



CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE DE L'ENSP DE YAOUNDÉ
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES N° 2 Session 2019

Le candidat traitera toutes les questions sans exception aucune.

Exercice 1 [3,75 points]

Soit une variable aléatoire X d'univers image $X(\Omega) = \{1, -1, 2\}$ avec les probabilités $P(X = 1) = e^a$, $P(X = -1) = e^b$ et $P(X = 2) = e^c$ où a , b et c sont en progression arithmétique. On suppose que l'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à 1.

1. On suppose que la raison de la suite est r .
 - a) Déterminer les valeurs exactes des réels a , b et c . 1,5 pt
 - b) Montrer que la variance $V(X)$ de X est égale à $\frac{12}{7}$. 0,5 pt
2. Soient A , B et C trois points d'une droite graduée $(\mathcal{D})$ d'abscisses respectives 1, -1 et 2.
 - a) Calculer l'abscisse du point $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, 4)\}$. Que constate-t-on ? 0,5 pt
 - b) On pose $\varphi(M) = \frac{1}{7} (MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$ où M est un point de la droite $(\mathcal{D})$.
Montrer que $\varphi(G) = V(X)$. 0,5 pt
 - c) Déterminer l'ensemble des points M de $(\mathcal{D})$ tels que $\varphi(M) = 3$. 0,75 pt

Exercice 2 [4 points]

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_n d'affixes $Z_n = \left(\frac{1}{2}i\right)^n (1 + i\sqrt{3})$ où $n \in \mathbb{N}$. Unité graphique 4 cm.

1. Exprimer Z_{n+1} en fonction de Z_n . 0,25 pt
2. Placer les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. 1 pt
3. Déterminer la distance OM_n en fonction de n . 0,25 pt
4. On donne la suite $(\mathcal{L}_n)$ de terme général $\mathcal{L}_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$.
 - a) Montrer que $M_n M_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 0,5 pt
 - b) Étudier la convergence de la suite $(\mathcal{L}_n)$. 1 pt

Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_n})}$ en fonction de n et déterminer les valeurs de n pour lesquelles les points O , M_0 et M_n sont alignés. 1 pt

Exercice 3 [2,25 points]

Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine euclidien et $\mathfrak{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. On considère dans $\mathfrak{R}$ les points $A(3, -2, 2)$, $B(6, 1, 5)$, $C(6, -2, -1)$, $I(1, -2, 0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

1. a) Donner une équation cartésienne du plan (ABC) . 0,5 pt
b) Déduire la distance d du point I au plan (ABC) . 0,25 pt
2. a) Déterminer la position relative du plan (ABC) et de la sphère (S) . 0,75 pt
b) Déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection $(\mathcal{C}) = (ABC) \cap (S)$. 0,75 pt



Problème [10 points]

Ce problème comporte deux parties obligatoires A et B.

Partie A [4,25 points]

ABC est un triangle isocèle en A de sens direct et ACD un triangle rectangle isocèle en C de sens direct tels que : $AB = AC = CD$, $\text{mes}(\widehat{AB, AC}) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{mes}(\widehat{CD, CA}) = \frac{\pi}{2}$. Soient r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et $r_C = r\left(C, -\frac{\pi}{2}\right)$. On pose $f = r_C \circ r_A$.

1. Construire la figure que l'on complètera au fur et à mesure. 0,25 pt
2. a) Déterminer les images par f de A et B. 0,5 pt
 b) Déterminer la nature de f et préciser son centre Ω et son angle α . 0,75 pt
 c) Dédire la nature exacte du quadrilatère $AB\Omega C$. 0,5 pt
3. Soit S la similitude directe de centre Ω , qui transforme A en B. On note $C' = S(C)$ et $H' = S(H)$ où H est le milieu de [BC].
 a) Déterminer l'angle de S et montrer que C' appartient à la droite (ΩA) . 0,75 pt
 b) Montrer que H' est le milieu de $[\Omega B]$ et que $(C'H')$ est perpendiculaire à (ΩB) . 1 pt
 c) Dédire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩBC . 0,5 pt

Partie B [5,75 points]

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de sens direct de centre O et de côté $AB = 6$ et I le milieu du segment [AB]. M et N sont respectivement des points des segments [AD] et [DC] tels que $AM = DN$, $M \neq A$ et $M \neq D$.

1. Soit r la rotation qui transforme A en D et M en N. Déterminer la mesure principale de l'angle de la rotation r. 0,25 pt
2. a) Montrer que $OM^2 = 18 - 6AM + AM^2 = ON^2$. 1 pt
 b) Dédire que O est le centre de la rotation r. 0,5 pt
3. On pose pour toute la suite $AM = x$ et on appelle G le barycentre du système $A(7-x)$, B(1) et D(x).
 a) Soit k le réel tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{DM}$. Déterminer k en fonction de x et déduire que M est le barycentre des points A(6-x) et D(x). 0,75 pt
 b) Vérifier que $(7-x)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + x\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (6-x)\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GD}$ et en déduire que G est le barycentre des points M et I affecté des coefficients que l'on déterminera. 0,5 pt
 c) Soit G' , l'image de G par r et J le milieu de [AD]. Justifier que $\overrightarrow{G'J} = \frac{3}{4}\overrightarrow{NJ}$. 0,5 pt
4. a) Exprimer les aires de IAM et de MDN en fonction de x. 0,5 pt
 b) Montrer que l'aire $\mathcal{A}_1$ du trapèze BCNI en unité d'aire est $\mathcal{A}_1 = 27 - 3x$. 0,25 pt
 c) Dédire que l'aire du triangle IMN en unité d'aire est $\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$. 0,25 pt
5. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale. 1,25 pt