



QUESTION 1 : (15 Points)

A/ On considère g , une fonction de variable x . Soit l'équation différentielle (E) : $\cos^2 x f''(x) + 2 \cos x \sin x f'(x) + 2 f(x) = x \cos^3 x$. On pose $f(x) = g(x) \cos x$.

1. Montrer que (E) est équivalente à (E') : $g''(x) + g(x) = x$.

2. En déduire $f(x)$ sachant que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

B/ On considère l'équation différentielle (F) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1. Montrer que la fonction h , définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$, est une solution de (F).

2. On pose $y = z + h$.

a) Montrer que y est solution de (F) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $z' - 2z = 0$, puis en déduire les solutions de (F).

c) Montrer qu'il existe une solution unique g de (F) qui s'annule en 0.

3. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

a) Étudier la variation de g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

b) i) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $1 - g(x) \geq 0$.

ii) Calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$.

iii) Donner une interprétation graphique des résultats obtenus en b) i) et ii).

QUESTION 2 : (15 Points)

A/ On définit pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale : $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2 - x)^n e^x dx$.

1. Calculer I_1 . Établir que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = \frac{2^n}{n!}$.

a) Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$: $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$: $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

4. En déduire la limite de la suite (U_n) , puis celle de la suite (I_n) .

B/ Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$.

a) Posons $z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$.



Donner une expression simple de la somme $1 + z + \dots + z^{n-1}$.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme.

En déduire l'égalité $S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

b) Quelle est la limite de la suite : $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$?

QUESTION 3 : (13 Points)

A/ La plan ($\mathcal{P}$) d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à une sphère (Γ) de centre $\Omega(1, -1, 3)$.

1. Déterminer le rayon de la sphère (Γ).
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan ($\mathcal{P}$).
3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère (Γ) et du plan ($\mathcal{P}$).

B/ Soit un cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre $[OB]$. A est un point de $[OB]$ différent de O et de B, I est le milieu de $[AB]$. La médiatrice de $[AB]$ coupe ($\mathcal{C}$) en M et M' avec $\left(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}$. N est le projeté orthogonal de A sur (OM).

1. Caractériser la nature du quadrilatère AMBM'.
2. Montrer que (AM') est perpendiculaire à (OM).
3. Montrer que N, A et M' sont alignés.
4. S est la similitude de centre N qui transforme M en A. Quelle est l'image de M' par S ?
5. Quelle est l'image de I par S ?
6. Quelle est la position de la droite (NI) par rapport au cercle de diamètre $[OA]$?

QUESTION 4 : (07 Points)

Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble ($\mathcal{C}$) des points M de ($\mathcal{P}$) d'affixe z vérifiant :
 $\left| (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i \right| = 4$.
2. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformation le point A d'affixe i en O et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $(-4i)$. Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.
3. En utilisant les résultats établis au 2., retrouver l'ensemble ($\mathcal{C}$) décrit au 1..