



Exercice 1 / 4 points)

1) On considère a et b deux réels, avec a non nul.

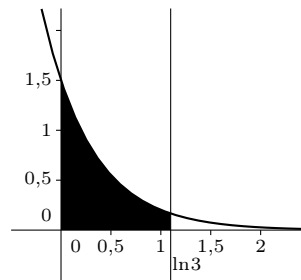
Démontrer que les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel, sont des solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ (E). (on admettra par la suite que ce sont les seules) **1 pt**

2) Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

a) **Affirmation 1** : si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. **1 pt**

b) **Affirmation 2** : si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = y$, alors pour tous réels α et β , $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \times f(\beta)$. **1 pt**

c) **Affirmation 3** : la courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$. (voir figure ci-contre)
L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln(3)$, est $\frac{2}{3}$. **1 pt**



Exercice 2 / 5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

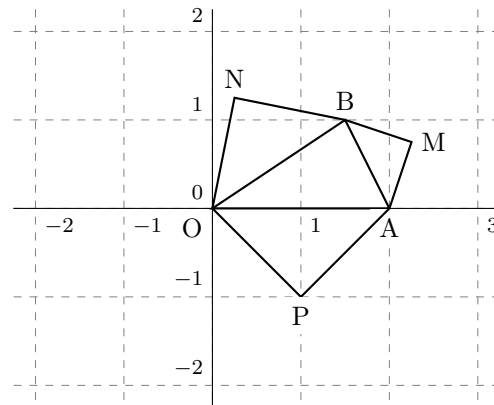
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M , N et P tels que les triangles AMB , BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B .

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N .

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.



1) Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 . **2 pts**

2) a) En utilisant les résultats de la question 1), donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . **1 pt**

b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N . **1 pt**

c) Donner, par lecture graphique, l'axe z_P du point P , puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. **1 pt**

PROBLÈME / 11 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A. Étude de la fonction f et construction de la courbe (C) .

1) Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$). **0,5 pt**

- 2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ . **0,75 pt**
- 3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f . **0,5 pt**
 b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant les limites de la fonction f' en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,75 pt**
 c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x . **0,75 pt**
 d) Dresser le tableau de variation de la fonction f . **0,75 pt**
- 4) Soit I l'intervalle $[1,9; 2]$.
 Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α . **0,75 pt**
- 5) Tracer la droite Δ et la courbe (C) (unité graphique : 2 cm). **1 pt**

B. Recherche d'une approximation de α .

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

- 1) Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. **0,5 pt**
- 2) Étudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I . **1,5 pt**
- 3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$. **0,75 pt**
- 4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$. On déduit de la question **B. 2)** que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I . On ne demande pas de le démontrer.
- a) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$. **0,75 pt**
- b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$,
 $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}$. **1 pt**
- c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite. **0,75 pt**

