Matemática Financeira

Departamento de Matemática - UFJF

Notas de aulas

Wilhelm Passarella Freire
André Arbex Hallack

Abril/2016

Índice

1 Conceitos básicos e simbologia **1**

1.1 Introdução 1

1.2 Tipos de juros 3

1.3 Fluxos de Caixa 4

1.4 Exercícios 8

2 Juros simples **11**

2.1 Conceitos básicos 11

2.2 Exemplos 12

2.3 Exercícios 15

3 Juros compostos **19**

3.1 Conceitos básicos 19

3.2 Exemplos 20

3.3 Exercícios 24

4 Taxas de juros **29**

4.1 Introdução 29

4.2 Juros simples - Taxas proporcionais 29

4.3 Juros compostos - Taxas equivalentes 32

4.4 Taxa Nominal 34

4.5 Taxa Bruta X Taxa Líquida 36

4.6 Período de capitalização fracionário 36

4.7 Exercícios 37

5 Descontos **41**

5.1 Desconto Simples 42

5.2 Desconto Composto 45

5.3 Exercícios 46

6 Séries uniformes **49**

6.1 Séries Postecipadas 50

6.2 Séries Antecipadas 51

6.3 Exemplos 52

6.4 Série Perpétua 55

6.5 Exercícios 56

7 Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno **61**

7.1 Valor Presente Líquido 61

7.2 Taxa Interna de Retorno 62

7.3 Exercícios 64

8 Planos equivalentes de financiamento **69**

8.1 Introdução e exemplos 69

8.2 Exercícios 74

9 Inflação **77**

9.1 Conceitos básicos 77

9.2 Exemplos 78

9.3 Exercícios 80

Referências **83**

Capítulo 1

Conceitos básicos e simbologia

1.1 Introdução

A MATEMÁTICA FINANCEIRA é o ramo da Matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo.

A operação básica da Matemática Financeira é a operação de empréstimo: alguém que dispõe de um **CAPITAL** (C), também chamado **PRINCIPAL** (P) ou **VALOR PRESENTE** (VP ou PV), empresta-o a outra pessoa por um certo período de tempo (dias, meses, anos, etc.). Após esse período, recebe seu capital de volta acrescido de uma remuneração pelo empréstimo chamada **JUROS** (J).

A soma $C + J$ é chamada **MONTANTE** (M) ou **VALOR FUTURO** (VF ou FV).

A razão $\dfrac{\text{JUROS}}{\text{CAPITAL}}$ é a taxa de crescimento do capital, dita **TAXA DE JUROS** (i), é sempre referida ao período da operação e indica a PORCENTAGEM do capital representada pelos juros.

Exemplo 1.1

Pedro pegou um empréstimo de R$ 100,00. Dois meses depois pagou R$ 140,00.
Calcule os juros e a taxa de juros pagos por Pedro.

É muito importante observar que Pedro e quem lhe emprestou o dinheiro concordaram que R$ 100,00 no início do bimestre em questão têm o mesmo valor que R$ 140,00 no final daquele bimestre. Esse pensamento nos leva à principal noção da matemática financeira:

O VALOR DE UMA QUANTIA DEPENDE DA ÉPOCA À QUAL ELA SE REFERE.

No Exemplo 1.1, quantias diferentes (R$100,00 e R$140,00) referidas a épocas diferentes têm o mesmo valor.

São **ERROS** comuns em raciocínios financeiros :

• Achar que, por exemplo, R$ 140,00 valem sempre mais que R$ 100,00 :
R$140,00 têm maior valor que R$100,00 se referidos à mesma época. Referidos a épocas diferentes, R$140,00 podem ter o mesmo valor que R$100,00 ou até mesmo valor inferior.

• Achar que, por exemplo, R$100,00 têm sempre o mesmo valor :
R$100,00 hoje valem mais que R$100,00 daqui a um ano.

• Somar quantias referidas a épocas diferentes :
Pode não ser verdade, como veremos mais adiante, que comprar em 3 prestações de R$21,00 seja melhor que comprar em 2 prestações de R$32,00 , embora tenhamos que
$21 + 21 + 21 = 63 < 64 = 32 + 32$.

Capitalização

Denomina-se CAPITALIZAÇÃO ao processo que calcula o valor futuro a partir do valor presente adicionando-se a este os juros.

Exemplo 1.2

Suponha que você aplique R$ 1.000,00 em um banco que paga 13,5% de juros ao ano. Quanto você terá ao final de um ano?

1.2 Tipos de juros

Quando são considerados vários (mais de um) períodos de tempo consecutivos, os juros podem ser calculados de duas maneiras diferentes. Por este motivo, os juros são geralmente classificados em SIMPLES ou COMPOSTOS.

- **JUROS SIMPLES:** Os juros de cada período são calculados sempre em função do capital inicial.

Exemplo 1.3.a Evolução de R$ 100,00 a juros simples de 10% ao ano durante 4 anos:

ano	início do ano	juros	fim do ano
1	100,00	10,00	110,00
2	110,00	10,00	120,00
3	120,00	10,00	130,00
4	130,00	10,00	140,00

• **JUROS COMPOSTOS:** Os juros de cada período são calculados sempre em função do saldo existente no início do período correspondente.

Exemplo 1.3.b Evolução de R$ 100,00 a juros compostos de 10% ao ano durante 4 anos:

ano	início do ano	juros	fim do ano
1	100,00	10,00	110,00
2	110,00	11,00	121,00
3	121,00	12,10	133,10
4	133,10	13,31	146,41

1.3 Fluxos de Caixa

Diagrama de Fluxo de Caixa

O Diagrama de Fluxo de Caixa (DFC) é a representação gráfica das operações financeiras em uma linha de tempo crescente a partir da data inicial da operação.

Representa-se as entradas de capital por setas verticais apontadas para cima e as saídas de capital por setas verticais apontadas para baixo.

Exemplo 1.4

Uma aplicação financeira de R$ 1.000,00 realizada pelo prazo de 4 meses permitiu resgatar R$ 1.080,00. Pede-se desenhar o DFC.

Exemplo 1.5

Represente o DFC das seguintes operações financeiras:

a) Um investidor aplicou R$ 30.000,00 e recebeu 3 parcelas trimestrais de R$ 18.000,00, sendo a 1ª após 6 meses da aplicação.

b) Uma pessoa, durante um ano, fez depósitos de R$ 10.000,00 em caderneta de poupança, sempre no início de cada mês, que renderam, ao final de um ano R$ 200.000,00.

c) Uma pessoa, durante 6 meses, fez depósitos de R$ 2.500,00 uma caderneta de poupança, sempre no início de cada mês. Nos 3 meses que se seguiram, ficou sem o emprego e foi obrigada a fazer saques de R$ 6.000,00 também no início de cada mês, tendo zerado seu saldo.

Valor Presente e Taxa de Desconto

Quando calculamos valor futuro, estamos respondendo a perguntas do tipo: quanto teremos daqui a 10 anos se investirmos R$ 1.000,00 hoje a uma taxa de juros de 8% ao ano?

Entretanto, vamos supor que desejamos saber quanto devemos investir hoje a fim de alcançarmos um certo objetivo em uma data futura.

Por exemplo, se precisamos de R$ 12.000,00 para uma viagem daqui a 2 anos, quanto precisamos aplicar agora? Para responder a este tipo de pergunta é preciso calcular o valor presente de um determinado montante.

O valor presente de um fluxo de caixa é o valor monetário na data zero da escala de tempo. É igual à soma dos capitais futuros quando calculados na data zero com uma certa taxa de juros.

Calcular valores presente chama-se DESCONTAR e é o oposto de calcular valores futuros. Dizemos que os capitais futuros foram descontados para o ponto zero e a taxa de juros utilizada é denominada taxa de desconto.

O desconto em Finanças é muito diferente do desconto no varejo. No varejo, significa reduzir o preço a fim de vender mais mercadorias e em Finanças significa calcular o valor presente de uma ou mais quantias futuras de dinheiro.

Exemplo 1.6

Determinar o valor presente do fluxo de caixa abaixo, criado considerando-se uma taxa de juros de 10% ao ano (juros compostos)

100	50	30
↑	↑	↑
0	1	2

Equivalência de Fluxos de Caixa (a juros compostos)

Dois ou mais fluxos de caixa são ditos EQUIVALENTES, a uma determinada taxa de juros (compostos), se seus valores presentes (VP), calculados com essa mesma taxa, são iguais.

A equivalência de fluxos de caixa depende, necessariamente, da taxa de juros utilizada para descontar os capitais futuros.

Assim, se dois ou mais fluxos de caixa forem equivalentes, a uma certa taxa de juros, poderão deixar de ser se a taxa for alterada.

Se os fluxos de caixa tiverem o mesmo valor presente, a uma determinada taxa de juros, então seus valores futuros (VF) após n períodos, calculados com essa taxa, serão iguais.

Logo, a equivalência de fluxos de caixa não precisa ser analisada obrigatoriamente no ponto zero, podendo ser verificada no final de qualquer período n, desde que n seja o mesmo para todos os fluxos de caixa.

Exemplo 1.7

Uma loja oferece duas opções para a compra de uma TV cujo preço é R$ 1.000,00:

1) à vista com desconto de 10%.

2) em duas prestações iguais de R$ 500,00 sendo a primeira no ato da compra e a segunda 30 dias após a compra.

Se uma determinada aplicação financeira remunera o capital aplicado com uma taxa de 25% ao mês, determine qual a melhor opção para o pagamento.

Exemplo 1.8

Resolva o Exemplo 1.7 considerando as seguintes taxas :

a) 20% am

b) 30% am

Obs.: Nos capítulos seguintes escreveremos **am** para indicar ao mês, **ab** para indicar ao bimestre, **at** para indicar ao trimestre, **as** para indicar ao semestre, **aa** para indicar ao ano, etc. Assim, 10% am significa 10% ao mês, 25% aa significa 25% ao ano, etc.

1.4 Exercícios

1.1) Um investidor aplicou R$ 1.000,00 em um banco que remunera seus depósitos com uma taxa de 5% am, no regime de juros simples. Mostre o crescimento desse capital nos próximos 3 meses e calcule o montante a ser resgatado no final do 3º mês.

1.2) Um investidor aplicou R$ 1.000,00 em um banco que remunera seus depósitos com uma taxa de 5% am, no regime de juros compostos. Mostre o crescimento desse capital nos próximos 3 meses e calcule o montante a ser resgatado no final do 3º mês.

1.3) Preciso de R$ 12.000,00 para uma viagem daqui a 2 anos. Se uma determinada aplicação financeira remunera a uma taxa de 7% as (juros compostos), qual a quantia mínima que devo aplicar hoje para que possa resgatar os R$ 12.000,00 que necessito daqui a 2 anos ?

1.4) Você quer comprar um carro novo e recebe as seguintes ofertas do vendedor para quitar o negócio em 2 anos:

a) Uma entrada e mais duas parcelas anuais de R$ 21.000,00.

b) Duas parcelas anuais de R$ 32.000,00, a primeira delas daqui a 1 ano (sem entrada).

Se você tem a garantia de que consegue o rendimento de 15% aa em aplicações financeiras (juros compostos), qual a melhor forma de pagamento ?

Quanto dinheiro você precisa ter hoje para poder cumprir com o pagamento do melhor (para você) dos planos acima ?

Respostas

1.1)

mês	início do mês	juros	fim do mês
1	1.000,00	50,00	1.050,00
2	1.050,00	50,00	1.100,00
3	1.100,00	50,00	1.150,00

1.2)

mês	início do mês	juros	fim do mês
1	1.000,00	50,00	1.050,00
2	1.050,00	52,50	1.102,50
3	1.102,50	55,12	1.157,62

1.3) R$ 9154,75

1.4) A segunda forma de pagamento (letra b) é a melhor, pois daqui a 2 anos (por exemplo) teríamos:

VF_a= R$ 72.922,50 e VF_b= R$ 68.800,00.

Precisaria de R$ 52.022,69 hoje.

Capítulo 2

Juros simples

2.1 Conceitos básicos

No regime de JUROS SIMPLES, os juros de cada período são calculados aplicando-se a taxa de juros sempre sobre o capital inicial, produzindo o mesmo valor dos juros em todos os períodos.

Evolução de um capital P à taxa i após n períodos

período	início	juros	fim
1	P	Pi	$P + Pi = P(1 + i)$
2	$P + Pi$	Pi	$P + 2Pi = P(1 + 2i)$
3	$P + 2Pi$	Pi	$P + 3i = P(1 + 3i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P + (n - 1)Pi$	Pi	$P + nPi = P(1 + ni)$

Após n períodos de capitalização no regime de juros simples, os JUROS são dados por

$$\boxed{J = nPi}$$

e o MONTANTE (ou VALOR FUTURO) por

$$\boxed{M = P + J = P + nPi = P(1 + ni)}$$

2.2 Exemplos

Exemplo 2.1

Um capital de R$ 2.000,00 ficou aplicado à 2% am no regime de juros simples, por 24 meses. Calcule o montante acumulado.

Exemplo 2.2

Qual o principal necessário para se obter um montante de R$ 10.000,00 daqui a 6 meses a uma taxa de de 12% am no regime de juros simples ?

Exemplo 2.3

Em quantos meses um capital dobra a juros simples de 2% am ?

Exemplo 2.4

Qual a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R$ 1.000,00 se transformar em um montante de R$ 1.500,00 em 20 meses ?

Exemplo 2.5

Um equipamento de som é vendido à vista por R$ 10.000,00 ou por R$ 2.000,00 de entrada e R$ 8.800,00 após 2 meses. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada pela loja ?

Exemplo 2.6

A quantia de R$ 4.500,00 foi tomada como empréstimo a 4,9% am de juros simples, durante 6 meses. Como será paga a dívida se :
a) o capital e os juros forem pagos no final do prazo ?
b) os juros forem pagos no final de cada mês e o capital for pago no final do prazo ?
c) os juros forem pagos antecipadamente e o capital for pago no final do prazo ? Neste caso, qual a taxa mensal realmente paga pelo devedor ?

Exemplo 2.7

Um capital de R$ 500,00 ficou aplicado durante 1 ano a juros simples. Inicialmente foi aplicado a 1,6% am e, depois de um tempo, foi somado aos juros e o montante foi aplicado a 3% am, rendendo R$ 113,40 de juros. Por quanto tempo o capital ficou aplicado a 1,6% am ?

2.3 Exercícios

2.1) Determine os juros simples correspondentes a uma aplicação de R$ 25.000,00 a 16% as, durante 2 anos.

2.2) Um capital de R$ 3.000,00 foi colocado a 5,7% at durante 1 ano, 3 meses e 20 dias. Qual o montante obtido ?

2.3) Para garantir um empréstimo de R$ 5.000,00, José assina uma promissória no valor de R$ 7.150,00 com vencimento em 300 dias. Qual a taxa mensal de juros simples que José está pagando ?

2.4) (Técnico de Admin. e Controle Júnior - Petrobrás 2008/CESGRANRIO) Se o capital for igual a 2/3 do montante e o prazo de aplicação for de 2 anos, qual será a taxa de juros simples considerada ?

2.5) Qual a taxa mensal de juros simples necessária para um capital triplicar em 1 ano ?

2.6) (Esp-Adm-Orç-Fin-Púb Pref. de São Paulo 2010/FCC) Um investidor aplica um capital a juros simples, durante 10 meses, apresentando um montante no valor de R$ 30.000,00 no final do período. Caso este capital tivesse sido aplicado durante 16 meses ajuros simples, e com a mesma taxa de juros anterior, o valor do montante no final deste período teria sido de R$ 33.600,00. Qual o valor do capital aplicado pelo investidor ?

2.7) Durante quanto tempo (meses e dias) deve ficar aplicado um capital à 11% am para que os juros se igualem ao capital ?

2.8) Um artigo de preço à vista igual a R$ 700,00 pode ser adquirido com entrada de 20% mais um pagamento para 60 dias. Se o vendedor cobra juros simples de 4% ao mês, qual o valor do pagamento devido ?

2.9) Um certo tipo de aplicação a juros simples duplica em 2 meses. Em quanto tempo essa aplicação renderá 700% de juros?

2.10) (Vestibular FGV 2002) Um capital aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% ao mês, triplica em quanto tempo ?

2.11) Uma loja vende um televisor, cujo preço a vista é R$ 1.100,00, com uma entrada de R$ 500,00 e mais 1 pagamento de R$ 744,00 em 60 dias. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada pela loja ?

2.12) Você deseja comprar uma calculadora cujo preço é R$ 75,00. Pagando a vista, você obtém 5% de desconto. Se quiser um prazo de 60 dias, o preço será R$ 78,75. Determine se é melhor pagar a vista ou em 60 dias.

2.13) Uma loja atacadista concede 5% de desconto em suas vendas a vista e cobra 15% de juros nas vendas com prazo de 90 dias. Qual a taxa mensal de juros simples cobrada por essa loja ?

2.14) Uma pessoa pegou um empréstimo de R$ 2.000,00 para, após 8 meses, pagar o capital mais os juros simples de 4% am. Dois meses antes da data do pagamento da dívida, procurou o credor e propôs um pagamento imediato de R$ 1.480,00 mais R$ 1.076,00 dois meses depois. Pergunta-se :
a) quanto o devedor deveria pagar ao fim dos 8 meses ?
b) se o credor aceitar a proposta, ao pagar os R$ 1.480,00, quanto a pessoa ficará devendo ?
c) qual a taxa de juros paga sobre o saldo devedor ?

2.15) (SEFAZ-RJ 2009 FGV) Um montante inicial foi aplicado a uma taxa de juros simples de 5% ao mês durante 2 meses e depois reaplicado a uma taxa de juros simples de 10% ao mês durante 2 meses, resultando em R$ 13.200,00. Qual o valor do montante inicial ?

2.16) No ano passado emprestei R$ 3.000,00 a um amigo, que me prometeu pagá-los após 180 dias com juros simples de 2% am. Na data do pagamento, pediu-me mais R$ 2.000,00 emprestados, comprometendo-se a pagá-los juntamente com o montante anterior, com juros de 2,5% am, após 60 dias, o que realmente cumpriu. Quanto meu amigo me pagou ?

2.17) O preço de um fogão é R$ 260,00 e a loja dá 5% de desconto para pagamento a vista. O pagamento a prazo exige uma entrada de 40% e R$ 160,00 após 60 dias. Um cliente tem dinheiro para comprar o fogão a vista mas poderá comprá-lo a prazo e aplicar o restante a 4% am. Qual a melhor opção para esse cliente ?

2.18) Apliquei R$ 20.000,00 a 2,5% am no banco A e R$ 18.000,00 a 3% no banco B. Depois de quanto tempo os 2 montantes serão iguais ?

2.19) (CVM 2003 FCC) em determinada data, uma pessoa aplica R$ 10.000,00 à taxa de juros simples de 2% ao mês. Decorridos 2 meses, outra pessoa aplica R$ 8.000,00 à taxa de juros simples de 4% ao mês. No momento em que o montante referente ao valor aplicado pela primeira pessoa for igual ao montante referente ao valor aplicado pela segunda pessoa, qual será o total de juros correspondente à aplicação da primeira pessoa?

2.20) Apliquei a terça parte do meu capital em letras de câmbio, que renderam 28% em um ano. O restante apliquei em caderneta de poupança que rendeu 31% no mesmo período. Meu capital aumentou em R$ 27.000,00. Qual o capital inicialmente aplicado e quanto foi aplicado em cada investimento ?

2.21) A financeira A empresta a juros simples de 10% am e cobra, no ato do empréstimo, 4,5% do valor emprestado como taxa de serviço. A financeira B cobra juros de 12% am mas somente 1,5% de taxa de serviço, também no ato de empréstimo.
a) para empréstimos de 1 mês, quais as taxas realmente cobradas ?
b) e para empréstimos de 6 meses ?
c) estabeleça fórmulas que dão as taxas realmente cobradas pelas financeiras em prazos de n meses.
d) para que prazo as taxas reais de ambas seriam iguais ?

2.22) Uma firma comprou a prazo um equipamento cujo preço a vista é R$ 116.000,00. Pagou R$ 50.000,00 de entrada, R$ 40.000,00 após 3 meses e saldou a dívida com uma terceira parcela 6 meses após a compra. Se a taxa de juros é 3% am, qual o valor da terceira parcela ? (Considere os saldos devedores em cada pagamento)

Respostas

2.1) R$ 16.000,00

2.2) R$ 3.893,00

2.3) 4,3% am

2.4) 25% aa

2.5) 16,6667% am

2.6) R$ 24.000,00

2.7) 9 meses e 3 dias

2.8) R$ 604,80

2.9) 14 meses

2.10) 80 meses

2.11) 12% am

2.12) Se a taxa do mercado for maior que 5,2632% am é melhor comprar à prazo. Caso contrário, é melhor comprar à vista.

2.13) 7,0175% am

2.14) a) R$ 2.640,00 b) R$ 1.000,00 c) 3,8% am

2.15) R$ 10.000,00

2.16) R$ 5.628,00

2.17) Taxa da loja = 5,9441% am Taxa de mercado = 4% am
Melhor comprar à vista.

2.18) 4 anos e 2 meses

2.19) R$ 4.400,00

2.20) C=R$ 90.000,00 Letras de Câmbio=R$ 30.000,00 Poupança=R$ 60.000,00

2.21) a) i_A=15,1832% am i_B=13,7056% am

b) i_A=11,2565% am i_B=12,4365% am

c) $i_A = \dfrac{45 + 100n}{955n}$ $i_B = \dfrac{15 + 120n}{985n}$

d) 1 mês e 26 dias

2.22) R$ 34.814,60

Capítulo 3

Juros compostos

3.1 Conceitos básicos

No regime de JUROS COMPOSTOS, os juros de cada período são calculados aplicando-se a taxa de juros sobre o saldo existente no início do período.

Evolução de um capital P à taxa i após n períodos

período	início	juros	fim
1	P	Pi	$P + Pi = P(1+i)$
2	$P(1+i)$	$P(1+i)i$	$P(1+i) + Pi(1+i) = P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2 i$	$P(1+i)^2 + Pi(1+i)^2 = P(1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}i$	$P(1+i)^{n-1} + Pi(1+i)^{n-1} = P(1+i)^n$

Após n períodos de capitalização no regime de juros compostos, MONTANTE (ou VALOR FUTURO) é dado por

$$\boxed{M = P(1+i)^n}$$

e os JUROS são dados por

$$\boxed{J = M - P = P[(1+i)^n - 1]}$$

3.2 Exemplos

Exemplo 3.1

Calcule o montante produzido por um capital de R$ 250.000,00 que ficou aplicado durante 1 ano e 2 meses à taxa 7,5% am no regime de juros compostos.

Exemplo 3.2

Qual o capital que aplicado a 8,2% am durante 6 meses no regime de juros compostos produz um montante de R$ 200.000,00 ?

Exemplo 3.3

Um investidor aplicou R$ 320.000,00 em títulos que lhe proporcionaram um resgate de R$ 397.535,00 após 90 dias. A que taxa mensal de juros compostos estava aplicado o capital ?

Exemplo 3.4

Em quanto tempo um capital de R$ 15.000,00 atinge o montante de R$ 15.916,30 se for aplicado à taxa 0,7% am de juros compostos ?

Exemplo 3.5

Pedro tem 2 opções de pagamento para a compra de um eletrodoméstico : 3 prestações mensais de R$ 50,00 ou 5 prestações mensais de R$ 31,00. Em qualquer caso a 1ª prestação é paga no ato da compra. Se Pedro pode aplicar seu dinheiro a 5% am (juros compostos), qual a melhor opção de compra ?

Exemplo 3.6

O Sr. Fumanchu contraiu um empréstimo de R$ 9.000,00 para ser pago em 2 prestações com vencimentos 3 e 5 meses depois. Se a $2^{\underline{a}}$ prestação é o dobro da $1^{\underline{a}}$ e os juros são de 2% am, determine o valor das prestações.

Exemplo 3.7

Certa loja oferece a seus clientes 2 formas de pagamento :
a) pagamento único 1 mês após a compra
b) 3 prestações mensais iguais sendo a $1^{\underline{a}}$ no ato da compra
Se você fosse cliente dessa loja, qual seria sua opção ?

Exemplo 3.8

Regina tem 2 opcões para o pagamento de um vestido :
a) À vista com $x\%$ de desconto
b) em 2 prestações mensais iguais sem juros, vencendo a $1^{\underline{a}}$ um mês após a compra.
Supondo que Regina pode aplicar seu dinheiro a 5% am, para que valores de x ela preferirá a $1^{\underline{a}}$ alternativa ?

3.3 Exercícios

3.1) Determinar o montante acumulado em 6 trimestres, com taxa de 1,2% am, a partir de um principal de R$ 10.000,00.

3.2) (Técnico de Admin. e Controle Júnior - Petrobrás 2008/CESGRANRIO) Se aplicarmos o capital C por 3 meses à taxa composta de 7% a.m., qual é o rendimento total obtido, proporcionalmente a C ?

3.3) (Técnico Admin. BNDES 2008/CESGRANRIO) A metade de um capital C foi aplicada a juros compostos com taxa de 20% ao mês. Simultaneamente, a outra metade foi aplicada a juros simples com taxa mensal de j%. Ao final de dois meses, os montantes a juros simples e a juros compostos foram somados e seu valor correspondia ao capital total C, acrescido de 50%. Quantos são os inteiros positivos divisores de j?

3.4) Qual principal deve ser aplicado para produzir um montante de R$ 20.000,00, em um prazo de 2 anos, com taxa de 12% as ?

3.5) Luiza aplicou seu capital a juros simples durante 90 dias à taxa de 5% a.m. Se tivesse aplicado a juros compostos nas mesmas condições, teria recebido R$ 305,00 a mais de montante. Determine o capital inicial aplicado por Luiza.

3.6) Dois capitais C_1 e C_2, que estão na razão de três para cinco, foram aplicados a juros compostos e a juros simples, respectivamente. Se a aplicação foi de cinco meses à taxa de 4% ao mês, determine a razão entre os montantes M_1 e M_2.

3.7) Um investidor aplicou R$ 10.000,00 e, após um ano, recebeu R$ 11.200,00. Determinar a taxa de rentabilidade mensal dessa aplicação.

3.8) Certa loja tem como política de vendas a crédito exigir 30% do valor da mercadoria à vista como entrada e o restante a ser liquidado em 3 meses. Neste caso, o valor da mercadoria sofre um acréscimo de 10% a título de despesas administrativas. Qual é a taxa mensal de juros dessa loja ?

3.9) Precisarei ter R$ 67.300,00 para uma compra **daqui a 24 meses**.

(a) Se o mercado financeiro me garante remunerações a uma taxa de 0,85% am. (juros COMPOSTOS), qual a quantia mínima que devo aplicar hoje para que possa resgatar os R$ 67.300,00 que necessito daqui a 24 meses ? (Mostre as contas)

(b) Se eu possuo R$ 53.000,00 para aplicar hoje, qual a taxa mensal mínima que devo buscar nas aplicações (juros COMPOSTOS) para que possa resgatar R$ 67.300,00 daqui a 24 meses ? (Mostre as contas)

3.10) Determinar o número de meses necessários para triplicar um capital aplicado a uma taxa de 1% am.

3.11) Em quanto tempo um capital dobra se for aplicado à 10% am :
a) em regime de juros compostos ?
b) em regime de juros simples ?

3.12) Apliquei uma quantia à 4% am. Após 5 meses, a taxa foi elevada para 12% am e meu capital ficou aplicado por mais 3 meses, quando, então, retirei o montante de R$ 170.930,97.
a) qual o capital inicial ?
b) a que taxa média esse capital esteve aplicado ?

3.13) Uma pessoa tomou emprestados R$ 10.000,00 obrigando-se a pagá-los em 3 parcelas mensais iguais,com juros de 5% am. Qual o valor das parcelas se a 1ª vencer a 90 dias do empréstimo ?

3.14) Faltando 3 pagamentos mensais de R$ 50.400,00 para o término de um contrato, o devedor deseja liquidá-lo na data em que deveria efetuar o 1º desses pagamentos. Quanto deverá pagar se a taxa é de 3% am ?

3.15) Uma loja está anunciando uma geladeira por R$ 480,00 à vista ou em 3 pagamentos mensais e iguais a R$ 160,00, sendo o 1º no ato da compra. Considerando uma taxa de 6% am, qual o desconto que essa loja poderia dar para o pagamento à vista ?

3.16) Certo capital esteve aplicado por um ano da seguinte forma : nos 6 primeiros meses a 2% am, nos 3 meses seguintes a 2,5% am e nos 3 últimos meses a 3% am. A que taxa anual esteve aplicado esse capital ?

3.17) Tenho que pagar R$ 42.600,00 por uma compra e recebo dos vendedores 2 opções de pagamento:

(1) À vista, com 1,1% de desconto (sobre os R$ 42.600,00)

(2) Uma entrada (agora) de R$ 14.200,00 e mais 2 pagamentos mensais de R$ 14.200,00 nos meses subsequentes.

O mercado oferece uma taxa mensal de 1,15% am. (juros COMPOSTOS).

Qual a melhor opção de pagamento ? (Mostre as contas e justifique)

3.18) Um banco empresta dinheiro a 3% am. No ato do empréstimo ficam retidos 5% a título de seguro. Uma pessoa quer pegar um empréstimo para aplicar o capital à 4,5% am.
a) se o empréstimo for por 60 dias será bom negócio ? Justifique.
b) se o empréstimo for por 120 dias será bom negócio ? Justifique.
c) a partir de qual prazo começa a valer a pena essa operação ?

3.19) Uma empresa tem 2 pagamentos de R$ 150.000,00 para efetuar no fim de 2 e 4 meses. Em vez disso, propõe pagar em 3 parcelas iguais no fim de 3,4 e 5 meses. Calcule o valor dessas parcelas considerando a taxa de 3,8% am.

3.20) Um investidor deseja fazer uma aplicação à taxa de 1,5% am para garantir uma retirada de R$ 10.000,00 ao final de 6 meses e outra de R$ 20.000,00 ao final de 12 meses. Calcule o menor valor a ser aplicado ?

3.21) Uma empresa deseja pagar uma nota promissória de R$ 10.000,00 vencida há 3 meses e antecipar o pagamento de outra de R$ 50.000,00 a vencer daqui a 5 meses. Determinar o valor do pagamento a ser feito de imediato pela empresa para liquidar essa notas promissórias considerando a taxa de 1,2% am.

3.22) Uma empresa contraiu um empréstimo à taxa de 1,2% am para liquidá-lo em um ano, com 2 pagamentos semestrais iguais de R$ 100.000,00. Esse empréstimo, entretanto, pode ser quitado com um único pagamento de R$ 197.755,00. Determinar no final de que mês deve ser feito esse pagamento.

3.23) Estou fazendo (hoje) um empréstimo a uma taxa de juros (COMPOSTOS) de 1,5% am. e pretendo quitá-lo com 3 pagamentos mensais de R$ 19.100,00 no fim de 4, 8 e 11 meses.

(a) Quanto estou tomando emprestado ?

(b) Se, em vez da forma de pagamento acima, é proposto pagar em 2 parcelas iguais no fim de 2 e 7 meses, calcule o valor dessas novas parcelas e faça o DFC desse novo financiamento.

(c) Eu proponho ao credor liquidar o empréstimo com um único pagamento no valor de R$ 59.200,00 ao final de um certo mês, sem que ele (o credor) tenha prejuízo. Ao final de que mês esse pagamento único deve ser feito de modo que o meu prejuízo seja minimizado ? (Justifique)

3.24) Um banco realiza suas operações de financiamento cobrando uma taxa (efetiva) de 12% am em 2 parcelas, da seguinte forma :
(i) uma parcela antecipada no ato do financiamento.
(ii) 8% am cobrados no final do prazo.
Determine a parcela a ser cobrada antecipadamente para um financiamento que será liquidado 6 meses após a liberação dos recursos.

Respostas

3.1) R$ 12.395,08

3.2) 22,5043%

3.3) 6

3.4) R$ 12.710,36

3.5) R$ 40.000,00

3.6) 0,6083

3.7) i=0,9489% am

3.8) 4,5516%

3.9) (a) R$ 54.927,96 (b) 1,0003 % am

3.10) 110 meses e 13 dias

3.11) a) 7 meses e 9 dias b) 10 meses

3.12) P=100.000,00 i=6,9307% am

3.13) R$ 4.048,47

3.14) R$ 146.838,87

3.15) 5,5536%

3.16) 32,5209% aa

3.17) Melhor opção: à prazo, pois seu valor presente (R$ 42.117,51) é menor do que à vista (R$ 42.131,40).

3.18) a) mau negócio b) bom negócio c) 3 meses e 17 dias

3.19) R$ 103.824,06

3.20) R$ 25.873,17

3.21) R$ 57.469,38

3.22) 8 meses

3.23) (a) R$ 51.165,63 (b) R$ 27.336,62 (c) Ao final de 9 meses

3.24) 19,6%

Capítulo 4

Taxas de juros

4.1 Introdução

Até agora temos trabalhado com taxas de juros cuja unidade de tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

Essas são chamadas TAXAS EFETIVAS de juros. Por exemplo: 2% ao mês capitalizados mensalmente, 3% ao trimestre capitalizados trimestralmente, 10% ao ano capitalizados anualmente, etc.

Nesses casos, costuma-se simplesmente dizer 2% ao mês, 3% ao trimestre, 10% ao ano, etc.

Iniciaremos este capítulo relacionando taxas efetivas com unidades de tempo diferentes. São as taxas proporcionais (no regime de juros simples) e as taxas equivalentes (juros compostos).

Veremos então as TAXAS NOMINAIS (cujas unidades de tempo não coincidem com as unidades de tempo dos períodos de capitalização) em contraposição às taxas efetivas.

Encerraremos o capítulo estudando períodos de capitalização fracionários.

4.2 Juros simples - Taxas proporcionais

TAXAS PROPORCIONAIS são taxas de juros com unidades de tempo diferentes que, aplicadas ao mesmo principal durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante, **no regime de juros simples**.

O exemplo a seguir ilustra bem a situação, exibindo 3 taxas de juros que se mostram proporcionais.

Exemplo 4.1

Determinar os montantes acumulados no final de n anos, a partir de um principal de P, no regime de juros simples, com as seguintes taxas de juros:

a) 12% aa b) 6% as c) 1% am

Relação entre taxas proporcionais

Sejam i_a = taxa de juros anual
i_s = taxa de juros semestral
i_t = taxa de juros trimestral
i_m = taxa de juros mensal
i_d = taxa de juros diária

Vamos deduzir inicialmente a relação entre as taxas proporcionais mensal e anual.

Suponhamos um principal P aplicado por 1 ano à taxa i_a e por 12 meses à taxa i_m. Da definição de taxas proporcionais temos

$$P(1+i_a) = P(1+12i_m)$$

$$1+i_a = 1+12i_m$$

Portanto

$$\boxed{i_a = 12i_m}$$

Analogamente, obtemos

$$\boxed{i_a = 2i_s = 4i_t = 12i_m = 360i_d}$$

Exemplo 4.2

Determinar as taxas semestral, mensal e diária proporcionais a 24% aa.

Exemplo 4.3

Um cliente de um certo banco utilizou R$ 1.000,00 do cheque especial por 17 dias. Sendo a taxa de juros do cheque especial de 7,55% am, calcule os juros pagos pelo cliente.

4.3 Juros compostos - Taxas equivalentes

TAXAS EQUIVALENTES são taxas de juros com unidades de tempo diferentes que, aplicadas ao mesmo principal durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante, **no regime de juros compostos**.

Exemplo 4.4

Determinar os montantes acumulados ao final de n anos, a partir de um principal P, no regime de juros compostos, com as seguintes taxas de juros:

a) 12,6825% aa b) 6,15202% as c) 1% am

Relação entre taxas equivalentes

Sejam, como antes, i_a = taxa de juros anual, i_s = taxa de juros semestral, etc.

Vamos deduzir inicialmente a relação entre as taxas equivalentes mensal e anual:

Suponhamos um principal P aplicado por 1 ano à taxa i_a e por 12 meses à taxa i_m. Da definição de taxas equivalentes temos

$$P(1+i_a) \;=\; P(1+i_m)^{12}$$

Portanto

$$\boxed{1+i_a \;=\; (1+i_m)^{12}}$$

Analogamente, obtemos

$$\boxed{1+i_a \;=\; (1+i_s)^2 \;=\; (1+i_t)^4 \;=\; (1+i_m)^{12} \;=\; (1+i_d)^{360}}$$

Exemplo 4.5

Determinar as taxas semestral e anual equivalentes a 3% at.

Exemplo 4.6

Resolva o exemplo 4.3 no regime de juros compostos.

Obs.: Comparação entre taxas anuais proporcionais e equivalentes

Taxa Efetiva Mensal	Taxa Anual Proporcional	Taxa Anual Equivalente
1%	12%	12,68%
3%	36%	42,58%
5%	60%	79,59%
7%	84%	125,22%
10%	120%	213,84%
12%	144%	289,60%
15%	180%	435,03%
20%	240%	791,61%

4.4 Taxa Nominal

TAXA NOMINAL é a taxa de juros cuja unidade de tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização.

A taxa nominal é geralmente fornecida em termos anuais.

São exemplos de taxas nominais : 12% aa capitalizados mensalmente, 24% aa capitalizados trimestralmente, 18% aa capitalizados diariamente, etc.

A taxa nominal é bastante utilizada no mercado e não representa uma taxa efetiva. Por isso devemos ter cuidado nos cálculos dos juros compostos que envolvem taxas nominais.

Toda taxa nominal traz uma taxa efetiva implícita, que é a taxa de juros a ser aplicada em cada período de capitalização no regime de juros compostos.

Nos exemplos acima as taxas efetivas implícitas são calculadas do seguinte modo:

$$12\% \text{ aa capitalizados mensalmente} = \frac{12\%\text{aa}}{12 \text{ meses}} = 1\% \text{ am (taxa efetiva implícita)}$$

$$24\% \text{ aa capitalizados trimestralmente} = \frac{24\%\text{aa}}{4 \text{ trimestres}} = 6\% \text{ at (taxa efetiva implícita)}$$

$$18\% \text{ aa capitalizados diariamente} = \frac{18\%\text{aa}}{360 \text{ dias}} = 0{,}05\% \text{ ad (taxa efetiva implícita)}$$

Exemplo 4.7

Verônica pegou um empréstimo com taxa de 6% aa com capitalização mensal. Qual a taxa de juros anual que Verônica está pagando por esse um empréstimo ?

Exemplo 4.8

Determinar as taxas efetivas anuais equivalentes a uma taxa nominal de 9% aa com os seguintes períodos de capitalização :

a) mensal b) trimestral c) semestral

4.5 Taxa Bruta X Taxa Líquida

Chama-se taxa bruta de uma aplicação financeira a taxa de juros obtida considerando-se o valor da aplicação financeira e o valor de resgate sem o desconto do imposto de renda.

Quando o desconto do imposto de renda é considerado, a taxa é denominada taxa líquida.

4.6 Período de capitalização fracionário

Em regime de juros compostos, quando o período é fracionário, há três modos de se calcular os juros de uma operação financeira.

Tais possibilidades são convenções que dependem do tipo de operação.

Convenção dos períodos inteiros

Só serão calculados os juros dos períodos inteiros, não havendo remuneração na parte fracionária.

Exemplo 4.9

Um poupador aplica R$ 1.000,00 em caderneta de poupança a 10% am e retira o dinheiro 8 meses e 15 dias depois. Qual o montante retirado ?

Convenção Exponencial

Remunera-se o capital considerando todo o período (inteiro e fracionário).

Exemplo 4.10

Resolva o exemplo 4.9 utilizando a convenção exponencial.

Convenção Linear

Na parte inteira do período, o capital é remunerado a juros compostos. Obtido o montante correspondente à parte inteira, calcula-se os juros simples que esse montante rende na parte fracionária. O montante final é a soma dessas parcelas.

Exemplo 4.11

Resolva o exemplo 4.9 aplicando convenção linear.

Obs.: Há casos em que juros simples rendem mais que juros compostos.

Podemos verificar esse fato através dos exemplos 4.3 e 4.6, 4.10 e 4.11

Vemos que isso acontece quando o período de capitalização é menor que 1.

4.7 Exercícios

4.1) Determinar as taxas mensal e diária proporcionais a 3,6% at.

4.2) Determinar as taxas mensal e trimestral equivalentes a 9% aa.

4.3) Determinar as taxas trimestral e anual equivalentes à taxa nominal de 11,4% aa com c9apitalização mensal.

4.4) Uma aplicação de R$ 1.000,00 proporcionou uma retirada de R$ 1.025,56 após 23 dias. Calcule as taxas de juros diária e mensal dessa operação (juros compostos - convenção exponencial).

4.5) Uma instituição financeira remunera suas aplicações com uma taxa de 1,2% ao mês, no regime de juros simples. Determinar os valores de resgate e as taxas efetivas mensais no regime de juros compostos de uma aplicação de R$ 10.000,00, nas seguintes hipóteses para o prazo de operação: (a) 10 dias e (b) 60 dias.

4.6) (SEFAZ-RJ 2011/FGV) Um indivíduo deixa de pagar um título no valor de R$ 2.000,00, atrasando o pagamento em três meses. A taxa de juros, juros simples, é de 35%

ao ano. Ao pagar o título, qual o seu valor?

4.7) (SEFAZ-RJ 2008/FGV) Um capital é aplicado durante 120 dias a uma taxa de juros simples de 15% ao ano, produzindo um montante de R$ 8.400,00. Nestas condições, qual o capital aplicado ?

4.8) Um corretor de tìtulos propõe a seu cliente uma aplicação cuja rentabilidade é de 40% a.a. Se o investidor souber de outra alternativa onde possa ganhar 9% a.t., qual será sua escolha ?

4.9) (Prefeitura de Ituporanga - 2009 - FEPESE) Quais são os juros simples de R$ 12.600,00, à taxa de 7,5% ao ano, em 4 anos e 9 meses ?

4.10) A taxa de juros cobrada pelo banco A é de 30% ao ano, sendo sua capitalização anual. O banco B, numa campanha promocional, informa que sua taxa é de 27% ao ano, tendo a diferenciá-la apenas o fato de sua capitalização ser mensal. Qual é a melhor taxa para o cliente ?

4.11) (Técnico da Receita Federal 2006 ESAF) Indique qual o capital que aplicado a juros simples à taxa de 3,6% ao mês rende R$ 96,00 em 40 dias.

4.12) (AFRE-SC 2010/FEPESE) Um Capital de R$ 1.000,00 ficou aplicado durante 135 dias, alcançando no final deste período o montante de R$ 1.450,00. Calcule a taxa mensal de juros simples que esse capital rendeu.

4.13) (Técnico Administrativo BNDES 2008/CESGRANRIO) Aplicando-se R$ 5.000,00 a juros compostos, à taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização bimestral, qual será o montante ao fim de 4 meses ?

4.14) Um vestido é vendido por R$ 250,00 ou então por R$ 80,00 de entrada mais uma parcela de R$ 178,50 após 40 dias. Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento ?

4.15) Um poupador com certo volume de capital deseja diversificar suas aplicações no mercado financeiro. Para tanto, aplica 60% do capital numa alternativa de investimento que paga 34,2% ao ano de juros simples pelo prazo de 60 dias. A outra parte é aplicada numa conta de poupança por 30 dias, sendo remunerada pela taxa linear de 3,1% ao mês. O total dos rendimentos auferidos pelo aplicador atinge R$ 1.562,40. Pede-se calcular o valor de todo o capital investido.

4.16) Qual é a taxa nominal anual, com capitalização semestral, que conduz à taxa efetiva de 40% ao ano ?

Respostas

4.1) 1,2% am. e 0,04% ad.

4.2) 0,7207% am. e 2,1778% at.

4.3) 2,8772% at. e 12,0149% aa.

4.4) 0,1098% ad. e 3,3468% am.

4.5) (a) R$ 10.040,00 e 1,2048% am. ; (b) R$ 10.240,00 e 1,1929% am.

4.6) R$ 2.175,00

4.7) R$ 8.000,00

4.8) 9% a.t.

4.9) R$ 4.488,75

4.10) Banco A

4.11) R$ 2.000,00

4.12) 10% a.m.

4.13) R$ 5.408,00

4.14) 3,75% a.m.

4.15) R$ 33.527,90

4.16) 36,6432% a.a.

Capítulo 5

Descontos

Chama-se **título de crédito** o documento comprobatório de uma dívida. Como exemplo de títulos de crédito podemos citar a nota promissória, a duplicata, letras de câmbio, cheque, ações, etc.

O valor declarado no título, chamado **valor nominal**, **valor de face** ou **valor de resgate** corresponde ao valor que pode ser recebido pelo título na data de seu vencimento.

Alguns títulos de crédito podem sofrer a operação de DESCONTO, que consiste em o portador resgatar o título antes do vencimento, recebendo por ele um valor menor do que aquele que receberia se aguardasse a data do vencimento.

O valor antecipado recebido pelo portador chama-se **valor atual** e representa a diferença entre o valor nominal e o desconto.

O desconto corresponde aos juros cobrados pela antecipação do pagamento.

Existem dois tipos de desconto : o desconto comercial e o desconto racional.

• DESCONTO COMERCIAL: também chamado DESCONTO "POR FORA", é calculado sobre o valor **nominal** do título.

• DESCONTO RACIONAL: também chamado DESCONTO "POR DENTRO", é calculado sobre o valor **atual** do título.

É o desconto comercial que se utiliza nas instituições comerciais e bancárias, como o próprio nome indica. Entretanto, só é costume descontar títulos quando o prazo que antecede seu vencimento é curto pois, sendo o desconto comercial calculado sobre o valor nominal do título, se o prazo for longo, o portador poderá receber um valor menor do que o investido no título.

5.1 Desconto Simples

Desconto Comercial Simples

Supondo que faltam n períodos para o vencimento de um título de valor nominal N e que a instituição financeira que vai descontá-lo utiliza a taxa i de desconto comercial, temos :

$$\boxed{D_{cs} = Nin}$$

O valor atual é dado por :

$$\boxed{A_{cs} = N - D_{cs}}$$

Exemplo 5.1

O portador de uma nota promissória de R$ 60.000,00 procurou uma agência bancária 60 dias antes do vencimento a fim de resgatá-la. O banco fez o desconto comercial com taxa de 8% am. Calcule o valor do desconto e a quantia recebida pelo portador.

Exemplo 5.2

Um capitalista investe R$ 50.000,00 em letras de câmbio com vencimento para 180 dias e renda fixada em 5% am a juros simples.

a) Calcule o valor nominal do título.

b) Se o título for descontado 150 dias antes do vencimento quanto o investidor receberá por ele se o desconto for comercial com taxa de 5% am ?

Exemplo 5.3

Um título de R$ 10.000,00 vai ser descontado 8 meses antes do vencimento em um banco que utiliza desconto comercial com taxa de 13% am. É possível efetuar esse desconto ?

Exemplo 5.4

Determine o prazo máximo de antecipação para que seja possível efetuar o desconto comercial com taxa i. Aplique o resultado ao exemplo anterior.

Desconto Racional Simples

Supondo que faltam n períodos para o vencimento de um título de valor nominal N, que a instituição financeira que vai descontá-lo utiliza a taxa i de desconto racional e que seu valor atual é A_{rs} temos :

$$\boxed{D_{rs} = A_{rs} in} \qquad (*)$$

Na prática não é possível calcular o desconto racional com essa expressão pois para calcular o valor atual A_{rs} é preciso calcular o desconto. Mas

$$A_{rs} = N - D_{rs}$$

Substituindo essa expressão em (*) obtemos

$$D_{rs} = (N - D_{rs})in \implies D_{rs} = Nin - D_{rs}in \implies D_{rs}(1 + in) = Nin$$

Portanto

$$\boxed{D_{rs} = \frac{Nin}{1 + in}}$$

Agora, podemos calcular o valor atual :

$$A_{rs} = N - \frac{Nin}{1 + in} \implies \boxed{A_{rs} = \frac{N}{1 + in}}$$

Exemplo 5.5

Calcule o valor recebido pelo investidor do Exemplo 5.2 se o desconto for racional com taxa de 5% am.

Exemplo 5.6

Resolva o Exemplo 5.3 utilizando desconto racional

5.2 Desconto Composto

Desconto Comercial Composto

Suponhamos que um título de valor nominal N vai ser descontado comercialmente n períodos antes do vencimento com taxa i :

$$\begin{array}{lcl} D_1 = Ni & \Longrightarrow & A_1 = N - D_1 = N - Ni = N(1-i) \\ D_2 = A_1 i = N(1-i)i & \Longrightarrow & A_2 = A_1 - D_2 = N(1-i) - N(1-i)i = N(1-i)^2 \\ D_3 = A_2 i = N(1-i)^2 i & \Longrightarrow & A_3 = A_2 - D_3 = N(1-i)^2 - N(1-i)^2 i = N(1-i)^3 \end{array}$$

Após n períodos

$$\boxed{A_{cc} = N(1-i)^n} \quad \text{e} \quad \boxed{D_{cc} = N - A_{cc}}$$

Desconto Racional Composto

Suponhamos que um título de valor nominal N vai ser descontado racionalmente n períodos antes do vencimento com taxa i :

$$\begin{array}{lcccl} D_1 = A_1 i \quad \text{e} \quad A_1 = N - D_1 & \Longrightarrow & D_1 = \dfrac{Ni}{1+i} & \Longrightarrow & A_1 = \dfrac{N}{1+i} \\ D_2 = A_2 i \quad \text{e} \quad A_2 = A_1 - D_2 & \Longrightarrow & D_2 = \dfrac{Ni}{(1+i)^2} & \Longrightarrow & A_2 = \dfrac{N}{(1+i)^2} \\ D_3 = A_3 i \quad \text{e} \quad A_3 = A_2 - D_3 & \Longrightarrow & D_3 = \dfrac{Ni}{(1+i)^3} & \Longrightarrow & A_3 = \dfrac{N}{(1+i)^3} \end{array}$$

Após n períodos

$$\boxed{A_{rc} = \frac{N}{(1+i)^n}} \quad \text{e} \quad \boxed{D_{rc} = N - A_{rc}}$$

Observações:

1. Ao realizar uma operação de desconto, algumas vezes a instituição inclui despesas adicionais, denominadas despesas administrativas, calculadas sobre o valor nominal. Neste caso, o desconto é chamado **desconto bancário** e pode ser tratado como um desconto comercial, adicionando uma parcela correspondente às despesas administrativas na taxa de desconto.

2. O desconto comercial simples (desconto simples "por fora") é amplamente utilizado no Brasil, enquanto que o desconto racional simples (desconto simples "por dentro") praticamente inexiste. Por outro lado, o desconto comercial composto (desconto composto "por fora") não possui, pelo menos no Brasil, nenhuma utilização prática conhecida. Quanto ao desconto racional composto (desconto composto "por dentro"), podemos dizer que ele nada mais é do que a operação inversa da capitalização no regime de juros compostos.

5.3 Exercícios

5.1) Uma pessoa aplicou R$ 100.000,00 em Letras de Câmbio que lhe proporcionariam uma renda de 36% após um ano. Entretanto, 10 meses após a aplicação a pessoa resolveu resgatar as letras com desconto comercial de 3% am.

a) Quanto recebeu pelas letras ?

b) A que taxa de juros compostos esteve empregado seu capital durante os 10 meses ?

c) Qual seria a taxa mensal obtida se as letras fossem resgatas em seu vencimento ?

5.2) João possui um título de R$ 60.000,00 com vencimento para daqui a 4 meses. Um empresário amigo de João, necessitando de dinheiro, propõe que João desconte o título comercialmente com taxa de 3% am e lhe empreste o dinheiro pelo mesmo prazo. Qual deve ser a taxa mínima cobrada pelo empréstimo para que João não tenha prejuízo ?

5.3) Um banco descontou uma nota promissória de R$ 50.000,00 para um cliente 90 dias antes do vencimento e depositou R$ 45.000,00 em sua conta corrente. É costume do banco cobrar, por esse serviço, uma taxa de 0,4% sobre o valor nominal do título. Qual a taxa de desconto comercial cobrada pelo banco ?

5.4) Uma empresa, necessitando de dinheiro, possui 2 alternativas :

a) Descontar um título de R$ 10.000,00 que vence daqui a 5 meses com taxa de 2,5% am. (desconto comercial simples)

b) Pegar um empréstimo de R$ 8.750,00 pelo mesmo período pagando 2,7066% am. (juros compostos)

Qual a melhor alternativa para a empresa ?

5.5) (AFC 2005 - ESAF) Marcos descontou um título 45 dias antes de seu vencimento e recebeu R$ 370.000,00. A taxa de desconto comercial simples foi de 60% ao ano. Obtenha o valor nominal do título e a taxa efetiva mensal (de juros simples) da operação.

5.6) (Administrador BNDES 2009 CESGRANRIO) Uma promissória sofrerá desconto comercial 2 meses e 20 dias antes do encimento, à taxa simples de 18% ao ano. O banco que descontará a promissória reterá, a título de saldo médio, 7% do valor de face durante o período que se inicia na data do desconto e que termina na data do vencimento da promissória. Há ainda IOF de 1% sobre o valor nominal. Para que o valor líquido, recebido no momento do desconto, seja R$ 4.620,00, qual deve ser o valor nominal ?

5.7) Um título, descontado por fora, à taxa linear (juros simples) de 0,5% ao dia, produziu o desconto equivalente a 1/8 de si mesmo. Determinar o prazo de antecipação.

5.8) Uma pessoa descontou duas duplicatas em um banco, no regime de desconto comercial, a uma taxa de juros simples de 15% ao ano. O primeiro título vencia em 270 dias e o segundo em 160 dias, sendo que o último era de valor nominal 50% superior ao primeiro. Sabendo-se que os dois descontos somaram o valor de R$ 382,50, determine o valor nominal do título que produziu o maior desconto.

5.9) O valor nominal de um compromisso é de cinco vezes o desconto racional simples, caso a antecipação seja de oito meses. Qual é o seu valor nominal, se o valor de resgate é de R$ 1.740,00 ?

5.10) (PETROBRAS 2010/CESGRANRIO) Um título sofreu desconto racional simples 3 meses antes do seu vencimento. A taxa utilizada na operação foi 5% ao mês. Se o valor do desconto foi R$ 798,00, qual o valor de face desse título ?

5.11) (BNB 2003 - ACEP) José tomou emprestado R$ 10.000,00, pretendendo saldar a dívida após dois anos. A taxa de juros (simples) combinada foi de 30% a.a. Qual valor José pagaria, 5 meses antes do vencimento combinado, sem prejuízo para o banco, se nesta época a taxa de juros simples anual fosse 24% e fosse utilizado desconto simples racional ?

5.12) (AFPS 2002 - ESAF) Um título no valor nominal de R$ 10.900,00 deve sofrer um desconto comercial simples de R$ 981,00 três meses antes do seu vencimento. Todavia uma negociação levou à troca do desconto comercial por um desconto racional simples. Calcule o novo desconto, considerando a mesma taxa de desconto mensal.

Respostas

5.1) (a) R$ 127.840,00 ; (b) 2,4865% am. ; (c) 2,5955% am.

5.2) 13,6364% em 4 meses

5.3) 3,2% am.

5.4) Tanto faz !

5.5) R$ 400.000,00 e 5,4054% a.m.

5.6) R$ 5.250,00

5.7) 25 dias

5.8) R$ 1.800,00

5.9) R$ 2.175,00

5.10) R$ 6.118,00

5.11) R$ 15.545,45

5.12) R$ 900,00

Capítulo 6

Séries uniformes

Uma SÉRIE UNIFORME é um conjunto de capitais de mesmo valor que ocorrem em intervalos de tempo iguais.

Nas séries uniformes a distribuição dos capitais pode ser de dois tipos :

- **Capitais Postecipados** : os capitais ocorrem no final de cada período.

- **Capitais Antecipados** : os capitais ocorrem no início de cada período.

6.1 Séries Postecipadas

Valor Presente de uma Série Postecipada (VP_p)

$$VP_p = \frac{R_p}{1+i} + \frac{R_p}{(1+i)^2} + ... + \frac{R_p}{(1+i)^n} \quad ... (1)$$

$$VP_p(1+i) = R_p + \frac{R_p}{(1+i)} + ... + \frac{R_p}{(1+i)^{n-1}} \quad ... (2)$$

Fazendo (2)-(1), temos

$$VP_p(1+i) - VP_p = R_p - \frac{R_p}{(1+i)^n} \implies VP_p i = R_p[1-(1+i)^{-n}]$$

$$\boxed{VP_p = R_p \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Valor Futuro de uma Série Postecipada (VF_p)

Uma vez determinado o valor presente

$$VP_p = R_p \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

o valor futuro de uma série postecipada pode ser calculado por

$$VF_p = VP_p(1+i)^n$$

Portanto

$$\boxed{VF_p = R_p \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

6.2 Séries Antecipadas

Valor Presente de uma Série Antecipada (VP_a)

Para obtermos o valor presente de uma série antecipada basta observarmos que

$$R_p = R_a(1+i)$$

Substituindo essa relação na expressão do valor presente para séries postecipadas obtemos

$$\boxed{VP_a = R_a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Valor Futuro de uma Série Antecipada (VF_a)

Uma vez determinado o valor presente de uma série antecipada

$$VP_a = R_a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

o valor futuro pode ser calculado por

$$VF_a = VP_a(1+i)^n$$

Portanto

$$\boxed{VF_a = R_a(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}}$$

6.3 Exemplos

Exemplo 6.1

Um banco financia a venda de equipamentos em um prazo de 2 anos com taxa de 3% at. Determine o valor das prestações trimestrais de um equipamento cujo preço à vista é R$ 20.000,00.

Exemplo 6.2

O preço à vista de um produto é R$ 11.400,00. Uma loja o está anunciando por R$ 1.400,00 de entrada e mais 4 prestações mensais de R$ 2.580,00. Determinar a taxa de juros mensal cobrada pela parte financiada.

Exemplo 6.3

Um financiamento de R$ 1.000,00 deve ser amortizado em 5 prestações mensais iguais. Sabendo-se que a taxa de juros é 1% am, determinar o valor das prestações nas seguintes hipóteses :

a) Pagamento da 1ª prestação 1 mês após a liberação dos recursos.

b) Pagamento da 1ª prestação no ato da liberação dos recursos.

Exemplo 6.4

Em certa loja de eletrodomésticos, as vendas de dezembro podem ser quitadas com o 1º pagamento em abril. A taxa de juros cobrada é de 1,5% am. Um cliente realizou em dezembro compras no valor de R$ 1.000,00 e pagou em 4 prestações mensais iguais. Determinar o valor das prestações nas seguintes hipóteses :

a) Pagamento da 1ª prestação em janeiro.

b) Pagamento da 1ª prestação em abril.

Exemplo 6.5

Uma instituição financeira remunera seus depósitos a 1,5% am. Um investidor efetua 6 depósitos mensais iguais a R$ 800,00, ocorrendo o 1º depósito no final de janeiro e o último no final de junho. determinar os saldos acumulados nas seguintes datas do mesmo ano :

a) Final de junho, após o depósito do mês.

b) Final de setembro.

Exemplo 6.6

Um banco remunera seus depósitos a 1% am. Um investidor efetua 6 depósitos mensais e iguais sendo o 1º no final de janeiro e o último no final de junho. Determinar o valor dos depósitos que produzem R$ 5.000,00 no final de dezembro.

6.4 Série Perpétua

Existem situações em que o número de capitais de uma série uniforme tende a infinito, constituindo o que chamamos de SÉRIE PERPÉTUA.

Para obtermos o valor presente de uma série perpétua basta fazermos $n \to \infty$ nas fórmulas que fornecem o valor presente das séries uniformes.

Assim, para uma **série postecipada**

$$VP = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}$$

Se a série for **antecipada**

$$VP = \lim_{n\to\infty} R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\frac{1+i}{i}$$

Exemplo 6.7

As ações preferenciais de uma determinada empresa pagam dividendos anuais de R$ 5,00 por ação. Determinar o valor da ação preferencial desta empresa sabendo que a taxa de juros utilizada no mercado é de 8% aa.

6.5 Exercícios

6.1) Um empréstimo de R$ 20.000,00 deve ser pago em 12 prestações mensais iguais. Determinar o valor das prestações se a taxa de juros cobrada é 12% aa, capitalizados mensalmente, e a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.

6.2) Um capital de R$ 10.000,00 deve ser pago em 4 prestações semestrais iguais. Calcular o valor das prestações para uma taxa de 1,5% am.

6.3) (MDIC 2002/ESAF) Um contrato prevê que aplicações iguais sejam feitas mensalmente em uma conta durante 12 meses com o objetivo de atingir o montante de R$ 100.000,00 ao fim deste prazo. Quanto deve ser aplicado ao fim de cada mês, considerando rendimentos de juros compostos de 2% ao mês ?

6.4) (CVM 2003/FCC) Depositando R$ 20.000,00 no início de cada ano, durante 10 anos, à taxa de juros compostos de 10% ao ano, obtém-se, na data do último depósito, um montante igual ao gerado por uma aplicação única feita no início do primeiro ano à taxa de juros compostos de 25% ao ano, durante doze meses. Determine o valor da aplicação de valor único ?

6.5) Um equipamento de R$ 25.000,00 será financiado em 12 prestações mensais iguais com taxa de juros de 12% aa, capitalizados mensalmente. Determinar o valor que deve ser dado de entrada para que as prestações fiquem limitadas a R$ 1.700,00, supondo que a 1ª ocorra 30 dias após a liberação dos recursos.

6.6) Um cliente de uma agência de automóveis comprou um veículo financiado em 24 prestações de R$ 1.500,00 com taxa de 1% am. No final de 1 ano esse cliente procurou a agência para vender o veículo, e a agência ofereceu R$ 30.000,00 para pagamento à vista. Calcule quanto deve ser pago ao cliente para que a agência readquira esse veículo assumindo o restante do financiamento com a mesma taxa de 1% am.

6.7) Um tapete persa é vendido por R$ 15.000,00 à vista. Pode ser adquirido também em prestações mensais de R$ 885,71 a juros de 3% ao mês. Sabendo que as prestações vencem a partir do mês seguinte ao da compra, qual é o número de prestações ?

6.8) Um financiamento de R$ 10.000,00 será pago em 10 prestações mensais iguais com taxa de 1,2% am. Determine o valor das prestações nas seguintes hipóteses :

a) Pagamento da 1ª prestação 30 dias após a liberação dos recursos.

b) Pagamento da 1ª prestação no ato da a liberação dos recursos.

c) Pagamento da 1ª prestação 120 dias após a liberação dos recursos.

6.9) Um financiamento de R$ 10.000,00 será pago em 12 prestações mensais e iguais a R$ 900,00. Calcular a taxa de juros desse financiamento nas seguintes hipóteses :

a) A 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação do principal.

b) A 1ª prestação ocorre na mesma data da liberação do principal.

6.10) Um empréstimo de R$ 100.000,00 deve ser pago em 10 anos com os 2 primeiros anos de carência. Sabendo que a taxa de juros é 10% aa, calcule o valor das 8 prestações anuais e iguais que deverão ser pagas a partir do início do 4º ano, nas seguintes hipóteses :

a) Os juros dos 2 primeiros anos são pagos no final de cada ano.

b) Os juros dos 2 primeiros anos não são pagos mas sim capitalizados.

6.11) Um investidor efetuou 10 depósitos mensais de R$ 2.000,00 em um banco e retirou imediatamente após a efetivação do último depósito R$ 21.000,00. Calcule a taxa de remuneração desses depósitos.

6.12) (Técnico da RF 2006/ESAF) Desejo trocar uma anuidade de 8 pagamentos mensais de R$ 1.000,00 vencendo o primeiro pagamento ao fim de um mês por outra anuidade equivalente de 16 pagamentos vencendo o primeiro pagamento também ao fim de um mês. Calcule o valor do pagamento mensal da segunda anuidade considerando a taxa de juros compostos de 3% ao mês.

6.13) Uma empresa pegou um empréstimo de R$ 100.000,00 para ser pago em 25 prestações mensais iguais, com juros de 3% am. Após o pagamento da 8ª prestação a empresa renegociou o prazo do empréstimo de forma a liquidá-lo em 30 prestações mensais adicionais iguais. Determinar o valor das novas prestações, mantendo-se a taxa de 3% am.

6.14) Um aplicador efetuou 6 depósitos trimestrais de R$ 5.000,00 em uma caderneta de poupança que oferece uma taxa de 12% aa capitalizados trimestralmente. O 1º depósito é feito no ato da decisão do aplicador e os outros 5 no final de cada um dos próximos trimestres. Determine o saldo acumulado, nas seguintes ocasiões :

a) Imediatamente após o último depósito.

b) No final do 2º trimestre após o último depósito.

6.15) (ATE-MS 2001/ESAF) A quantia de R$ 1.000,00 é aplicada mensalmente durante 6 meses; a quantia de R$ 2.000,00 é aplicada mensalmente durante os 6 meses seguintes e, finalmente, a quantia de R$ 3.000,00 é aplicada mensalmente durante mais 6 meses. Qual o montante das aplicações ao final dos 18 meses de prazo, considerando que as aplicações foram sempre realizadas ao fim de cada mês, rendendo juros compostos de 4% ao mês ?

6.16) Uma caderneta de poupança que remunera seus depósitos com taxa de 15% aa capitalizados trimestralmente, recebeu de um cliente 6 depósitos trimestrais de mesmo valor.

Determinar o valor desses depósitos sabendo que o cliente retirou a quantia de R$ 20.000,00 no final do 4º trimestre após o último depósito.

6.17) Em um determinado ano, um empresário efetuou 4 depósitos mensais iguais em um banco que paga taxa de 1,2% am. No final de dezembro deste ano o total acumulado por esse empresário foi R$ 100.000,00. Determine o valor dos depósitos nas seguintes hipóteses :

a) O 1º depósito ocorre no final de janeiro.

b) O 1º depósito ocorre no final de abril.

6.18) (STN 2005/ESAF) No dia 10 de setembro, Ana adquiriu um imóvel financiado em 10 parcelas mensais e iguais a R$ 20.000,00. A primeira parcela vence no dia 10 de novembro do mesmo ano e as demais no dia 10 dos meses subsequentes. A taxa de juros compostos contratada foi de 60,1032% ao ano. Qual o valor financiado no dia 10 de setembro ?

6.19) (Prefeitura Municipal de Fortaleza 2003/ESAF) Um financiamento no valor de R$ 10.000,00 é obtido a uma taxa nominal de 24% ao ano para ser amortizado em 12 prestações semestrais iguais vencendo a primeira prestação 6 meses após o fim de um período de carência de 2 anos de duração, no qual os juros semestrais devidos não são pagos, mas se acumulam ao saldo devedor. Calcule a prestação semestral do financiamento.

6.20) Suponha que no problema 6.12 os depósitos tenham sido efetuados em meses alternados. Assim, se 1º depósito ocorreu no final de janeiro, os outros ocorreram no final de março, maio e julho.

6.21) Um financiamento de R$ 100.000,00 deve ser pago em 24 parcelas mensais e iguais, a partir de 30 dias da liberação do dinheiro. Sabendo que a taxa efetiva desse financiamento é 1% am, calcule :

a) O valor das parcelas mensais.

b) O valor dos juros e da amortização do principal contidos na 1ª parcela.

c) O valor dos juros e da amortização do principal contidos na 20ª parcela.

d) O saldo devedor imediatamento após pagamento da 12ª parcela.

6.22) Um banco de investimentos realiza suas operações de financiamento com uma taxa efetiva de 15% aa, cobrada em 2 parcelas :

(1) Uma parcela antecipada cobrada no ato da liberação dos recursos.

(2) Uma parcela de 10% aa cobrada ao longo do contrato.

Determine o percentual que deve ser cobrado antecipadamente nos seguintes casos :

a) Liquidação do financiamento com um único pagamento no final de um ano.

b) Liquidação do financiamento em 4 pagamentos trimestrais de mesmo valor, ocorrendo o 1º pagamento 90 dias após a liberação dos recursos.

6.23) Uma loja financia suas vendas em 4 vezes "sem juros", mediante pagamentos mensais e iguais, a partir do 30º dia da data da venda. Determinar o percentual de acréscimo que essa loja deve aplicar em seus preços à vista para que possa obter um taxa efetiva de 1,5% am em seus financiamentos.

6.24) Uma instituição financeira que opera com taxa de 1% am, oferece a seus clientes os seguintes planos de financiamento :

a) Plano Mensal : 12 prestações mensais iguais, ocorrendo a 1ª prestação 30 dias após a data da operação.

b) Plano Trimestral : 4 prestações trimestrais iguais, ocorrendo a 1ª prestação 90 dias após a data da operação.

Um cliente deseja pegar R$ 100.000,00 para ser pago parte pelo plano mensal e parte pelo plano trimestral. Determinar a parte de cada plano de modo que a parcela trimestral seja o dobro da mensal.

6.25) Um autor de um livro tem um contrato de edição, em caráter perpétuo, com uma editora que paga 10% do preço de cada livro vendido. O volume de vendas do livro é de 3.000 exemplares por ano e o preço é R$ 50,00 cada. Determine oa valor presente desse contrato, considerando uma taxa de 10% aa.

6.26) (AFRM - Pref. de Angra dos Reis 2010/FGV) Um indivíduo recebeu como herança um título perpétuo que paga R$ 2.000,00 por trimestre. Esse indivíduo quer vender o título. Sabendo que a taxa de juros semestral, juros compostos, é de 44%, qual o valor presente de venda desse título ?

Respostas

6.1) R$ 1.776,98

6.2) R$ 3.110,05

6.3) R$ 7.455,96

6.4) R$ 254.998,79

6.5) R$ 5.866,37

6.6) R$ 13.117,38

6.7) 24

6.8) (a) R$ 1.067,18 ; (b) R$ 1.054,53 ; (c) R$ 1.106,06

6.9) (a) 1,2043% ; (b) 1,4313%

6.10) (a) R$ 18.744,40 ; (b) R$ 22.680,73

6.11) 1,0794% am

6.12) R$ 558,84

6.13) R$ 3.857,58

6.14) (a) R$ 32.342,05 ; (b) R$ 34.311,68

6.15) R$ 47.304,19

6.16) R$ 2.618,77

6.17) (a) R$ 22.319,61 ; (b) R$ 23.132,79

6.18) R$ 155.978,76

6.19) R$ 2540,24

6.20) (a) R$ 22.716,50 ; (b) R$ 23.544,15

6.21) (a) R$ 4.707,35 ; (b) J=R$ 1.000,00 A=R$ 3.707,35 ;
(c) J=R$ 228,47 A=R$ 4.478,88 ; (d) R$ 52.981,59

6.22) (a) 4,3478% ; (b) 2,7003%

6.23) 3,7779%

6.24) P_m =R$ 60.239,35 ; P_t =R$ 39.760,65

6.25) R$ 150.000,00

6.26) R$ 10.000,00

Capítulo 7

Valor Presente Líquido e Taxa Interna de Retorno

7.1 Valor Presente Líquido

O VALOR PRESENTE LÍQUIDO (VPL) de um fluxo de caixa é dado pela soma do valores presentes (na data zero) dos capitais do fluxo, sendo os capitais correspondentes a saídas de dinheiro contados com valores negativos e os capitais correspondentes a entradas de dinheiro contados com valores positivos.

É claro que o VPL de um fluxo de caixa depende da taxa de juros considerada e sua importância se deve à possibilidade de podermos analisar a viabilidade de um determinado fluxo de caixa (fixada uma taxa de juros i):

Se VPL(i) > 0 então o fluxo de caixa é VIÁVEL (representa um "bom negócio") considerando-se a taxa i.

Se VPL(i) < 0 então o fluxo de caixa é INVIÁVEL (representa um "mau negócio") considerando-se a taxa i.

Exemplo 7.1

Determinar o VPL do fluxo de caixa abaixo com taxa de 8% aa.

data	valor
0	-100
2	+121

7.2 Taxa Interna de Retorno

A TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR) de um fluxo de caixa é a taxa de juros que faz com que o valor presente líquido seja igual a zero.

Obs.: Se o valor presente líquido é igual a zero, então o valor líquido em qualquer data é também igual a zero. Por este motivo pode-se usar qualquer data para obtenção da TIR.

Exemplo 7.2

Calcular o VPL do fluxo de caixa do Exemplo 7.1 com taxa de 12% aa e a TIR.

Exemplo 7.3

Suponha que um projeto de investimento apresente o fluxo de caixa a seguir. Calcule a TIR do projeto e analise sua viabilidade se:

a) A taxa de juros i do mercado satisfaz $i >$ TIR.

b) A taxa de juros i do mercado satisfaz $i <$ TIR.

data	valor
0	-1.000,00
1	1.100,00

Exemplo 7.4

O estudo de viabilidade econômica de um projeto resultou no fluxo de caixa abaixo. Determine a TIR desse fluxo de caixa.

data	valor
0	-11500
1	2350
2	1390
3	3350
4	4275
5	5350

7.3 Exercícios

7.1) Determinar o valor presente de cada um dos fluxos de caixa abaixo, para uma taxa de 1% am.

a)

data	valor
0	-
1	-1.000,00
2	-1.000,00
3	-1.000,00
4	-1.000,00
5	-1.000,00
6	-1.000,00
7	-2.000,00
8	-2.000,00
9	-2.000,00
10	-2.000,00

b)

data	valor
0	-
1	-100,00
2	-100,00
3	-100,00
4	-100,00
5	-100,00
6	-
7	-100,00
8	-100,00
9	-100,00
10	-100,00

c)

data	valor
0	-
1	-
2	-2.000,00
3	-2.000,00
4	-2.000,00
5	-2.000,00
6	-1.000,00
7	-1.000,00
8	-1.000,00
9	-1.000,00
10	-1.000,00

d)

data	valor
0	-
1	-
2	-50,00
3	-
4	-50,00
5	-
6	-50,00
7	-
8	-50,00
9	-
10	-50,00

e)

data	valor
0	-
1	-
2	-
3	-50,00
4	-50,00
5	-50,00
6	-50,00
7	-50,00
8	-50,00
9	-50,00
10	-100,00

7.2) Para cada um dos investimentos representados pelos fluxos de caixa a seguir, determinar o valor presente líquido com taxa de 1% am e a taxa interna de retorno.

a)

data	valor
0	-4.000,00
1	500,00
2	500,00
3	500,00
4	500,00
5	500,00
6	500,00
7	500,00
8	1.000,00

b)

data	valor
0	-4.500,00
1	800,00
2	800,00
3	800,00
4	-
5	800,00
6	800,00
7	800,00
8	800,00

7.3) Determine o valor presente líquido com taxa de 2% am e a taxa interna de retorno do projeto de investimento representado pelo fluxo de caixa abaixo.

data	valor
0	-14.000,00
1	5.250,00
2	4.350,00
3	3.000,00
4	2.850,00

7.4) A tabela abaixo mostra os valores presente líquidos do fluxo de caixa de um investimento em função de diversas taxa de desconto :

taxa mensal	VPL
0,0%	255,00
0,5%	127,18
0,8%	51,71
1,0%	0,00
1,2%	-47,54
1,5%	-120,94
2,0%	-241,38

Pergunta-se, com base na tabela :

a) Qual a TIR desse investimento ?

b) Você desaplicaria seus recursos que estão rendendo 1,5% am para realizar esse investimento ?

7.5) (BB - ESCRITURÁRIO FCC 2006) Considere o seguinte fluxo de caixa cuja taxa interna de retorno é igual a 10% ao ano:

data (ano)	Fluxo de Caixa R$
0	-25.000,00
1	0
2	X
3	17.303,00

Qual o valor de X ?

7.6) (CVM 2003/FCC) O esquema abaixo representa o fluxo de caixa de um investimento no período de 3 anos, valores em reais:

data (ano)	valor
0	-D
1	0
2	9.075,00
3	10.648,00

Sabendo-se que a Taxa Interna de Retorno (TIR) é de 10% ao ano, determine o valor do desembolso inicial D.

7.7) (BB 2006/FCC) Uma empresa deverá escolher entre dois projetos X e Y, mutuamente excludentes, que apresentam os seguintes fluxos de caixa:

Ano	Projeto X (R$)	Projeto Y (R$)
0	-D	-40.000,00
1	10.800,00	16.200,00
2	11.664,00	17.496,00

A taxa mínima de atratividade é de 8% ao ano e verifica-se que os valores atuais líquidos referentes aos dois projetos são iguais. Qual o desembolso D referente ao Projeto X?

7.8) Com relação ao exercício anterior (acima), considere a seguinte tabela:

Ano	Projeto X (R$)	Projeto Y (R$)
0	-17.000,00	-27.000,00
1	10.800,00	16.200,00
2	11.664,00	17.496,00

(a) Se a taxa de mercado é de 8% ao ano, os projetos são viáveis ou inviáveis ? (justifique)

(b) Calcule a TIR de cada um dos projetos acima.

(c) Sem fazer nenhuma conta, responda (justificando) qual projeto deve ser escolhido se a taxa de mercado é de 17% ao ano.

7.9) Considere um investimento representado pelo Fluxo de Caixa abaixo:

data (mês)	valor
0	-37.000,00
1	5.000,00
2	5.000,00
3	5.000,00
4	5.000,00
5	8.000,00
6	8.000,00
7	8.000,00

(a) Obtenha o Valor Presente Líquido (VPL) do fluxo de caixa para cada uma das seguintes taxas: (i) 3% am. (ii) 6% am. (Mostre as contas).

(b) Responda (e justifique) se o investimento é vantajoso considerando as seguintes taxas de mercado: (i) 4% am. (ii) 6% am.

(c) **Calculando o VPL para algumas taxas** (faça uma tabela), obtenha uma ESTIMATIVA da Taxa Interna de Retorno (TIR) do investimento.

7.10) Considere um financiamento representado pelo Fluxo de Caixa abaixo:

data (mês)	valor
0	51.250,00
1	-8.000,00
2	-8.000,00
3	-
4	-11.000,00
5	-11.000,00
6	-11.000,00
7	-11.000,00

(a) Obtenha o Valor Presente Líquido (VPL) do fluxo de caixa para cada uma das seguintes taxas: (i) 3% am. (ii) 5% am. (Mostre as contas).

(b) Responda (e justifique) se o financiamento é vantajoso considerando as seguintes taxas de mercado: (i) 4% am. (ii) 5% am.

(c) **Calculando o VPL para algumas taxas** (faça uma tabela), obtenha uma ESTIMATIVA da Taxa Interna de Retorno (TIR) do financiamento.

Respostas

7.1a) VP=R$ 13.147,14

7.1b) VP=R$ 852,93

7.1c) VP=R$ 12.344,54

7.1d) VP=R$ 235,60

7.1e) VP=R$ 420,31

7.2a) VPL= + R$ 287,58 ; TIR=2,4754% am

7.2b) VPL= + R$ 852,56 ; TIR=5,0676% am

7.3) VPL= + R$ 788,07 ; TIR=4,5899% am

7.4) (a) TIR=1% ; (b) Não !

7.5) X=R$ 14.520,00

7.6) D=R$ 15.500,00

7.7) D=R$ 30.000,00

7.8) (a) São viáveis, pois VPL(8%)= + R$ 3.000,00
(b) TIR(X)= 20,4787% ; TIR(Y) = 15,9069%
(c) Projeto X, pois $VPLX(17\%) > 0$ e $VPLY(17\%) < 0$

7.9) (a) VPL(3%) = + R$ 1.690,97 ; VPL(6%) = - R$ 2.736,27
(b) 4%: É VANTAJOSO ; 6%: NÃO É VANTAJOSO
(c) TIR = 4,0837 % a.m.

7.10) (a) VPL(3%) = - R$ 1.476,15 ; VPL(5%) = + R$ 2.680,34
(b) 4%: É VANTAJOSO ; 5%: É VANTAJOSO
(c) TIR = 3,6830 % a.m.

Capítulo 8

Planos equivalentes de financiamento

8.1 Introdução e exemplos

Relembremos, do 1^o capítulo, que dois ou mais fluxos de caixa são EQUIVALENTES, a uma determinada taxa de juros, se seus valores presentes (VP) (calculados com essa mesma taxa) forem iguais.

Diremos, então que DOIS OU MAIS PLANOS DE FINANCIAMENTO SÃO EQUIVALENTES quando **seus fluxos de caixa forem equivalentes**.

Para entendermos melhor o conceito, vamos considerar um financiamento com os seguintes parâmetros: $\text{P} = \text{R\$ } 1.000,00$; $i = 8\%$ ao ano ; $n = 4$ anos.

Apresentaremos quatro planos equivalentes para liquidar esse financiamento:

Plano A / Pagamento no final

- Pagamento de uma única parcela no final do 4^o ano
- Capitalização de juros no final de cada ano

ano	saldo no início do ano	juros	saldo no fim do ano antes do pagamento	pagamentos			saldo no fim do ano após pagamento
				juros	amortização	total	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	0,00	0,00	0,00	1.080,00
2	1.080,00	86,40	1.166,40	0,00	0,00	0,00	1.166,40
3	1.166,40	93,31	1.259,71	0,00	0,00	0,00	1.259,71
4	1.259,71	100,78	1.360,49	360,49	1.000,00	1.360,49	0,00

Exemplos : operações de capital de giro, operações de desconto de títulos, aplicações em títulos de renda fixa.

Plano B / Pagamento periódico de juros

• Os juros de cada ano são pagos no final do respectivo ano

• No final do 4º ano, além dos juros, o principal é integralmente pago

ano	saldo no inicio do ano	juros	saldo no fim do ano antes do pagamento	pagamentos			saldo no fim do ano após pagamento
				juros	amortização	total	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	0,00	80,00	1.000,00
2	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	0,00	80,00	1.000,00
3	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	0,00	80,00	1.000,00
4	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	1.000,00	1.080,00	0,00

Exemplos : Leasing, operações em títulos de renda periódica.

Plano C / Prestações iguais - Modelo Price

• O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações anuais calculadas da seguinte forma :

$$1.000,00 = R \times \frac{1-(1+0,08)^{-4}}{0,08} \Longrightarrow R = 301,92$$

• As prestações de cada ano são subdivididas em 2 parcelas : juros do ano + amortização do principal dada pela diferença entre o valor da prestação (301,92) e os juros do ano

ano	saldo no inicio do ano	juros	saldo no fim do ano antes do pagamento	pagamentos			saldo no fim do ano após pagamento
				juros	amortização	total	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	221,92	301,92	778,08
2	778,08	62,25	840,33	62,25	239,67	301,92	538,40
3	538,40	43,07	581,48	43,07	258,85	301,92	279,56
4	279,56	22,36	301,92	22,36	279,56	301,92	0,00

Exemplos : financiamento imobiliário e de crédito direto ao consumidor.

Plano D / Sistema de Amortizações Constantes (SAC)

• O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações subdivididas em 2 parcelas: amortização do principal calculada pela razão entre o principal e o prazo da operação (1.000,00/4=250,00) + juros do ano

ano	saldo no inicio do ano	juros	saldo no fim do ano antes do pagamento	pagamentos			saldo no fim do ano após pagamento
				juros	amortização	total	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	250,00	330,00	750,00
2	750,00	60,00	810,00	60,00	250,00	310,00	500,00
3	500,00	40,00	540,00	40,00	250,00	290,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	20,00	250,00	270,00	0,00

Exemplos : financiamento imobiliário e financiamento de longo prazo.

Observações:

• Os quatro planos de pagamento apresentados são absolutamente equivalentes a 8% ao ano pois todos têm o mesmo valor presente de R$1.000,00 se descontados a essa mesma taxa.

• É erro grosseiro analisar planos de financiamento pelo valor total pago:

plano	total pago
A	1.360,49
B	3x80,00+1.080,00=1.320,00
C	4x301,92=1.207,68
D	330,00+310,00+290,00+270,00=1.200,00

Aparentemente, o plano D é o melhor para quem tomar esse financiamento e o plano A é o pior.

O erro neste raciocínio é que no plano A o principal financiado só foi devolvido ao final do 4º ano, sendo portanto remunerado durante os quatro anos, juntamente com os juros que foram sendo capitalizados. Já no plano D, o principal foi sendo pago ao longo do prazo da operação e, portanto, apenas o principal remanescente (saldo) foi remunerado.

• Outra forma de analisar a situação é calcular as reaplicações a 8% ao ano dos valores que ficaram disponiveis em cada plano, antes do final do 4º ano:

Plano A : nenhum valor a reaplicar

Plano B : reaplicação de 3 parcelas de R$80,00

Plano C : reaplicação de 3 parcelas de R$301,92

Plano D : reaplicação das parcelas de R$330,00 , R$310,00 e R$290,00

As diferenças entre os totais pagos nos quatro planos são compensadas pelas receitas de reaplicações a 8% ao ano das parcelas recebidas antes do final do 4º ano:

plano	total pago	receitas de reaplicações	montante acumulado no fim do 4º ano
A	1.360,49	0,00	1.360,49
B	1.320,00	40,49	1.360,49
C	1.207,68	152,81	1.360,49
D	1.200,00	160,49	1.360,49

O valor de R$1.360,49 corresponde ao valor futuro de cada um dos quatro planos, no final do 4º ano, com taxa de 8% ao ano.

Exemplo 8.1

Um banco realiza seus financiamentos nas seguintes condições :

• prazo de 6 anos, com amortização do principal a partir do final do 3º ano

• amortização do principal pelo modelo Price ou SAC

• taxa de juros de 10% ao ano

Determinar os fluxos de caixa de uma empresa que financiou R$ 100.000,00 , nas seguintes hipóteses:

a) Pagamento de juros durante os dois anos de carência e amortização pelo modelo Price a partir do 3º ano

b) Juros capitalizados durante os dois anos de carência e amortização pelo modelo Price a partir do 3º ano

c) Pagamento de juros durante os dois anos de carência e amortização pelo SAC a partir do 3º ano

d) Juros capitalizados durante os dois anos de carência e amortização pelo SAC a partir do 3º ano

Solução

a) Juros pagos nos dois anos de carência:

$$J = 100.000,00 \times 10\% = 10.000,00$$

Prestação:

$$100.000 = R \times \frac{1-(1+0,1)^{-4}}{0,01} \implies R = 31.547,08$$

b) Saldo acumulado no final do 2º ano:

$$M = 100.000 \times (1+0,1)^2 = 121.000$$

Prestação:

$$121.000 = R \times \frac{1-(1+0,1)^{-4}}{0,01} \implies R = 38.171,97$$

c) Juros pagos nos dois anos de carência:

$$J = 100.000,00 \times 10\% = 10.000,00$$

Amortização anual:

$$A = \frac{100.000,00}{4} = 25.000,00$$

d) Saldo acumulado no final do 2º ano:

$$M = 100.000 \times (1 + 0,1)^2 = 121.000$$

Amortização anual:

$$A = \frac{121.000,00}{4} = 30.250,00$$

FLUXOS DE CAIXA:

8.2 Exercícios

8.1) Verifique se os fluxos de caixa A e B abaixo são equivalentes, a uma taxa de 1% am:

data	A	B
0	-	-
1	-	-
2	208,10	250,00
3	208,10	-
4	208,10	250,00
5	208,10	200,00
6	208,10	344,34

8.2) Calcular o valor de x para que os fluxos caixa abaixo sejam equivalentes, a uma taxa de 1,2% am:

data	A	B
0	-	-
1	500,00	-
2	500,00	400,00
3	500,00	x
4	500,00	600,00
5	500,00	600,00
6	500,00	900,00

8.3) Construa a tabela de pagamentos para um financiamento de R$ 1.000,00 em 5 anos com taxa de 10% aa, que tem as seguintes características :
a) os juros de cada ano são calculados sobre o saldo devedor do início do ano.
b) a prestação de cada ano é obtida pela divisão do saldo devedor no final do respectivo ano pelo número de prestações que ainda faltam ser pagas.

8.4) Calcule o valor das prestações de um financiamento de R$ 10.000,00 com taxa de juros de 1% am que deve ser pago no prazo de 10 meses, pelo modelo Price e pelo SAC.

8.5) Um empréstimo de R$ 100.000,00 com taxa de 10% aa deve ser pago pelo SAC em 6 anos, com o 2 primeiros anos de carência. Construa a tabela de pagamentos desse empréstimo nos seguintes casos :

a) Os juros dos 2 primeiros anos não são pagos, mas sim capitalizados.

b) Os juros dos 2 primeiros anos são pagos no final de cada ano.

8.6) Uma instituição financeira oferece a seus clientes os seguintes planos equvalentes de financiamento :

a) Plano mensal sem carência : 12 prestações mensais iguais, sendo a 1ª prestação 30 dias após a liberação dos recursos.

b) Plano mensal com carência : 9 prestações mensais iguais, sendo a 1ª prestação 120 dias após a liberação dos recursos.

c) Plano semestral : 2 prestações semestrais de mesmo valor com pagamentos no final do 6º mês e do 12º mês.

Determinar o valor das prestações desses planos para um financiamento de R$ 10.000,00 com taxa de 1% am.

8.7) Um financiamento de R$ 10.000,00 com taxa de 1,2% am deve ser pago em 2 anos. Sabendo que a 1ª prestação vence 30 dias após a liberação dos recursos, calcule :

a) O valor de cada uma das 24 prestações mensais e iguais.

b) O valor da prestação mensal se, no final de cada trimestre, for paga uma parcela adicional de R$ 1.000,00.

c) O valor dessa parcela trimestral adicional, se a prestação mensal for fixada em R$ 300,00.

8.8) Um banco financia 80% do valor à vista de qualquer equipamento e cobra juros 1% am. Um empresário deseja comprar um equipamento de R$ 25.000,00 para ser pago em 1 ano. Determinar:

a) O valor das prestações mensais, sabendo que a 1ª ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.

b) O valor da prestação mensal se forem pagas 2 parcelas adicionais de R$ 5.000,00, sendo a 1ª no final do 3º mês e a 2ª no final do 9º mês.

c) O valor da prestação mensal na hipótese das parcelas de R$ 5.000,00 incluírem as prestações do 3º mês e do 9º mês.

8.9) Um financiamento de R$ 100.000,00 deve ser pago em 12 prestações mensais iguais e mais 2 prestações semestrais adicionais. Determinar o valor dessas prestações, sabendo que:

i) A taxa de juros é 1,4% am.

ii) A 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação do capital.

iii) As parcelas semestrais ocorrem no final do semestre e têm valor igual ao dobro da parcela mensal.

8.10) Um financiamento de R$ 100.000,00 deve ser pago em 9 prestações mensais, ocorrendo a primeira 30 dias após a liberação dos recursos. As 3 primeiras prestações devem ser iguais a R$ 10.000,00 e as 3 seguintes a R$ 12.000,00. Determinar o valor das 3 últimas prestações sabendo que elas são iguais e que a taxa de juros é 1,3% am.

Respostas

8.1) $\text{VP}_A = \text{VP}_B$ = R$ 1.000,00

8.2) x = R$ 530,88

8.3)

ano	saldo no inicio do ano	juros	saldo no fim do ano antes do pagamento	pagamentos			saldo no fim do ano após pagamento
				juros	amortização	total	
1	1.000,00	100,00	1100,00	100,00	120,00	220,00	880,00
2	880,00	88,00	968,00	88,00	154,00	242,00	726,00
3	726,00	72,60	798,60	72,60	193,60	266,20	532,40
4	532,40	53,24	585,64	53,24	239,58	292,82	292,82
5	292,82	29,28	322,10	29,28	292,82	322,10	0,00

8.4)

Modelo Price : P = R$ 1055,82

Modelo SAC : P1 = R$ 1.100,00, P2 = R$ 1.090,00, P3 = R$ 1.080,00, P4 = R$ 1.070,00,

P5 = R$ 1.060,00, P6 = R$ 1.050,00, P7 = R$ 1.040,00, P8 = R$ 1.030,00,

P9 = R$ 1.020,00, P10= R$ 1.010,00.

8.5) (a) P1 = 0 ; P2 = 0 ; P3 = R$ 43.250,00 ; P4= R$ 39.325,00
P5 = R$ 36.300,00 ; P6 = R$ 33.275,00 ;

(b) É a letra (c) do Exemplo 8.1

8.6) (a) P = R$ 888,49 (b) P = R$ 1.202,78 (c) P = R$ 5.465,85

8.7) (a) P = R$ 482,02 (b) P = R$ 152,65 (c) P_T = R$ 552,64

8.8) (a) P = R$ 1.776,98 (b) P = R$ 939,61 (c) P = R$ 1.128,62

8.9) 12 prestações mensais de R$ 6.892,57 e 2 semestrais de R$ 13.785,14

8.10) R$ 13.679,94

Capítulo 9

Inflação

9.1 Conceitos básicos

INFLAÇÃO é o aumento generalizado dos preços de bens e serviços.

CORREÇÃO MONETÁRIA é o reajuste dos capitais envolvidos em operações financeiras com o objetivo de anular ou, pelo menos atenuar, os efeitos da inflação.

Na prática, a taxa de juros efetiva utilizada nos cálculos financeiros inclui os efeitos inflacionários durante o prazo das operações financeiras. Por exemplo, uma parcela da taxa de juros da poupança se refere à inflação do período.

Se tirarmos os efeitos da inflação da taxa de juros efetiva obtemos a TAXA DE JUROS REAL da operação.

O objetivo deste capítulo é mostrar como incluir (em uma taxa real) ou excluir (de uma taxa efetiva) os efeitos da inflação.

Taxa de Juros Real

Se em um determinado período de tempo a taxa de inflação for I, um capital P corrigido por essa taxa será

$$M_1 = P(1 + I)$$

Se neste mesmo período aplicarmos a taxa de juros real r ao capital corrigido obtemos

$$M_2 = M_1(1 + r) = P(1 + I)(1 + r)$$

A taxa de juros efetiva i é a taxa que aplicada ao capital inicial P produz o mesmo efeito conjunto das taxas real r e de inflação I.

Assim, temos

$$P(1+i) = P(1+I)(1+r)$$

ou

$$\boxed{1+i = (1+I)(1+r)}$$

9.2 Exemplos

Exemplo 9.1

Uma loja constatou que uma determinada mercadoria estava a 6 meses em estoque. Sabendo que a inflação do período foi de 5% e que a margem de lucro da loja é de 10%, calcule o novo preço da mercadoria se o preço antigo é R$ 100,00.

Exemplo 9.2

Uma loja vende certo produto por R$ 120,00 à vista. A direção da loja decide vender este produto em 6 prestações mensais iguais. A taxa de inflação está estimada em 6% am. Qual o valor de cada prestação se a direção pretende um ganho real de 4% am.

Exemplo 9.3

Uma loja cobra juros de 18% ao trimestre. Em um certo trimestre a inflação chegou a 12%. Qual o ganho real da loja ?

Exemplo 9.4

No último mês uma carteira de investimentos apresentou um rendimento total de 1,89%. Se a inflação foi 2,2%, qual a taxa real no mês ?

9.3 Exercícios

9.1) A inflação em um certo mês foi 1,73% e, no mesmo período, a caderneta de poupança rendeu 2,10%. Calcule a taxa real.

9.2) Um aplicador exigiu de um banco uma taxa real de 0,8% am. Se a inflação está estimada em 1,75% am, calcule a taxa de juros efetiva.

9.3) Uma aplicação rendeu 2,44% em um certo mês. Um aplicador percebeu que a taxa real desta aplicação foi 1%. Calcule a taxa de inflação neste mês.

9.4) João tinha R$ 1.000,00 para comprar uma geladeira, mas preferiu aplicar o dinheiro a prazo fixo que, ao fim de 2 meses, permitiu que João resgatasse R$ 1.018,97. Ao voltar à loja, João constatou que o novo preço da geladeira era R$ 1.017,45. Calcule a inflação do período e a taxa real da aplicação.

9.5) 4 meses atrás, um equipamento custava R$ 5.000,00. Ao invés de comprá-lo, você decidiu aplicar esse dinheiro. Hoje o equipamento (reajustado pela inflação) custa R$ 6.000,00 e você pode resgatar R$ 5.600,00 da sua aplicação. Obtenha a taxa MENSAL de inflação e a taxa REAL da aplicação financeira DE TODO O PERÍODO.

Respostas

9.1) 0,3637%

9.2) 2,5640%

9.3) 1,4257%

9.4) I=1,745% ; r=0,1494%

9.5) I=4,6635% a.m. ; r=-6,6667%

Referências

[1] Puccini, Abelardo de Lima, *Matemática Financeira (Objetiva e Aplicada)*, Editora Saraiva

[2] Puccini, Abelardo de Lima & Puccini, Adriana, *Matemática Financeira (Edição Compacta)*, Editora Saraiva

[3] Morgado, Augusto Cesar & Outros, *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA (Projeto Vitae)

[4] Belo, Haroldo da C., *Matemática Financeira - Módulo 1*, Vol. 1, 2a. Ed., Apostila CEDERJ

[5] Puccini, Ernesto C., *Matemática Financeira*, Apostila UAB, 2007