al fine di evitare il rigetto in un eventuale trapianto. Il modo per farlo era quello di costruire uno scheletro, come quello del sistema

arterioso, a partire da schemi di crescita frattale. Vale la pena ricordare che i risultati sono stati incoraggianti e sono stati in grado di mantenere in vita le cellule epatiche per due settimane.

Un altro esempio è realizzato da un gruppo di ricerca interdisciplinare dell'Università di Jaén. In questo progetto chiamato Fractalmed, hanno lavorato sull'applicazione della dimensione frattale delle immagini di risonanza magnetica per l'individuazione di alcune malattie neurodegenerative e si sono concentrati sulla Sclerosi Multipla..

Nell'immagine seguente vediamo i casi di questa malattia:



A livello tridimensionale, è stato dimostrato che c'è un significativo aumento del valore della dimensione frattale della normale materia grigia cerebrale nei pazienti con SM che soffrono dei primi attacchi della malattia.

Effetti visivi.

Una delle principali applicazioni della geometria frattale è vista quotidianamente e si trova nelle grandi produzioni cinematografiche.

Come abbiamo visto, la geometria frattale ci permette di mettere insieme oggetti diversi in natura, come piante, spiagge, nuvole, tuoni, ma anche spazio, galassie, piante e così via. Quindi, mentre guardate il film dei Vendicatori, dove Thanos lancia un pianeta contro Iron Man, quello che vedete in realtà è un frattale generato dal computer:



Quando vedi nel film Star Wars la stella della morte:



D Stai guardando di nuovo un frattale generato dal computer.

Possiamo continuare così, vedendo esempi nel cinema di oggetti fantastici, come pianeti, montagne, galassie, ma quello che finalmente vediamo nella realtà, sono frattali generati dal computer che simulano la realtà.

Capitolo 8. Galleria frattale

Non è possibile parlare di tutti i tipi di frattali in questo libro, tuttavia, è possibile ammirarne la bellezza, proprio come quelli che abbiamo già studiato. Pertanto, concludiamo questo libro con una galleria di vari tipi di frattali, che spero vi piacerà vedere.

Figura 1:



Figura 2:



Figura 3:



Figura 4:



Figura 6:

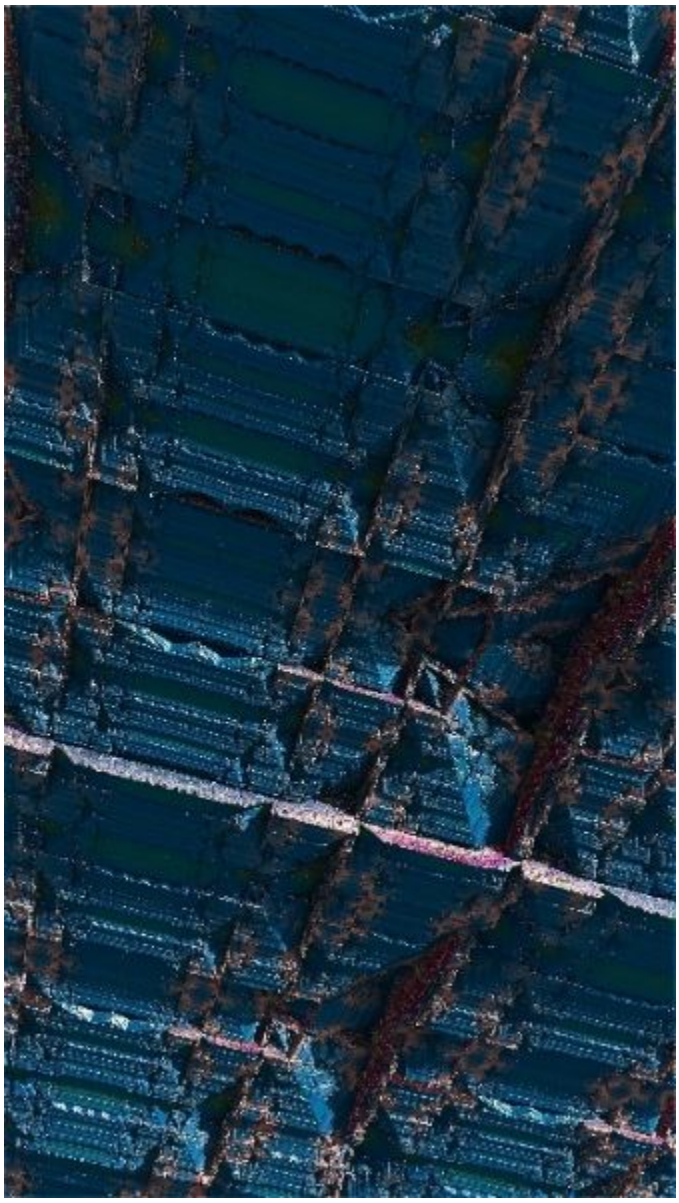


Figura 7:

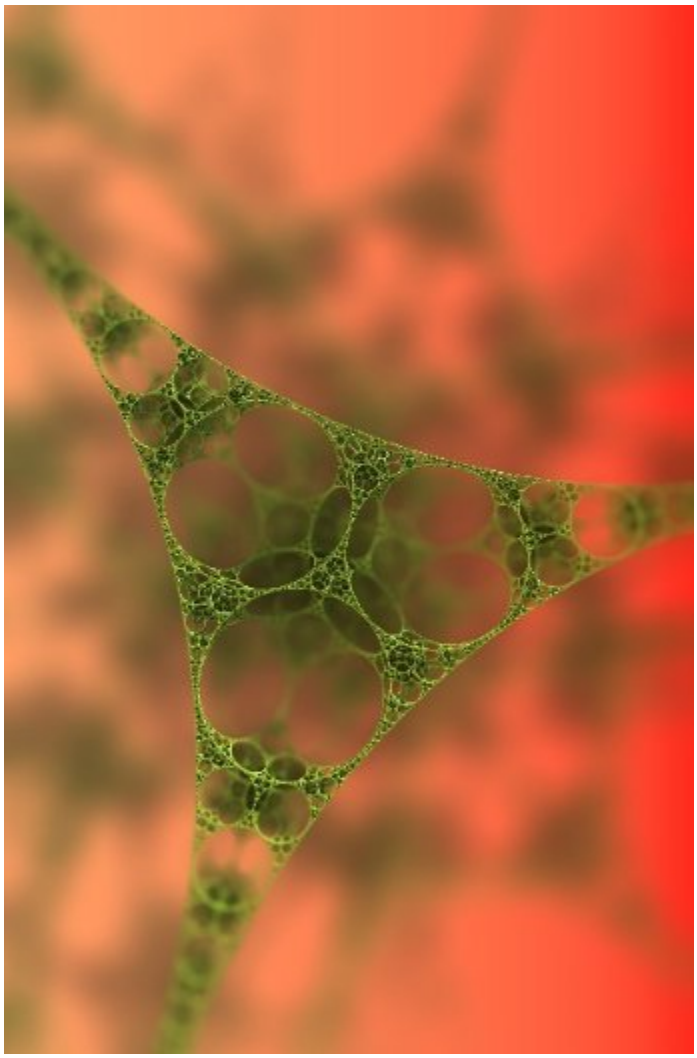


Figura 8:



Figura 9:

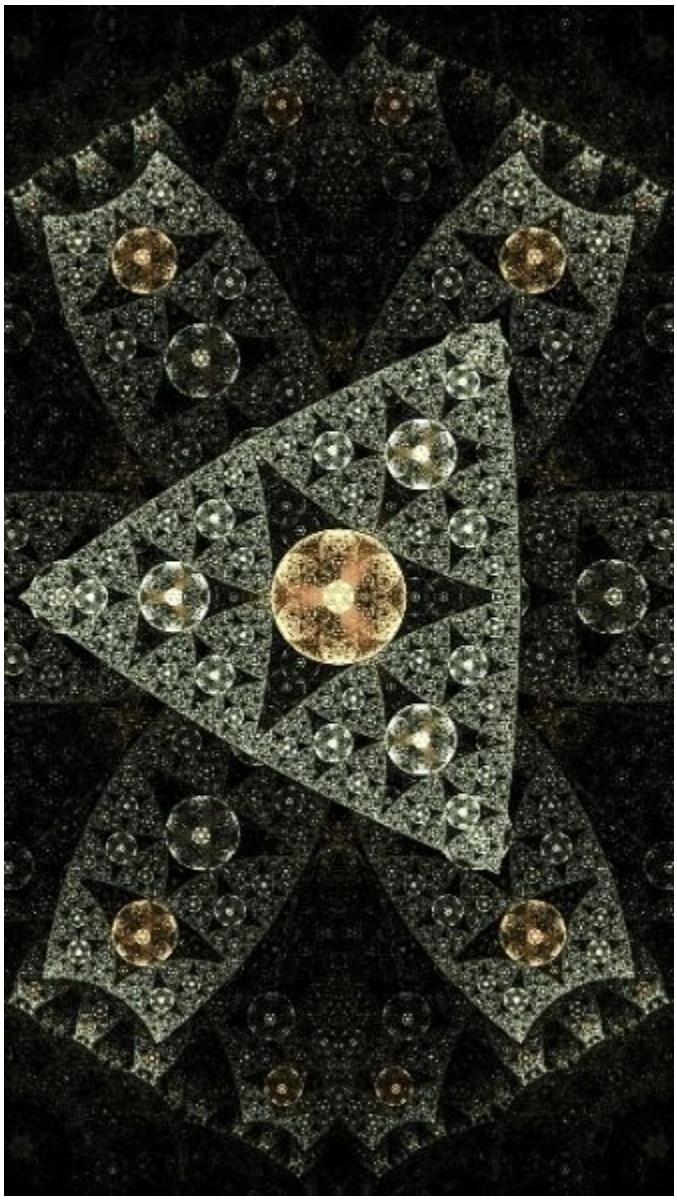
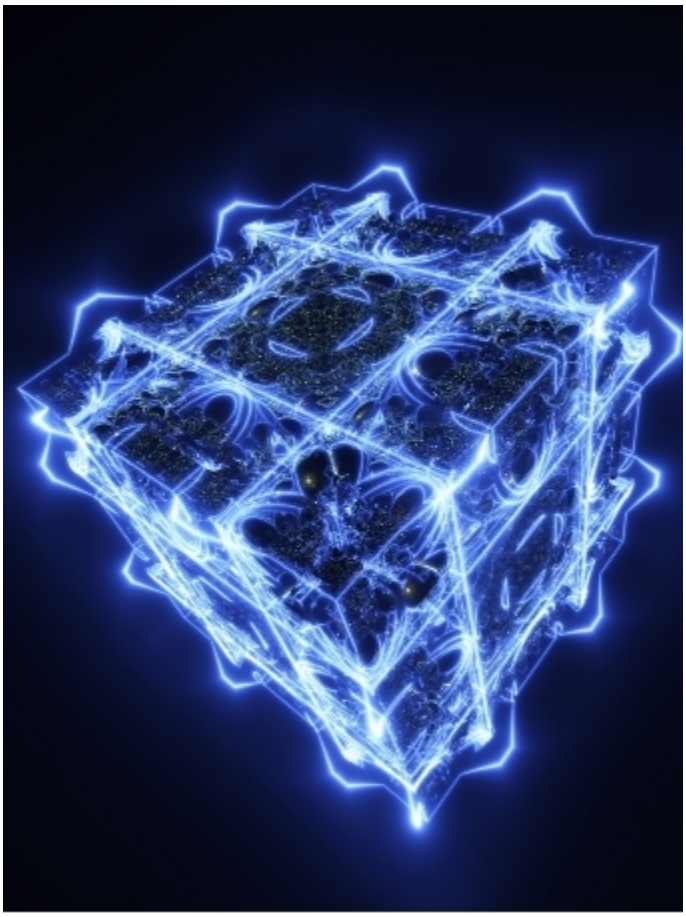


Figura 10:



Figura 11:



Bibliografia

[1] Vicente Talanquer, *Fractus, fracta, fractal: fractales, de laberintos y espejos*, Fondo de Cultura Económica, 2011.

[2] B. Mandelbrot, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension.* Flammarion, 1975.

[3] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* . Freeman, 1992.

[4] B. Mandelbrot. *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión* . Tusquets editores,1993.

[5] Heinz-Otto Peitgen. Dietmar Saupe, *The Science of Fractal Images* , Springer Verlag, 1988.

[6] Bracho Javier, *¿En qué espacio vivimos?*, Fondo de Cultura Económica, 1980.

[7] Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry* , Wiley, 1961.

[8] González Félix, *Matemática Moderna para Bachillerato* , Amazon, 2016.